

Частина І. Статика. Кінематика

С. І. Пастушенко
О. Г. Руденко
В. В. Іщенко

Практикум з теоретичної механіки

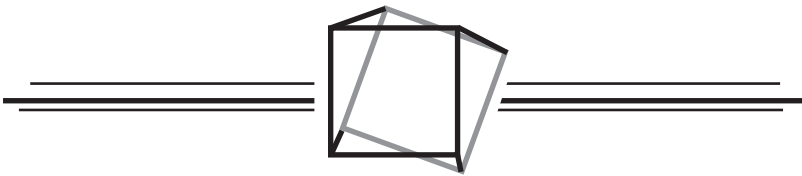
НОВА КНИГА
ВИДАВНИЦТВО

Міністерство аграрної політики України

С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко, В. В. Іщенко

ПРАКТИКУМ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Навчальний посібник
у двох частинах



Вінниця

УДК 531/534 (075.8)

ББК 22.21я 73

П 19

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1.4/18-Г-67 від 18.05.06)

Допущено Міністерством аграрної політики України
для студентів вищих навчальних закладів
(науково-методичний центр аграрної освіти, лист №. 0/140 від 2.06.06)

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук,
професор Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України
В. Г. Карнаух;
доктор технічних наук, професор
Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова
М. Я. Хлопенко

Б 81 Пастушенко С. І., Руденко О. Г., Іщенко В. В. Практикум з теоретичної механіки. Навчальний посібник у двох частинах. Частина 1. Статика. Кінематика – Вінниця: Нова Книга, 2006 – 384 с.
ISBN 966–382–040–3

За змістом навчальний посібник відповідає програмі навчальної дисципліни “Теоретична механіка” для вищих навчальних закладів і складається з двох частин: частина 1 – “Статика. Кінематика”; частина 2 – “Динаміка”.

Навчальний посібник є комплексним. В ньому містяться теоретична частина, методичні рекомендації до розв’язування задач, приклади розв’язання задач. Приведений набір задач для самостійної роботи та дев’ять розрахунково-графічних робіт (по 120 варіантів) з методичними рекомендаціями до їх виконання. Надаються контрольні запитання для самоперевірки і до захисту розрахунково-графічних робіт.

Для студентів механічних спеціальностей.

ББК 22.21я 73

ISBN 966–382–040–3

© Пастушенко С. І., Руденко О. Г., Іщенко В. В. 2006.
© ПП “НОВА КНИГА”, 2006

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	10
МОДУЛЬ 1.	
ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ	12
1. Основні поняття статички	13
1.1. Предмет вивчення статички	13
1.2. Аксиоми статички	14
1.3. В'язі і аксіома про в'язі	16
1.4. Типи в'язей і їх реакції	17
2. Плоска система збіжних сил	19
2.1. Означення системи збіжних сил. Приведення системи збіжних сил до рівнодійної	19
2.2. Аналітичний спосіб знаходження рівнодійної плоскої системи збіжних сил	20
2.3. Умови рівноваги системи збіжних сил	21
2.4. Методичні вказівки до розв'язування задач	21
2.5. Задачі для самостійного розв'язування	28
3. Система сил, довільно розміщених на площині	29
3.1. Момент сили відносно точки. Пара сил. Момент пари сил	29
3.2. Теореми про паралельне перенесення сил і про перенесення пари сил	30
3.3. Теорема про додавання пар сил. Умова рівноваги системи пар сил	32
3.4. Зведення плоскої системи сил до даного центра. Головний вектор і головний момент	33
3.5. Аналітичний спосіб знаходження головного вектора плоскої довільної системи сил	35
3.6. Окремі випадки зведення плоскої довільної системи сил	35
3.7. Аналітичні умови рівноваги плоскої довільної системи сил	36
4. Методичні вказівки до розв'язування задач про рівновагу плоскої довільної системи сил	38
4.1. Загальні зауваження	38
4.2. Довільна плоска система сил	39

4.3. Розрахунок плоских ферм	43
4.4. Знаходження реакцій опор складеної конструкції	48
4.5. Задачі для самостійної роботи	51
5. Тертя ковзання і тертя кочення	53
5.1. Закони тертя ковзання	53
5.2. Тертя кочення	56
5.3. Методичні рекомендації до розв'язання задач на рівновагу з урахуванням сил тертя	57
5.4. Задачі для самостійної роботи	63
6. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт (РГР) по темі "Довільна плоска система сил"	64
6.1. РГР № 1 "Визначення реакцій опор і зусиль в стержнях плоскої ферми"	64
6.1.1. Варіанти завдань РГР №1	64
6.1.2. Вказівки до виконання РГР №1	73
6.2 Розрахунково-графічна робота № 2 "Визначення реакцій опор складеної конструкції"	78
6.2.1. Варіанти завдань РГР №2	78
6.2.2. Вказівки до виконання РГР №2	87
7. Запитання для самоперевірки і до захисту розрахунково-графічних робіт	88
МОДУЛЬ 2.	
ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ.	90
ЦЕНТР ВАГИ	90
1. Просторова система збіжних сил	90
1.1. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної	90
1.2. Аналітичний спосіб знаходження рівнодійної просторової системи збіжних сил	91
1.3. Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил	91
1.4. Методичні вказівки до виконання завдань	92
1.5. Задачі для самостійного розв'язування	94
2. Момент сили відносно точки і осі	95

2.1. Момент сили відносно точки як вектор	95
2.2. Момент сили відносно осі	96
2.3. Залежність між моментами сили відносно точки і осі, що проходить через цю точку	97
2.4. Формули для обчислення моментів сили відносно координатних осей	98
2.5. Методичні вказівки до розв'язування задач	99
3. Теорія пар сил, розміщених в просторі	101
3.1. Момент пари сил як вектор	101
3.2. Теореми про пари сил, розміщених в просторі	102
3.3. Умови рівноваги просторової системи пар сил	103
3.4. Методичні вказівки до розв'язування задач	104
4. Зведення довільної просторової системи сил до даного центра. Умови рівноваги системи сил	105
4.1. Лема про паралельне перенесення сили	105
4.2. Основна теорема статички (теорема Пуансо)	106
4.3. Аналітичний спосіб знаходження головного вектора і головного моменту просторової системи сил	107
4.4. Залежність головного вектора і головного моменту просторової системи сил від вибору центра зведення	110
4.5. Інваріанти довільної просторової системи сил	111
4.6. Окремі випадки зведення просторової системи сил	111
4.7. Умови рівноваги довільної просторової системи сил в векторній і аналітичній формах	116
4.8. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил	116
5. Методичні вказівки до розв'язування задач на просторову довільну систему сил	117
5.1. Загальні зауваження	117
5.2. Задачі на зведення довільної просторової системи сил до даного центра	117
5.3. Задачі на рівновагу тіла під дією просторової системи сил	122
5.4. Задачі для самостійного розв'язування	130
6. Центр паралельних сил і центр тяжіння	132

6.1. Окремі випадки зведення просторової системи паралельних сил	132
6.2. Центр паралельних сил. Формули для радіуса-вектора і координат центра паралельних сил	132
6.3. Центр тяжіння	134
6.4. Центр мас	134
6.5. Центр тяжіння об'єму	135
6.6. Центр тяжіння однорідної оболонки	135
6.7. Центр тяжіння площі плоскої фігури	136
6.8. Центр тяжіння лінії	136
6.9. Способи знаходження координат центра тяжіння тіл	137
6.10. Центр тяжіння деяких ліній, площ і об'ємів	139
6.11. Методичні вказівки до розв'язування задач	140
6.12. Задачі для самостійного розв'язування	143
7. Збірник завдань для розрахунково-графічної роботи № 3 "Визначення реакцій опор просторової конструкції"	144
8. Запитання для самоперевірки і до захисту розрахунково-графічної роботи	153
МОДУЛЬ 3.	
КІНЕМАТИКА ТОЧКИ	154
1. Основні відомості з кінематики точки	154
1.1. Предмет кінематики	154
1.2. Способи визначення руху точки	154
1.3. Знаходження швидкості та прискорення точки при векторному способі визначення її руху	160
1.4. Швидкість та прискорення точки в прямокутній декартовій системі координат	162
1.5. Швидкість і прискорення точки при натуральному способі визначення її руху	165
1.6. Закон рівномірного і рівноприскореного (рівносповільненого) руху точки по траєкторії	173
1.7. Знаходження швидкості та прискорення точки при полярному способі визначення її руху	177

2. Збірник задач з кінематики та методика їх розв'язування	181
2.1. Прямолінійний рух точки.	181
2.2. Криволінійний рух точки	186
3. Задачі для самостійного розв'язування	191
4. Збірник завдань для розрахунково-графічної роботи № 4 “Знаходження швидкості і прискорення точки по заданим рівнянням її руху”	192
4.1. Варіанти завдань РГР № 4	192
4.2. Вказівки до виконання РГР № 4	198
5. Запитання для самоперевірки і до захисту розрахунково-графічної роботи	202

МОДУЛЬ 4.

КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА	2
1. Поступальний рух твердого тіла	203
2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі	205
2.1. Рівняння обертального руху, кутова швидкість, кутове прискорення	205
2.2. Рівняння рівномірного обертального руху тіла	207
2.3. Рівняння рівнозмінного обертального руху тіла	207
2.4. Швидкість і прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі	208
2.5. Кутова швидкість і кутове прискорення як вектори	210
2.6. Векторні формули для знаходження швидкості і прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі	210
2.7. Передаточні механізми	212
2.8. Методика розв'язування задач на поступальний та обертальний рух твердого тіла	214
2.9. Задачі для самостійного розв'язування	222
3. Плоский рух твердого тіла	224
3.1. Означення плоского руху	224
3.2. Рівняння плоского руху твердого тіла	225
3.3. Представлення плоского руху тіла на поступальний рух разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса	226
3.4. Швидкість точок тіла при його плоскому русі	227

3.5. Властивості швидкостей точок плоскої фігури, які лежать на одній прямій	228
3.6. Миттєвий центр швидкостей	229
3.7. Прийоми знаходження миттєвого центра швидкостей	231
3.8. План швидкостей і його властивості	234
3.9. Побудова плану швидкостей	235
3.10. Методика розв'язування задач на знаходження швидкостей точок при плоскому русі тіла	237
3.11. Задачі для самостійної роботи на знаходження швидкостей точок при плоскому русі тіла	257
3.12. Прискорення точок тіла при його плоскому русі	261
3.13. Миттєвий центр прискорень	265
3.14. Визначення положення миттєвого центра прискорень	267
3.15. Методика розв'язування задач на знаходження прискорення точок при плоскому русі тіла	270
3.16. Задачі для самостійної роботи на знаходження прискорень точок при плоскому русі тіла	282
4. Сферичний рух твердого тіла	284
4.1. Кути Ейлера. Рівняння руху твердого тіла навколо нерухомої точки	284
4.2. Теорема Ейлера-Даламбера про переміщення твердого тіла. Миттєва вісь обертання	286
4.3. Вектори кутової швидкості та кутового прискорення	288
4.4. Швидкість точок тіла, яке обертається навколо нерухомої точки	290
4.5. Зв'язок вектора миттєвої кутової швидкості з кутами Ейлера	292
4.6. Прискорення точок тіла при обертанні навколо нерухомої точки	293
4.7. Методичні рекомендації до розв'язування задач	295
4.8. Задачі для самостійного розв'язування	304
5. Загальний випадок руху вільного твердого тіла	306
5.1. Рівняння руху вільного твердого тіла	306
5.2. Визначення швидкостей і прискорень точок вільного твердого тіла	307
6. Збірник завдань для розрахунково-графічної роботи № 5 “Кінематичний аналіз плоского механізму”	308

6.1. Варіанти завдань РГР № 5	308
6.2. Вказівки до виконання РГР № 5	315
7. Запитання для самоперевірки і до захисту розрахунково-графічної роботи	322

МОДУЛЬ 5.

КІНЕМАТИКА СКЛАДНОГО РУХУ ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА	325
1. Кінематика складного руху точки	325
1.1. Основні поняття	325
1.2. Рівняння руху точки	326
1.3. Теорема про додавання швидкостей	327
1.4. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса)	330
1.5. Методичні вказівки до розв'язування задач по кінематиці складного руху точки	334
1.6. Задачі для самостійного розв'язування	347
2. Кінематика складного руху твердого тіла	349
2.1. Переносний рух середовища, абсолютний і відносний рух твердого тіла.	349
2.2. Додавання двох миттєвих поступальних рухів тіла.	350
2.3. Додавання двох миттєвих обертань навколо осей, що перетинаються.	350
2.4. Додавання двох миттєвих обертань навколо паралельних осей	352
2.4.1. Обертання в одному напрямі	352
2.4.2. Обертання в протилежних напрямках	354
2.4.3. Пара обертань	355
2.5. Вказівки до розв'язування задач на складний рух твердого тіла	356
2.6. Задачі для самостійного розв'язування	375
3. Запитання для самоперевірки	379

ПЕРЕДМОВА

Даний навчальний посібник ставить своєю ціллю допомогти студенту самостійно оволодіти методами розв'язування задач по курсу теоретичної механіки. Це визначило структуру посібника. Крім цього, на структуру посібника вплинуло те, що Україна задекларувала про вхід до Булонського процесу та інтеграцію в європейський освітній простір. Виходячи з цього увесь курс теоретичної механіки було розподілено на дев'ять модулів. Розділи теоретичної механіки “Статика” і “Кінематика” складають п'ять модулів, розділ “Динаміка” – чотири модуля.

В кожному з модулів наводяться теоретичні відомості, приводиться методика розв'язування задач, розв'язки задач, задачі для самостійного розв'язування. Враховуючи те, що при вивченні курсу теоретичної механіки студенти повинні виконувати розрахунково-графічні роботи, в посібнику приведено дев'ять розрахунково-графічних робіт (по 120 варіантів завдань) з методичними рекомендаціями до їх виконання.

В кінці кожного модуля надаються питання для самоперевірки і до захисту розрахунково-графічних робіт, на які студент повинен дати точні відповіді, що особливо необхідно при підготовці до іспиту.

Практичний досвід показує, що, якщо подати в посібнику короткі теоретичні відомості, то студент, вдовольняючись тією мізерією з теорії, яка надана в посібнику, розв'язує задачі і не вивчає за підручником теоретичного матеріалу. Тому автори вважали за потрібне в цьому посібнику не давати короткі теоретичні відомості, а викласти теоретичний матеріал стисло з доведенням відповідних теорем. Це дозволяє при розв'язанні задач безпосередньо звертатись до відповідних теорем, формул, висновків, що забезпечує більш ефективне засвоєння матеріалу.

Кожний з модулів є структурною одиницею, по закінченню вивчення матеріалу якого проводяться модульні контрольні роботи, проводиться захист відповідних розрахунково-графічних робіт.

Це дозволяє на протязі семестру перевірити і оцінити якість засвоєння теоретичного і практичного матеріалу кожного з модулів, стимулювати систематичну самостійну роботу студентів протягом семестру, підвищити об'єктивність оцінювання знань студентів.

Навчальний посібник складається з двох частин. У першій частині розглядаються питання статички, кінематики точки і твердого тіла, складного руху точки і твердого тіла. У другій частині навчального посібника розглядається динаміка абсолютного та відносного руху матеріальних точок, детально розглянуті загальні теореми динаміки системи матеріальних точок, значну увагу приділено аналітичній механіці, елементарній теорії гіроскопа, динаміці тіла змінної маси, теорії

удару та теорії малих коливань системи з одним і декількома ступенями вільності.

Свою роботу над навчальним посібником автори розподілили слідуючим чином:

модулі 1, 2 – С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко;
модуль 3 – С. І. Пастушенко, В. В. Іщенко;
модуль 4 – О. Г. Руденко;
модуль 5 – С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко;
модуль 6 – С. І. Пастушенко, В. В. Іщенко, О. Г. Руденко;
модуль 7 – С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко;
модуль 8 – О. Г. Руденко;
модуль 9 – С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко.

МОДУЛЬ 1.

ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

Теоретична механіка вивчає загальні закони механічного руху тіл, або системи тіл і взаємодію цих тіл.

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного циклу. Крім цього, вона є науковою основою таких дисциплін, як механіка матеріалів і конструкцій, теорія механізмів і машин, деталі машин, теорія трактора і автомобіля, теорія сільськогосподарських машин.

Теоретична механіка ділиться на три розділи: статику, кінематику, динаміку.

Якщо під дією системи сил тіло знаходиться в рівновазі, або рухається прямолінійно і рівномірно, то це є предметом вивчення *статики*.

Кінематика вивчає рух тіла або системи тіл без з'ясування причин цього руху.

Динаміка вивчає рух тіла або системи тіл з урахуванням усіх діючих сил.

В модулі 1 розглядається один із розділів статики, а саме “Плоска система сил”. У студентів певні труднощі виникають при розв’язуванні задач статики, а тому в посібнику розв’язана велика кількість задач, подані методичні вказівки до їх розв’язання, запропоновані задачі для самостійного розв’язання, і, крім того, подається в короткому вигляді необхідний теоретичний матеріал.

Посібник містить варіанти розрахунково-графічних робіт, які студенти повинні виконати при завершенні модуля 1 учбового плану, та зразки виконання цих робіт.

1. Основні поняття статички

1.1. Предмет вивчення статички

Статика розв'язує дві основні задачі:

1. Якщо на тверде тіло діє система сил, то яким чином цю систему сил можна спростити?

2. В яких випадках тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією системи сил?

В статисти розглядаються абсолютно тверді тіла.

Абсолютно твердим тілом називають таке тіло, відстань між точками якого не змінюється при будь-яких механічних діях з боку інших тіл. Це означає, що в статисти не враховують деформації, які виникають в реальних тілах. В подальшому будемо говорити “тверде тіло” замість “абсолютно тверде тіло”.

В механіці використовується ще один абстрактний образ тіла – матеріальна точка.

Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна знехтувати при вивченні його руху (або рівноваги). Матеріальна точка відрізняється від геометричної тим, що в ній зосереджена вся маса тіла.

Для врахування механічної взаємодії між тілами вводиться поняття сили.

Сила – це характеристика взаємодії двох тіл. Сила – величина векторна і визначається слідуючими трьома елементами: 1) точкою прикладання сили, 2) напрямом сили і 3) числовим значенням сили. Розмірність сили $H = \frac{kg \cdot m}{c^2}$ (ньютон).

Позначаються сили різними буквами $\vec{F}, \vec{P}, \vec{G}, \vec{N}$. В посібнику в основному буде використовуватись позначення $\vec{F}$. Якщо над буквою є стрілочка, то сила розглядається як векторна величина, якщо без стрілочки (наприклад $F=10 H$), то враховується тільки числове значення сили. На рисунках сила обов'язково повинна бути позначена як вектор.

Якщо на рисунку показується сила (а сила – це характеристика взаємодії двох тіл), то необхідно вказати, які два тіла взаємодіють.

Наприклад: На рисунку 1.1 (а) тіло D висить на стержні. На рисунку 1.1 (б) показано дві сили, що діють на тіло D . Сила $m\vec{g}$ є характеристикою взаємодії тіла D і Землі, а сила $\vec{N}$ – тіла D і стержня.

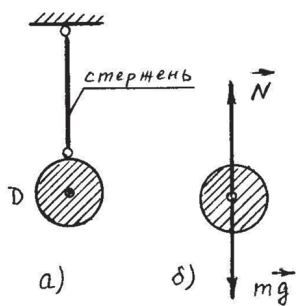


Рис. 1.1

Системи сил, що діють на тіло, бувають різні:

1. Якщо лінії дії сил перетинаються в одній точці, то такі сили називаються збіжними. Якщо ці сили знаходяться в одній площині, то це плоска система збіжних сил, якщо ці сили в просторі – то це просторова система збіжних сил.

2. Якщо сили діють в одній площині довільним чином, то ці сили складають плоску довільну систему сил.

3. Якщо сили діють в просторі довільним чином, то такі сили складають просторову довільну систему сил.

Зрозуміло, що найпростішою системою сил є система збіжних сил, а найскладнішою – просторова довільна система сил.

Якщо одну систему сил, що діють на дане вільне тіло, можна замінити другою системою сил, не змінюючи при цьому спокій чи рух, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються еквівалентними.

В модулі 1 буде розглядатись плоска система сил.

1.2. Аксиоми статyki

Статика побудована на шести аксіомах.

Аксиома 1. Абсолютно тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією двох сил тільки тоді, коли ці сили рівні по величині і напрямлені по одній прямій в протилежні сторони.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

Сили, які показані на рисунку 1.2, називаються зрівноваженими.

Аксиома 2. Не змінюючи дію системи сил на абсолютно тверде тіло, можна приєднати до цієї системи сил (або відкинути з неї) будь-яку зрівноважену систему сил (рис. 1.3).



Рис. 1.2

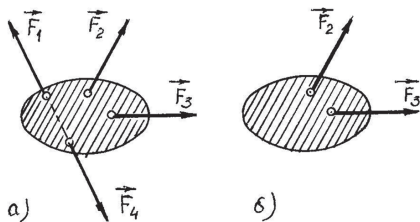


Рис. 1.3

На рисунку 1.3(а) зрівноважені сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_4$ і по аксіомі 2 їх можна відкинути. Результат видно на рисунку 1.3(б).

Використовуючи аксіому 2, можна довести слідуючу теорему.

Теорема 1.1. Силу можна переносити по лінії її дії і від цього дія сили на тверде тіло не зміниться.

Доведення. Нехай на тіло в точці A діє сила $\vec{F}_1$ (рис. 1.4). Чи зміниться дія сили на тіло, якщо її перенести в точку B по лінії AB ? В точці B приєднаємо зрівноважені сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, причому $F_1 = F_2 = F$. По аксіомі 2 це можна зробити. Маємо систему з трьох сил. Розглянемо сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Це зрівноважені сили і по аксіомі 2 їх можна відкинути. Таким чином, залишилась сила $\vec{F}_1$, що діє в точці B .

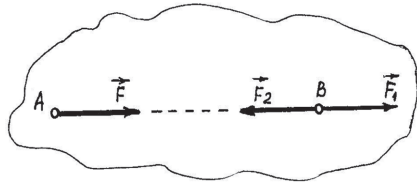


Рис. 1.4

Аксіома 3. Якщо на тверде тіло в одній точці діють дві сили, то дію цих сил можна замінити дією однієї сили, яка напрямлена по діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах, і чисельно дорівнює довжині діагоналі.

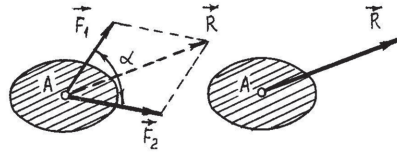


Рис. 1.5

Сила $\vec{R}$, яка замінює в даному випадку дію сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, називається рівнодійною (рис. 1.5)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.2)$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}. \quad (1.3)$$

Використовуючи аксіоми 1 і 3 і теорему 1.1, доведемо наступну теорему.

Теорема 1.2. Якщо вільне тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох сил, які лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох сил (рис. 1.6,а). Перемістимо сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ по лінії їх дії в точку перетину A . Дію сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ замінимо дією однієї сили $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рис. 1.6,б). Тепер замість трьох сил маємо дві сили $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$ і тіло знаходиться в рівновазі. Згідно аксіоми 1 це можливо при умові, що сили $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$ діють по одній прямій в протилежні сторони, тобто лінія дії сили $\vec{F}_3$ перетинає точку A .

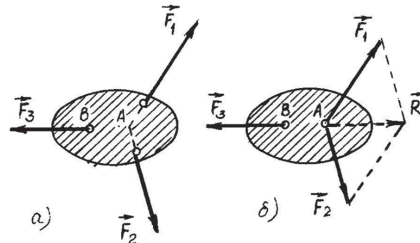


Рис. 1.6

Аксіома 4. Два тіла взаємодіють між собою з силами, рівними по величині і напрямленими по одній прямій в протилежні сторони.

Ця аксіома називається законом рівності дії і протидії.

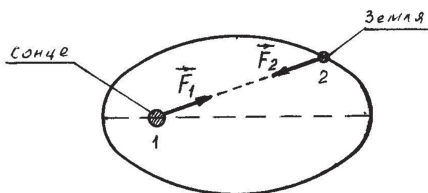


Рис. 1.7

Якщо тіло 1 діє на тіло 2 з силою $\vec{F}_2$, то одночасно тіло 2 діє на тіло 1 з силою $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (рис. 1.7).

Сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ не являються зрівноваженими силами, так як вони прикладені не до одного тіла, а до двох.

Аксіома 5. Якщо деформоване тіло знаходиться в рівновазі під дією сил, то рівновага не порушиться і в тому випадку, коли це тіло затвердіє (стане абсолютно твердим).

Ця аксіома дозволяє результати, отримані в статиці абсолютно твердого тіла, переносити на тіла, які можуть деформуватись.

1.3. В'язі і аксіома про в'язі

В статиці розглядають вільні тіла. Тіло називається *вільним*, якщо воно в просторі може займати довільне положення. Тіло називається *невільним*, якщо воно може рухатись лише в певних напрямках, або взагалі не може рухатись. Наприклад, вагон є тіло невільне, його рух спрямовується рейками. При розв'язуванні задач статики завжди будуть зустрічатися невільні тверді тіла.

Тіла, які перешкоджають вільному переміщенню даного тіла, називають в'язями, а сили, з якими ці тіла діють на дане тіло – *реакціями в'язей*.

Всі сили, що діють на дане тіло, можна поділити на *активні сили* і *реакції в'язей*. До активних сил відносяться сили тяжіння, сили пружності і т. п. і, як правило, ці сили відомі. Реакції в'язей виникають тільки тоді, коли дане тіло під дією активних сил тисне на ці в'язі. Як тільки дане тіло перестає тиснути на в'язі, то зникають реакції в'язей. Тому реакції в'язей називають *пасивними силами*. Величина реакції в'язей і напрям дії наперед невідомі.

В статиці задачі на рівновагу невільних тіл розв'язуються на основі слідуючої аксіоми.

Аксіома 6 (аксіома про в'язі). Всяке невільне тіло можна розглядати як вільне, коли умовно його звільнити від в'язей і замінити дію в'язей на тіло реакціями в'язей.

Аксіома 6 дозволяє використовувати до невільних тіл умови рівноваги, які отримані в статиці для вільного тіла. Потрібно тільки в число сил, що діють на тіло, обов'язково включити і реакції відкинутих в'язей.

Більшість задач статики якраз і пов'язана із знаходженням реакцій в'язей.

Знаючи їх, ми будемо знати і сили тиску на в'язі, тобто будемо мати дані, необхідні для розрахунку на міцність відповідних конструкцій.

1.4. Типи в'язей і їх реакції

Розглянемо, як знаходиться напрям реакції деяких основних типів в'язей.

1. Гладенька опорна поверхня.

Гладенькою називається поверхня, тертям тіла по якій можна знехтувати.

Гладенька опорна поверхня не перешкоджає руху тіла по поверхні, але перешкоджає переміщенню тіла вздовж нормалі до поверхні в'язі, тому реакція в'язі напрямлена по нормалі до в'язі. Цю реакцію називають *нормальною реакцією*.

В точці A (рис. 1.8) нормальна реакція $\vec{N}_A$ напрямлена перпендикулярно поверхні AC , в точці B реакція $\vec{N}_B$ перпендикулярна AB . В точці D реакція $\vec{N}_D$ перпендикулярна поверхні DL . З рисунка 1.8 видно, як напрямлені реакції опори в точках K і L .

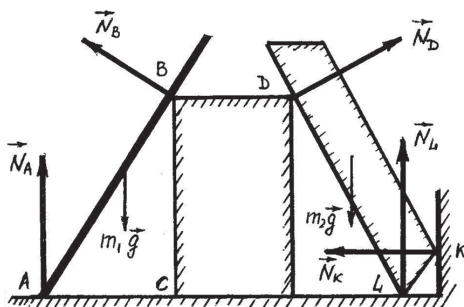


Рис. 1.8

2. Негладенька опорна поверхня.

Негладенька опорна поверхня — це шорстка поверхня і в цьому випадку необхідно врахувати сили тертя ковзання. На рисунку 1.9 $\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{N}_D$ — це нормальні реакції опор. $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_D$ — це сили тертя ковзання.

3. Шарнірне з'єднання тіл

На рисунку 1.10 балка AB знаходиться на двох опорах. В точці A опора називається нерухомий шарнір, а в точці B — рухомий шарнір. Конструктивно нерухомий шарнір виконаний

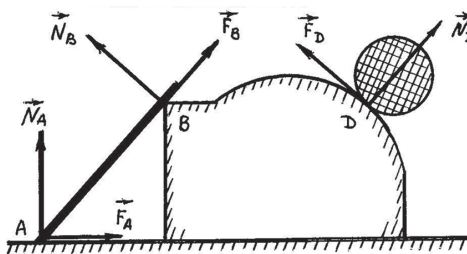


Рис. 1.9

слідуючим чином. На нерухомий циліндричний болт надівається стержень AL (рис. 1.10), який має циліндричний отвір, діаметр якого більший за діаметр болта. Стержень AL (AB) має можливість тільки обертатись навколо осі болта. Реакція

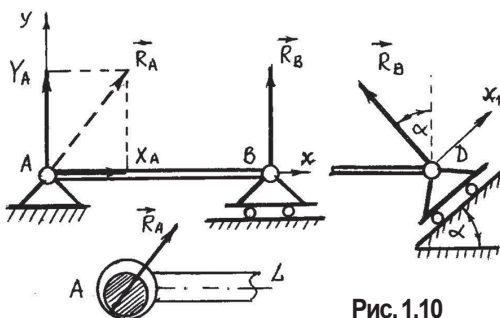


Рис. 1.10

$\vec{R}_D$ циліндричного шарніра лежить в площині, перпендикулярній осі болта і проходить через центр болта. Реакція опори невідома за величиною і невідомий напрям її дії. Тому цю реакцію розкладають на дві складові X_A і Y_A , де X_A – проекція вектора на вісь AX , а Y_A – на вісь AY . Якщо будуть знайдені проекції X_A , Y_A , то реакція

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$$

Рухомий шарнір B побудований таким чином як і нерухомий шарнір, але він має можливість зміщуватись в одному із напрямів. Наприклад (рис. 1.10),

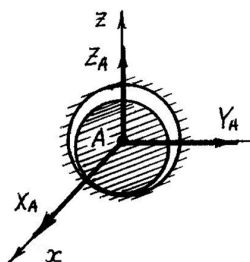


Рис. 1.11

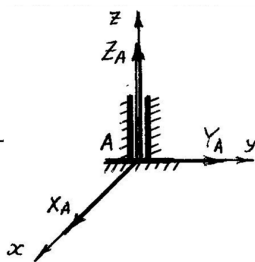


Рис. 1.12

шарнір B має можливість зміщуватись вздовж осі x , а шарнір D – вздовж осі x_1 . Реакція рухомого шарніра проходить через вісь шарніра і напрямлена по нормалі до опорної поверхні.

4. Під'ятник, сферичний шарнір

Сферичний шарнір представляє собою кулю, яка може обертатись як завгодно всередині сферичної порожнини (рис. 1.11). Напрямок реакції в цьому випадку вказати неможливо, тому цю реакцію розкладають по трьом осям координат на три складові X_A , Y_A , Z_A .

Під'ятник представляє собою з'єднання циліндричного шарніра з опорою

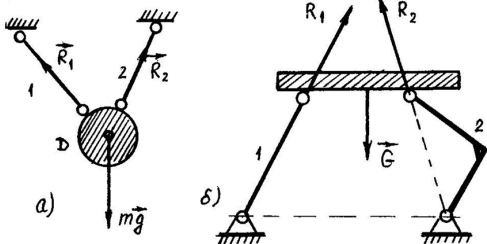


Рис. 1.13

ною площиною (рис. 1.12). Така в'язь дозволяє обертатись валу навколо його осі і переміщатись вздовж неї тільки в одному напрямку. Реакція під'ятника складається з реакції циліндричного підшипника X_A і Y_A і нормальній реакції Z_A опорної площини.

5. Реакція невагомого стержня

Якщо невагомий стержень має на кінцях шарнірні з'єднання, то реакція цього стержня напрямлена по стержню.

Для тіла D (рис. 1.13,а) стержні 1 і 2 являються в'язями.

Реакції цих в'язей напрямлені по стержням 1 і 2. Реакції стержнів 1 і 2 тіла показані на рисунку 1.13(б).

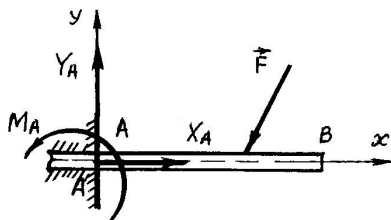


Рис. 1.14

6. Жорстке защемлення

Жорстке защемлення балки AB показано на рис. 1.14. Якщо на балку діють активні сили $\vec{F}$, то в защемленні виникають реакції, які складаються з реакції защемлення $\vec{R}_A$ і пари сил з моментом защемлення M_A . Так як напрям реакції $\vec{R}_A$ невідомий, то ця реакція розкладається на дві невідомі складові X_A , Y_A . Таким чином, в точці A жорсткого защемлення маємо три невідомі складові реакції X_A , Y_A , M_A .

2. Плоска система збіжних сил

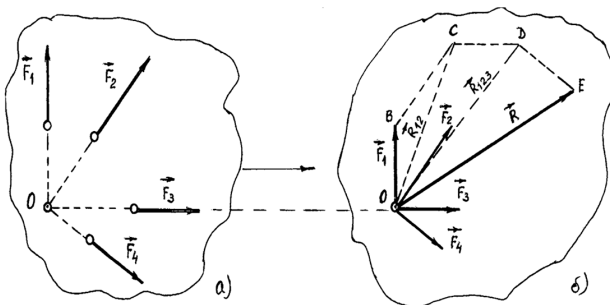


Рис. 2.1

2.1. Означення системи збіжних сил.

Приведення системи збіжних сил до рівнодійної

Сили називаються збіжними, якщо лінії дії всіх сил, що складають систему, перетинаються в одній точці.

Розв'яжемо першу задачу статички, а саме, замінимо дану систему сил більш простішою.

Нехай в одній площині діють, наприклад, чотири сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, лінії дії яких перетинаються в одній точці O (рис. 2.1,а)

Згідно теореми 1.1 перенесемо сили по лінії їх дії в точку O (рис. 2.1,б). Цим самим ми отримали нову систему сил, які прикладені в одній точці O . Отримана система сил еквівалентна першій. Використовуючи аксіому 3, дію сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ замінимо дією сили $\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, побудованою по правилу паралелограма. Замінимо дію сил $\vec{R}_{12}$ і $\vec{F}_3$ дією однієї сили $\vec{R}_{123} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. І, останнє, на паралелограмі сил $\vec{R}_{123}$ і $\vec{F}_4$ побудуємо силу

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Сила $\vec{R}$ і буде рівнодієюю всієї системи сил. Операцію додавання сил можна виконати, не будуючи кожний раз паралелограм сил. Для цього достатньо в точці B вектора $\vec{F}_1$ прикласти початок вектора $\vec{F}_2$, потім в точці C вектора $\vec{F}_2$ прикласти початок вектора $\vec{F}_3$ і т. д. (рис. 2.1. б). З'єднавши точку O прикладання сил з кінцем сили $\vec{F}_4$, знайдемо рівнодіяну $\vec{R}$. Викладений спосіб знаходження рівнодіяної називається *правилом багатокутника*.

Зробимо кінцевий висновок.

Якщо задано n збіжних в точці O сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, то їх дію на тіло можна замінити дією однієї сили (рівнодіяної), яка прикладена в точці O і дорівнює геометричній сумі векторів сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (2.1)$$

2.2. Аналітичний спосіб знаходження рівнодіяної плоскої системи збіжних сил

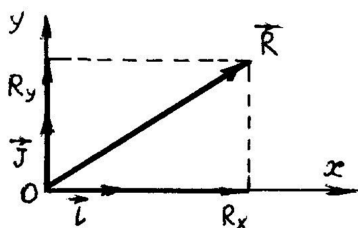


Рис. 2.2

В пункті 2.1 рівнодіяна системи збіжних сил знайдена геометричним способом.

Знайдемо рівнодіяну $\vec{R}$ аналітичним способом. Для цього виберемо систему координат з початком в точці O (рис. 2.2).

Спроєктуємо векторний вираз (2.1) на осі декартової системи координат:

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{k=1}^n F_{ky}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{k_x}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{k_y}\right)^2}. \quad (2.3)$$

Напрямок рівнодійної знаходиться за напрямними косинусами

$$\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{R_y}{R}. \quad (2.4)$$

Щоб аналітичним способом знайти рівнодійну $\vec{R}$ системи збіжних сил, необхідно: 1) по формулам (2.2) знайти проєкції рівнодійної на координатні осі; 2) по формулі (2.3) знайти модуль рівнодійної; 3) по формулам (2.4) знайти напрям рівнодійної.

2.3. Умови рівноваги системи збіжних сил

Розв'яжемо другу основну задачу статyki, а саме, необхідно встановити, при яких умовах тіло під дією системи збіжних сил буде в рівновазі.

Сили, які прикладені в одній точці, взаємно зрівноважені тоді і тільки тоді, коли рівнодійна цих сил дорівнює нулю.

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0. \quad (2.5.a)$$

Цю векторну рівність називають векторною умовою рівноваги системи збіжних сил. Геометрично ця умова виражає вимогу того, щоб силовий многокутник, побудований на цих силах, був замкнений.

Запишемо аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил. Для цього використаємо вираз (2.3) при умові, що $R=0$. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{k_x} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{k_y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулю алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на кожну з координатних осей.

2.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

Задачі на плоску систему збіжних сил можна розв'язувати за допомогою силового многокутника, або аналітичним способом. Якщо брати в порівнянні, то аналітичний спосіб розв'язання задач більш ефективний.

Рекомендуємо слідуєчий порядок дій при розв'язанні задач статички аналітичним способом:

1. Вияснити, рівновагу якої точки або тіла необхідно розглянути.
2. Вибрати осі координат.
3. Якщо тіло (точка) не вільне, то необхідно звільнитися від в'язей і замінити дію в'язей на тіло реакціями в'язей.
4. Проаналізувати отриману систему активних сил і реакцій в'язей.
5. Записати аналітичні умови рівноваги отриманої системи сил і скласти рівняння рівноваги.
6. Розв'язати отриману систему рівнянь.

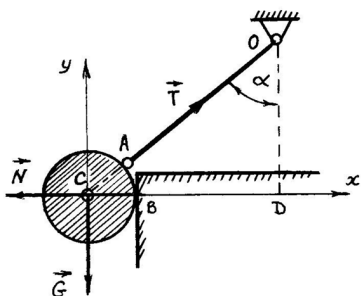


Рис. 2.3

Задача 2.1.

$$G = 120 \text{ Н}$$

$$OA = 0,8 \text{ м}$$

$$BD = 0,4 \text{ м}$$

$$r = 0,2 \text{ м}$$

$$Q = ?; S = ?$$

Однорідна куля радіусом 0,2 м і вагою 120 Н дотикається в точці B гладенької вертикальної стінки (рис. 2.3) і утримується в рівновазі тросом OA довжиною 0,8 м. Знайти натяг троса і силу тиску кулі на стінку, якщо відстань від точки B до вертикалі OD дорівнює 0,4 м.

Розв'яжемо цю задачу аналітичним і геометричним способами.

Аналітичний спосіб.

1. Розглянемо рівновагу кулі.
2. Початок системи координат візьмемо в точці C.
3. Куля не вільна, для неї в'язями є стінка і трос. Відкинемо ці в'язі і замінимо їх дію реакціями в'язей $\vec{N}$ і $\vec{T}$ (дивись пункт 1.4).
4. З рисунка 2.3 видно, що лінії дії сил $\vec{G}$, $\vec{N}$, $\vec{T}$ перетинаються в точці C, тобто маємо плоску систему збіжних сил.
5. Запишемо аналітичні умови рівноваги і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad N + T \sin \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad T \cos \alpha - G = 0. \quad (2)$$

З рівнянь (1) і (2) маємо:

$$N = T \sin \alpha; \quad T = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Знайдемо значення $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$. $CD = CB + BD = 0,2 + 0,4 = 0,6$ (м);

$$OC = OA + AC = 0,8 + 0,2 = 1(\text{м}); \quad OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} = \sqrt{1^2 - 0,6^2} = 0,8(\text{м}).$$

$$\cos \alpha = \frac{OD}{OC} = \frac{0,8}{1} = 0,8; \quad \sin \alpha = \frac{CD}{OC} = \frac{0,6}{1} = 0,6; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Тоді } T = \frac{120}{0,8} = 150 \text{ (Н)}; \quad N = 150 \cdot 0,6 = 90 \text{ (Н)}.$$

Сили $\vec{T}$ і $\vec{N}$ діють зі сторони троса і стінки на кулю. Куля діє на трос з силою $S = T = 150 \text{ Н}$ і тисне на стінку з силою $Q = N = 90 \text{ Н}$.

Геометричний спосіб (рис. 2.4)

Так як три сили $\vec{G}$, $\vec{N}$ і $\vec{T}$ знаходяться в рівновазі, то силовий трикутник, побудований на цих силах, повинен бути замкненим. Будемо цей силовий трикутник: для цього в певному масштабі будемо силу $\vec{G}$, яка нам відома за модулем і напрямом, потім через початок і кінець вектора $\vec{G}$ проводимо прямі, паралельні силам $\vec{N}$ і $\vec{T}$.

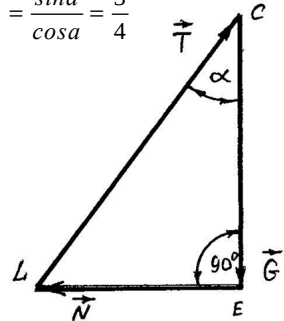


Рис. 2.4

Сторони EL і LC , побудованого таким чином замкнутого силового трикутника CEL , дають модулі і напрям невідомих реакцій $\vec{N}$ і $\vec{T}$. Щоб знайти їх величину (модулі), залишається тільки заміряти в вибраному масштабі сторони EL і LC .

Але сторони EL і LC силового трикутника можна знайти і обчисленням

$$N = G \times \operatorname{tg} \alpha = 120 \times \frac{3}{4} = 90 \text{ (Н)}; \quad N = 90 \text{ Н}. \quad T = \frac{G}{\cos \alpha} = \frac{120}{0,8} = 150 \text{ Н}; \quad T = 150 \text{ Н}.$$

Задача 2.2.

$AB = 3 \text{ м}$
 $CB = 1 \text{ м}$
 $F = 2 \text{ кН}$

Балка AB довжиною 3 м підтримується в горизонтальному положенні стержнем BD (рис. 2.5).

З'єднання A , B і D – шарнірні. В точці C балки діє вертикальна сила $F = 2 \text{ кН}$. Нехтуючи вагою балки AB і стержня BD , знайти реакції опор A і D .

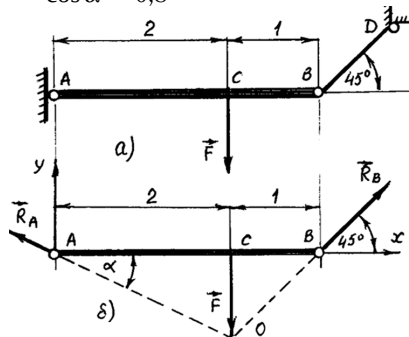


Рис. 2.5

Розглянемо рівновагу балки AB . Для неї в'язями являються стержень BD і шарнір A . Відкидаємо ці в'язі і замінюємо їх дію на балку AB реакціями в'язей. Реакція стержня BD буде напрямлена по BD . Напрямок реакції нерухомого шарніра A невідомий. На балку AB діють три сили: $\vec{F}$, $\vec{R}_B$ і $\vec{R}_A$. Тому скористаємося теоремою 1.2 і знайдемо точку перетину цих сил. Лінії дії сили $\vec{F}$ і реакції $\vec{R}_B$ перетинаються в точці O . З'єднуємо точку O з точкою A і отримуємо лінію дії реакції $\vec{R}_A$ (рис. 2.5,б)

Розв'яжемо задачу аналітичним способом.

Початок координат виберемо в точці A . Знайдемо кут α .

$$\triangle OCB \quad CO = CB = 1\text{ м.}$$

$$\triangle ACO \quad AO = \sqrt{AC^2 + CO^2} = \sqrt{5}(\text{м}).$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AO} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin \alpha = \frac{OC}{AO} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Запишемо рівняння рівноваги плоскої збіжної системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -R_A \cos \alpha + R_B \cos 45^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_A \sin \alpha - F + R_B \sin 45^\circ = 0. \quad (2)$$

Розв'яжемо ці рівняння. Так як $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$, то від рівняння (1) віднімаємо рівняння (2). Отримаємо: $-R_A \cos \alpha - R_A \sin \alpha + F = 0$. Звідки:

$$R_A = \frac{F}{\sin \alpha + \cos \alpha}; \quad R_A = \frac{2\sqrt{5}}{3} = 1,49(\text{кН}).$$

$$\text{З рівняння (1): } R_B = \frac{R_A \cos \alpha}{\cos 45^\circ}; \quad R_B = \frac{8}{3\sqrt{2}} = 1,89(\text{кН}).$$

$$R_A = 1,49 \text{ кН}; \quad R_B = R_D = 1,89 \text{ кН}.$$

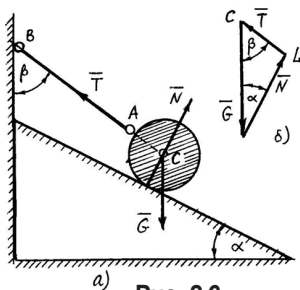


Рис. 2.6

Задача 2.3.

α
 β
 G

$T=?; N=?$

На гладенькій похилій площині, що утворює з горизонтом кут α , знаходиться тіло вагою G , яке утримується в рівновазі тросом AB .

Трос AB складає з вертикальною стінкою кут β (рис. 2.6,а) Знайти зусилля в тросі і силу тиску тіла на площину.

Тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох сил: сили тяжіння $\vec{G}$, яка напрямлена вертикально вниз, реакції $\vec{T}$ троса, напрямленої вздовж троса AB , і реакції $\vec{N}$ площини, напрямленої перпендикулярно похилій площині (див. п. 1.4). Лінії дії цих сил перетинаються в точці C . Розв'яжемо цю задачу *геометричним способом*.

Для цього побудуємо силовий трикутник (рис. 2.6,б). Як будувати силові многокутники розглянуто в задачі 2.1. З $\triangle CDL$ знайдемо модулі сил T і N . На основі теореми синусів маємо:

$$\frac{N}{\sin \beta} = \frac{G}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]}; \quad \frac{T}{\sin \alpha} = \frac{G}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]}.$$

Звідки отримуємо:

$$N = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \times G; \quad T = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \times G.$$

Задача 2.4.

$$AB = 6 \text{ м}$$

$$P = 3 \text{ кН}$$

$$AD = 2 \text{ м}$$

$$R_A = ?; R_D = ?$$

На ферму в точці D діє сила $P = 3 \text{ кН}$. Лінія дії сили $\vec{P}$ знаходиться на відстані 2 м від опори A (рис. 2.7, а). Знайти реакції опор A і B , якщо $AB = 6 \text{ м}$. Вагою ферми знехтувати.

Розглянемо рівновагу ферми. Для неї в'язями являються опори в точках A і B . Лінія дії реакції опори A перпендикулярна контактній площині. Точка C є перетин лінії дії сили $\vec{P}$ і реакції $\vec{R}_A$.

Тоді лінія дії реакції $\vec{R}_B$ перетинає точку C . Знайдемо кут α .

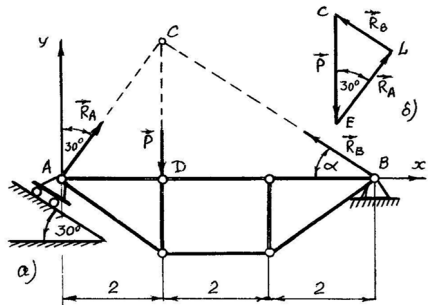


Рис. 2.7

$$\text{З } \triangle ACD \quad CD = AD \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ (м)}.$$

$$\text{З } \triangle DBC \quad CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{12 + 16} = 5,29 \text{ (м)}.$$

Тоді

$$\sin \alpha = \frac{CD}{CB} = \frac{3,46}{5,29} = 0,65; \quad \cos \alpha = \frac{DB}{CB} = \frac{4}{5,29} = 0,76; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{DB} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = 0,87.$$

Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; R_A \cos 60^\circ - R_B \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; R_A \sin 60^\circ + R_B \sin \alpha - P = 0. \quad (2)$$

З виразу (1) $R_B = \frac{R_A \cos 60^\circ}{\cos \alpha} = \frac{R_A}{2 \cos \alpha}.$

Підставимо R_B в вираз (2).

$$R_A \sin 60^\circ - P + \frac{R_A}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0;$$

$$\frac{1}{2} R_A \operatorname{tg} \alpha - P + R_A \sin 60^\circ = 0;$$

$$R_A \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha + \sin 60^\circ \right) = P.$$

Звідси $R_A = 2,31 \text{ (кН)}$. Тоді $R_B = \frac{2,31}{2 \times 0,76} = 1,52 \text{ (кН)}$, $R_B = 1,52 \text{ (кН)}$.

Читачу даємо можливість перевірити ці результати за допомогою силового трикутника (рис. 2.7,б).

Задача 2.5.

$$P = 4 \text{ кН}$$

$$a = 6 \text{ м}$$

$$h = 2\sqrt{3} \text{ м}$$

$$R_A = ?; R_B = ?$$

Плоска трьохшарнірна арка ABC сприймає на себе навантаження $\vec{P}$ (рис. 2.8,а). Знайти реакції опорних шарнірів A і B , а також зусилля в шарнірі C , якщо $a = 6 \text{ м}$, $h = 2\sqrt{3} \text{ м}$.

Роз'єднаємо арку на дві частини по шарніру C (рис. 2.8,б). Розглянемо спочатку ліву частину арки, яка вільна від зовнішніх сил. На неї діють

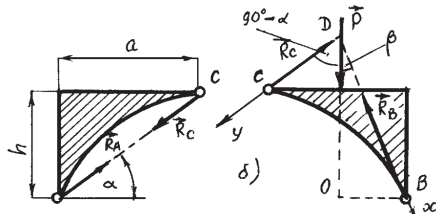
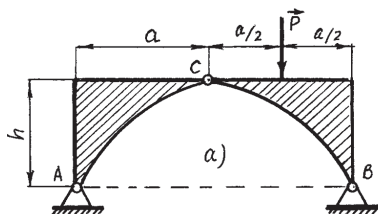


Рис. 2.8

тільки дві сили – реакції шарніра A і шарніра C . Згідно аксіоми 1 частина арки AC буде в рівновазі, якщо $\vec{R}_A = -\vec{R}_C$.

Розглянемо тепер праву частину CB арки. Ліва половина арки діє на праву в протилежну сторону (рис. 2.8,б). На праву арку діють три сили $\vec{R}_C$, $\vec{P}$ і невідома реакція опори B $\vec{R}_B$. Точка D – точка перетину сил $\vec{R}_C$ і $\vec{P}$. За теоремою 1.2 лінія дії реакції $\vec{R}_B$ проходить через точку D .

Використаємо аналітичний спосіб.

$$\text{Спочатку знайдемо кут } \alpha: \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \alpha = 30^\circ$$

$$\text{З } \triangle CDK \quad DK = CK \operatorname{tg} 30^\circ = 3 \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}; \quad DK = \sqrt{3} \text{ м.}$$

Розглянемо подібні трикутники BOD і LKD .

$$\frac{OB}{KL} = \frac{OD}{KD}; \quad KL = \frac{OB \cdot KD}{OD}; \quad OB = \frac{a}{2} = 3 \text{ м}; \quad OD = h + DK = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} (\text{м}).$$

$$\text{Тоді } KL = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 1 (\text{м}); \quad KL = 1 (\text{м}).$$

$$\text{З } \triangle DKL \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{KL}{DK} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \beta = 30^\circ; \quad \beta = \alpha = 30^\circ$$

Це означає, що між сторонами CD і DL кут 90° .

Початок осей координат виберемо в точці D , вісь y спрямуємо по стороні DC , а вісь x – по DL .

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -R_B + P \cos \beta = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -R_C + P \cos(90^\circ - \alpha) = 0. \quad (2)$$

$$\text{З виразу (1) } R_B = P \cos \beta = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} (\kappa H); \quad R_B = 2\sqrt{3} (\kappa H).$$

$$\text{З виразу (2) } R_C = P \sin \alpha = 2 (\kappa H); \quad R_C = 2 (\kappa H); \quad R_A = R_C = 2 (\kappa H).$$

2.5. Задачі для самостійного розв'язування

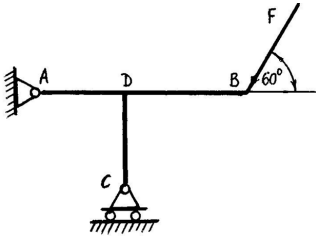


Рис. 2.9

Задача 2.6 (рис. 2.9).

Невагомі стержні AB і CD жорстко з'єднані під прямим кутом в точці D . $AD = DB$. Знайти реакції рухомої опори C і шарніра A , якщо в точці B стержня під кутом 60° прикладена сила $F = 0,3$ кН.

Відповідь: $R_A = 0,3$ кН; $R_C = 0,3 \cdot \sqrt{3}$ кН

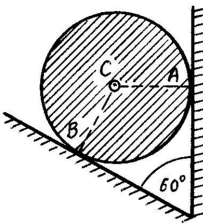


Рис. 2.10

Задача 2.7 (рис. 2.10)

Однорідний гладенький циліндр вагою $1,2$ кН утримується між вертикальною площиною і площиною, відхиленою від неї на кут 60° . Знайти силу тиску циліндра на ці площини.

Відповідь: $N_1 = 0,693$ кН; $N_2 = 0,693$ кН.

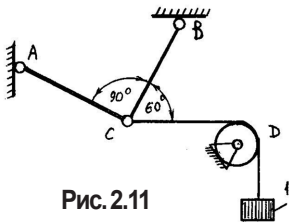


Рис. 2.11

Задача 2.8 (рис. 2.11).

Два невагомі стержні AC і BC з'єднані шарнірно в точці C , до якої через блок D підвішено тіло 1 вагою 12 Н. Знайти реакцію стержня BC , якщо кут $\alpha = 60^\circ$.

Відповідь: $R_B = -6$ Н.

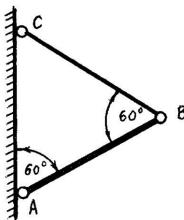


Рис. 2.12

Задача 2.9 (рис. 2.12).

Стержень AB прикріплений до вертикальної стінки за допомогою шарніра A і утримується під кутом 60° до стінки за допомогою невагомий каната BC , який утворює зі стержнем також кут в 60° . Знайти величину і напрям реакції шарніра A , якщо відомо, що вага стержня 120 Н.

Відповідь: $R_A = 104$ Н.

Задача 2.10 (рис. 2.13).

Знайти зусилля в невагомих стержнях 1 і 2, які в точках A , B і C мають шарнірні з'єднання.

В точці C прикладені три сили: вертикально вниз сила $P_1 = 2 \text{ кН}$, горизонтальна сила $P_2 = 4 \text{ кН}$ і сила $P_3 = 6 \text{ кН}$ складає кут в 70° з вектором сили $\vec{P}_1$.

Відповідь: $S_1 = 10,37 \text{ кН}$; $S_2 = -0,77 \text{ кН}$.

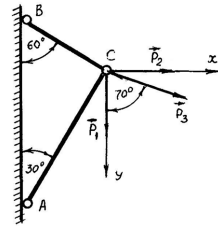


Рис. 2.13

3. Система сил, довільно розміщених на площині

В цьому розділі розглянемо систему сил, які довільно розміщені в одній площині. Введемо нові поняття: момент сили відносно точки і пара сил.

3.1. Момент сили відносно точки. Пара сил. Момент пари сил

Під дією сили тіло може рухатись поступально, або обертатись. Обертальна дія сили виражається моментом сили.

Момент сили відносно точки O дорівнює добутку модуля сили на плече.

Плече – це найкоротша відстань лінії дії сили до точки O (рис. 3.1).

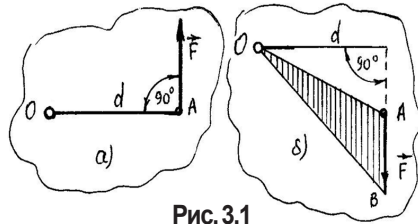


Рис. 3.1

$$M_o(\vec{F}) = \pm Fd. \quad (3.1)$$

Якщо обертальний рух тіла під дією моменту сили виконується проти ходу годинникової стрілки, то цей момент має знак “+” (рис. 3.1,а), якщо за ходом годинникової стрілки – то знак “-” (рис. 3.1.б).

Розмірність моменту сили $[M_o] = [F] \cdot [d] = \text{Н.м}$.

З рисунка 3.1(б) видно, що

$$M_o(\vec{F}) = 2 \text{ пл } \Delta OAB. \quad (3.2)$$

Відмітимо слідуючі властивості моменту сили відносно точки:

1. Момент сили відносно точки не зміниться при перенесенні точки прикладання сили вздовж її лінії дії, так як при цьому не змінюється ні модуль сили, ні довжина його плеча.

2. Момент сили відносно точки дорівнює нулю тільки тоді, коли модуль сили дорівнює нулю, або коли лінія дії сили перетинає цю точку (тому що в цьому випадку довжина плеча дорівнює нулю).

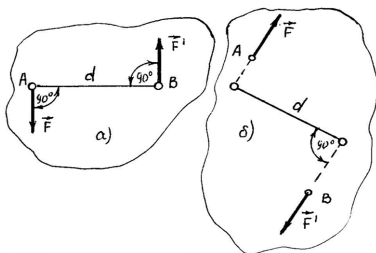


Рис. 3.2

Пара сил – це дві сили, які рівні по величині, протилежно напрямлені, лінії дії їх паралельні і знаходяться на відстані d одна від одної (рис. 3.2).

$$\vec{F} = -\vec{F}'$$

d – плече пари сил.

Під дією пари сил тіло буде обертатись. Якщо під дією пари сил тіло буде обертатись проти ходу годинникової стрілки, то цей момент пари сил має знак “+”

(рис. 3.2,а), якщо за ходом годинникової стрілки – то знак моменту “-” (рис. 3.2,б).

Теорема 3.1. (Теорема про момент пари сил).

Момент пари сил дорівнює добутку однієї із сил пари на плече пари сил.

$$M = \pm Fd . \quad (3.3)$$

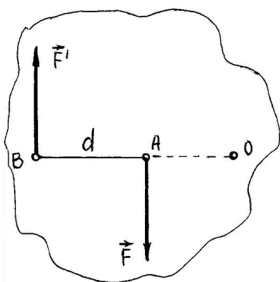


Рис. 3.3

Доведення. Нехай сили $\vec{F}$ і $\vec{F}'$ складають пару сил (рис. 3.3).

Моменти сил $\vec{F}$ і $\vec{F}'$ відносно довільної точки O будуть:

$$M_1 = F \cdot AO. \quad (a) \quad M_2 = F' \cdot AO. \quad (б)$$

Знайдемо алгебраїчну суму моментів сил $\vec{F}$ і $\vec{F}'$, що складають пару сил, відносно точки O .

$$M = M_1 + M_2 = F \cdot AO - F' \cdot BO = F(AO - BO) = -F \cdot d.$$

Таким чином, сума моментів сил, що складають пару сил, не залежить від вибору точки O , а вираз $M = \pm F \cdot d$ – є характеристикою обертового моменту пари сил.

Таким чином, сума моментів сил, що складають пару сил, не залежить від вибору точки O , а вираз $M = \pm F \cdot d$ – є характеристикою обертового моменту пари сил.

3.2. Теорема про паралельне перенесення сил і про перенесення пари сил

В пункті 1.2 теоремою 1.1 доведено, що силу можна переносити по лінії її дії і від цього дія сили на тіло не зміниться.

Виникає два питання:

- 1) Чи зміниться дія сили на тіло, якщо її перенести паралельно самій собі?
- 2) Чи зміниться дія пари сил на тіло, якщо її перенести в інше місце в площині її дії?

Відповіді на ці питання дають теореми 3.2 і 3.3.

Теорема 3.2. Силу можна перенести паралельно самій собі, якщо до цієї сили приєднати пару сил, момент якої дорівнює моменту сили відносно точки, куди переносять цю силу.

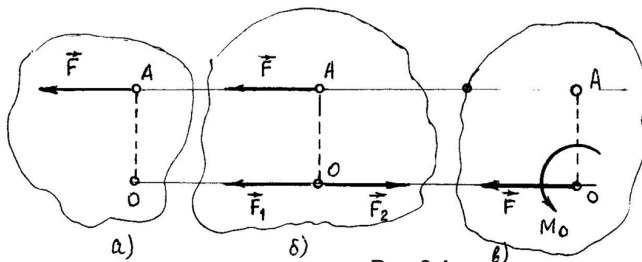


Рис. 3.4

Доведення. Нехай в точці A діє сила $\vec{F}$ (рис. 3.4,а). В точці O прикладемо дві зрівноважені сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ причому $F_1 = F_2 = F$ (рис. 3.4,б). Це можна зробити згідно аксіоми 2. Ми маємо вже три сили, з яких сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ складають пару сил. З рисунка 3.4.б видно, що сила діє вже в точці O , і, крім цього, є пара сил з моментом $M = F \cdot AO$. Щоб кожного разу не малювати пару сил, домовимось пару сил малювати стрілкою, як показано на рис. 3.4 (в).

Теорема 3.3. Пару сил можна переносити в площині її дії і від цього її дія на тіло не зміниться.

Доведення. Нехай в площині діє пара сил з плечем AB . Момент паєри $M = +F \cdot AB$. Візьмемо в довільному місці на цій площині відрізок $CD = AB$ і на це місце перенесемо пару сил. Спочатку перенесемо сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ по лінії їх дії в точки L і K . Від цього дія

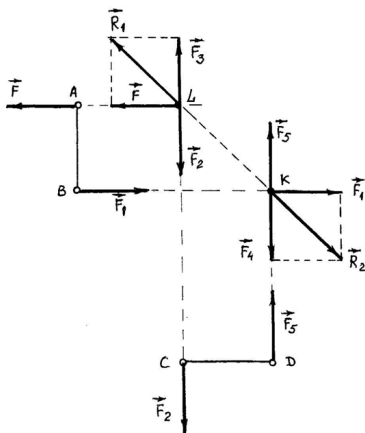


Рис. 3.5

сил на тіло не зміниться. Приєднаємо до цих сил в точках K і L зрівноважені сили $\vec{F}_2 = -\vec{F}_3, \vec{F}_5 = -\vec{F}_4$, причому $F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F$.

Дію сил $\vec{F}_1, \vec{F}_3$ замінимо силою $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$, а дію сил $\vec{F}_1, \vec{F}_4$ – силою $\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$. Сили $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$ – зрівноважені і їх можна відкинути. Залишаються сили $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_5$, які по лінії їх дії переносимо в точки C і D . Отримали пару сил, момент якої $M_2 = F_2 \cdot CD$, що співпадає з моментом M_1 як по величині, так і по знаку.

3.3. Теорема про додавання пар сил. Умова рівноваги системи пар сил

Перед тим, як довести цю теорему, розглянемо таке означення.

Означення. Дві пари сил називаються еквівалентними, якщо в них однакові моменти як по величині, так і по знаку.

Якщо замість пари сил з моментом $M_1 = +F \cdot d$, що діє на тіло, прикласти другу пару сил з моментом $M_2 = +Q \cdot h$ і при цьому $M_1 = M_2$ ($Fd = Qh$), то стан тіла від цього не зміниться. Еквівалентні пари можуть відрізнятися своїм місцезнаходженням в площині, модулем сили, довжиною плеча, аби тільки в них були однакові моменти пари по величині і по знаку.

Теорема 3.4. (Теорема про додавання пар сил).

Якщо в одній площині діє декілька пар сил, то їх дію можна замінити дією однієї пари сил, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів заданих пар сил.

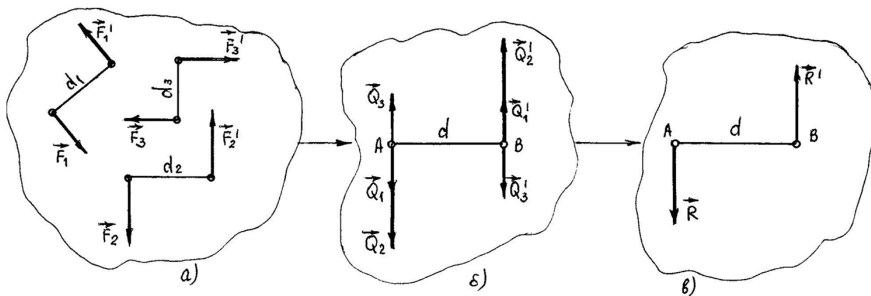


Рис. 3.6

Доведення:

Нехай на тверде тіло в одній площині діє три пари сил з моментами: $M_1 = F_1 \cdot d_1$, $M_2 = F_2 \cdot d_2$, $M_3 = F_3 \cdot d_3$ (рис. 3.6, а). Перетворимо ці пари в еквівалентні з плечем $d = AB$.

$$M_1 = F_1 \cdot d_1 = Q_1 d; \quad M_2 = F_2 \cdot d_2 = Q_2 d; \quad M_3 = -F_3 \cdot d_3 = -Q_3 d.$$

Перенесемо сформовані еквівалентні пари до плеча АВ. В точці А будуть сили Q_1, Q_2, Q_3 , а в точці В – Q_1', Q_2', Q_3' (рис. 3.6,б). Ці сили діють по прямим лініям і їх дію замінимо силами, модулі яких $R = Q_1 + Q_2 - Q_3$, а $R' = Q_1' + Q_2' - Q_3'$ (рис. 3.6,в). Ці сили складають пару сил (R, R') з плечем $AB=d$. Знайдемо момент цієї пари сил.

$$M = R \cdot d = (Q_1 + Q_2 - Q_3) \cdot d = Q_1 d + Q_2 d - Q_3 d = M_1 + M_2 - M_3.$$

Це і треба було довести.

Якби задана система пар сил мала n пар, розміщених в одній площині, то отримали б одну рівнодійну пару сил з моментом

$$M = \sum_{k=1}^n M_k. \quad (3.4)$$

Виведемо тепер умову рівноваги системи пар сил, розташованих в одній площині.

Система пар сил, розміщених в одній площині, як тільки що було доведено, може бути замінена еквівалентною парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів заданих пар сил (3.4).

Для того, щоб система пар сил, розміщених в одній площині, зрівноважувалась, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів всіх даних пар дорівнювала нулю.

$$M = \sum_{k=1}^n M_k = 0. \quad (3.5)$$

3.4. Зведення плоскої системи сил до даного центра. Головний вектор і головний момент

Розглянемо плоску довільно розміщену систему сил. Як завжди, ми повинні розв'язати дві основні задачі статyki:

1) спростити цю систему сил (як що це можливо) і 2) знайти умови рівноваги цієї системи сил.

Нехай в одній площині діє n сил, розташованих довільно (рис. 3.7,а).

Візьмемо в площині дії сил довільну точку О, яку назовемо центром зведення. Використовуючи теорему 3.2, перенесемо сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$ паралельно самим собі в центр О. Це можна зробити, якщо до цих сил приєднати пари сил з момента-

ми $M_1, M_2 \dots M_n$ (рис. 3.7,б). Як видно з рисунка 3.7(б), ми отримали приведену систему збіжних сил і зведену плоску систему пар сил. Зведену систему збіжних сил можна замінити однією силою $\vec{R}'$ (дивись п. 2.1), а зведену плоску систему пар сил можна замінити однією парою сил з моментом M_0 (дивись п. 3.3).

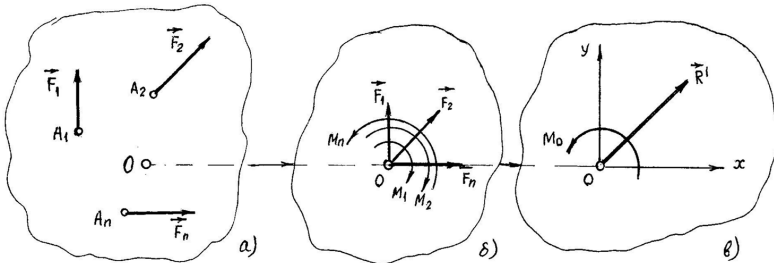


Рис. 3.7

Тоді

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k; \quad F_{Kx} \quad (3.6)$$

$$M_0 = \sum_{k=1}^n M_k = \sum_{k=1}^n Mo(\vec{F}_k). \quad (3.7)$$

Величина $\vec{R}'$, яка дорівнює геометричній сумі всіх сил системи (3.6), називається **головним вектором цієї системи**.

Величина M_0 , яка дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил відносно центра зведення (3.7), називається **головним моментом системи відносно центра зведення**.

Ми довели теорему Пуансо. Луї Пуансо (1777–1859) – французький механік, математик, член Паризької АН.

Теорема 3.5. (Теорема Пуансо). Довільну плоску систему сил, що діє на тверде тіло, в загальному випадку можна замінити однією силою, рівною головному вектору системи сил і прикладений в довільно вибраному центрі зведення O , і однією парою сил з моментом, рівним головному моменту системи сил відносно центра зведення O (рис. 3.7,в).

Примітка: між поняттям рівнодійної і головного вектора є слідуюча різниця.

Рівнодійна – це одна сила, що замінює дію всієї системи сил.

Головний вектор – це сила, що замінює дію зведеної системи збіжних сил, і крім нього, діє ще пара сил (головний момент).

3.5. Аналітичний спосіб знаходження головного вектора плоскої довільної системи сил

В пункті 2.2 аналітичним способом було знайдено рівнодійну системи збіжних сил. Аналогічно знаходиться і головний вектор $\vec{R}'$ довільної плоскої ситими сил.

$$R'_x = \sum_{k=1}^n A_{Kx}; \quad R'_y = \sum_{k=1}^n F_{Ky}. \quad (3.8)$$

$$R' = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{Kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{Ky}\right)^2}. \quad (3.9)$$

$$\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{R'_x}{R'}; \quad \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{R'_y}{R'}. \quad (3.10)$$

По формулам (3.8) знаходяться проекції головного вектора на координатні осі, по формулі (3.9) – модуль головного вектора, а по формулам (3.10) – напрям головного вектора.

3.6. Окремі випадки зведення плоскої довільної системи сил

Як підкреслювалось в теоремі 3.5, в загальному випадку довільна плоска система сил зводиться до головного вектора $\vec{R}'$ і головного моменту M_0

$$\vec{R}' \neq 0; \quad \overline{M}_0 \neq 0.$$

Але можливі окремі випадки.

1) Нехай в площині діють такі сили, що головний вектор $\vec{R}' = 0$, а головний момент $M_0 \neq 0$. В цьому випадку система сил зводиться до однієї пари сил, з моментом M_0 , і під дією цієї пари сил тіло буде виконувати обертальний рух.

2) Нехай в площині діють такі сили, що головний вектор $\vec{R}' \neq 0$, а головний момент $M_0 = 0$. В цьому випадку система сил зводиться до однієї сили $\vec{R}$, тобто до рівнодійної, точка прикладання якої співпадає з центром O зведення.

3) Нехай в площині діють такі сили, що $\vec{R}' \neq 0$, $M_0 \neq 0$. Доведемо, що і цьому випадку система сил зводиться до рівнодійної, але лінія дії її не проходить через центр O . Проілюструємо це рисунком 3.8. На рисунку 3.8(а) показана пара сил з моментом M_0 , а на рисунку 3.8(б) ця пара сил представлена з урахуванням

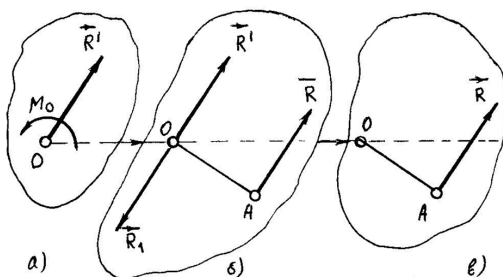


Рис. 3.8

плеча OA пари, причому $R = R_1 = R'$, а момент $M_0 = R' \cdot OA$. Сили $\vec{R}'$ і $\vec{R}_1$ зрівноважені і їх можна відкинути. Залишилась одна сила $\vec{R}$ (рис. 3.8,в). Таким чином і в цьому випадку система сил зводиться до рівнодійної при-

чому точка прикладання її знаходиться від центра зведення O на відстані

$$OA = M_0 / R'. \quad (3.11)$$

Теорема 3.6. (Теорема Варіньона. (П'єр Варіньон (1654–1722) – французький математик та механік).

Якщо рівнодійна плоскої довільної системи сил існує, то її момент відносно довільної точки дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил цієї системи відносно тієї ж точки.

$$M_0(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k). \quad (3.12)$$

Доведення. З рисунка 3.8(в) видно, що момент рівнодійної R відносно точки O дорівнює $M_0(\vec{R}) = R \cdot OA$. Згідно (3.11) $OA = \frac{M_0}{R'}$. Тоді $M_0(\vec{R}) = R \cdot \frac{M_0}{R'} = M_0$. Але $M_0 = \sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k)$ (дивись (3.7)).

В результаті маємо $M_0(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k)$. Теорема доведена.

3.7. Аналітичні умови рівноваги плоскої довільної системи сил

Розглянемо останній із можливих випадків зведення.

4) При зведенні сил до даного центра може виявитися, що

$$\vec{R}' = 0; M_0 = 0. \quad (3.13)$$

Умови (3.13) є необхідними і достатніми умовами рівноваги довільної плоскої системи сил.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб одночасно головний вектор і головний момент цієї системи сил відносно довільно вибраного центра зведення дорівнювали нулю.

Підставляючи рівності (3.13) в (3.7) і (3.9), отримаємо аналітичні умови рівноваги плоскої довільної системи сил:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{k_x} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{k_y} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_0(\overrightarrow{F_k}) &= 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Рівності (3.14) є основною формою умов рівноваги довільної плоскої системи сил. Ці рівності можуть бути виражені і в другій формі (приводимо їх без доведення). Бажаючи можуть ознайомитись з доведенням в підручниках [2], [13], [15].

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{k_x} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\overrightarrow{F_k}) &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_B(\overrightarrow{F_k}) &= 0,\end{aligned}\tag{3.15}$$

де вісь OX не перпендикулярна лінії, що проходить через точки A і B .

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n M_A(\overrightarrow{F_k}) &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_B(\overrightarrow{F_k}) &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_C(\overrightarrow{F_k}) &= 0.\end{aligned}\tag{3.16}$$

де точки A , B і C лежать в площині дії сил і через них можна провести трикутник.

4. Методичні вказівки до розв'язування задач про рівновагу плоскої довільної системи сил

4.1. Загальні зауваження

До розв'язування задач необхідно приступати тільки після попереднього вивчення теоретичного матеріалу. Найбільш загальним методом розв'язування задач на рівновагу є аналітичний метод.

Послідовність (методика) розв'язування задач статyki приведена в розділі 2 (пункт 2.4). Цієї послідовності необхідно дотримуватись і при розв'язуванні задач на рівновагу плоскої довільної системи сил.

Для отримання більш простих рівнянь рівноваги потрібно:

1) складаючи рівняння проекцій сил, необхідно одну з координатних осей напрямити перпендикулярно до лінії однієї, а якщо можливо, то і двох невідомих сил; при цьому проекція сили на цю вісь буде дорівнювати нулю, а на перпендикулярну вісь сила спроектується в натуральну величину;

2) складаючи рівняння моментів для плоскої системи сил, доцільно вибрати центр моментів в тій точці, де більше всього невідомих сил; тоді в рівняння моментів всіх сил увійде тільки одна невідома сила.

В тих випадках, коли при знаходженні момента сили відносно точки важко знайти плече сили, то буває доцільно цю силу розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові і шукати момент цих складових сил відносно даної точки.

В більшості задач статyki неможливо наперед вказати напрям реакції опори. Тому в цих випадках невідому реакцію треба розкласти на дві складові, які напрямляються вздовж відповідних осей координат, і ввести їх в рівняння рівноваги в якості невідомих. Якщо в результаті розв'язання рівнянь величина якої-небудь складової реакції буде від'ємна, то це означає, що в дійсності ця складова реакції напрямлена в протилежну сторону вибраного напрямку.

Якщо за умовою задачі необхідно знайти дію даного тіла на його в'язь, то в рівняння рівноваги тіла необхідно вводити реакцію в'язі. Сила, яку шукаємо, буде рівна по величині і протилежна по напрямку знайденій реакції в'язі.

Перед розв'язуванням задачі необхідно встановити, чи статично визначена задача, чи ні.

Ті задачі, де кількість невідомих реакцій в'язей (враховуючи окремі складові) дорівнює кількості незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної конструкції, називаються *статично визначеними*. Якщо ж кількість невідомих реакцій в'язей виявиться більше кількості незалежних рівнянь рівноваги конструкції, то такі задачі називаються *статично невизначеними*. В останньому випадку ці задачі можуть бути розв'язані методами опору матеріалів.

4.2. Довільна плоска система сил

Задача 4.1.

$$\begin{aligned} G &= 2 \text{ кН} \\ q &= 2 \text{ кН/м} \\ F &= 8 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_A &=?; \\ R_B &=? \end{aligned}$$

На балку AB вагою $G=2 \text{ кН}$ діє розподілене навантаження інтенсивністю $q=2 \text{ кН/м}$ і зосереджена сила $F=8 \text{ кН}$. Знайти реакції опор A і B . Розміри показані на рисунку 4.1(a).

Розглянемо рівновагу балки AB . Для неї в'язи являються опори в точках A і B . Опора в точці A – нерухомий шарнір, в точці B – рухомий шарнір. Звільнімося від в'язей (дивись пункт 1.4). Початок системи координат вибираємо в точці A . На ділянці CB діє розподілене навантаження. Дію розподіленого навантаження замінимо дією зосередженої сили $Q=q \cdot l$ (4.1)

Так як розподілене навантаження рівномірне, то сила Q прикладена в точці D – середині відрізка CB . $CD=DB=1,5 \text{ м}$ (рис. 4.1,б)

Складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил в формі (3.14):

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_A - F \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad Y_A + R_B - F \sin 30^\circ - G - Q = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -F \sin 30^\circ \cdot 1,5 - G \cdot 3 - Q \cdot 4,5 + R_B \cdot 6 = 0. \quad (3)$$

З рівняння (1) знаходимо: $X_A = F \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ (кН)}$.

З рівняння (3) знаходимо: $R_B = \frac{F \sin 30^\circ \cdot 1,5 + G \cdot 3 + Q \cdot 4,5}{6} = 6,5 \text{ (кН)}$.

З рівняння (2) $Y_A = F \sin 30^\circ + G + Q - R_B = 5,5 \text{ (кН)}$.

Зробимо перевірку результатів. Для цього складемо таке рівняння рівноваги, щоб в нього ввійшло якнайбільше знайдених раніше невідомих реакцій в'язей, і якщо це рівняння після підстановки числових значень реакцій буде дорівнювати нулю, то це означає, що реакції знайдено вірно.

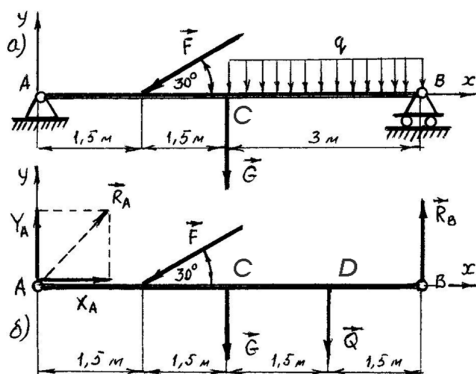


Рис.4.1

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot 3 + F \sin 30^\circ \cdot 3 - Q \cdot 1,5 + R_B \cdot 3 = -5,5 \cdot 3 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - 6 \cdot 1,5 + 6,5 \cdot 3 = 0.$$

$$\text{Реакція в точці A } R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{6,93^2 + 5,5^2} = 8,85 \text{ (кН)}.$$

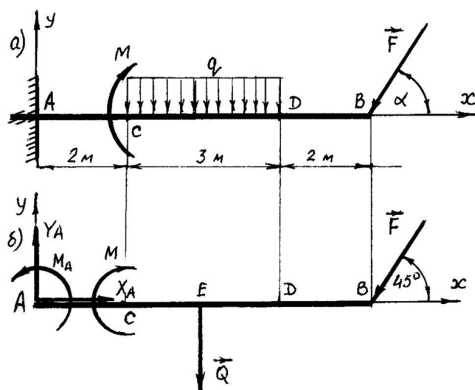


Рис. 4.2

Задача 4.2.

$$q = 1,5 \text{ кН/м}$$

$$F = 6 \text{ кН}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$M = 4 \text{ кНм}$$

$$R_A = ?; M_A = ?$$

На балку AB з за-
щемленим кінцем
діє на ділянці CD
рівномірно розпо-
ділене наванта-
ження інтенсивні-
стю $q = 1,5 \text{ кН/м}$, в

точці B діє сила $F = 6 \text{ кН}$ під ку-
том $\alpha = 45^\circ$ і, крім цього, на бал-
ку діє пара сил з моментом $M = 4$
 кНм . Знайти реакції защемлення.
Розміри вказані на рисунку 4.2(а).
Вагу балки не враховувати.

Розглянемо рівновагу балки AB . Для неї в'язку є опора в точці A (жорстке защемлення). Звільнимося від в'язи і замінимо її дію на балку реакціями X_A , Y_A , M_A , де M_A – реактивний момент (рис. 4.2(б)).

Розподілене навантаження замінимо зосередженою силою

$$Q = q \cdot l = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ (кН)}.$$

Складемо рівняння рівноваги в формі (3.14):

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_A - F \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad Y_A - F \sin 45^\circ - Q = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A - M - Q \cdot 3,5 - F \sin 45^\circ \cdot 7 = 0. \quad (3)$$

$$\text{З рівняння (1) знаходимо: } X_A = F \cos 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,24 \text{ (кН)}; \quad X_A = 4,24 \text{ кН}.$$

$$\text{З рівняння (2): } Y_A = F \sin 45^\circ + Q = 4,5 + 6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 8,74 (\text{кН}); \quad Y_A = 8,74 \text{ кН};$$

$$\text{З рівняння (3): } M_A = M + Q \cdot 3,5 + F \sin 45^\circ \cdot 7 = 4 + 4,5 \cdot 3,5 + 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 = 49,44 (\text{кН});$$

$$M_A = 49,44 \text{ кН}.$$

$$\text{Зробимо перевірку: } \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = M_A - Y_A \cdot 7 - M + Q \cdot 3,5 =$$

$$= 49,45 - 8,74 \cdot 7 - 4 + 4,5 \cdot 3,5 = 0,02 \approx 0.$$

Задача 4.3.

$l = 6 \text{ м}$
 $q_{\max} = 3 \text{ кН/м}$
 $F = 4 \text{ кН}$
 $X_A = ?, Y_A = ?$
 $M_A = ?$

Знайти реакції в жорсткому защемленні, якщо інтенсивність розподіленого навантаження $q_{\max} = 3 \text{ кН/м}$, а зосереджена сила $F = 4 \text{ кН}$. Розміри балки в метрах показані на рисунку 4.3(а). Вагу балки не враховувати.

Розглянемо рівновагу балки ABD . В точці A – жорстке защемлення (див. задачу 4.2). На ділянці BD діє розподілене навантаження по закону трикутника і досягає найвищої інтенсивності в точці D .

Знайдемо рівнодійну розподіленого навантаження.

Рівнодійна трикутного навантаження чисельно дорівнює половині добутку максимальної інтенсивності на довжину навантаженої ділянки, а лінія її дії проходить на відстані, рівній $2/3$ довжини ділянки від кінця, на якому інтенсивність дорівнює нулю.

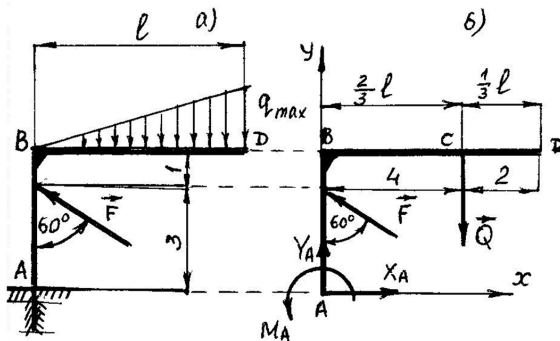


Рис. 4.3

$$Q = \frac{q_{\max} \cdot l}{2}; \quad BC = \frac{2}{3}l; \quad CD = \frac{1}{3}l. \quad (\text{рис. 4.3, б}). \quad (4.2)$$

$$\text{В даному випадку } Q = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 (\text{кН}). \quad BC = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 (\text{м}); \quad CD = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 (\text{м}).$$

Реакції опори A показані на рисунку 4.3(б).

Запишемо рівняння рівноваги в формі (3.14):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - F \sin 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + F \cos 60^\circ - Q = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A + F \cdot \sin 60^\circ \cdot 3 - Q \cdot 4 = 0. \quad (3)$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо: $X_A = 3,46$ кН; $Y_A = 7$ кН; $M_A = 25,61$ кНм.

Для перевірки запишемо рівняння:

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot 6 + X_A \cdot 4 + M_A - F \cos 60^\circ \cdot 6 - F \sin 60^\circ \cdot 1 + Q \cdot 2 = -0,01 \approx 0.$$

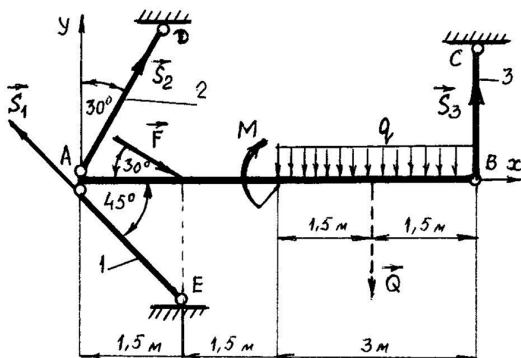


Рис. 4.4

Задача 4.4.

$F = 20$ кН
 $M = 30$ кНм
 $q = 10$ кН/м

$S_1 = ?$ $S_2 = ?$
 $S_3 = ?$

Знайти зусилля в стержнях, які підтримують балку AB (рис. 4.4). Вагою стержнів і балки AB знехтувати.

Розглянемо рівновагу балки AB . Для неї в'язями є стержні 1, 2, 3. Звільнімося від цих стержнів.

Стержні невагомі, на кінцях мають шарнірні з'єднання, тому реакції цих стержнів направлені по стержням. Це S_1, S_2, S_3 . Дію розподіленого навантаження замінимо дією зосередженої сили $Q = q \cdot l = 10 \cdot 3 = 30$ (кН). На рисунку 4.4, сила Q показана штриховою лінією. Запишемо рівняння рівноваги в формі (3.15):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -S_1 \cos 45^\circ + S_2 \sin 30^\circ + F \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -F_1 \sin 30^\circ \cdot 1,5 - M - Q \cdot 4,5 + S_3 \cdot 6 = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad -S_1 \sin 45^\circ \cdot 6 - S_2 \cos 30^\circ \cdot 6 + F \sin 30^\circ \cdot 4,5 - M + Q \cdot 1,5 = 0. \quad (3)$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо: $S_1 = 20,72 \text{ кН}$, $S_2 = -5,36 \text{ кН}$, $S_3 = 30 \text{ кН}$.
Зробимо перевірку.

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = S_2 \cos 30^\circ + S_1 \sin 45^\circ - F \sin 30^\circ - Q + S_3 \approx 0,05$$

Знак “–” при S_2 показує, що в дійсності реакція стержня 2 напрямлена в протилежну сторону вибраному напрямку.

Зусилля в стержнях чисельно дорівнюють реакціям відповідних в'язей.

4.3. Розрахунок плоских ферм

Фермою називається геометрично незмінна конструкція, яка складається з прямолінійних брусів, з'єднаних між собою шарнірами, і служить для прийняття зовнішніх навантажень і передачі їх на опори. Якщо зовнішні сили прикладені тільки до шарнірів, то ферма називається *стержневою*, а її бруси – *стержнями*. Якщо зовнішні сили прикладені не тільки до шарнірів, а і до точок самих стержнів, то така ферма називається *балочною*, а бруси її – *балками*. Балки балочної ферми крім розтягу – стиску зазнають ще і згин. *Плоскою називається ферма, бруси якої розміщені в одній площині.* Ми будемо розглядати тільки *плоскі стержневі ферми*.

Точка, де стержні з'єднуються шарнірами, називається *вузлом*. Не всяке шарнірне з'єднання стержнів є фермою. По означенню ферма повинна забезпечувати незмінність її форми (жорсткість). Самою простою фермою є стержневий трикутник (рис. 4.5, а). Якщо з'єднати чотири стержні шарнірами (рис. 4.5, б), то таке шарнірне з'єднання під дією прикладених в вузлах сил буде змінювати свою форму і не являється фермою. Таке з'єднання в механіці називається механізмом.

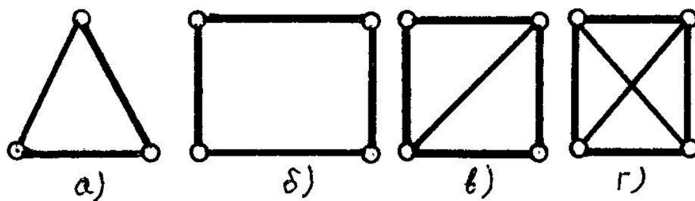


Рис. 4.5

Щоб прямокутник зробити фермою, достатньо з'єднати дві протилежні вершини стержнем (рис. 4.5,в). На рисунку 4.5(г) прямокутник також являється фермою. Між останніми фермами є різниця: ферма на рис. 4.5(в) не має зайвого стержня, а ферма на рис. 4.5(г) має один зайвий стержень.

Якщо з ферми неможливо зняти ні одного стержня, не змінивши її жорсткості, то таку ферму називають *фермою без зайвих стержнів*. Ми будемо розглядати ферми без зайвих стержнів.

В плоскій фермі без зайвих стержнів має місце слідуюча залежність між числом стержнів k і числом вузлів n :

$$k = 2n - 3. \quad (4.3)$$

Зробити розрахунок ферми – це знайти реакції опор і зусилля в усіх стержнях ферми. При цьому повинні виконуватись такі умови: а) всі стержні ферми невагомі і прямолінійні, б) тертя в шарнірах відсутнє, в) навантаження, які діють на ферму, лежать в її площині і прикладені тільки в вузлах. При виконанні таких умов стержні ферми будуть зазнавати тільки стиск або розтяг.

Розрахунок ферми починається з знаходження реакцій опор ферми. Після того, як реакції опор знайдені, можна приступати до визначення зусиль в стержнях ферми. Для знаходження зусиль в стержнях можна використати:

- 1) спосіб вирізання вузлів,
- 2) спосіб Ріттера.

Як це робиться розглянемо на конкретному прикладі.

Задача 4.5.

$$F_1 = 12 \text{ кН}; F_2 = 4 \text{ кН}$$

$$R_A = ? \quad R_B = ?$$

$$S_1 = ? , \dots , S_7 = ?$$

У ферми, зображений на рисунку 4.6, знайти реакції опор та зусилля в стержнях, якщо $F_1 = 12 \text{ кН}$, $F_2 = 4 \text{ кН}$.

Розглянемо рівновагу ферми в цілому. Для неї в'язями є опори в точках А і В. Звільнилося від в'язей (рис. 4.6).

1. Знайдемо реакції в'язей.

Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_A = 0; \quad (1)$$

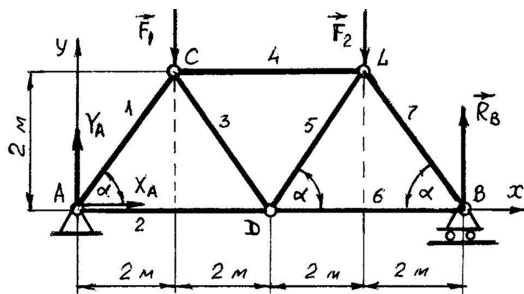


Рис. 4.6

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad Y_A + R_B - F_1 + F_2 = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 6 + R_B \cdot 8 = 0. \quad (3)$$

З цих рівнянь маємо: $X_A = 0$; $Y_A = 10$ кН; $R_B = 6$ кН.

Зробимо перевірку:

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot 4 + F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = -10 \cdot 4 + 12 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 0.$$

Тепер перейдемо до обчислення зусиль в стержнях ферми. Але спочатку перевіримо, чи є дана ферма статично визначена, тобто, чи виконується для неї залежність (4.3). Тут число вузлів $n=5$, стержнів $k=7$. Підставимо в (4.3) і отримаємо $7 = 2 \cdot 5 - 3$, тобто ця ферма статично визначена і жорстка.

2. Обчислення зусиль в стержнях ферми способом вирізання вузлів

Вузли ферми знаходяться в точках A, C, D, L, B . Під дією активних сил і опорних реакцій ферма в цілому знаходиться в рівновазі, а це означає, що в рівновазі буде знаходитися і кожний умовно вирізаний її вузол. Розрахунок потрібно починати з того вузла, де сходяться два стержні. В даному випадку в вузлах A і B сходяться по два стержні. Розрахунок почнемо з вузла A . Стержні 1 і 2, які сходяться в вузлі A ферми, є в'язями для цього вузла. Реакції цих стержнів напрямляємо по стержням від вузла (рис. 4.7,а).

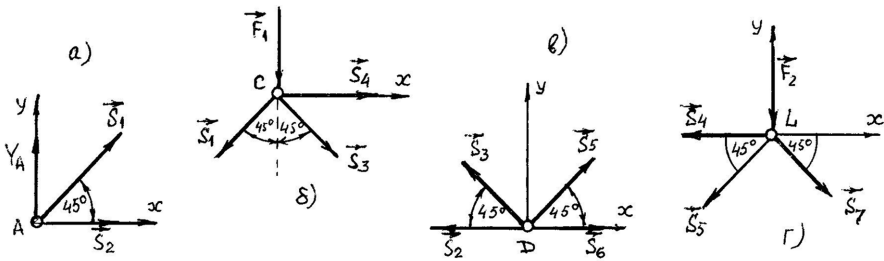


Рис. 4.7

Якщо під час розв'язування задачі виявиться, що числові значення зусиль в стержнях додатні, то ці стержні розтягуються, а якщо від'ємні – то стержні стискуються.

При розв'язуванні задачі необхідно знайти деякі кути. В нашому випадку:

$$\operatorname{tg} a = \frac{2}{2} = 1. \quad a = 45^\circ.$$

Після розгляду вузла A потрібно переходити до слідуючого вузла, у якого невідомих зусиль не більше двох. Цим вузлом є точка C (рис. 4.7,б). Після вузла C можна розглянути вузол D , або вузол L (рис. 4.7,в,г).

Для вузла A :

$$\sum_{i=1}^n F_{i_x} = 0; \quad S_2 + S_1 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i_y} = 0; \quad Y_A + S_1 \sin 45^\circ = 0.$$

Звідки знаходимо: $S_1 = -10\sqrt{2}$ кН, $S_2 = 10$ кН.

Стержень 2 розтягується, а стержень 1 стискується.

Для вузла C :

$$\sum_{i=1}^n F_{i_x} = 0; \quad S_4 + S_3 \sin 45^\circ - S_1 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i_y} = 0; \quad -S_1 \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ - F_1 = 0;$$

Звідки знаходимо: $S_3 = -2\sqrt{2}$ кН (стискується); $S_4 = -8$ кН (стискується).

Для вузла D :

$$\sum_{i=1}^n F_{i_x} = 0; \quad S_6 + S_5 \cos 45^\circ - S_2 - S_3 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i_y} = 0; \quad S_3 \sin 45^\circ + S_5 \sin 45^\circ = 0.$$

Звідки знаходимо: $S_5 = 2\sqrt{2}$ кН (розтягується), $S_6 = 6$ кН (розтягується).

Для вузла L :

$$\sum_{i=1}^n F_{i_x} = 0; \quad -S_4 + S_5 \cos 45^\circ + S_7 \cos 45^\circ = 0;$$

Звідки знаходимо: $S_7 = -6\sqrt{2}$ кН (стискується).

Для перевірки розрахунків доцільно для кожного вузла побудувати багатокутник сил. На рисунку 4.8 (а, б, в) показані багатокутники сил в вузлах A , B і L .

Для вузла A відкладаємо реакцію Y_A в певному масштабі і проводимо через

кінець і початок цього вектора напрямки реакцій $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$ до їх перетину (рис. 4.8, а).

Так як напрям сили Y_A нам відомий, то обходячи трикутник по периметру по напрямку Y_A , розставимо в ньому стрілки і тим самим знайдемо напрям невідомих реакцій $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$.

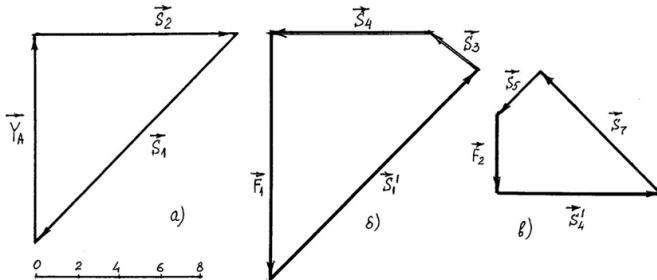


Рис. 4.8

Якщо умовно перенести вектори $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$ на стержні 1 і 2, що сходяться в вузлі A , то ми побачимо, що реакція $\vec{S}_1$ напрямлена по стержню 1 до цього вузла, отже стержень 1 стискується; реакція $\vec{S}_2$ напрямлена по стержню 2 від вузла, отже стержень 2 розтягується.

Після вузла A розглянемо вузол C . В цьому вузлі сходяться стержні 3 і 4, зусилля в яких ще не відомі, і стержень 1, зусилля в якому вже знайдено. Крім цього, на вузол C діє сила $\vec{F}_1$. Побудову цього силового багатокутника потрібно починати з відомих сил $\vec{F}_1$ і $\vec{S}_1'$. При цьому треба звернути увагу на те, що реакція $\vec{S}_1'$ стержня 1 з точкою прикладання C дорівнює по модулю і напрямлена протилежно реакції $\vec{S}_1$ цього стержня з точкою прикладання A , тобто $\vec{S}_1' = -\vec{S}_1$. Побудова багатокутника в вузлі C показана на рисунку 4.8(б). На рисунку 4.8(в) побудований багатокутник в вузлі L .

Заміряні в масштабі побудовані реакції стержнів чисельно повинні мало відрізнятися від знайдених аналітично.

3. Обчислення сил в стержнях способом розрізу (спосіб Ріттера).

(А. Ріттер (1826–1908) – відомий німецький вчений.)

Спосіб Ріттера – це аналітичний спосіб знаходження зусиль в стержнях ферми. Нехай в фермі (рис. 4.6) необхідно знайти зусилля тільки в стержнях 2, 3, 4. Щоб знайти, наприклад, зусилля в стержні 4 способом вирізання вузлів, необхідно було спочатку розглянути рівновагу вузла A , а потім вже вузла C , куди входить цей стержень. В цій процедурі немає потреби при використанні способу Ріттера.

Розріжемо ферму по стержням 2, 3, 4 на дві частини і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини. Реакції відкинutoї частини ферми будуть напрямлені по стержням 2, 3, 4. Як і раніше, ці реакції будемо напрямляти від вузла (рис. 4.9).

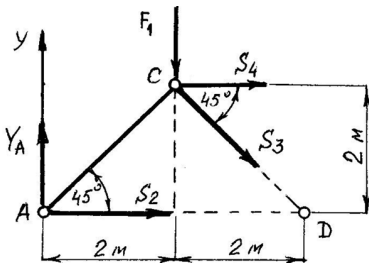


Рис. 4.9

Знайдемо реакцію $\overline{S_4}$. Для цього рівняння моментів сил запишемо відносно точки D. Чому відносно D? Тому що моменти невідомих реакцій $\overline{S_2}$ і $\overline{S_3}$ відносно цієї точки дорівнюють нулю.

$$\sum_{k=1}^n M_D(\overline{F_k}) = 0;$$

$$-Y_A \cdot 4 + F_1 \cdot 2 - S_4 \cdot 2 = 0.$$

Звідси знаходимо: $S_4 = -8$ кН.

Знайдемо реакцію $\overline{S_2}$. Рівняння моментів

сил запишемо відносно точки C:

$$\sum_{k=1}^n M_C(\overline{F_k}) = 0;$$

Звідси знаходимо $S_2 = 10$ кН.

Знайдемо реакцію $\overline{S_3}$:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0;$$

$$-Y_A \cdot 2 + S_2 \cdot 2 = 0.$$

$$Y_A - F_1 - S_3 \sin 45^\circ = 0.$$

Маємо

$$S_3 = -2\sqrt{2} \text{ кН}.$$

Перевага способу Ріттера в тому, що кожне з зусиль знаходиться незалежно від других з одного рівняння. Ця перевага особливо помітна в тих випадках, коли потрібно знайти не всі зусилля в стержнях ферми, а лише в деяких із них.

4.4. Знаходження реакцій опор складеної конструкції

Розглянемо тепер задачі на рівновагу не одного тіла, а системи тіл, які вільно опираються один до одного, або з'єднаних між собою певним чином, і знаходяться під дією довільної системи сил. Таку систему тіл називають *складеною системою*.

Задача 4.6.

$F=20$ кН; $M=30$ кНм
 $q=2$ кН/м

$X_A=?$; $Y_A=?$; $R_D=?$; $R_B=?$
 $X_C=?$; $Y_C=?$

Балка AB складається з двох балок BC і AC, з'єднаних між собою шарніром C. На складену балку AB діє сила в 20 кН, пара сил з моментом 30 кНм і рівномірно розподілене навантаження інтенсив-

ності 2 кН/м (рис. 4.10,а). Не враховуючи вагу конструкції, знайти реакції опору і шарніра С.

Розглянемо рівновагу балки AB в цілому. Для неї в'язями є нерухомий шарнір A , рухомий шарнір D і невагомий стержень BL . Маємо чотири невідомих X_A , Y_A , R_D , R_B , а незалежних рівнянь для їх знаходження можна скласти тільки три (рис. 4.10,а). Тому дану складену за до-

помогою шарніра C систему двох балок розріжемо по шарніру C і розглянемо рівновагу кожної з балок окремо (рис. 4.10, б, в).

Для балки AC на балку BC передається через шарнір C і, враховуючи те, що напрям дії невідомий, то розкладемо реакцію R_C на дві складові X_C , Y_C (рис. 4.10,б). Аналогічно і для балки AC , тільки реакція R'_C буде напрямлена в протилежну сторону реакції R_C . Чисельно, $X'_C = X_C$, $Y'_C = Y_C$, а те що вони напрямлені в протилежні сторони враховано на рисунку 4.10, в. Розподілене навантаження, що діє на балку BC , замінимо зосередженою силою $Q_1 = q \cdot l_1 = 2 \cdot 3 = 6$ (кН). Аналогічно, для балки AC маємо $Q_2 = q \cdot l_2 = 2 \cdot 6 = 12$ (кН).

Маємо тепер шість невідомих X_A , Y_A , R_D , R_B , X_C , Y_C . Для знаходження цих невідомих маємо скласти шість рівнянь рівноваги. Ці шість рівнянь можна отримати, якщо розглянути рівновагу балок AB і BC , або балок AB і AC , або балок BC і AC . Ми вибираємо третій варіант.

Розглянемо рівновагу балок BC і AC (рис. 4.10, б, в).

Складемо рівняння рівноваги балки BC :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_C - F \sin 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_B - F \cos 30^\circ + R_D - Q_1 + Y_C = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -R_B \cdot 12 + F \cos 30^\circ \cdot 9 - R_D \cdot 6 + Q_1 \cdot 1,5 = 0. \quad (3)$$

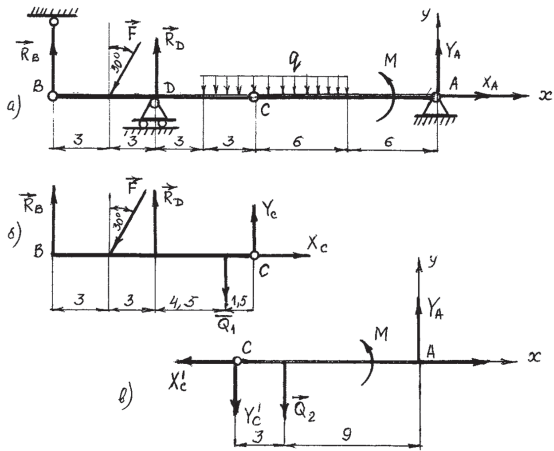


Рис. 4.10

Складемо рівняння рівноваги балки AC:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad -X'_C + X_A = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad -Y'_C - Q_2 + Y_A = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\overline{F_k}) = 0; \quad -Q_2 \cdot 3 + Y_A \cdot 12 + M = 0. \quad (6)$$

Розв'язавши рівняння (1) – (6), маємо:

$$X_A = 10 \text{ кН}, \quad Y_A = 0,5 \text{ кН}, \quad R_D = 42,16 \text{ кН}, \quad R_B = -7,34 \text{ кН}, \quad X_C = 10 \text{ кН},$$

$$Y_C = -11,5 \text{ кН}.$$

Для перевірки цих результатів складемо одне з рівнянь рівноваги балки AB (рис. 4.10, а):

$$\sum_{k=1}^n M_C(\overline{F_k}) = -R_B \cdot 12 + F \cos 30^\circ \cdot 9 - R_D \cdot 6 + Q_1 \cdot 1,5 - Q_2 \cdot 3 + M + Y_A \cdot 12 =$$

$$= +7,34 \cdot 12 + 20 \cdot 0,866 \cdot 9 - 42,16 \cdot 6 + 6 \cdot 1,5 - 12 \cdot 3 + 30 + 0,5 \cdot 12 = 0.$$

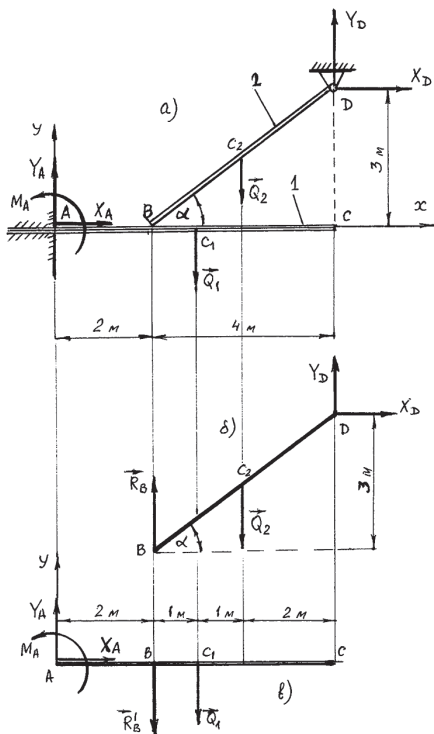


Рис. 4.11

Задача 4.7.

$$Q_1 = 6 \text{ кН}$$

$$Q_2 = 4 \text{ кН}$$

$$X_A = ?, \quad Y_A = ?,$$

$$M_A = ?, \quad X_D = ?,$$

$$Y_D = ?, \quad R'_B = ?$$

Однорідний брус 2 вагою 4 кН вільно опирається в точці B на однорідну балку 1 вагою 6 кН. Знайти опорні реакції в точках A і D і силу тиску,

який брус 2 спричиняє на балку 1 (рис. 4.11, а).

Якщо розглядати балки AC і BD як одне ціле, то для них опори знаходяться в точках A і D. Маємо 5 невідомих реакцій X_A , Y_A , M_A , X_D , Y_D (рис. 4.11, а).

Розглянемо окремо рівновагу бруса BD і балки AC (рис. 4.11, б, в).

Запишемо рівняння рівноваги бруса BD.

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_D = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_B - Q_2 + Y_D = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0; \quad -R_B \cdot 4 + Q \cdot 2 = 0; \quad (3)$$

Запишемо рівняння рівноваги балки AC :

$$\sum_{ki=1}^n F_{ky} = 0; \quad X_A = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A - R'_B \cdot 2 - Q_1 \cdot 3 = 0; \quad (6)$$

$$R_B = R'_B.$$

Розв'язуючи рівняння (1) – (6), маємо:

$$X_A = X_D = 0, \quad Y_A = 8 \text{ кН}, \quad M_A = 22 \text{ кНм}, \quad Y_D = 2 \text{ кН}, \quad R'_B = 2 \text{ кН}.$$

Перевіримо результати. Складемо одне з рівнянь рівноваги конструкції в цілому (рис. 4.11, а):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) &= M_A - Y_A \cdot 2 - Q_1 \cdot 1 - Q_2 \cdot 2 + Y_D \cdot 4 = \\ &= 22 - 8 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 0. \end{aligned}$$

4.5. Задачі для самостійної роботи

Задача 4.8.

Знайти силу F , при якій момент в жорсткому защемленні A дорівнює 40 кНм, якщо інтенсивність розподіленого навантаження $q=2$ кН/м, $\alpha=30^\circ$ (рис. 4.12).

Відповідь: $F=7$ кН.

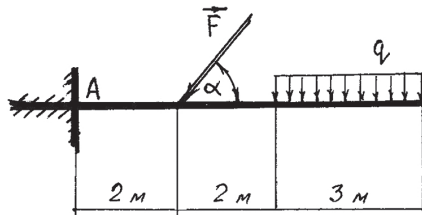


Рис. 4.12

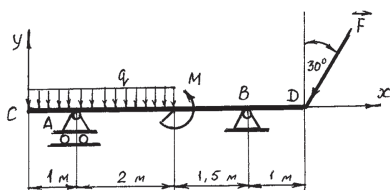


Рис. 4.13

Задача 4.9.

Знайти опорні реакції балки CD , якщо $F = 8 \text{ кН}$, $M = 6 \text{ кНм}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $\alpha = 30^\circ$ (рис. 4.13).

Відповідь: $Y_A = 7,73 \text{ кН}$, $X_B = 4 \text{ кН}$, $Y_B = 5,2 \text{ кН}$.

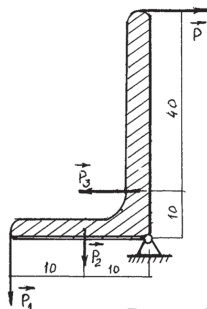


Рис. 4.14

Задача 4.10.

На колінчатий важіль діють сили $P_1 = 100 \text{ Н}$, $P_2 = 150 \text{ Н}$, $P_3 = 200 \text{ Н}$. Знайти силу P , необхідну для зрівноваження важеля, і величину реакції шарніра A . Вагою важеля знехтувати (рис. 4.14).

Відповідь: $P = 110 \text{ Н}$, $R_A = 266 \text{ Н}$.

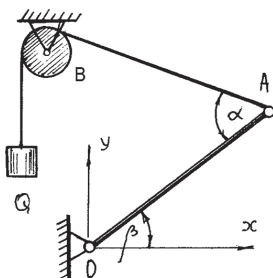


Рис. 4.15

Задача 4.11 (рис. 4.15).

Однорідний стержень OA вагою P , закріплений шарнірно в точці O , утримується в положенні рівноваги за допомогою троса, перекинутого через блок B , на кінці якого є вантаж Q . Знайти кут між стержнем OA і горизонтом, і реакцію шарніра O , якщо $P = 200 \text{ Н}$, $Q = 100 \text{ Н}$, а кут $\alpha = 60^\circ$.

Відповідь: $b = 30^\circ$, $X_0 = -50\sqrt{3} \text{ Н}$, $Y_0 = 150 \text{ Н}$.

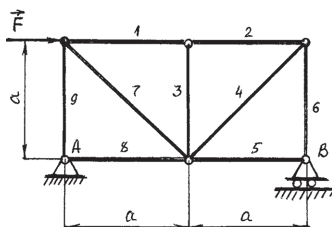


Рис. 4.16

Задача 4.12.

Знайти зусилля в стержні 2, якщо сила $F = 200 \text{ Н}$ (рис. 4.16).

Відповідь: $S_2 = -100 \text{ Н}$.

Задача 4.13.

Знайти зусилля в стержнях ферми, якщо $F_1=40$ кН, $F_2=120$ кН (рис. 4.17).

Відповідь: $S_1 = 63,2$ кН,
 $S_2 = 126,4$ кН, $S_3 = -60$ кН,
 $S_4 = -60$ кН, $S_5 = 0$,
 $S_6 = -63,2$ кН, $S_7 = -40$ кН.

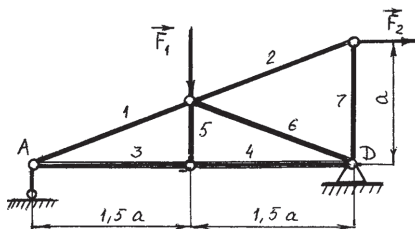


Рис. 4.17

Задача 4.14.

Балка AD складається з двох балок AC і CD , з'єднаних між собою шарніром в точці C . В точці D балка CD підтримується невагомим стержнем DE , який має на кінцях шарнірні з'єднання. Знайти реакції в опорах A і B , і зусилля в стержні DE , якщо $F = 12$ кН (рис. 4.18).

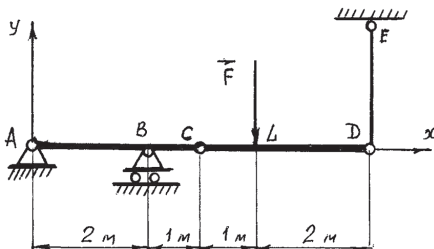


Рис. 4.18

Відповідь: $X_A = 0$, $Y_A = -4$ кН,
 $R_B = 12$ кН, $T = 4$ кН.

Задача 4.15 (рис. 4.19).

Однорідна балка BC має вагу 3 кН, а однорідна балка AC – вагу 1,5 кН. Вантаж Q вагою 0,9 кН через трос діє на балку AC , причому $AE=EC$. Знайти реакції опор A , B , D і реакцію шарніра C .

Відповідь: $X_A = 1,53$ кН, $Y_D = 1,96$ кН, $X_B = -0,9$ кН, $Y_B = 1,01$ кН,
 $X_C = \pm 0,9$ кН, $Y_C = \pm 0,03$ кН.

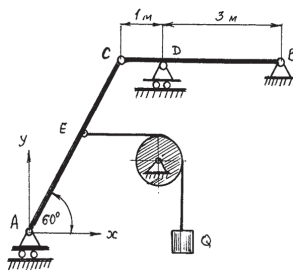


Рис. 4.19

5. Тертя ковзання і тертя кочення

5.1. Закони тертя ковзання

При намаганні перемістити одне тіло по поверхні другого в дотичній площині стичних поверхонь виникає сила тертя ковзання.

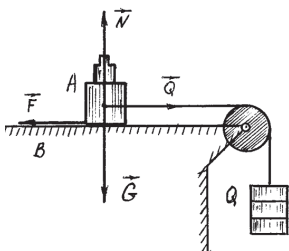


Рис. 5.1

У 1781 році французький вчений Кулон експериментально встановив основні наближені закони для сухого тертя ковзання при спокої.

Закони Кулона можна встановити на приладі, схема якого показана на рис. 5.1.

Для тіла A поверхня B є в'язю. Якщо міняти вагу гирь Q , то можна міняти силу, яка намагається рухати тіло A вздовж поверхні B . Якщо сила $Q = 0$, то тіло знаходиться в рівновазі і сила тертя $F = 0$. Якщо

збільшувати силу Q (при цьому тіло A не переміщується по поверхні B , а знаходиться в рівновазі), то з умови рівноваги виникає сила тертя $\vec{F}$, яка дорівнює активній силі $\vec{Q}$ і протилежно їй напрямлена. Збільшуючи силу $\vec{Q}$ при одному і тому ж нормальному тиску $\vec{G}$, можна досягти такого моменту, коли сила $\vec{Q}$ виведе тіло A з рівноваги і воно почне рухатись по в'язі B . Отже, буде досягнуто граничне положення, при якому сила тертя стане найбільшою і не зможе зрівноважити силу Q при її подальшому збільшенні. Міняючи силу нормального тиску, можна дослідити, як змінюється при цьому гранична сила тертя $F_{\max}$. Можна також дослідити вплив на граничну силу тертя площі стичних поверхонь, зберігаючи при цьому нормальний тиск, а також дослідити вплив матеріалу тіл, що стикаються та інше.

Закони Кулона

1. Сила тертя ковзання знаходиться в дотичній площині стичних поверхонь тіл і напрямлена в протилежну сторону можливого переміщення тіла під дією активних сил. Величина сили тертя може змінюватись від нуля до максимального значення, при якому тіло починає рухатись.

2. Максимальна сила тертя ковзання не залежить від площі стичних поверхонь.

3. Максимальна сила тертя ковзання пропорційна силі нормального тиску (нормальній реакції) поверхонь тіл, між якими вона виникає.

$$F_{\max} = f \cdot N, \quad (5.1)$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання, безрозмірна величина.

4. Коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалу і фізичного стану поверхні стичних тіл.

Для абсолютно гладеньких тіл $f=0$. Для реальних тіл він знаходиться в межах $0 \leq f \leq 1$.

Закон Кулона (5.1) справедливий і при ковзанні одного тіла по поверхні другого з деякою відносною швидкістю. В наближених технічних розрахунках вважа-

ють, що коефіцієнт тертя не залежить від відносної швидкості ковзання.

Повна реакція $\vec{R}$ шорсткої поверхні при наявності тертя визначається по величині і по напрямку діагоналлю прямокутника, побудованого по нормальній реакції $\vec{N}$ і силі тертя $\vec{F}_{TP}$.

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{TP}, \quad (5.2)$$

Повна реакція $\vec{R}$ відхилена від нормалі до опорної поверхні на кут β в сторону, протилежну зсувній силі $\vec{Q}$ (рис. 5.2, а). З збільшенням зсувньої сили (тобто одночасно з збільшенням сили тертя $\vec{F}_{TP}$) повна реакція все більш відхиляється від нормалі, досягаючи найбільшого відхилення, коли $\vec{F}_{TP}$ стане рівною $\vec{F}_{max}$. Найбільше значення кута відхилення β повної реакції $\vec{R}$ від нормалі називається *кутом тертя* φ . З рис. 5.2 (б) і формули (5.1) маємо

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{max}}{N} = f.$$

Чим менший коефіцієнт тертя ковзання f , тим менший кут тертя φ ; коли $f = 0$, то і $\varphi = 0$. В цьому ідеальному випадку поверхні стичних тіл називаються абсолютно гладкими. Реакція абсолютно гладенької поверхні напрямлена по нормалі до цієї поверхні.

Конус з вершиною в точці дотику тіл, твірна якого складає кут тертя з нормаллю до поверхні, називається *конусом тертя* (рис. 5.2, б).

Якщо коефіцієнт тертя ковзання в спокої при ковзанні тіла по поверхні, яка є в'язною, в різних напрямках один і той же, то реакція $\vec{R}_{max}$ цієї в'язі відхиляється від нормальної реакції $\vec{N}$ у всіх напрямках на однаковий кут тертя φ , і конус тертя буде круглим з кутом при вершині рівним 2φ .

Використовуючи конус тертя, можна сформулювати умову рівноваги тіла на шорсткій поверхні.

Якщо активні сили, що діють на тіло, приводяться до рівнодійної активних сил $\vec{P}$, то при рівновазі тіла на шорсткій поверхні рівнодійна активних сил по аксіомі про рівновагу двох сил, прикладених до твердого тіла, зрівноважується повною реакцією шорсткої поверхні (рис. 5.2, б). Повна реакція проходить через вершину конуса, а це означає, що і лінія дії рівнодійної активних сил проходить через вершину конуса.

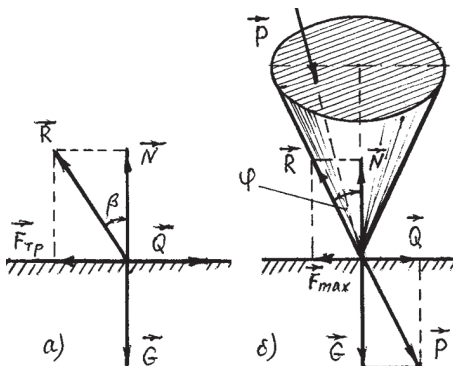


Рис. 5.2

Тепер можна зробити висновок: *будь-яка активна сила, яка проходить через вершину конуса тертя і знаходиться в ньому, не може спричинити рух тіла по шорсткій поверхні.*

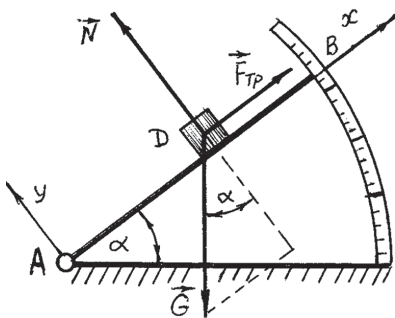


Рис. 5.3

Є багато експериментальних методів знаходження коефіцієнта тертя ковзання. Приведемо для ілюстрації один з цих методів (рис. 5.3). Рухому площину AB може обертатись навколо шарніра A , змінюючи кут нахилу α .

Нехай треба знайти коефіцієнт тертя ковзання між тілом D і похилою площиною AB . Будемо збільшувати кут α до тих пір, поки не виведемо тіло D з рівноваги. Зафіксуємо цей кут α .

Запишемо рівняння рівноваги тіла D :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad F_{TP} - G \sin \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N - G \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Використаємо формулу (5.1):

$$F_{TP} = fN. \quad (3)$$

З виразу (2) $N = G \cos \alpha$, з виразу (3) $F_{TP} = f \cdot G \cos \alpha$.

Підставимо силу F_{TP} у вираз (1): $Gf \cos \alpha - G \sin \alpha = 0$.

Маємо: $f = \tan \alpha$.

Так як кут α відомий, то можна знайти значення коефіцієнта тертя ковзання.

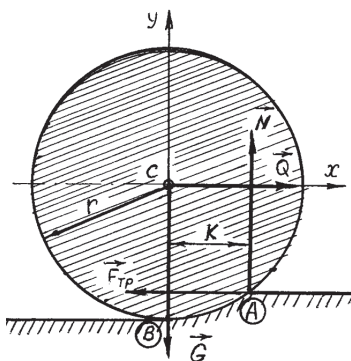


Рис. 5.4

5.2. Тертя кочення

Тертя кочення виникає тоді, коли одне тіло котиться по поверхні другого (рис. 5.4).

Нехай циліндричний коток вагою G радіусом r знаходиться на горизонтальній площині. До центра C котка прикладена активна сила $\vec{Q}$. Під дією котка опорна поверхня деформується і точка прикладання нормальної реакції $\vec{N}$ і сили тертя $\vec{F}_{TP}$ з точки B переміщується в деяку точку A (рис. 5.4).

Складемо рівняння рівноваги котка:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad Q - F_{TP} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad N - G = 0.$$

Звідки маємо: $F_{TP} = Q$; $N = G$.

Отримали дві пари сил: перша пара $(\vec{Q}, \vec{F}_{TP})$ намагається привести коток в рух, а друга пара $(\vec{N}, \vec{G})$ протидіє цьому руху. Момент протидіючої пари називається *моментом опору при коченні* M_k і дорівнює добутку сили N на плече пари k .

$$M_k = \kappa N \quad (5.4)$$

Коефіцієнт κ називається коефіцієнтом тертя кочення. Він має розмірність довжини. Коефіцієнт κ показує, на який відрізок зміщується нормальна реакція $\vec{N}$ при коченні в граничному випадку рівноваги.

Коефіцієнт тертя кочення знаходиться експериментально і залежить від властивостей даної пари стичних поверхонь.

5.3. Методичні рекомендації до розв'язання задач на рівновагу з урахуванням сил тертя

Аналітичний метод розв'язування задач статички з урахуванням сил тертя залишається таким самим, як і в тих випадках, коли тертя не враховується. Різниця тільки в тому, що в рівняннях рівноваги з'являються, крім нормальних реакцій, сили тертя. При цьому максимальне значення сили тертя ковзання знаходиться за формулою $F_{max} = fN$, а при коченні максимальний момент опору $M_k = \kappa N$.

Задача 5.1.

$l_1 = 1,7 \text{ м}; \quad l_2 = 0,17 \text{ м}$ $d_1 = 0,6 \text{ м}; \quad d_2 = 0,1 \text{ м}$ $G = 4,5 \text{ кН}; \quad f = 0,5$ $P_{min} = ?$	На барабан намотаний трос, до кінця якого підвішений вантаж вагою 4,5 кН. Знайти найменшу величину сили $\vec{P}$, яка прикладена до важеля колодкового гальма при рівновазі барабана, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює 0,5. Вагою важеля знехтувати (рис. 5.5, а).
---	---

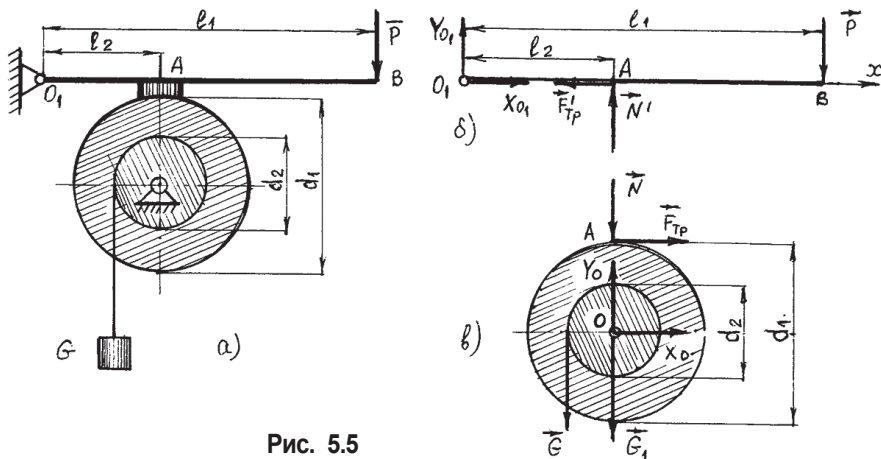


Рис. 5.5

Розглянемо рівновагу барабана (рис. 5.5, в). Для нього в'язями є опора в точці O (реакції X_O, Y_O) і важіль O_1B . В точці A барабана зі сторони важеля діє нормальна реакція $\vec{N}$ і сила тертя $\vec{F}_{TP}$. Сила тертя напрямлена в протилежну сторону можливого переміщення точки A .

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки O :

$$\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0; \quad G \frac{d_2}{2} - F_{TP} \cdot \frac{d_1}{2} = 0.$$

Звідси маємо $F_{TP} = G \frac{d_2}{d_1}$. В свою чергу максимальне значення сили тертя

$$F_{TP} = fN, \quad N = \frac{F_{TP}}{f} = G \frac{d_2}{fd_1}. \quad (1)$$

Розглянемо рівновагу важеля O_1B . Для нього в'язями є опора в точці O_1 (реакції X_{O1}, Y_{O1}) і барабан. В точці A важеля буде нормальна реакція $\vec{N}' = -\vec{N}$ і сила тертя $\vec{F}'_{TP} = -\vec{F}_{TP}$. (рис. 5.5, б).

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки O_1 :

$$\sum_{k=1}^n M_{O_1}(\vec{F}_k) = 0; \quad -P \cdot l_1 + N' \cdot l_2 = 0.$$

$$\text{Маємо } P = N' \frac{l_2}{l_1}.$$

Використаємо вираз (1). Тоді $P = G \frac{d_2 l_2}{f d_1 l_1} = 4,5 \frac{0,1 \cdot 0,17}{0,5 \cdot 0,6 \cdot 1,7} = 0,15 (\kappa H)$.

$P_{min} = 150 H$ – це мінімальне значення сили P , при дії якої барабан буде нерухомим. Зрозуміло, що при $P > 150 H$ барабан тим більше буде в спокої.

Задача 5.2.

$P = 60 H$
 $G = 10 H$
 $a = 0,3 м$
 $b = 0,6 м$
 $l = 0,6 м$
 $f = 0,1$

 $F = ?; X_0 = ?$
 $Y_0 = ?$

Пружина, що розтягнута силою P , притискує невагомий важіль до кулачка, який обертається. На кінці важеля знаходиться вантаж G . Знайти силу тиску кулачка на важіль і реакцію шарніра O , якщо коефіцієнт тертя ковзання між кулачком і важелем $0,1$ (рис. 5.6.).

Розглянемо

рівновагу важеля BOC . Для нього в'язями є опора в точці O (реакції X_0, Y_0) і кулачок. В точці B на важіль діє нормальна реакція $\vec{N}$ і сила тертя $\vec{F}_{Tp}$.

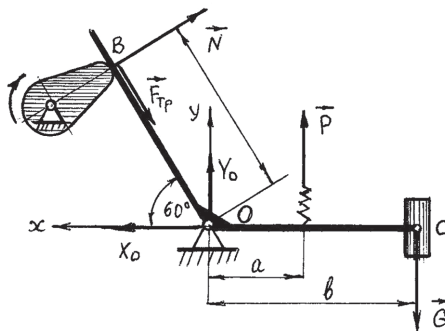


Рис. 5.6

$$F_{Tp} = fN. \quad (1)$$

Запишемо рівняння рівноваги важеля BOC :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_0 - F_{Tp} \cos 60^\circ - N \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_0 - F_{Tp} \sin 60^\circ + N \sin 30^\circ + P - G = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k) = 0; \quad -N \cdot l + P \cdot a - G \cdot b = 0. \quad (4)$$

$$\text{З рівняння (4):} \quad N = \frac{P \cdot a - G \cdot b}{l}; \quad N = 20 H.$$

З рівняння (2), з урахуванням виразу (1) $X_0 = N(f \cos 60^\circ + \cos 30^\circ)$;
 $X_0 = 18,3 H$.

З рівняння (3), з урахуванням (1) $Y_0 = N(\sin 60^\circ \cdot f - \sin 30^\circ) - P + G$;

$$Y_0 = -58,3 \text{ Н.}$$

Сила тиску важеля на кулачок напрямлена в протилежну сторону нормальній реакції $\vec{N}$ і чисельно їй рівна. Тому $F = N = 20 \text{ Н}$.

Задача 5.3.

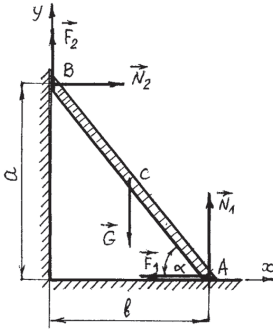


Рис. 5.7

Драбина AB вагою G опирається кінцями на вертикальну стінку і горизонтальну підлогу. При якому куті нахилу α драбина буде в рівновазі, якщо коефіцієнт тертя ковзання в точках A і B дорівнює f ? (рис. 5.7).

Розглянемо рівновагу драбини AB . Для неї в'я-
зми є стінка і підлога. В точці A – нормальна реак-
ція $\vec{N}_1$ і сила тертя $\vec{F}_1$. В точці B – нормальна реак-
ція $\vec{N}_2$ і сила тертя $\vec{F}_2$.

$$a = AB \sin \alpha; \quad b = AB \cos \alpha.$$

$$F_1 = fN_1. \quad (1)$$

$$F_2 = fN_2. \quad (2)$$

Запишемо рівняння рівноваги драбини AB :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad N_2 - F_1 = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_1 + F_2 - G = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -N_2 \cdot a - F_2 b + G \frac{b}{2} = 0. \quad (5)$$

Підставимо вирази (1) і (2) у вирази (3) і (4)

$$N_2 - fN_1 = 0,$$

$$N_1 + fN_2 = G.$$

$$\text{Звідси маємо: } N_2 = G \frac{f}{1+f^2}; \quad N_1 = G \frac{1}{1+f^2}.$$

Підставимо N_1 , N_2 , a і b у вираз (5) і розділомо на $\cos \alpha$:

$$-N_2 \operatorname{tg} \alpha - F_2 + \frac{1}{2} G = 0; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2} G - F_2}{N_2}.$$

Остаточно маємо
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - f^2}{2f}. \quad (6)$$

Найменше значення кута нахилу α , при якому ще можлива рівновага, знаходиться з виразу (6).

Задача 5.4.

$G = 4,5 \text{ кН}$

$r = 40 \text{ см}$

$\kappa = 0,2 \text{ см}$

$\alpha = 25^\circ$

$\beta = 40^\circ$

$P = ?$

Важкий коток вагою 4,5 кН вкочують по дерев'яному настилу з постійною швидкістю. Чому дорівнює тягове зусилля P , якщо коефіцієнт тертя кочення котка по настилу дорівнює 0,2 см? (див. рис. 5.8).

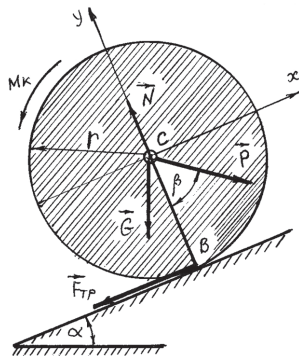


Рис. 5.8

Розглянемо рівновагу котка. Для нього в'яззю є шорстка похила площина. Відкидаємо цю в'язь. На коток буде діяти нормальна реакція $\vec{N}$, сила тертя $\vec{F}_{TP}$, а також момент тертя кочення M_K .

Розглянемо рівновагу котка. Для нього в'яззю є шорстка похила площина. Відкидаємо цю в'язь. На коток буде діяти нормальна реакція $\vec{N}$, сила тертя $\vec{F}_{TP}$, а також момент тертя кочення M_K .

Запишемо рівняння рівноваги котка:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad N - G \cos \alpha - P \cos \beta = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad M_K + G \sin \alpha \cdot r - P \sin \beta \cdot r = 0; \quad (2)$$

$$M_K = \kappa N. \quad (3)$$

З рівняння (1): $N = G \cos \alpha + P \cos \beta$. Тоді з виразу (3):

$$M_K = \kappa G \cos \alpha + \kappa P \cos \beta.$$

Підставимо M_K у вираз (2): $\kappa G \cos \alpha + \kappa P \cos \beta + G \sin \alpha \cdot r - P \sin \beta \cdot r = 0$.

$$P = G \frac{r \sin \alpha + k \cos \alpha}{r \sin \beta - k \cos \beta} = 3 \text{ (кН)}.$$

Задача 5.5.

$\alpha = 30^\circ$
 $G_1 = 200 \text{ Н}$
 $G_2 = 100 \text{ Н}$
 $f = 0,2$
 $k = 0,06 \text{ см}$
 $r = 0,06 \text{ м}$
 $m_3 = ?$

Вісь котка 1, сила тяжіння якого 200 Н , і брусок 2, сила тяжіння якого 100 Н , зв'язані невагомим тросом і утримуються на похилій площині в рівновазі вантажем 3. Знайти масу вантажу, при якій коток і брусок будуть нерухомі, якщо коефіцієнти тертя: ковзання бруска $0,2$, кочення котка $0,06 \text{ см}$ (рис. 5.9).

Для системи можливі два переміщення: коток і брусок рухаються по похилій площині або вгору, або вниз.

Розглянемо перший варіант. Розглянемо рівновагу бруска 2. На нього діють сили $m_3 g$, G_2 , реакція троса T_{12} , нормальна реакція N_2 і сила тертя ковзання F_2 похилої площини.

Запишемо рівняння рівноваги бруска 2:

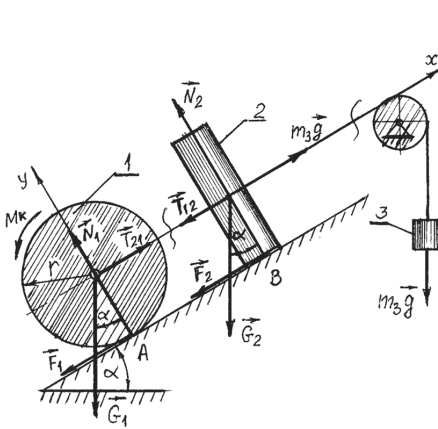


Рис. 5.9

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0;$$

$$m_3 g - T_{12} - G_2 \sin \alpha - F_2 = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_2 - G_2 \cos \alpha = 0; \quad (2)$$

$$F_2 = f N_2. \quad (3)$$

З цих рівнянь знаходимо

$$T_{12} = m_3 g - G_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (4)$$

Розглянемо рівновагу котка 1. На нього діють сили $\vec{G}_1$, реакція троса $\vec{T}_{21} = -\vec{T}_{12}$. Коток кочиться по шорсткій площині. Реакція цієї площини: $\vec{N}_1$ – нормальна реакція, $\vec{F}_1$ – сила тертя ковзання, M_K – момент тертя кочення.

Запишемо рівняння рівноваги котка 1:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_1 - G_1 \cos \alpha = 0, \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad M_K + G_1 \sin \alpha \cdot r - T_{21} \cdot r = 0; \quad (6)$$

$$M_K = kN_1. \quad (7)$$

З цих рівнянь знаходимо

$$T_{21} = \frac{M_K}{r} + G_1 \sin \alpha = \left(\frac{k}{r} \cos \alpha + \sin \alpha \right) G_1. \quad (8)$$

Прирівняємо вирази (4) і (8). Маємо

$$m_3 = \left[G_1 \left(\frac{k}{r} \cos \alpha + \sin \alpha \right) + G_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha) \right] / g = 17,2 \text{ кг}.$$

Якщо маса m_3 стане більшою за 17,2 кг, то система буде рухатись вгору по похилій площині. Якщо зменшувати масу m_3 , то при певній граничній масі m_3 система почне рухатись вниз. Ми даємо можливість цей варіант читачеві розглянути самостійно. В цьому випадку маса $m_3 = 12,9$ кг.

$$12,9 < m_3 < 17,2 \text{ кг}.$$

5.4. Задачі для самостійної роботи

Задача 5.6 (рис. 5.10).

Якою повинна бути найменша вага тіла 2, для того щоб тіло вагою 300 Н почало ковзати по горизонтальній площині, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,25$.

Відповідь: 75 Н.

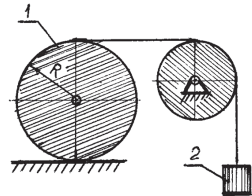


Рис. 5.10

Задача 5.7 (рис. 5.11).

До котка 1 за допомогою троса підвішений вантаж 2. Знайти найбільшу вагу цього вантажу, при якому коток 1 вагою 4 кН залишається в спокої, якщо коефіцієнт тертя ковзання $k = 0,005$ м, а радіус $R = 50$ см.

Відповідь: 20 Н.

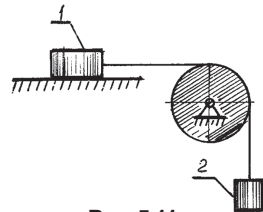


Рис. 5.11

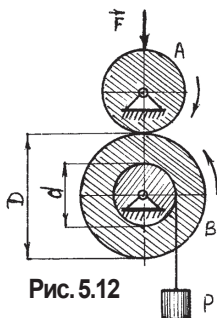


Рис. 5.12

Задача 5.8 (рис. 5.12).

З якою силою $\vec{F}$ потрібно притиснути фрикційний шків A до шківу B , щоб шків B знаходився в рівновазі, якщо вага вантажу P дорівнює 500 Н , коефіцієнт тертя ковзання дорівнює $0,5$ і $D/d = 2$?

Відповідь: $F \geq 500\text{ Н}$.

6. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт (РГР) по темі “Довільна плоска система сил”

6.1. РГР № 1 “Визначення реакцій опор і зусиль в стержнях плоскої ферми”

Аналітично визначити реакції опор ферми та способом вирізання вузлів знайти зусилля в її стержнях. Способом Ріттера знайти зусилля в стержнях, номери яких вказані в таблиці.

6.1.1. Варіанти завдань РГР №1

Схеми ферм показані на рис. 6.3–6.5. Необхідні числові дані приведені в таблицях 6.1–6.4. На схемах не показані місцезнаходження опор ферми та точки прикладання сил. Ці дані беруться з таблиць. На рис. 6.1. показані напрями дії сил в залежності від кута α .

Для даного варіанта по даним таблиці необхідно побудувати схему з опорами і діючими силами.

Для ілюстрації на рис. 6.2 побудована ферма з опорами і діючими на неї силами згідно варіанта 32.

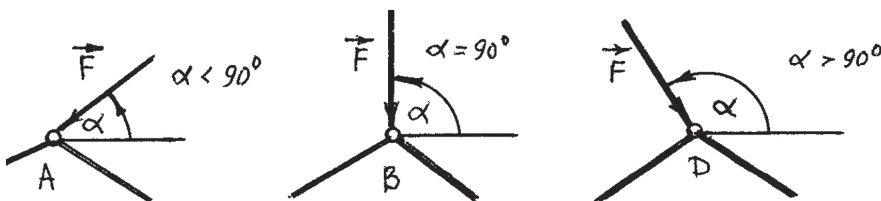


Рис. 6.1

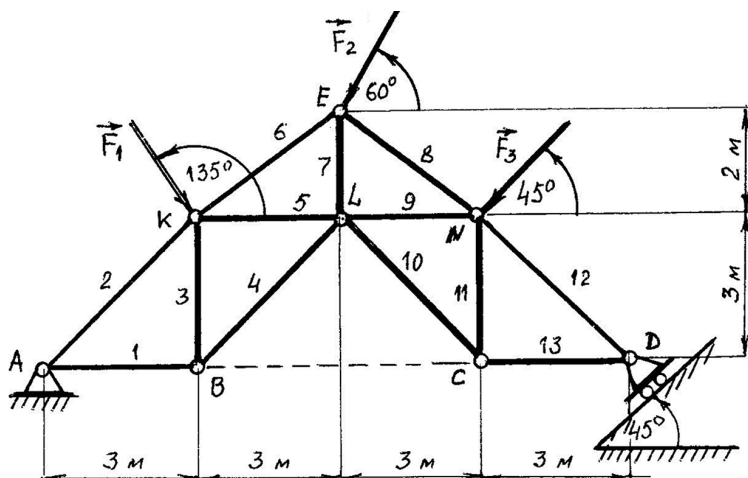


Рис.6.2

Таблиця 6.1

Варіант	Схема	Тип опори і її місце знаходження			Розмір форми		Зосереджені сили										Стержні, в яких зусилля визначаються по способу Ріттера
				β	a	h	$\overrightarrow{F_1}$			$\overrightarrow{F_2}$			$\overrightarrow{F_3}$				
							F_1	Точка	α_1	F_2	Точка	α_2	F_3	Точка	α_3		
1	1	A	B	30	2	2	20	C	60	15	D	120	10	N	30	8,9,10	
2	1	L	T	0	3	2	15	E	45	20	K	60	14	D	90	12,13,14	
3	1	B	A	45	4	4	10	C	45	12	E	75	10	D	60	4,5,6	
4	1	A	T	0	3	3	12	L	45	14	K	60	12	D	120	7,8,9	
5	2	A	B	30	4	1	8	E	45	10	K	60	14	L	90	4,5,6	
6	2	C	D	0	6	2	10	A	90	12	B	60	16	L	60	8,9,10	
7	2	C	B	30	4	2	12	E	60	14	K	90	18	N	60	4,5,7	
8	2	B	C	0	3	2	4	E	70	8	A	120	10	L	45	8,9,11	
9	2	D	C	30	4	3	6	A	90	10	N	135	12	L	60	4,7,10	
10	3	D	C	45	2	3	10	A	90	12	L	60	14	B	45	4,5,7	
11	3	A	B	30	4	3	12	D	180	14	K	60	16	L	45	8,9,10	
12	3	D	B	45	4	4	6	A	60	10	K	75	12	N	40	8,11,13	
13	3	A	C	0	2	3	18	D	120	20	K	60	22	L	45	4,5,6	
14	4	A	B	30	2	2	16	C	45	17	D	60	20	K	0	4,5,6	
15	4	C	D	45	4	3	10	A	120	12	B	60	16	L	90	8,9,10	
16	4	B	A	45	2	3	12	C	180	16	L	60	8	T	90	4,5,10	
17	4	C	B	30	4	4	9	A	135	10	L	90	12	D	60	6,7,8	
18	4	K	B	30	6	4	20	A	120	25	D	45	18	L	90	8,9,10	
19	5	A	B	45	4	5	14	K	120	16	D	90	20	L	60	4,5,6	
20	5	E	C	90	3	4	8	A	150	10	D	90	15	B	75	6,7,10	
21	5	B	A	0	4	4	12	K	60	14	L	45	16	C	120	4,7,8	
22	5	C	A	30	3	5	9	E	120	12	D	90	14	B	60	6,9,10	
23	6	A	B	60	2	3	16	K	120	18	D	60	20	L	90	5,4,8	
24	6	K	B	30	4	3	10	A	180	12	C	120	16	D	45	7,6,8	
25	6	C	B	0	5	4	6	A	0	10	L	90	12	D	60	7,9,10	
26	6	B	A	30	3	4	8	K	135	12	C	60	14	D	120	7,8,9	
27	6	L	A	0	2	4	7	C	45	9	D	0	11	B	75	5,4,9	
28	7	A	B	30	4	2	14	C	60	16	K	135	10	L	0	6,7,8	
29	7	C	B	45	3	3	10	E	120	12	D	90	16	N	60	4,5,6	
30	7	B	A	0	1,5	2	12	C	150	10	K	60	14	L	0	4,12,10	

Таблиця 6.2

Варіант	Схема	Тип опори і її місце знаходження			Розмір форми		Зосереджені сили									Стержні, в яких зусилля визначаються по способу Ріттера
				β	a	h	$\vec{F}_1$			$\vec{F}_2$			$\vec{F}_3$			
							F_1	Точка	α_1	F_2	Точка	α_2	F_3	Точка	α_3	
				град.	м	м	кН		град.	кН		град.	кН		град.	
31	7	D	B	30	4	3	5	A	0	10	E	120	12	K	150	4,5,9
32	8	A	D	45	3	2	20	K	135	25	E	60	21	N	45	4,5,6
33	8	B	C	0	4	3	15	A	150	20	L	45	16	D	60	6,7,9
34	8	B	D	30	5	4	22	A	90	21	E	135	18	C	45	8,9,10
35	8	E	D	0	2	1	18	B	0	20	K	150	22	N	60	9,10,11
36	8	A	C	0	2	3	16	L	45	18	N	90	20	D	100	3,4,7
37	9	A	B	30	3	2	15	K	75	16	L	120	18	D	90	6,7,8
38	9	C	B	45	4	4	12	A	105	14	E	90	16	L	60	4,6,7
39	9	D	A	0	5	3	8	C	75	10	L	60	12	B	80	5,8,9
40	9	K	D	30	6	4	9	A	65	11	E	45	13	B	60	7,8,5
41	10	A	B	30	2	3	20	E	70	21	K	45	22	L	60	6,7,8
42	10	N	T	0	4	3	12	A	60	13	K	70	14	D	180	10,11,12
43	10	C	D	90	5	2	13	A	120	14	K	60	15	B	45	5,7,8
44	10	C	B	45	3	3	21	N	60	22	L	120	23	D	150	0,17,16
45	10	D	N	0	2,5	3	15	A	45	16	E	90	17	L	120	3,15,16
46	11	A	B	30	2	1	16	C	60	14	K	45	12	0	60	6,8,9
47	11	C	B	0	4	2	8	E	45	10	K	60	12	T	135	4,5,6
48	11	C	D	30	3	3	10	A	180	12	K	60	14	N	0	8,9,11
49	11	A	D	45	4	5	12	C	90	16	N	0	8	B	60	5,6,8
50	11	B	D	0	2	2	8	E	135	10	L	0	6	A	60	9,11,12
51	12	A	B	30	2	1	10	E	90	12	L	0	7	K	45	4,5,6
52	12	C	D	0	3	2	6	C	60	8	K	45	9	L	0	6,7,8
53	12	C	B	60	4	1	16	E	60	14	D	90	12	K	0	4,5,8
54	12	A	D	0	3	1	12	C	30	13	D	45	14	L	90	7,5,6
55	13	L	B	30	2	3	8	A	60	10	D	45	12	E	75	4,5,7
56	13	A	C	0	3	3	22	L	135	24	D	120	20	N	60	6,7,9
57	13	D	C	30	4	2	18	A	120	20	L	90	22	N	135	7,8,9
58	13	A	B	45	2	2	11	D	60	12	N	130	14	C	90	4,5,6
59	13	A	N	90	3	2	10	L	120	14	D	45	16	B	60	5,7,8
60	14	C	B	30	4	3	12	A	120	14	E	45	10	K	90	5,6,7

Таблиця 6.3

Варіант	Схема	Тип опори і її місце знаходження			Розмір ферми		Зосереджені сили									Стержні, в яких зусилля визначаються по способу Ріттера
				β	a	h	$\vec{F_1}$			$\vec{F_2}$			$\vec{F_3}$			
							F_1	Точка	α_1	F_2	Точка	α_2	F_3	Точка	α_3	
град.	м	м	кН	град.	кН	град.	кН	град.	кН	град.	кН	град.	кН	град.	кН	град.
61	14	A	B	60	3	4	10	C	30	12	D	45	14	K	90	6,7,9
62	14	L	B	45	2	3	6	A	120	8	E	45	10	D	0	8,7,10
63	14	A	D	90	2,5	2,5	4	C	60	10	L	65	12	K	90	7,8,10
64	15	A	B	30	2	2	8	C	75	10	D	120	11	T	0	4,5,13
65	15	L	B	45	3	4	18	K	60	20	B	90	16	A	90	7,10,12
66	15	A	T	0	4	2	20	C	120	21	D	75	22	B	45	3,4,5
67	15	C	B	30	3	2	22	A	120	20	K	110	16	N	45	7,8,10
68	15	L	D	90	2	1	10	A	90	15	C	50	18	T	45	3,4,5
69	16	A	B	90	2	1	12	C	75	13	D	60	15	T	20	4,5,6
70	16	T	B	90	3	1	14	A	120	15	K	80	16	L	0	9,10,11
71	16	L	N	0	4	2	6	C	80	8	D	45	10	T	0	9,11,12
72	16	C	B	30	2	2	16	A	135	16	D	60	14	N	30	5,6,7
73	17	A	D	30	2	1	10	B	60	12	E	90	10	L	90	10,11,12
74	17	B	D	45	3	1	14	N	65	13	C	80	12	K	90	6,8,10
75	17	N	D	0	3	2	8	B	60	10	C	65	14	L	90	14,15,16
76	17	K	L	0	3	1,5	6	B	120	12	E	50	13	A	0	5,6,9
77	17	K	D	30	2	2	15	A	180	14	N	45	12	L	90	8,11,12
78	18	A	B	60	2	1	21	C	135	22	K	45	23	D	60	3,4,5
79	18	C	B	30	3	2	23	A	130	24	D	50	22	L	90	5,6,7
80	18	K	L	0	4	3	16	A	150	18	B	60	20	N	90	7,8,9
81	18	A	D	90	1	2	6	C	140	8	K	60	10	L	90	9,10,11
82	19	C	D	45	2	3	12	A	90	14	K	60	12	L	45	4,5,6
83	19	A	B	30	3	2	10	C	130	12	L	45	14	D	60	6,7,8
84	19	A	D	40	3	3	11	E	100	13	K	60	15	B	0	8,9,10
85	19	E	D	60	2	2	13	C	65	14	L	45	16	B	30	4,5,8
86	19	C	D	0	2	1	16	A	105	18	E	120	20	L	45	3,5,6
87	20	C	D	0	4	2	18	A	120	20	E	45	22	K	35	4,5,6
88	20	L	B	45	3	1	8	C	90	10	D	45	12	E	60	6,7,9
89	20	A	K	90	4	3	10	L	110	12	C	90	14	B	75	7,8,9
90	20	A	B	30	2	2	20	L	60	22	E	45	24	N	90	8,9,10

Таблиця 6.4

Варіант	Схема	Тип опори і її місце знаходження			Розмір форми		Зосереджені сили										Стержні, в яких зусилля визначаються по способу Ріттера
				β	a	h	$\vec{F_1}$			$\vec{F_2}$			$\vec{F_3}$				
							F_1	Точка	α_1	F_2	Точка	α_2	F_3	Точка	α_3		
																град.	
91	21	A	B	30	3	2	10	D	60	12	L	45	9	K	90	8,9,10	
92	21	A	C	0	2	2	12	D	45	14	B	60	15	N	90	4,5,6	
93	21	D	B	45	4	3	16	A	90	18	K	45	12	L	55	4,5,7	
94	22	A	B	20	2,5	2,5	20	E	75	22	L	60	14	C	90	6,7,8	
95	22	C	B	35	1,5	2	17	K	135	18	N	90	19	D	90	4,5,8	
96	22	C	D	0	2	2	18	A	0	22	E	120	24	L	90	8,9,10	
97	23	A	B	40	3	2	22	N	0	24	C	120	20	K	45	6,7,8	
98	23	N	B	30	2	2	16	A	0	18	E	45	22	D	120	8,9,10	
99	23	C	L	0	3	3	12	A	0	16	K	70	10	D	20	4,5,7	
100	24	A	B	90	2	2,5	16	L	80	18	K	45	12	D	0	3,5,6	
101	24	A	D	30	1,5	1,2	14	L	110	16	B	30	13	K	0	7,9,10	
102	24	L	C	0	2	2	24	A	130	25	B	35	26	K	0	2,5,6	
103	25	A	B	30	3	2	26	E	120	27	K	35	28	D	0	6,7,8	
104	25	A	C	0	2	1	13	K	45	16	D	60	17	B	0	1,5,6	
105	25	C	B	30	3	3	20	A	90	22	K	45	21	D	0	6,7,8	
106	26	A	B	0	3	1,5	18	K	120	20	E	45	22	D	0	6,7,8	
107	26	B	A	0	2	1,5	26	C	45	25	L	90	16	N	60	7,8,9	
108	26	L	B	20	2,5	2	30	A	0	26	C	75	20	D	120	8,9,10	
109	27	A	C	0	2	2	15	D	150	16	E	45	17	K	0	4,5,8	
110	27	B	A	0	3	2,5	16	N	90	18	E	120	16	K	40	6,7,8	
111	27	D	B	30	2	3	22	A	0	20	N	90	23	E	60	6,9,10	
112	28	A	B	0	3	2	14	C	110	13	D	60	15	K	0	5,6,8	
113	28	D	L	90	2	3	12	C	90	14	L	120	16	B	0	5,6,7	
114	28	D	B	0	1,5	2	8	C	120	10	L	75	12	K	90	8,9,10	
115	29	C	D	30	2	3	6	E	135	12	K	60	13	B	75	4,5,10	
116	29	A	B	45	1,5	2	10	C	90	14	E	140	18	D	40	3,4,5	
117	29	C	B	0	3	3	19	A	90	16	K	150	20	D	60	4,5,6	
118	30	A	B	30	2	3	22	D	90	23	E	140	26	N	75	4,5,6	
119	30	N	A	0	3	3	18	C	135	20	K	75	22	B	0	6,7,8	
120	30	D	B	0	4	4	28	A	120	30	E	45	26	N	30	7,8,9	

Рис. 6.3

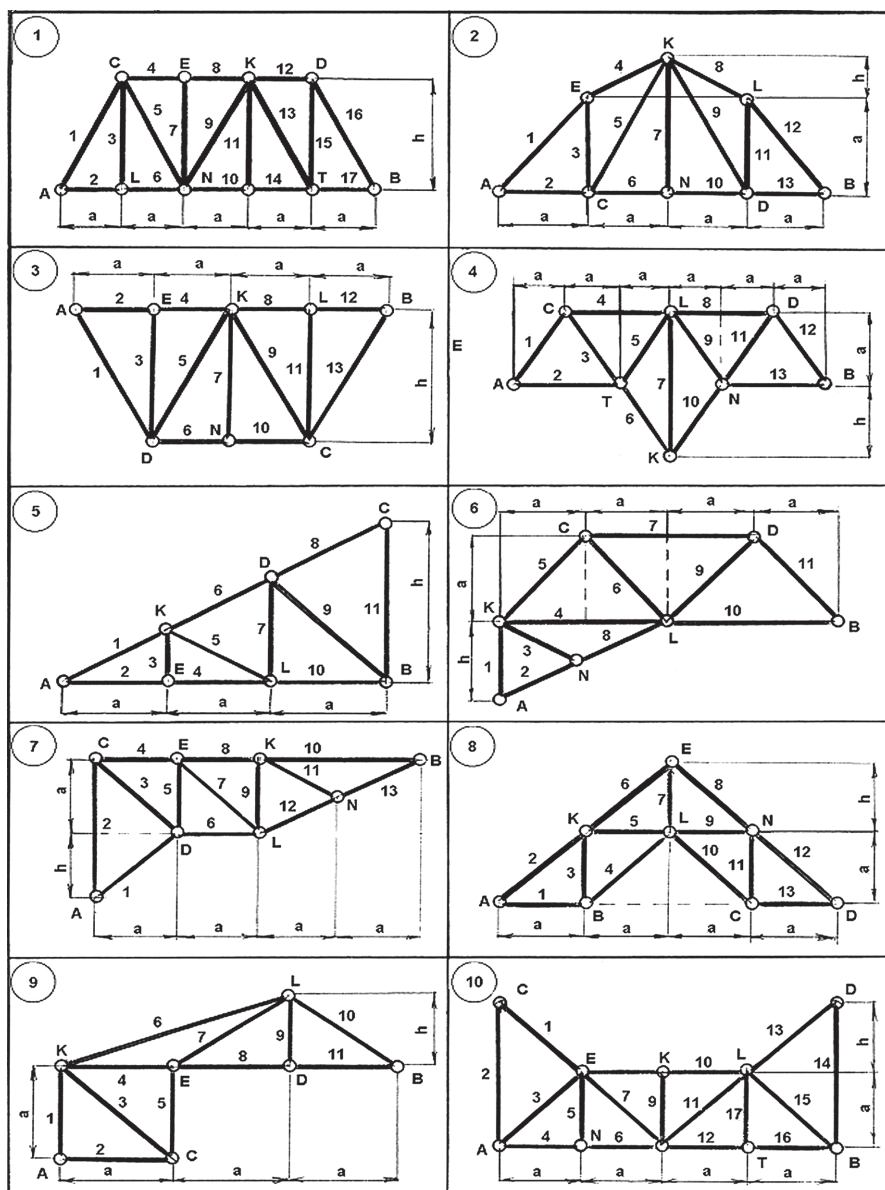


Рис. 6.4

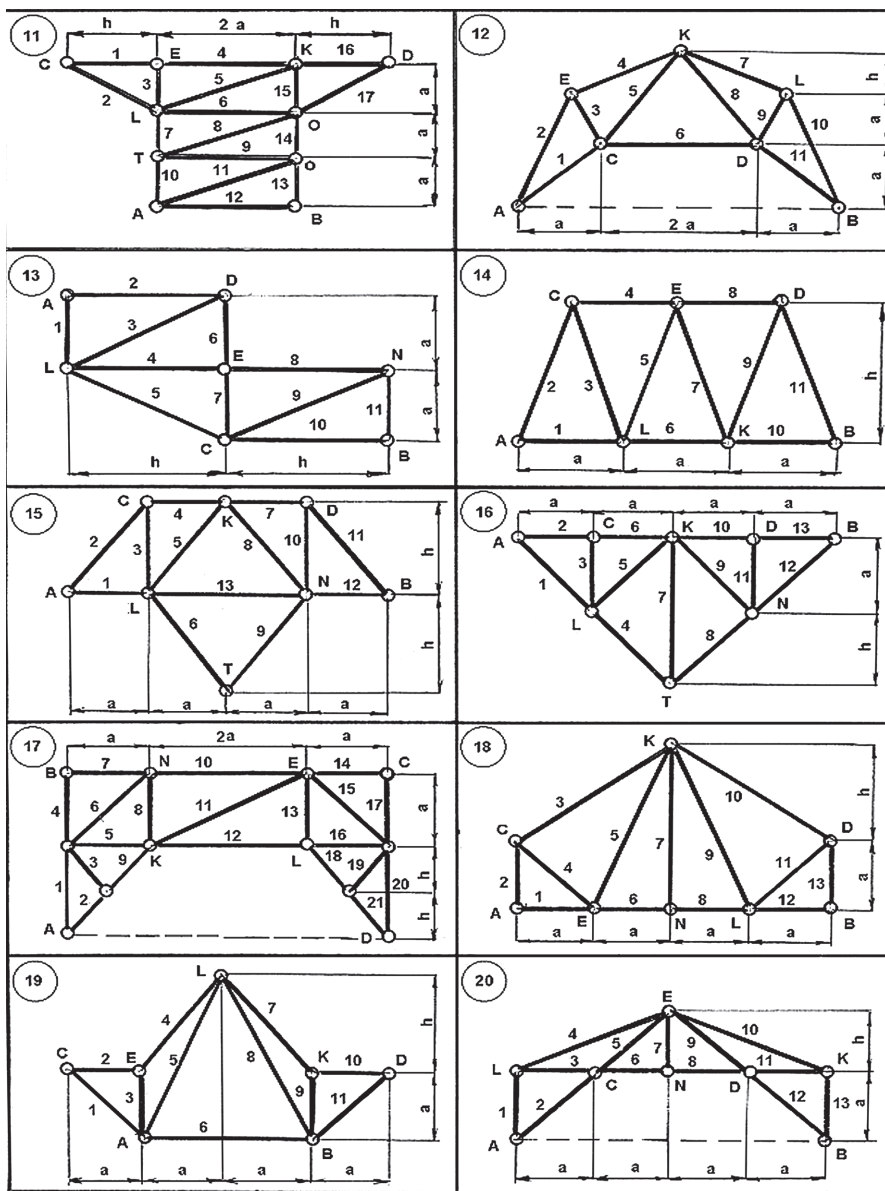
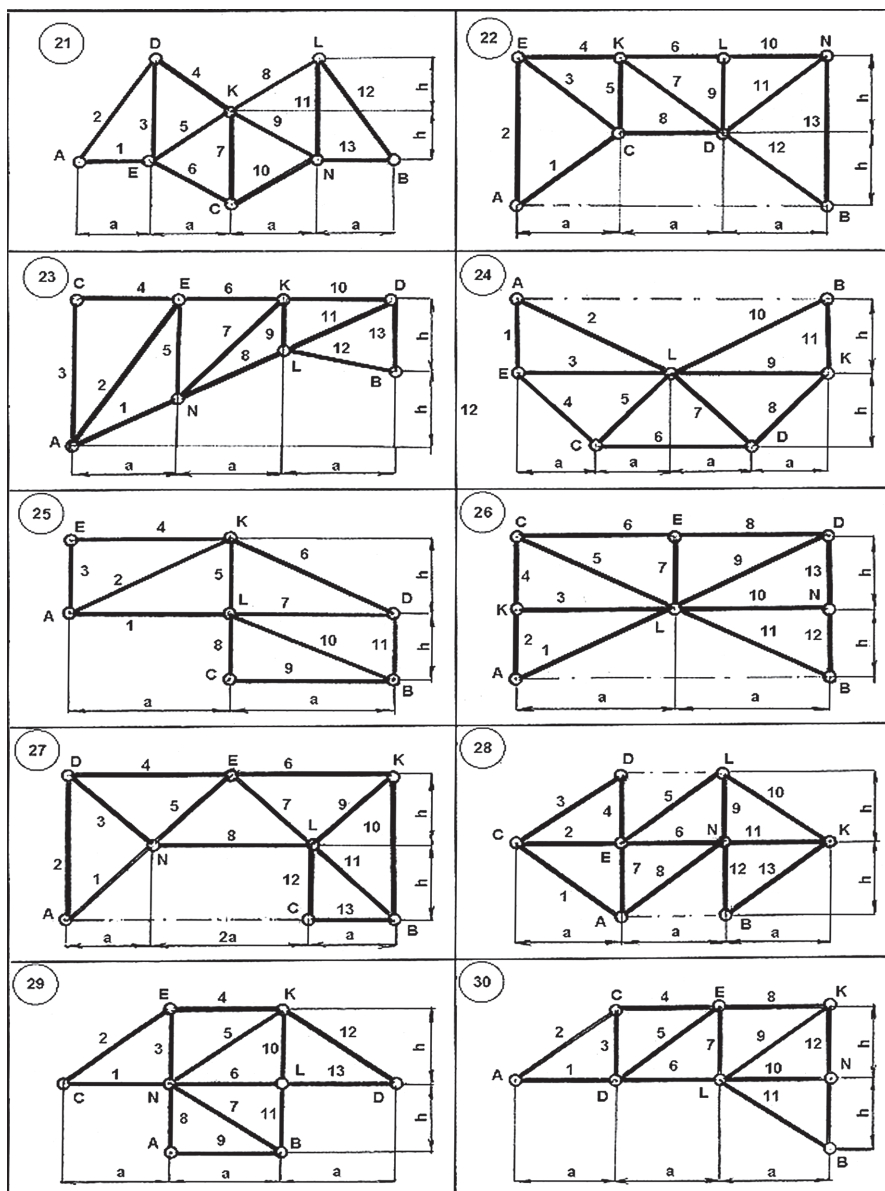


Рис. 6.5



6.1.2. Вказівки до виконання РГР № 1

$$F_1 = 6 \text{ кН}$$

$$F_2 = 4 \text{ кН}$$

$$F_3 = 10 \text{ кН}$$

В пункті 4.3 наведені короткі відомості про ферми і розглянуті різні способи визначення зусиль в стержнях ферм. Використовуючи відомості, що приведені в пункті 4.3, знайдемо зусилля в ферми, яка представлена на рис. 6.6.

Перевіримо, чи є дана ферма статично визначеною. Кількість вузлів $n = 8$. Кількість стержнів $k = 13$. Використаємо залежність (4.3):

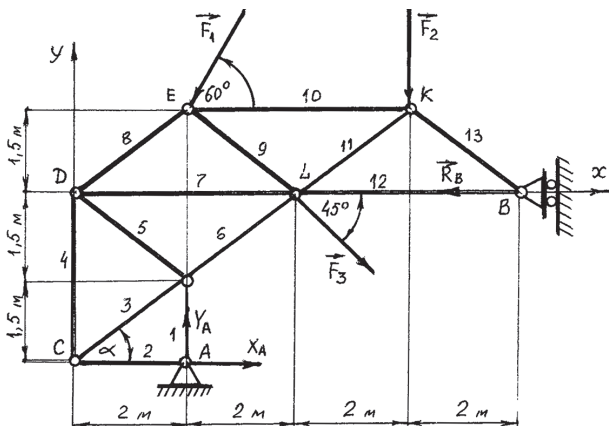


Рис. 6.6

$$13 = 2 \cdot 8 - 3$$

Ця ферма статично визначена і жорстка.

1. Знайдемо реакції в'язей.

Розглянемо рівновагу ферми в цілому. Для неї в'язями є опора в точці А (нерухомий шарнір) і опора в точці В (рухомий шарнір). Реакції будуть X_A , Y_A , $\vec{R}_B$.

Запишемо рівняння рівноваги ферми:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_A - F_1 \cos 60^\circ + F_3 \cos 45^\circ - R_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad Y_A - F_1 \sin 60^\circ - F_2 - F_3 \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad F_1 \cos 60^\circ \cdot 4,5 - F_3 \cos 45^\circ \cdot 3 - F_3 \sin 45^\circ \cdot 2 - F_2 \cdot 4 + R_B \cdot 3 = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, маємо:

$$X_A = 8,55 \text{ кН};$$

$$Y_A = 16,27 \text{ кН};$$

$$R_B = 12,62 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum_{k=1}^n M_k(\vec{F}_k) = X_A \cdot 4,5 - Y_A \cdot 4 + F_1 \sin 60^\circ \cdot 4 + F_3 \cos 45^\circ \cdot 1,5 +$$

$$+ F_3 \sin 45^\circ \cdot 2 - R_B \cdot 1,5 = -0,05.$$

2. Обчислення зусиль в стержнях ферми способом вирізання вузлів.

Розрахунок почнемо з вузла А, де сходяться два стержня 1 і 2, (рис. 6.7, а).

Запишемо рівняння рівноваги:

$$\text{а) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_A - S_A = 0; \quad X_A = S_2; \quad S_2 = 8,55 \text{ кН}.$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad Y_A + S_1 = 0; \quad S_1 = -Y_A; \quad S_1 = -16,27 \text{ кН}.$$

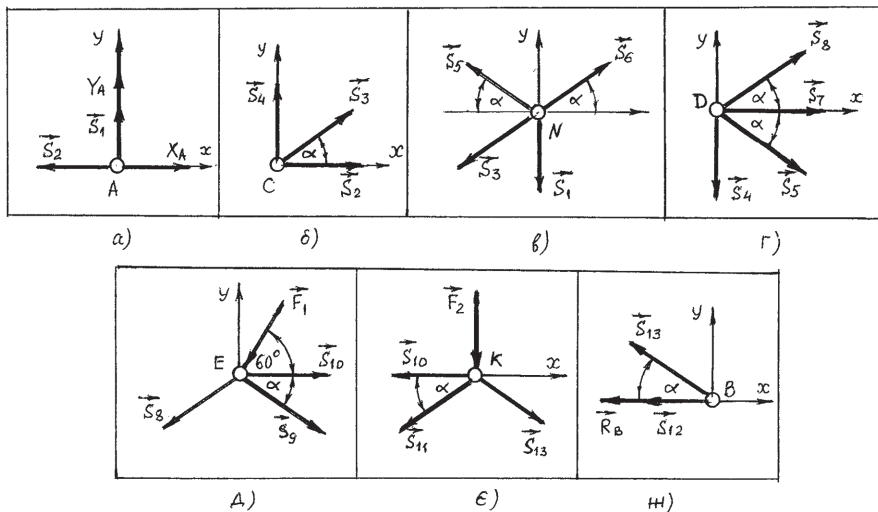


Рис. 6.7

Розглянемо рівновагу вузла С (рис. 6.7,б):

$$\begin{aligned} \text{б) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} &= 0; & S_2 + S_3 \cos \alpha &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{k_y} &= 0; & S_4 + S_3 \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Знайдемо значення $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$.

$$CN = \sqrt{AN^2 + AC^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ (м)};$$

$$\sin \alpha = \frac{AN}{CN} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6; \quad \cos \alpha = \frac{AC}{CN} = \frac{2}{2,5} = 0,8.$$

$$\sin \alpha = 0,6; \quad \cos \alpha = 0,8; \quad \alpha = 36,9^\circ.$$

Тоді із системи рівнянь б) маємо:

$$S_3 = -10,69 \text{ кН}; \quad S_3 = 6,41 \text{ кН}.$$

Для вузла N (рис. 6.7, в):

$$\text{в) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad S_6 \cos \alpha - S_3 \cos \alpha - S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad S_6 \sin \alpha - S_3 \sin \alpha + S_5 \sin \alpha - S_1 = 0.$$

$$\text{Маємо: } S_5 = -13,56 \text{ кН}; \quad S_6 = -24,25 \text{ кН}.$$

Для вузла D (рис. 6.7, г)

$$\text{г) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad S_7 + S_8 \cos \alpha + S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad S_8 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha - S_4 = 0.$$

$$\text{Маємо: } S_8 = -2,88 \text{ кН}; \quad S_7 = 13,15 \text{ кН}.$$

Для вузла E (рис. 6.7, д):

$$\text{д) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad S_{10} + S_9 \cos \alpha - S_8 \cos \alpha - F_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad -F_1 \sin 60^\circ - S_9 \sin \alpha - S_8 \sin \alpha = 0.$$

$$\text{Маємо: } S_9 = -5,78 \text{ кН}; \quad S_{10} = +5,32 \text{ кН}.$$

Для вузла K (рис. 6.7, е):

$$\epsilon) \quad \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad -S_{10} - S_{11} \cos \alpha + S_{13} \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad -F_2 - S_{11} \sin \alpha - S_{13} \sin \alpha = 0.$$

Маємо: $S_{13} = 0$ кН;

$S_{11} = -6,65$ кН.

Для вузла В (рис. 6.7, ж):

$$\text{ж) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad -R_B - S_{12} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad S_{13} \sin \alpha = 0.$$

Маємо: $S_{12} = -12,62$ кН.

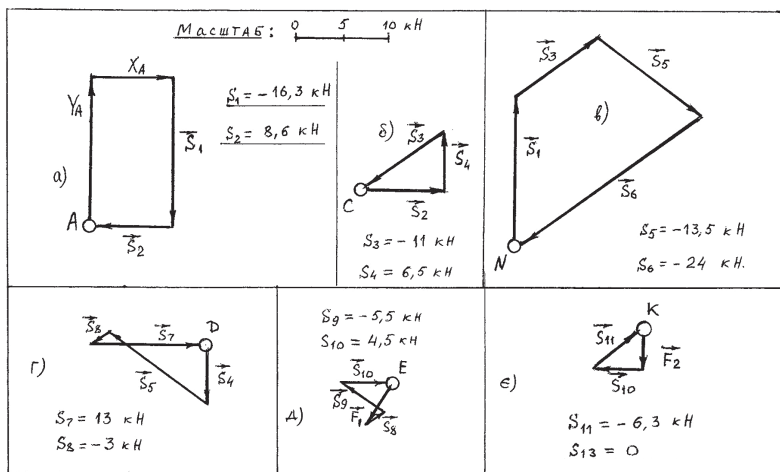


Рис. 6.8

Для перевірки розрахунків доцільно для кожного вузла побудувати багатокутник сил. На рисунку 6.8 показані багатокутники сил для вузлів, що розглядались. Методика побудовання багатокутників приведена в задачі 4.5.

3. По способу Ріттера знайдемо зусилля в стержнях 6, 7, 8.

Для цього розріжемо ферму по цих стержнях і розглянемо, наприклад, ліву половину ферми. Дія правої частини ферми на ліву передається по стержнях 6,

7, 8. Реакції цих стержнів спрямуємо від вузлів по стержням (рис. 6.9).

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки L :

$$\sum_{k=1}^n M_L(\vec{F}_k) = 0;$$

$$-S_8 \sin \alpha \cdot 4 - Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 3 = 0.$$

$$\text{Маємо: } S_8 = -2,87 \text{ кН}.$$

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки D :

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0;$$

$$S_6 \cos \alpha \cdot 1,5 + S_6 \sin \alpha \cdot 2 + Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 3 = 0.$$

$$\text{Маємо: } S_6 = -24,24 \text{ кН}.$$

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки N :

$$\sum_{k=1}^n M_N(\vec{F}_k) = 0; \quad -S_7 \cdot 1,5 - S_8 \cos \alpha \cdot 1,7 - S_8 \sin \alpha \cdot 2 + X_A \cdot 1,5 = 0.$$

$$\text{Маємо: } S_7 = 13,14 \text{ кН}.$$

Ці результати добре узгоджуються з результатами, що отримані за допомогою способу вирізання вузлів. Знайдені зусилля зведемо в одну таблицю 6.5.

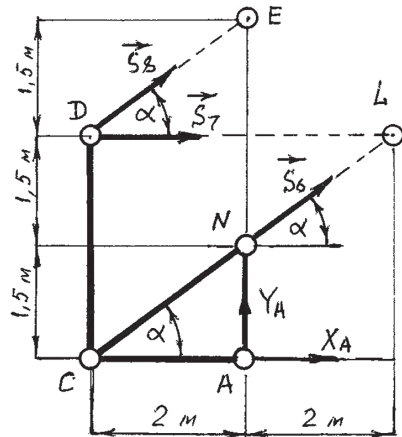


Рис. 6.9

Таблиця 6.5

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7
Знак сили	-	+	-	+	-	-	+
Сила, кН	16,27	8,55	10,69	6,41	13,56	24,25	13,15
	8	9	10	11	12	13	
	-	-	+	-	-		
	2,88	5,78	5,32	6,65	12,62	0	

6.2. Розрахунково-графічна робота №2 “Визначення реакцій опор складеної конструкції”

Визначити реакції опор і зусилля в проміжному шарнірі для конструкції, що складається з двох тіл.

6.2.1. Варіанти завдань РГР № 2

Схеми конструкцій показані на рисунках 6.12–6.15. Необхідні числові дані наведені в таблицях 6.6–6.9. На схемах не показані місцезнаходження опор та точки прикладання зосереджених сил, пар сил та ділянки, де розміщене розподілене навантаження. Ці дані беруться з таблиць. На рисунку 6.10 показані напрями дії сил в залежності від кута α , а також показаний напрям дії зосередженого навантаження і пари сил. Задана пара сил з моментом M діє завжди проти ходу годинникової стрілки.

Для даного варіанту за даними, що приведені в таблиці, необхідно побудувати конструкцію з опорами і діючими силами.

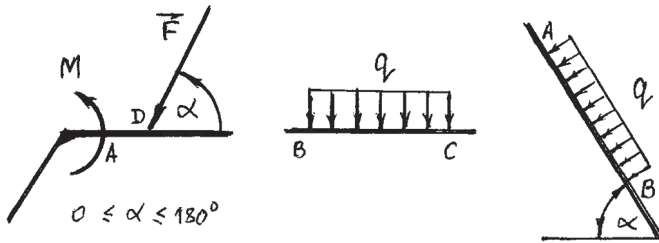


Рис. 6.10

Для ілюстрації на рисунку 6.11 побудована конструкція з опорами і діючими на неї силами згідно варіанту 13.

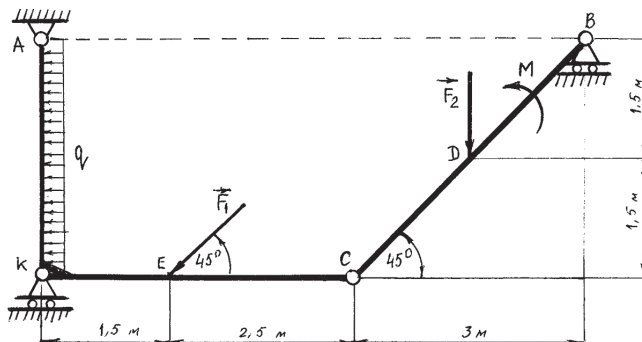


Рис. 6.11

Таблиця 6.6

Варіант	Схема	ОПОРА				Зосереджені сили						Пара сил		Розподілене навантаження	
		Тип, місце знаходження													
					β	$\overrightarrow{F_1}$			$\overrightarrow{F_2}$			М	Ділянка	q	Ділянка
						F1	Точка прикладання	α_1	F2	Точка прикладання	α_2				
					град.	кН	Точка прикладання	град.	кН	Точка прикладання	град.	кНм	Ділянка	кН/м	Ділянка
1	1	A,B	–	–	–	5	E	30	6	K	45	4	CL	2	EC
2	1	–	B	A	30	10	E	45	15	D	60	5	LK	4	CL
3	1	–	D	A	0	12	B	60	14	L	45	6	AE	3	EC
4	2	–	A	B	45	8	D	60	4	L	45	4	CB	4	AL
5	2	A,B		–	–	4	D	45	8	K	60	6	DL	6	CB
6	2	D		A,B	0	10	K	30	12	L	45	4	AL	3	CB
7	3	A,B		–	–	7	K	45	8	E	30	6	EC	4	BL
8	3	–	A	B	30	5	E	60	4	L	45	4	KD	6	BL
9	3	–	B	A	0	4	D	30	5	L	60	6	CL	4	KD
10	4	A,B		–	–	12	L	30	10	K	45	8	CL	6	AC
11	4	–	A	B	30	10	L	60	12	K	0	4	LD	3	BD
12	4	–	B	A	30	8	D	30	9	L	90	6	BK	4	AC
13	5	A	–	K,B	30	4	L	45	5	D	90	6	DB	4	AK
14	5	–	A	B	30	3	L	60	4	D	120	5	CD	5	LC
15	5	–	B	A	30	6	K	120	5	D	0	4	AK	3	KL
16	6	A,B		–	–	8	D	45	7	E	90	6	CD	5	KB
17	6	–	A	B	45	10	D	0	9	E	60	8	CE	7	AD
18	6	–	B	A	30	12	E	90	10	K	45	12	EK	8	BK
19	7	A,B		–	–	4	K	180	3	L	0	2	KC	2	BL
20	7	–	A	B	30	6	D	0	4	L	45	2	CL	2	KD
21	7	–	B	A	0	8	K	45	6	L	30	4	AD	4	BL
22	8	D,B		–	–	5	A	60	4	L	45	3	BK	2	AD
23	8	–	B	D	0	16	D	45	14	L	0	10	CL	8	DC
24	8	A,B		–	–	20	D	30	18	K	45	16	DC	10	BK
25	9	A	–	B,D	0	18	E	30	16	L	45	10	CD	6	KL
26	9	B	–	A,D	0	8	E	0	6	L	90	6	CD	4	LC
27	9	D	–	A,B	0	6	E	45	4	K	30	2	CD	2	BC
28	10	A,D	–	–	–	4	L	45	3	B	30	2	CD	2	AL
29	10	D	–	A,B	0	5	L	60	0	–	–	4	AE	4	CD
30	10	B	–	A,D	0	12	L	45	0	–	–	10	CD	8	AL

Таблиця 6.7

Варіант	Схема	ОПОРА				Зосереджені сили						Пара сил		Розподілене навантаження	
		Тип, місце знаходження													
					β	$\vec{F}_1$			$\vec{F}_2$			М	Ділянка	q	Ділянка
						F_1	Точка прикладання	α_1	F_2	Точка прикладання	α_2				
					град.	кН	Точка прикладання	град.	кН	Точка прикладання	град.	кНм		кН/м	
31	11	A,B	—	—	—	8	E	60	6	D	45	4	CD	4	BL
32	11	—	B	A	0	10	E	120	8	L	90	6	DL	6	AE
33	11	—	A	B	30	14	E	45	12	D	60	8	BL	4	EC
34	12	A,B	—	—	—	4	K	135	5	L	60	6	AE	3	KC
35	12	L	—	A,B	0	2	E	90	3	D	180	4	KC	3	DL
36	12	—	A	B	60	7	E	45	8	L	60	3	AE	4	EK
37	13	—	D	B	45	6	A	60	7	L	30	5	CL	4	CK
38	13	A,B	—	—	—	5	E	180	6	K	30	4	CK	6	KL
39	13	—	A	B	30	10	D	45	12	L	60	8	CE	4	AC
40	14	D	—	A,B	0	20	E	120	18	K	45	10	EL	8	CD
41	14	A	—	B,D	0	18	L	90	16	K	60	8	BK	6	AE
42	14	B	—	A,D	30	12	E	120	10	L	45	6	EA	4	CD
43	15	—	A	D	30	8	E	45	6	B	60	7	NC	4	EL
44	15	A	—	D,B	0	17	N	60	15	L	90	10	EC	6	AN
45	15	—	D	A	30	10	E	90	12	L	60	8	NC	14	EL
46	16	A	—	B,D	0	8	K	60	10	L	90	12	KC	10	DL
47	16	—	B	D	45	4	E	120	6	L	45	10	BC	6	AK
48	16	—	D	B	0	16	A	60	10	L	135	6	CL	4	DL
49	17	A,B	—	—	—	20	L	90	16	D	60	12	AE	10	CD
50	17	—	A	B	60	30	E	60	25	D	45	10	AC	6	LE
51	17	—	B	A	0	16	L	120	18	D	8	15	CB	7	CD
52	18	D	—	A,B	0	4	L	90	6	K	60	8	LC	6	AL
53	18	—	A	B	30	12	K	120	10	D	45	6	AL	4	CK
54	18	—	B	A	45	14	L	90	12	N	45	10	DN	8	KN
55	19	K	—	A,B	0	22	E	60	20	N	45	15	AL	16	EC
56	19	—	A	B	30	18	K	120	16	D	45	14	AK	14	CD
57	19	—	B	A	45	16	K	45	14	N	60	12	DE	10	DN
58	20	L,B	—	—	—	6	E	120	8	D	45	10	LC	6	BK
59	20	—	B	A	0	12	L	180	10	K	45	8	AC	4	AL
60	20	—	L	D	0	10	A	120	6	B	45	4	LC	6	CD

Таблиця 6.8

Варіант	Схема	ОПОРА				Зосереджені сили						Пара сил		Розподілене навантаження	
		Тип, місце знаходження													
					β	$\overrightarrow{F_1}$			$\overrightarrow{F_2}$			М	Ділянка	q	Ділянка
						F ₁	Точка прикладання	α ₁	F ₂	Точка прикладання	α ₂				
61	21	A,B	–	–	–	8	L	60	6	D	135	10	AC	6	BN
62	21	A	–	L,B	0	6	K	45	8	N	60	12	AC	10	LK
63	21	–	A	B	30	10	L	90	12	D	45	8	BN	6	CD
64	22	A,B	–	–	–	4	K	90	6	D	45	10	AC	8	DL
65	22	–	A	B	45	14	K	120	12	L	0	6	BD	7	AC
66	22	–	B	A	30	10	K	60	12	L	90	10	CL	6	BD
67	23	A,B	–	–	–	8	L	90	10	E	60	12	BD	8	CD
68	23	–	A	B	40	10	L	0	12	D	60	10	KD	10	ED
69	23	–	B	A	0	12	L	180	14	E	45	12	CE	8	KD
70	24	A,B	–	–	–	4	E	60	6	D	45	8	LC	6	CD
71	24	–	A	B	90	16	L	75	10	D	60	10	EL	8	AE
72	24	–	B	A	30	14	E	45	12	D	60	12	LC	6	CD
73	25	A,B	–	–	–	20	K	45	22	L	60	10	CD	8	AL
74	25	–	B	A	0	22	K	60	18	D	45	12	BK	10	AC
75	25	–	A	B	0	12	L	75	16	K	60	10	KC	8	CD
76	26	A,B	–	–	–	15	N	60	14	D	75	8	CN	6	LD
77	26	–	A	B	30	10	N	75	12	L	30	6	LB	4	CL
78	26	–	B	A	45	12	N	60	14	D	135	4	CN	6	LD
79	27	A,B	–	–	–	5	B	60	6	L	90	7	CB	6	DC
80	27	–	A	B	60	20	K	75	22	D	60	6	CB	12	DC
81	27	–	B	A	0	25	K	135	20	D	30	16	KL	10	CB
82	28	A,B	–	–	–	16	E	60	15	L	75	12	CL	10	BD
83	28	–	A	B	30	13	E	45	14	L	60	10	AE	12	LD
84	28	–	B	A	45	9	E	60	10	L	135	12	EC	10	BL
85	29	A	–	K,B	0	13	D	60	12	E	45	10	NK	12	CB
86	29	A,B	–	–	–	16	D	135	14	K	45	9	AE	10	CB
87	29	–	B	A	30	8	D	45	10	K	90	12	CB	10	CB
88	30	D	–	A,B	0	12	K	60	10	L	90	14	AL	16	CK
89	30	–	A	B	0	8	D	60	12	L	90	16	CL	14	KB
90	30	–	D	A	0	6	B	60	8	L	90	10	CK	6	KB

Таблиця 6.9

Варіант	Схема	ОПОРА					Зосереджені сили					Пара сил		Розподілене навантаження	
		Тип, місце знаходження													
					β	$\vec{F}_1$		$\vec{F}_2$			М	Ділянка	q	Ділянка	
						F ₁	Точка прикладання	α_1	F ₂	Точка прикладання					α_2
					град.	кН		град.	кН		град.	кНм		кН/м	
91	31	A	–	B,D	0	16	K	75	18	N	0	10	ND	4	LB
92	31	–	D	B	30	10	A	135	12	N	90	14	KL	2	ND
93	31	–	A	D	0	12	B	60	10	N	130	8	CN	4	AK
94	32	–	A	B	30	10	D	30	8	K	120	4	NK	6	LC
95	32	A,B	–	–	–	16	L	140	12	N	45	6	AD	4	NB
96	32	B	–	D,L	0	18	A	150	16	K	45	10	DL	5	LC
97	33	–	B	A	0	17	L	60	19	K	90	12	DK	6	CB
98	33	B,A	–	–	–	13	D	50	14	L	45	8	DL	3	AD
99	33	B	–	A,K	0	10	N	45	12	D	120	11	LK	4	DL
100	34	A	–	B,K	0	14	N	60	16	D	135	9	AL	6	DK
101	34	–	A	B	45	20	L	30	22	K	0	16	CK	10	DB
102	34	A,B	–	–	–	21	N	130	16	D	90	10	DB	3	NC
103	35	A,D	–	–	–	15	B	75	17	K	30	12	CK	3	KL
104	35	–	B	D	30	19	A	120	16	L	0	10	LD	4	AC
105	35	–	A	D	45	12	B	60	13	K	0	11	CK	3	CK
106	36	A,B	–	–	–	9	L	70	12	N	150	10	CD	2	KB
107	36	–	A	B	30	21	K	110	18	N	60	12	LC	3	NC
108	36	–	D	A	0	8	B	120	12	L	40	11	LK	4	AN
109	37	A,B	–	–	–	17	D	135	16	L	40	15	CD	3	KL
110	37	–	B	A	0	13	K	60	14	L	135	16	AC	3	LB
111	37	–	A	B	30	10	D	0	13	K	45	15	CD	4	KL
112	38	A,B	–	–	–	6	D	45	9	K	90	11	CB	6	LC
113	38	–	A	B	30	12	D	0	13	K	135	10	CK	6	NC
114	38	–	A	K	0	14	N	75	15	B	90	6	CB	4	CK
115	39	A,B	–	–	–	16	D	70	14	T	0	13	NB	3	KC
116	39	–	A	B	45	11	K	120	12	N	90	10	CT	4	DK
117	39	–	B	A	30	9	L	45	10	T	0	12	NT	2	DC
118	40	–	B	D	30	14	A	75	13	K	90	10	LB	2	AB
119	40	D,B	–	–	–	16	A	60	15	K	135	12	AL	2	LB
120	40	–	D	B	30	10	A	120	12	K	90	8	LB	2	CD

Рис. 6.12

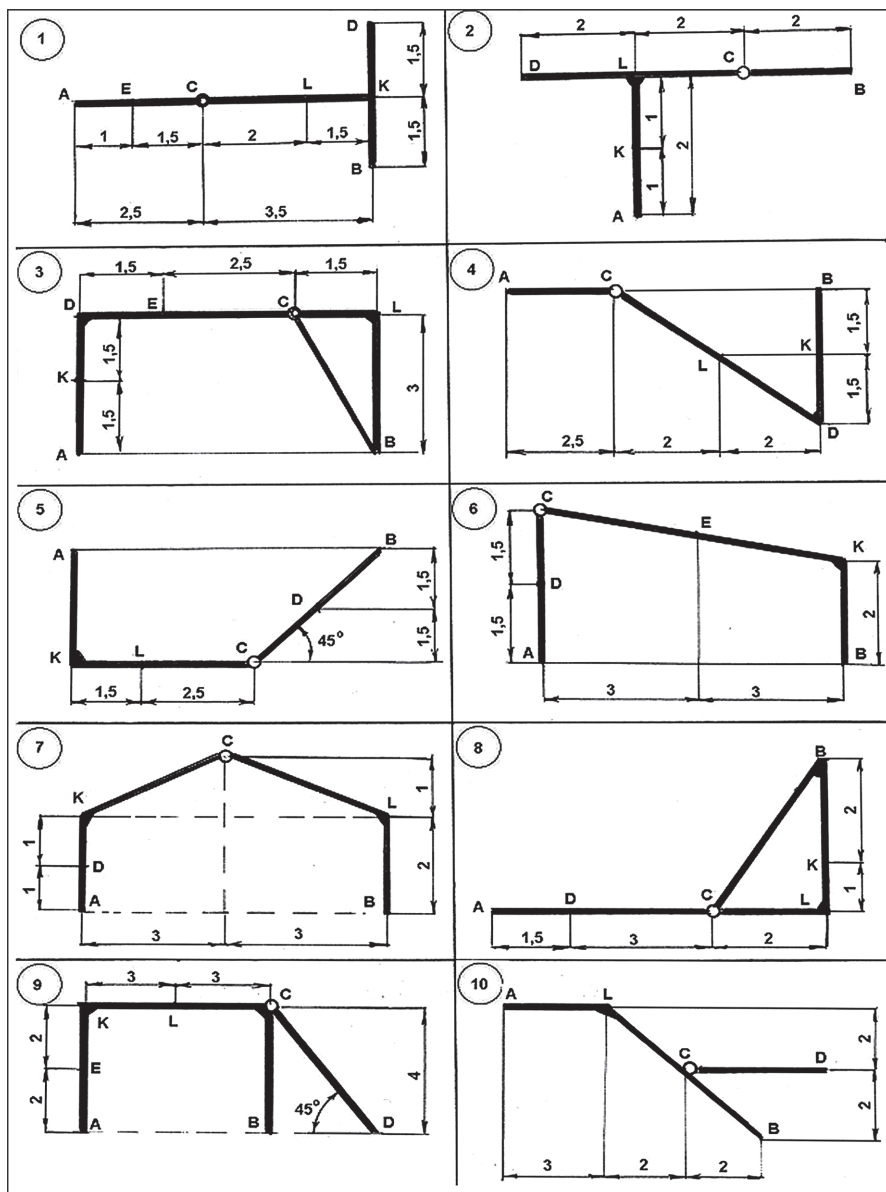


Рис. 6.13

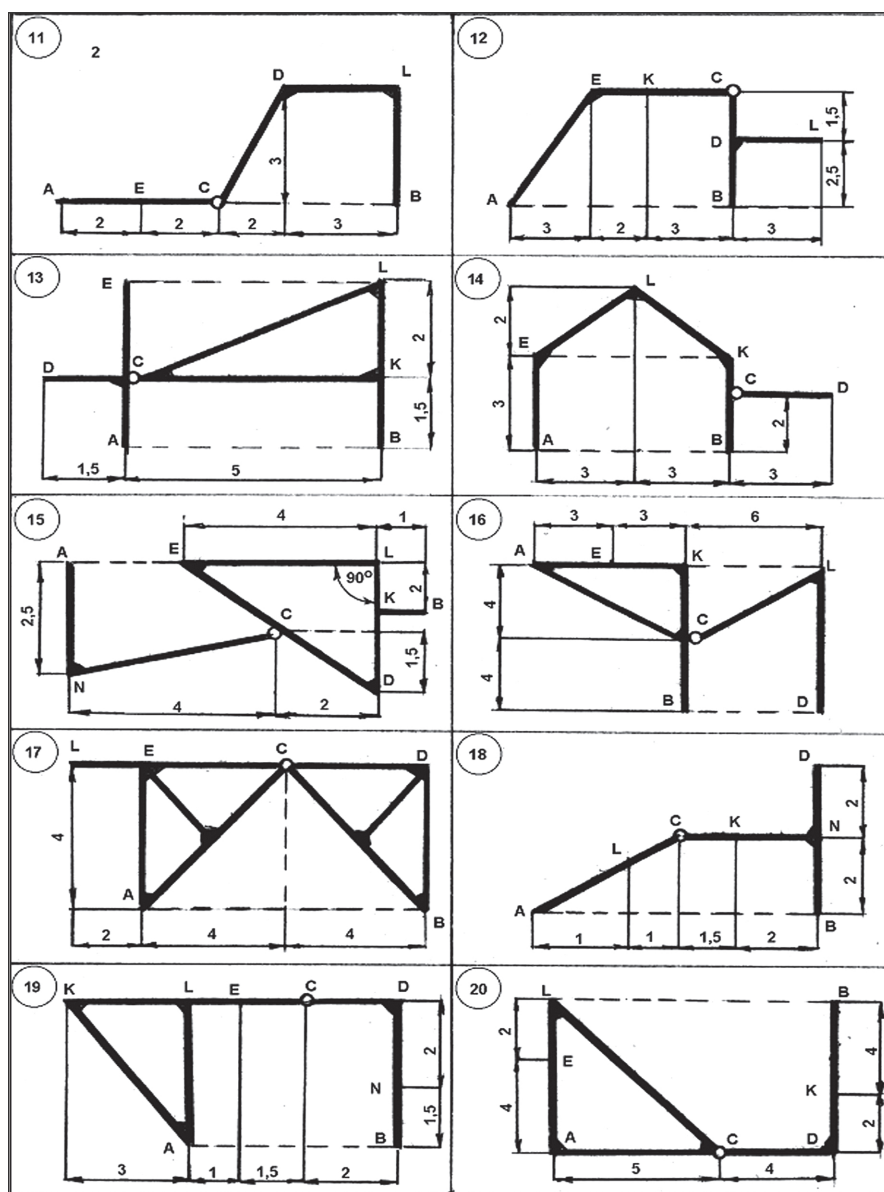


Рис. 6.14

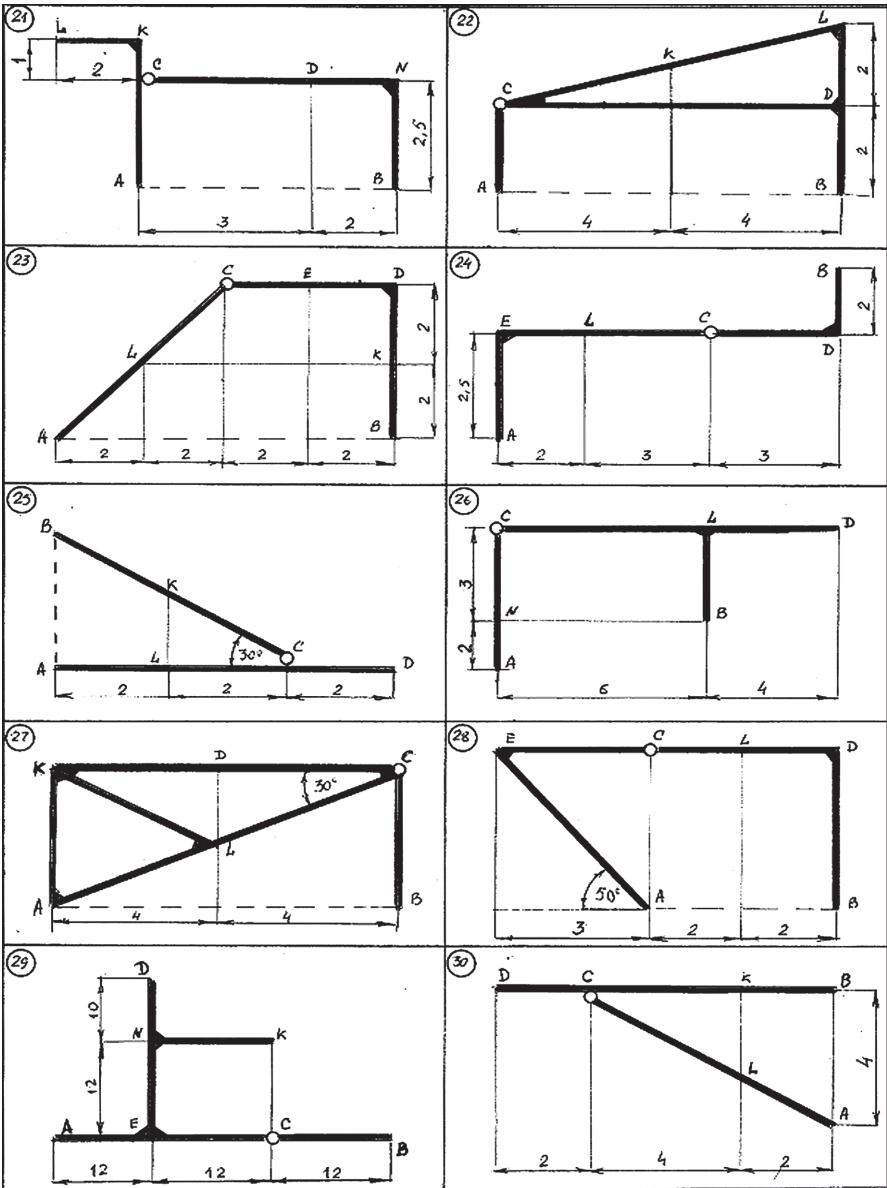
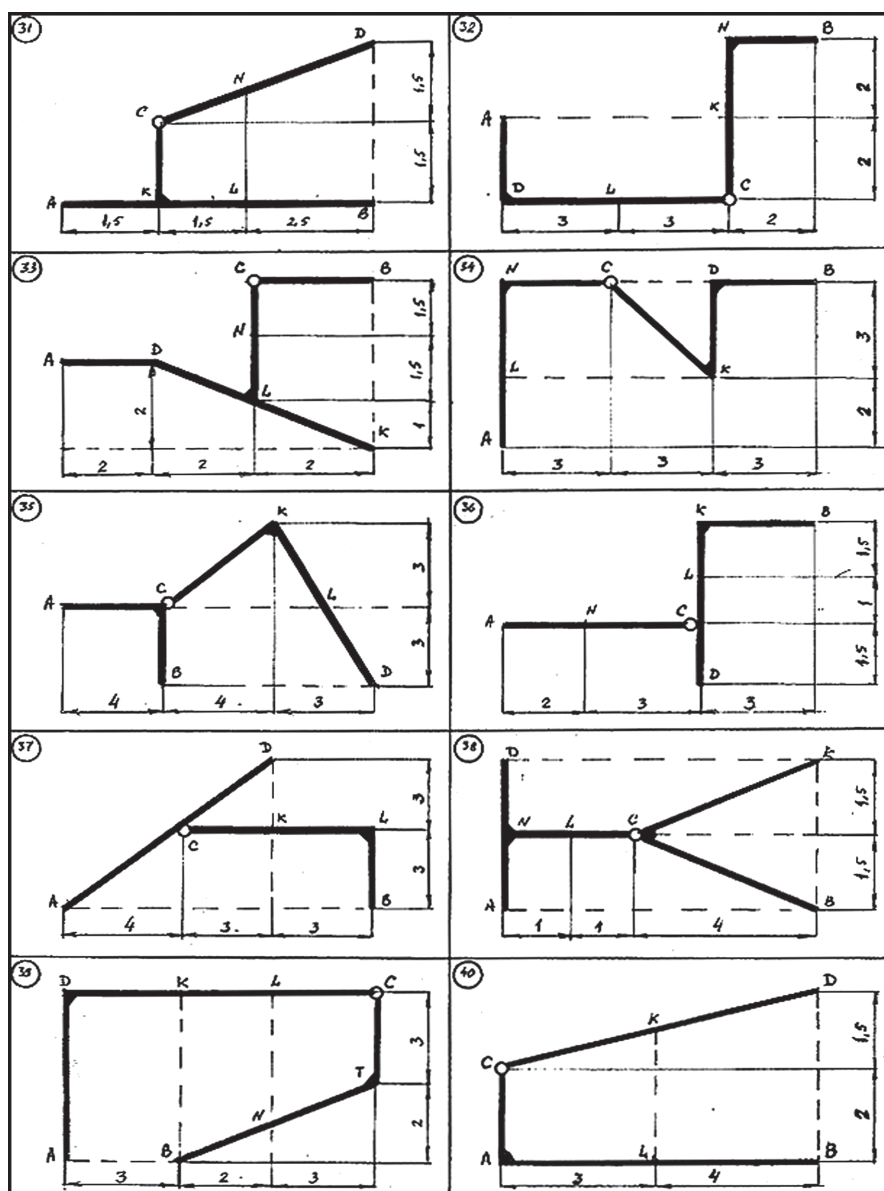


Рис. 6.15



6.2.2. Вказівки до виконання РГР № 2

Розглянемо конструкцію, що складається з двох невагомих балок AC і BC , які з'єднані між собою шарніром C (рис. 6.16, а) Розміри (в метрах) вказані на рисунку.

Визначити реакції опор A і B , і зусилля, що діє в шарнірі C , якщо $F_1 = 6 \text{ кН}$, $F_2 = 8 \text{ кН}$, $q = 3 \text{ кН/м}$, $M = 8 \text{ кНм}$.

Розглянемо рівновагу конструкції ACB в цілому. Для неї в'язями є опори в точках A і B (нерухомі шарніри). Маємо чотири невідомих X_A , Y_A , X_B , Y_B (рис. 6.16, а). Тому цю конструкцію розріжемо по шарніру C на дві балки AC і CB , і розглянемо рівновагу балки CB (рис. 6.16, б) і балки AC (рис. 6.16, в).

Таким методом розв'язання задачі 4.6 і 4.7, де більш детально розглянуті всі питання.

Розподілене навантаження замінимо зосередженою силою

$$Q = q \cdot l = 3 \cdot 2 = 6 \text{ (кН)}.$$

Розглянемо рівновагу балки CB (рис. 6.16, б):

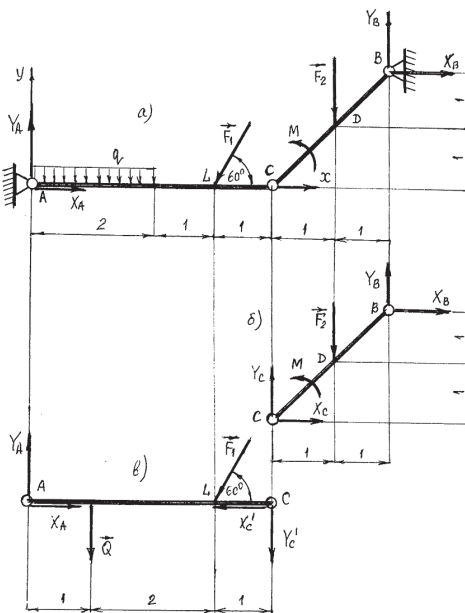


Рис. 6.16

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_B + X_C = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_B - F_2 + Y_C = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad M - F_2 \cdot 1 - X_B \cdot 2 + Y_B \cdot 2 = 0. \quad (3)$$

Розглянемо рівновагу балки AC (рис. 6.17, б):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - X_C - F_1 \cos 60^\circ = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - Q - F_1 \sin 60^\circ - Y_C' = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -Y_A \cdot 4 + Q \cdot 3 + F_1 \sin 60^\circ \cdot 1 = 0. \quad (6)$$

$$X_C = X_C'; \quad Y_C = Y_C'$$

Розв'язуючи ці рівняння, маємо: $X_A = -10,4 \text{ кН}$; $Y_A = 5,8 \text{ кН}$;

$X_B = 13,4 \text{ кН}$; $Y_B = 13,4 \text{ кН}$; $X_C = \pm 13,4 \text{ кН}$; $Y_C = \pm 5,4 \text{ кН}$.

Перевірка. Розглянемо рівновагу конструкції ACB :

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot 4 + Q \cdot 3 + F_1 \sin 60^\circ \cdot 1 + M - F_2 \cdot 1 - X_B \cdot 2 + Y_B \cdot 2 = -0,004 \approx 0.$$

7. Запитання для самоперевірки і до захисту розрахунково-графічних робіт

1. В чому полягає предмет статyki?
2. Що розуміють під поняттям “сила”?
3. Як формулюються аксіоми статyki?
4. Чим відрізняється вільне тіло від невільного?
5. Що називається силою реакції в’язі?
6. Як формулюється теорема про три сили?
7. Які сили називаються збіжними?
8. В чому полягають геометричні і аналітичні методи визначення рівнодійної плоскої системи збіжних сил?
9. Які умови рівноваги системи збіжних сил? В геометричній і аналітичній формах.
10. Як знаходиться на площині момент сили відносно точки?
11. В якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
12. Що називається парою сил? Як знаходиться момент пари сил?
13. Чому пара сил не зрівноважується однією силою?
14. В одній площині діють три пари сил. Чи можна їх дію замінити дією однієї пари сил?
15. Які умови рівноваги твердого тіла, на яке діють тільки пари сил?
16. Що називається головним вектором системи сил?
17. Що називається головним моментом системи сил?
18. Як аналітично знайти головний вектор?
19. Яким чином визначається головний момент?

20. Яка різниця між рівнодійною силою і головним вектором?
21. Як формулюється теорема Варіньона?
22. Які аналітичні умови рівноваги плоскої довільної системи сил?
23. Яка конструкція називається фермою?
24. Яка конструкція називається фермою з зайвими стержнями?
25. В чому суть способу вирізання вузлів при розрахунку ферм?
26. В чому суть способу Ріттера?
27. При розв'язуванні задач знайдене зусилля в стержні від'ємне. Що це означає?
28. Як будується багатокутник сил при використанні способу вирізання вузлів?
29. Яка система тіл називається складеною?
30. Скільки невідомих величин повинно входити в рівняння рівноваги сил, розміщених в одній площині, для того щоб задача була статично визначеною?
31. В чому суть метода розв'язування задач про рівновагу системи, яка складається з декількох твердих тіл?
32. В яких випадках виникає тертя ковзання?
33. Як залежить сила тертя ковзання від площі стичних поверхонь?
34. Від чого залежить сила тертя ковзання?
35. Яка розмірність коефіцієнта тертя ковзання?
36. Що називається кутом тертя?
37. Яка залежність між кутом тертя і коефіцієнтом тертя?
38. В якому випадку виникає тертя кочення?
39. За якою формулою визначається момент опору при коченні?
40. Що характеризує коефіцієнт тертя кочення?
41. Яка розмірність коефіцієнта тертя кочення?

МОДУЛЬ 2.

ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ.

ЦЕНТР ВАГИ

В модулі 1 розглядалась тільки плоска система сил, а саме, плоска система збіжних сил, пари сил, що діють в одній площині, і довільна плоска система сил.

В цьому модулі розглядаються системи сил, що розміщені в просторі, а саме, просторова система збіжних сил, пари сил, що діють в різних площинах, і самий загальний випадок – просторова довільна система сил. Щоб користуватись модулем 2, потрібно володіти теоретичним і практичним матеріалом, який приведений в модулі 1, або знову його переглянути, тому що деякі положення статyki, теореми і таке інше не будуть тут повторюватись.

1. Просторова система збіжних сил

1.1. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної

Нагадуємо, що системою збіжних сил називаються сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Нехай в просторі діє n сил, лінії дії яких перетинаються в точці O (рис. 1.1, а). Аналогічно плоскій системі збіжних сил, просторова система збіжних сил зводиться до рівнодійної $\vec{R}$, яка розміщена в просторі:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (1.1)$$

На рисунку 1.1 (а, б, в) показаний процес зведення системи збіжних сил до рівнодійної $\vec{R}$. Процес послідовного застосування до сил правила паралелограма, або їх векторного складання,

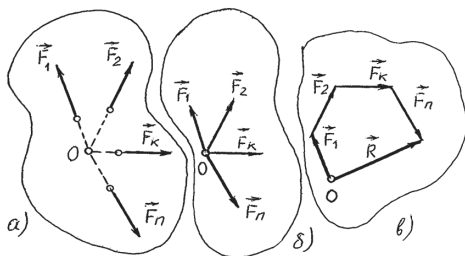


Рис. 1.1

приводить до побудови силового многокутника із заданих сил. В силовому многокутнику кінець однієї сили є початком другої (рис. 1.1, в). Рівнодійна сила в силовому многокутнику з'єднує початок першої сили з кінцем останньої.

Для просторової системи сил силовий многокутник є просторо-

ва фігура, а для плоскої – плоска. Для плоскої системи збіжних сил рівнодійну можна знайти графічним способом, а саме, побудовою силового многокутника в вибраному для сил масштабі. Для просторової системи збіжних сил прийшлося б силовий многокутник будувати в просторі із стержнів. Тому для знаходження рівнодійної просторової системи сил доцільним є аналітичний спосіб.

1.2. Аналітичний спосіб знаходження рівнодійної просторової системи збіжних сил

Спроектуємо вектори сил векторного виразу (1.1) на осі декартової системи координат (рис. 1.2):

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}, \quad (1.2)$$

де R_x, R_y, R_z – проекції рівнодійної $\vec{R}$, а F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекції k -ої сили $\vec{F}_k$ на відповідні координатні осі.

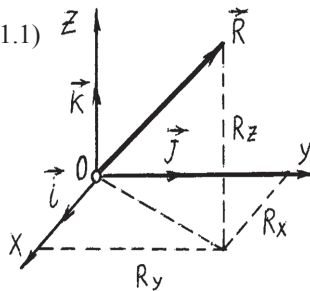


Рис. 1.2

Модуль рівнодійної $\vec{R}$ буде:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2}. \quad (1.3)$$

Напрямок дії рівнодійної $\vec{R}$ визначається за напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{R_x}{R}; \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{R_y}{R}; \cos(\vec{R}, \vec{k}) = \frac{R_z}{R}. \quad (1.4)$$

Щоб аналітичним способом знайти рівнодійну $\vec{R}$ просторової системи збіжних сил, необхідно:

- 1) за формулами (1.2) знайти проекції рівнодійної на координатні осі;
- 2) за формулою (1.3) знайти модуль рівнодійної;
- 3) за формулою (1.4) знайти напрям дії рівнодійної.

1.3. Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил

Просторова система збіжних сил буде в рівновазі, якщо рівнодійна $\vec{R} = 0$. Якщо вираз (1.3) прирівняти до нуля, то отримаємо аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (1.5)$$

1.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

Задача 1.1.

P $\alpha, \quad \beta$ $S_1=?; S_2=?;$ $S_3=?$	Знайти зусилля в стержнях просторового кронштейна, якщо в точці A діє сила P вертикально вниз. Стержні вважати невагомими, а з'єднання між стіною і стержнями-шарнірними (рис. 1.3). Розглянемо рівновагу точки A. Для неї в'язями є стержні 1, 2, 3. Ці стержні невагомі, мають на кінцях шарнірні з'єднання, тому реакції цих стержнів направлені по стержням. Будемо вважати, що реакції цих стержнів $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$, направлені від вузла A (рис. 1.3). Маємо просторову систему збіжних сил. Запишемо рівняння рівноваги:
--	--

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & -S_1 \cos \beta - S_2 \cos \beta - S_3 \sin \alpha &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0; & -S_1 \sin \beta + S_2 \sin \beta &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0; & S_3 \cos \alpha + P &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язуючи ці рівняння, маємо:

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha \cos \beta}; \quad S_3 = -\frac{P}{\cos \alpha}.$$

Знак “-” означає, що стержень 3 стискується. Стержні 1, 2 розтягуються.

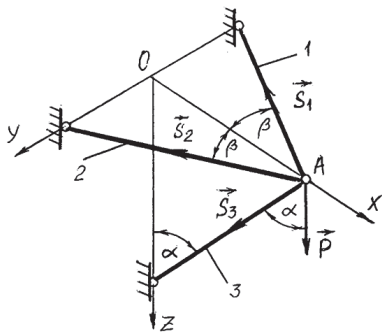


Рис. 1.3

Задача 1.2.

$P_1 = 10 \text{ кН}$ $P_2 = 12 \text{ кН}$ $S_1=?$ $S_2=?$ $S_3=?$	Знайти зусилля в стержнях, що утримують шарнір D. Сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ діють в площині AOD (рис. 1.4). Стержні невагомі і на кінцях мають шарнірні з'єднання.
---	--

Розглянемо рівновагу точки D . Для неї в'язями є стержні 1, 2, 3. Аналогічно

задачі 1.1, зусилля в стержнях спрямуємо від вузла D . Маємо просторову систему збіжних сил. Запишемо умови рівноваги.

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0; & -S_2 \cos 60^\circ + S_3 \cos 60^\circ &= 0. \\ \sum F_{ky} &= 0; & -S_1 \cos 45^\circ - S_2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ - \\ & & -S_3 \sin 60^\circ \cos 60^\circ + P_2 + P_1 \cos 40^\circ &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0; & -S_1 \sin 45^\circ - S_2 \sin 60^\circ \sin 60^\circ - \\ & & -S_3 \sin 60^\circ \sin 60^\circ - P_1 \sin 40^\circ &= 0\end{aligned}$$

Між силами $\vec{S}_2, \vec{S}_3$ і віссю OY (наприклад) невідомі значення кутів. Тому при проектуванні сил $\vec{S}_2$ і $\vec{S}_3$ на осі OY і OZ використовується спосіб подвійного проектування. Спочатку, наприклад, сила S_2 проектується на лінію OD , а потім ця проекція сили проектується на вісь OY . Це і записано в рівняннях рівноваги.

Розв'язуючи ці рівняння, маємо:

$$S_1 = 78,2 \text{ кН}, \quad S_2 = S_3 = -41,2 \text{ кН}.$$

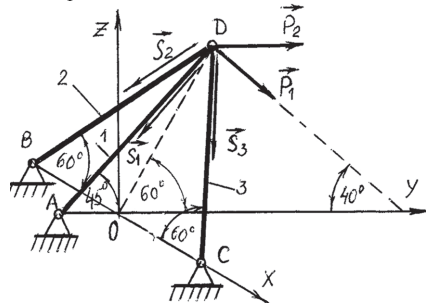


Рис. 1.4

Задача 1.3.

P

$AB=BC=AD=AE$

$BC \parallel FA$

$S_1 = ?$

$S_2 = ?$

$T = ?$

$S_3 = ?$

$S_4 = ?$

На рис. 1.5 зображений переносний кран. $AB=BC=AD=AE$. Вантаж вагою P висить на тросі, перекинутому через блок C . Другий кінець троса закріплений на лебідці K . Стержень AC в свою чергу може обертатись навколо осі A за допомогою троса CBL , який одним кінцем з'єднаний

з віссю блока C , а другий кінець закріплений на лебідці L . Нехтуючи тертям на блоках і вагою стержнів, знайти зусилля в стержнях і натяг T троса CBL , якщо стержні на кінцях мають шарнірні з'єднання.

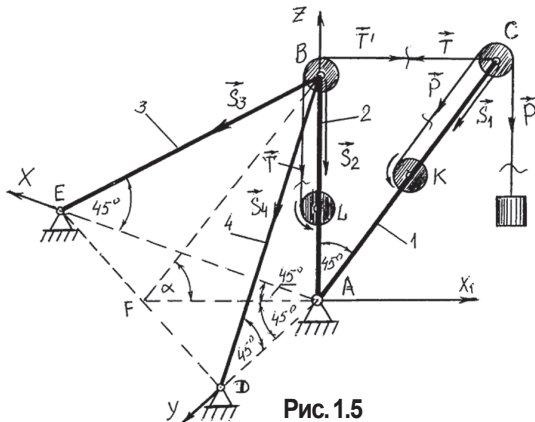


Рис. 1.5

В даному випадку маємо 4 стержня і трос. Це означає, що маємо 5 невідомих реакцій, а скласти ми можемо тільки три рівняння рівноваги. Тому цю конструкцію необхідно роз'єднати. Спочатку розглянемо рівновагу точки C . Для неї в'язями є стержень 1 і трос BC . Реакції їх спрямуємо від вузла C по тросу CB і стержню AC . На рис. 1.5 це сили $\vec{T}$ і $\vec{S}_1$. Сила, що діє зі сторони CK троса буде дорівнювати силі P . В даному випадку отримали плоску збіжну систему сил. Система координат AX_1Z . Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -T - P \sin 45^\circ - S_1 \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -P \cos 45^\circ - P - S_1 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\text{Звідки маємо: } S_1 = -2,41P; \quad T = P.$$

Розглянемо рівновагу точки B . Для неї в'язями є стержні 2, 3, 4 і трос CBL . Реакції стержнів $\vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4$ спрямуємо від вузла B по стержням. Реакція троса $\vec{T}_1$ напрямлена горизонтально на ділянці BC і вертикально вниз на ділянці BL . $T^1 = T$. Маємо просторову систему збіжних сил. Початок системи координат виберемо в точці A . Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad +S_3 \cos 45^\circ - T^1 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad +S_4 \cos 45^\circ - T^1 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad -S_3 \sin 45^\circ - S_4 \sin 45^\circ - S_2 - T^1 = 0.$$

Звідки маємо:

$$S_3 = P; \quad S_4 = P; \quad S_2 = -2,41P.$$

1.5. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1.4.

Знайти зусилля в стержнях просторового кронштейна, якщо в точці A діють дві сили. Сила $P_1 = 10 \text{ kH}$ діє в горизонтальному напрямі, а сила $P_2 = 20 \text{ kH}$ – вертикально вниз. Стержні невагомі, мають на кінцях шарнірні з'єднання (рис. 1.6).

Відповідь: $S_1 = S_2 = 44,6 \text{ kH}$; $S_3 = -40 \text{ kH}$.

Задача 1.5.

Кран піднімає вантаж вагою 20 kH . Знайти зусилля в тросах BK , BD . Точки A , B , C , L лежать в одній площині (рис. 1.7).

Відповідь: $S_4 = S_5 = 56,7 \text{ kH}$

Задача 1.6.

Три невагомих стержня AB , AC , AD шарнірно з'єднані в точці A і шарнірно прикріплені до горизонтальної площини (рис. 1.8). Площини трикутників ABC і AOD вертикальні і взаємно перпендикулярні. До вузла A паралельно OD діє сила $P = 0,6 \text{ kH}$. Знайти зусилля в стержнях, якщо

$\angle ABO = \angle ACO = 45^\circ$, $\angle ADO = 60^\circ$.

Відповідь: $S_B = S_C = 0,735 \text{ kH}$;

$S_D = -1,20 \text{ kH}$.

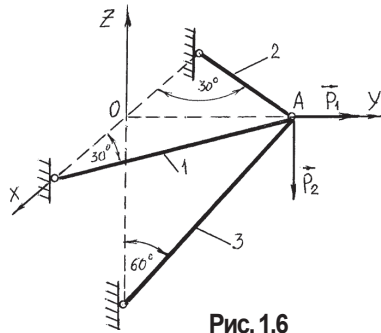


Рис. 1.6

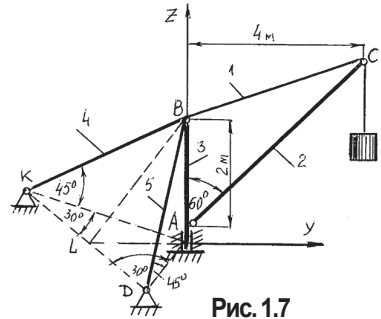


Рис. 1.7

2. Момент сили відносно точки і осі

2.1. Момент сили відносно точки як вектор

Нагадаємо, що момент сили $\vec{F}$ відносно точки (центра) O в площині дорівнює добутку сили на плече d . Плече – це найкоротша відстань від точки O до лінії дії сили (рис. 2.1,а).

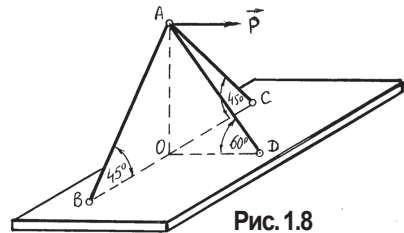


Рис. 1.8

$$M_O(\vec{F}) = Fd = 2S_{\Delta OAB}. \quad (2.1)$$

Якщо, дивлячись на площину Π , бачимо, що сила $\vec{F}$ намагається повернути тіло відносно точки O проти ходу годинникової стрілки, то цей момент вважається

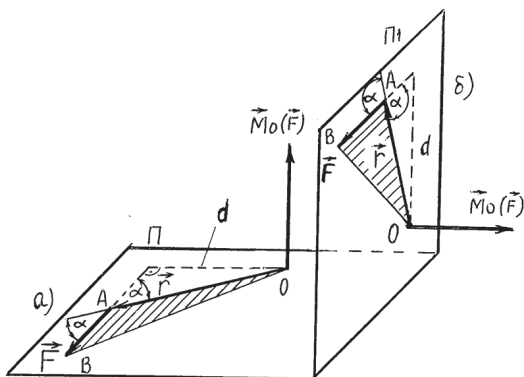


Рис. 2.1

но точки O проти ходу годинникової стрілки, а дивлячись з іншої сторони бачимо, що сила намагається повернути тіло відносно точки O за ходом годинникової стрілки. То звідки дивитись на площину Π_1 ? В зв'язку з цим вводиться таке поняття, як вектор-момент сили відносно точки O . Цей вектор-момент має таке позначення: $\vec{M}_O(\vec{F})$.

Вектор-момент сили відносно точки O має початок в точці O , перпендикулярний площині, в якій знаходиться сила і точка (центр) O , і напрямлений в ту сторону, звідки видно намагання сили повернути тіло навколо точки O проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.1).

Вектор-момент сили можна представити у вигляді векторного добутку

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (2.2)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки A прикладання сили, проведений з точки O . Перевіримо, чи можна з формули (2.2) отримати формулу (2.1).

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = rF \sin(\vec{r}, \vec{F}) = Fr \sin \alpha = Fd = 2S_{\Delta OAB}. \quad (2.3)$$

Таким чином, вектор-момент повністю визначає обертальний ефект сили $\vec{F}$ відносно точки O : його лінія дії визначає площину обертання, його напрям є напрям обертання, його модуль – інтенсивність обертальної дії.

2.2. Момент сили відносно осі

Нехай тверде тіло під дією сили $\vec{F}$ обертається навколо осі Z (рис. 2.2). Через точку A_1 прикладання сили проведемо площину XY , перпендикулярну осі Z . Ця площина перепинає вісь Z в точці O . Розкладемо силу $\vec{F}$ на дві складові: $\vec{F}_z$ паралельну осі Z , і $\vec{F}_{xy}$, яка лежить в площині XY і являється проекцією

додатнім, якщо за ходом годинникової стрілки, то від'ємним.

На рис. 2.1(а) цей момент сили додатний. Нехай площина Π повернулась на деякий кут і зайняла положення Π_1 (рис. 2.1(б)). Числове значення моменту сили не змінилось, тобто $M_0(\vec{F}) = Fd$. Треба з'ясувати знак цього моменту сили. Дивлячись з однієї сторони на площину бачимо, що сила намагається повернути тіло відносно

сили на цю площину. Сила $\vec{F}_z$ не може повернути тіло навколо осі Z , а може тільки зміщувати його вздовж осі обертання. Тому її обертальний ефект відносно осі Z (осі обертання) дорівнює нулю. Весь обертальний ефект сили зосереджений в силі $\vec{F}_{xy}$. Сила $\vec{F}_{xy}$ і точка O , що належить осі Z , знаходяться в одній площині. Тому момент сили відносно осі обертання Z буде:

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_{xy}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = F_{xy}d = 2S_{\Delta OA_1B_1} \quad (2.4)$$

Таким чином, момент сили відносно осі дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до даної осі, відносно точки перетину осі з площиною.

Щоб знайти момент сили відносно якої-небудь осі Z , необхідно:

1. Провести площину XU , перпендикулярну осі Z , і знайти точку O перетину осі з площиною.
2. Спроектувати силу $\vec{F}$ на цю площину і знайти її проекцію $\vec{F}_{xy}$.
3. Знайти момент сили $\vec{F}_{xy}$ відносно точки O .
4. Встановити знак моменту сили.

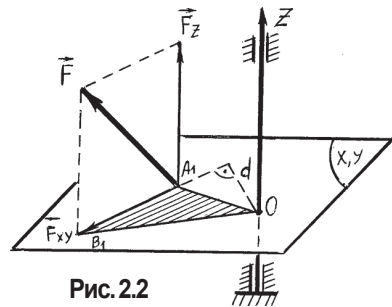


Рис. 2.2

Щоб встановити знак моменту сили

відносно осі, необхідно дивитись на площину XU з додатного напрямку осі. Якщо при цьому обертальний рух тіла бачимо таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки, то цей момент сили додатний, якщо за ходом годинникової стрілки, то від'ємний. На рис. 2.2 момент сили $\vec{F}$ відносно осі Z є додатним.

Примітка. Момент сили відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:

1. Якщо лінія дії сили перетинає вісь;
2. Якщо сила паралельна даній осі.

В усіх інших випадках момент сили відносно осі існує.

2.3. Залежність між моментами сили відносно точки і осі, що проходить через цю точку

Теорема. Момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь вектора – моменту сили відносно довільної точки, що лежить на цій осі.

Доведення. Нехай в точці A тіла діє сила $\vec{F}$. Проведемо вісь Z і на ній візьмемо довільну точку O (рис. 2.3). Сила $\vec{F}_{xy}$ є проекцією сили $\vec{F}$ на площину XU . Сила $\vec{F}_{xy}$ складає весь обертальний ефект сили відносно осі Z . Модуль моменту сили відносно точки O згідно (2.3)

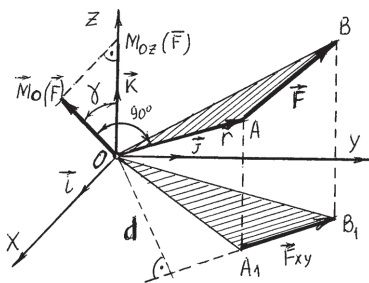


Рис. 2.3

площі фігури, що проектується, помножений на косинус кута між площиною цієї фігури і площиною проекції. Кут між площинами трикутників OAB і OA_1B_1 дорівнює куту γ між перпендикулярами до цих площин, тобто куту між вектором-моментом $\vec{M}_0(\vec{F})$ і віссю Z .

$$S_{\Delta OA_1B_1} = S_{\Delta OAB} \cos \gamma \quad (в)$$

Підставимо вирази (а) і (б) в вираз (в):

$$M_z(\vec{F}) = |\vec{M}_0(\vec{F})| \cos \gamma = M_{0z}(\vec{F}). \quad (2.5)$$

Теорема доведена.

2.4. Формули для обчислення моментів сили відносно координатних осей

Момент сили $\vec{F}$ відносно точки O , згідно (2.2), є векторним добутком, а векторний добуток можна записати символічно через визначник

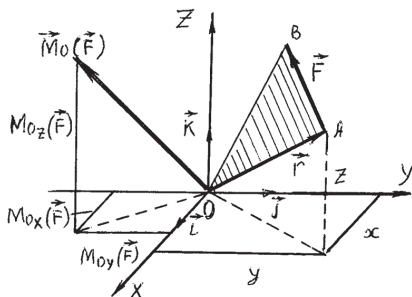


Рис. 2.4

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad (а)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні орти; x, y, z – координати точки прикладання сили (рис. 2.4); $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ – проекції сили $\vec{F}$ на відповідні координатні осі.

Вектор-момент $\vec{M}_0(\vec{F})$ можна розкласти по координатному базису (рис. 2.4):

$$M_0(\vec{F}) = M_{0_x}(\vec{F})\vec{i} + M_{0_y}(\vec{F})\vec{j} + M_{0_z}(\vec{F})\vec{k}. \quad (б)$$

Розкладаючи визначник (а) по елементам першого рядка, отримаємо

$$\overline{M_0}(\vec{F}) = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}. \quad (г)$$

Порівнюючи вирази (б) і (г) і враховуючи (2.5), отримаємо формули для обчислення моментів сили відносно координатних осей:

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y; \quad M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z; \quad M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \quad (2.6)$$

2.5. Методичні вказівки до розв'язування задач

Задача 2.1.

a	Знайти момент сили $\vec{F}$ відносно початку координат і координатних осей, якщо сторони паралелепіпеда a, b, c (рис. 2.5).
b	
c	

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Знайдемо спочатку момент сили $\vec{F}$ відносно осі X. Для цього спроекуємо силу на площину, перпендикулярну осі X. Це буде площина ZOY. Проекція сили на цю площину буде $F_{YZ} = F \cos \alpha$. Плече сили F_{YZ} відносно точки O дорівнює a. Тоді момент

$$M_x(\vec{F}) = -aF \cos \alpha. \quad (1).$$

Дивлячись на площину YOZ з кінця осі X, бачимо, що сила $\vec{F}_{YZ}$ обертається навколо осі X за ходом стрілки годинника. Тому цей момент від'ємний.

Знайдемо момент сили $\vec{F}$ відносно осі Y. В даному випадку краще розкласти силу на дві складові $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. По теоремі Варіньона про момент рівнодійної маємо:

$$\overline{M_0}(\vec{F}) = \overline{M_0}(\vec{F}_1) + \overline{M_0}(\vec{F}_2).$$

Якщо спроекувати цю векторну рівність на вісь Y і використати формулу (2.5), будемо мати

$$M_y(\vec{F}) = M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2). \quad (2)$$

Лінія дії сили $\vec{F}_2$ перетинає вісь Y, тому $M_y(\vec{F}_2) = 0$.

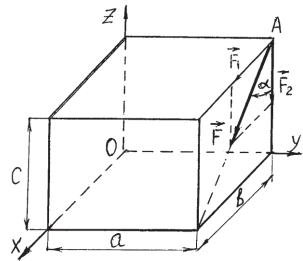


Рис. 2.5

Тоді

$$M_y(\vec{F}) = M_y(\vec{F}_1) = +F_1 \cdot c = Fc \sin \alpha. \quad (3)$$

Щоб встановити знак моменту, необхідно дивитись на площину XOZ з кінця осі Y .

Знайдемо момент сили $\vec{F}$ відносно осі Z . Аналогічно (2) можна записати

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2).$$

Сила $\vec{F}_2$ паралельна осі Z , тому $M_z(\vec{F}_2) = 0$.

$$\text{Тоді } M_z(\vec{F}) = -F_1 \cdot a = -Fa \sin \alpha. \quad (4)$$

Координати точки А			Проекції сили на координатні осі		
x	y	z	F_x	F_y	F_z
o	a	c	$F \sin \alpha$	o	$-F \cos \alpha$

Цю задачу можна розв'язати інакше, якщо використати формули (2.6). Для цього ми повинні записати координати точки А

прикладання сили і записати проекції сили $\vec{F}$ на координатні осі. Для зручності зведемо ці дані в таблицю.

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y = a \cdot (-F \cos \alpha) - c \cdot 0 = -Fa \cos \alpha.$$

$$M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z = c \cdot F \sin \alpha - o(-F \cos \alpha) = cF \sin \alpha.$$

$$M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x = o - aF \sin \alpha = -Fa \sin \alpha.$$

Знайдемо момент сили $\vec{F}$ відносно початку координат:

$$|\vec{M}_o(\vec{F})| = \sqrt{(M_x(\vec{F}))^2 + (M_y(\vec{F}))^2 + (M_z(\vec{F}))^2};$$

$$|\vec{M}_o(\vec{F})| = \sqrt{+F^2 a^2 \cos^2 \alpha + F^2 c^2 \sin^2 \alpha + F^2 a^2 \sin^2 \alpha} = F \sqrt{a^2 + c^2 \sin^2 \alpha}.$$

Задача 2.2.

В точці А (2, 3, 4) до тіла прикладені сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, проекції яких на координатні осі відомі:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= 2, & F_{1y} &= 2, & F_{1z} &= 2; \\ F_{2x} &= 2, & F_{2y} &= 3, & F_{2z} &= -4; \\ F_{3x} &= -2, & F_{3y} &= 3, & F_{3z} &= 2. \end{aligned}$$

Знайти моменти рівнодійної $\vec{R}$ цих сил відносно координатних осей.

По теоремі про проекції рівнодійної маємо:

$$R_x = \sum_{k=1}^3 F_{kx} = 2 + 3 - 4 = 1, \quad R_y = \sum_{k=1}^3 F_{ky} = 2 + 3 - 2 = 3;$$

$$R_z = \sum_{k=1}^3 F_{kz} = 2 + 4 + 2 = 8.$$

Використовуючи (2.6), знайдемо моменти рівнодійної відносно координатних осей:

$$M_x(\vec{R}) = yR_z - zR_y = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = 12;$$

$$M_y(\vec{R}) = zR_x - xR_z = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 8 = -12;$$

$$M_z(\vec{R}) = xR_y - yR_x = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 3.$$

3. Теорія пар сил, розміщених в просторі

3.1. Момент пари сил як вектор

В модулі 1 розглядалися пари сил, які розміщені в одній площині. Модуль моменту пари сил в цьому випадку знаходився із формули:

$$M = F \cdot d = AB \cdot F, \quad (3.1)$$

де $d = AB$ – плече пари, тобто найкоротша відстань між лініями дії сил, що складають пару сил.

Якщо, дивлячись на площину Π , бачимо, що обертальний рух пари сил відбувається проти ходу стрілки годинника, то момент пари сил вважається додатнім, якщо за ходом годинникової стрілки, то від'ємним (рис. 3.1). Якщо площина Π зайняла положення Π_1 , то значення моменту пари сил не змінилось, але однозначно встановити знак моменту пари сил неможливо. Тому для пари сил також вводиться вектор-момент $\vec{M}$ пари сил.

Вектор-момент $\vec{M}$ пари сил перпендикулярний площині, в якій діє пара сил, і напрямлений в ту сторону звідки видно, що обертальний рух тіла під дією пари сил відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 3.1).

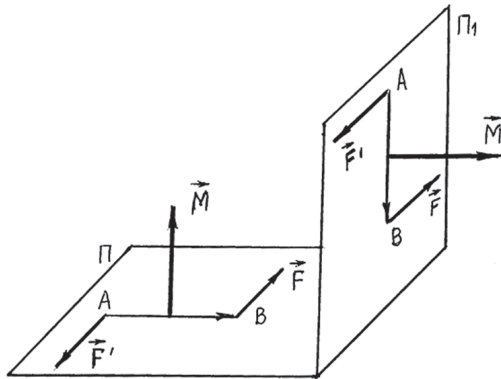


Рис. 3.1

Вектор-момент $\vec{M}$ можна записати у вигляді векторного добутку

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}. \quad (3.2)$$

Доведемо, що із формули (3.2) можна отримати формулу (3.1):

$$|\vec{M}| = AB \cdot F \sin(\vec{AB}, \vec{F}) = AB \cdot F \cdot \sin 90^\circ = AB \cdot F.$$

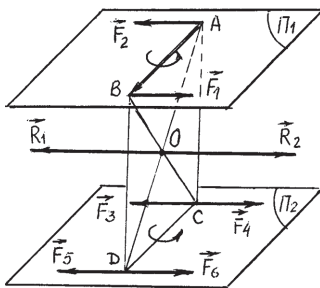


Рис. 3.2

Теорема 3.1. Пару сил можна перенести в паралельну площину і від цього дія пари сил на тіло не зміниться.

Нехай в площині Π_1 діє пара сил з моментом $M_1 = AB \cdot F_1$ і обертальний рух її проти ходу годинникової стрілки. Розглянемо площину Π_2 , яка паралельна Π_1 . Візьмемо на цій площині відрізок $CD = AB$ (рис. 3.2). В точках C і D прикладемо зрівноважені сили, причому $F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_2 = F_1$. Від цього стан тіла не зміниться. Розглянемо сили $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_5$, $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_4$. Їх дію можна замінити силами $\vec{R}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_5$ і $\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_4$. Ці сили прикладені в точці O . Сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ зрівноважені і їх можна відкинути. У нас залишились сили $\vec{F}_3$ і $\vec{F}_6$, які складають пару сил. Момент цієї пари сил $M_2 = CD \cdot F_6 = AB \cdot F_1 = M_1$. Знак цієї пари також не змінився. Теорема доведена.

Означення. Дві пари сил, що діють в просторі, еквівалентні, якщо в них однакові вектори-моменти, тобто $\vec{M}_1 = \vec{M}_2$.

Якщо вектори-моменти пар сил однакові, то це означає, що ці пари сил

знаходяться в паралельних площинах і обертальний рух їх однаковий. Згідно теореми 3.1, ці пари сил можна привести до однієї площини. Крім цього, у цих пар сил однакові числові значення моментів сил:

$|\vec{M}_1| = d_1 F_1$; $|\vec{M}_2| = d_2 F_2$, де d_1 і d_2 – відповідно плечі першої і другої пари сил.

У цих пар сил можуть бути різні плечі і сили, але добутки сили на плече пари однакові.

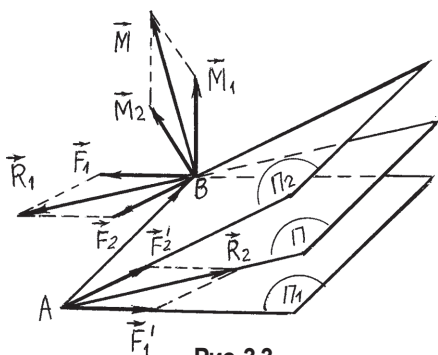


Рис. 3.3

Теорема 3.2. Дві пари сил, що лежать в площинах, які перетинаються, еквівалентні одній парі сил, момент якої дорівнює геометричній сумі векторів-моментів двох даних пар сил.

Нехай в площині Π_1 знаходиться пара сил, вектор-момент якої $\vec{M}_1$, а в площині Π_2 – пара сил, вектор-момент якої $\vec{M}_2$. На лінії перетину цих площин візьмемо відрізок AB і приведемо ці пари сил до загального плеча AB (рис. 3.3).

$$\vec{M}_1 = \vec{AB} \times \vec{F}_1; \quad \vec{M}_2 = \vec{AB} \times \vec{F}_2$$

Вектор-момент $\vec{M}_1$ перпендикулярний площині Π_1 , а вектор-момент $\vec{M}_2$ – площині Π_2 .

В точці A діють сили $\vec{F}'_1$ і $\vec{F}'_2$, а в точці B – сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Дію сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ замінимо силою $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, а сил $\vec{F}'_1$ і $\vec{F}'_2$ – силою $\vec{R}_2 = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2$. Сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ складають пару сил, що діє в площині Π . Знайдемо вектор-момент $\vec{M}$ цієї пари сил:

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{R}_1 = \vec{AB} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (\vec{AB} \times \vec{F}_1) + (\vec{AB} \times \vec{F}_2) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \quad (3.3)$$

Теорема доведена.

Якщо на тіло діє n пар сил, які лежать в різних площинах, то цю систему пар сил можна замінити однією парою сил з вектором-моментом

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k. \quad (3.4)$$

3.3. Умови рівноваги просторової системи пар сил

Для рівноваги просторової системи пар сил необхідно і достатньо, щоб вектор-момент $\vec{M}$ рівнодійної пари дорівнював нулю.

Використовуючи вираз (3.4) маємо

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k = 0. \quad (3.5)$$

Таким чином, для рівноваги систем пар сил, які лежать в різних площинах, необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулю геометрична сума векторів-моментів складових пар сил, або, інакше, щоб многокутник, побудований на цих векторах-моментях, був замкнутим.

3.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

Задача 3.1.

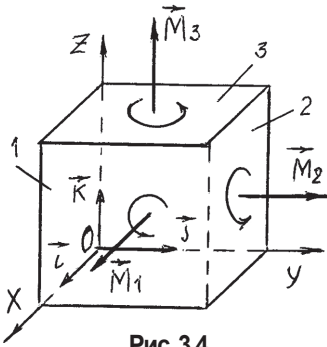


Рис. 3.4

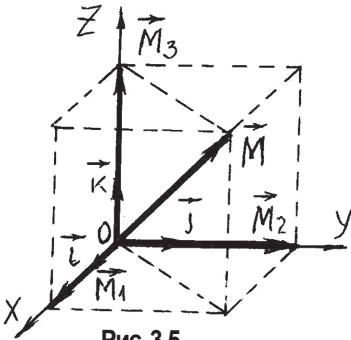


Рис. 3.5

На трьох гранях куба діють пари сил з моментами $M_1 = M_2 = M_3 = 2 \text{ кНм}$.

Знайти величину і напрям моменту рівнодійної пари сил (рис. 3.4).

На грані 1 куба діє пара сил з моментом M_1 . Вектор-момент $\vec{M}_1$ цієї пари сил перпендикулярний першій грані і напрямлений паралельно осі OX до нас. Аналогічно, вектор-момент $\vec{M}_2$ перпендикулярний грані 2 і напрямлений паралельно осі OY . Вектор-момент $\vec{M}_3$ перпендикулярний грані 3 і напрямлений паралельно осі OZ .

Пару сил можна в даній площині переносити в будь-яке місце, і, крім цього, можна переносити в паралельну площину, і від цього дія пари сил на тіло не зміниться (див. п. 3.2). Тому пару сил з вектором-моментом $\vec{M}_1$ перенесемо в паралельну площину OYZ , а потім в цій площині її перенесемо в точку O . Аналогічно можна перене-

сти вектори-моменти $\vec{M}_2$ і $\vec{M}_3$ в точку O (рис. 3.5). В точці O маємо три взаємно-перпендикулярні вектори-моменти $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$. Вектор-момент $\vec{M}$ рівнодійної пари буде знаходитись на діагоналі паралелепіпеда (куба), побудованого на векторах $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3.$$

Модуль вектора-моменту визначається за формулою

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \text{ (кНм)}.$$

Напрямок вектора-моменту можна знайти за напрямними косинусами

$$\cos(\vec{M}, \vec{i}) = \frac{M_1}{M} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos(\vec{M}, \vec{j}) = \frac{M_2}{M} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos(\vec{M}, \vec{k}) = \frac{M_3}{M} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 3.2.

$a;$ l
 α M

$R_A = ?$, $R_B = ?$

Балка ABD в точці A має нерухомий шарнір, а в точці B – рухомий шарнір. На балку діє пара сил з моментом M . Нехтуючи вагою балки, знайти реакції опор (рис. 3.6).

Для балки ABD в'язями є опори в точках A і B . Дії опор замінимо реакціями. Реакція $\vec{R}_B$ опори B напрямлена по нормалі до поверхні. Напрям реакції опори A невідомий. Так як балка знаходиться в рівновазі, то система сил, що діє на балку, еквівалентна нулю. Активна пара сил з моментом $\vec{M}$ може бути зрівноважена тільки парою сил. Це означає, що реакція $\vec{R}_A$ опори A разом з реакцією $\vec{R}_B$ повинні утворити пару сил. Модулі реакцій знайдуться із умови рівноваги модулів моментів пар:

$$M = R_A \cdot d, \text{ де } d - \text{плече пари сил } \vec{R}_A \text{ і } \vec{R}_B.$$

$$\text{Маємо } R_A = R_B = \frac{M}{d};$$

$$d = AC \cdot \cos \alpha, AC = l - KD = l - a \tan \alpha,$$

$$d = (l - a \tan \alpha) \cos \alpha = l \cos \alpha - a \sin \alpha.$$

$$\text{Тоді } R_A = R_B = \frac{M}{l \cos \alpha - a \sin \alpha}.$$

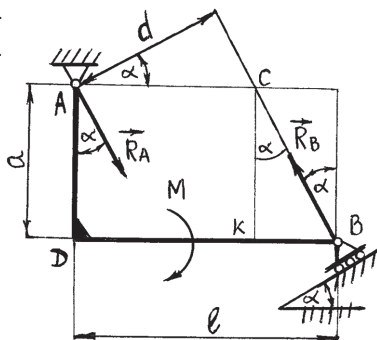


Рис. 3.6

4. Зведення довільної просторової системи сил до даного центра. Умови рівноваги системи сил

4.1. Лема про паралельне перенесення сили

Лема. Силу можна переносити паралельно самій собі в довільну точку твердого тіла, якщо при цьому присіднати пару сил, векторний момент якої дорівнює векторному моменту сили, що переноситься, відносно нової точки прикладання сили.

Доведення. Нехай в просторі в точці A діє сила $\vec{F}$. Потрібно силу $\vec{F}$ перенести паралельно самій собі в точку O (рис. 4.1,а). Прикладемо в точці O зрівноважені сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ паралельно силі $\vec{F}$, причому $F_1 = F_2 = F$. Це можливо зробити згідно аксіом статики. Сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_2$ утворили пару сил, вектор-момент якої $\vec{M}$.

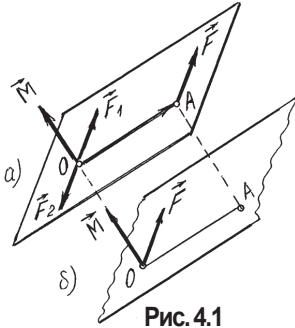


Рис. 4.1

Крім цього, в точці O діє сила $\vec{F}_1$. Утворену пару сил назвемо приєднаною парою сил. Вектор-момент цієї пари $\vec{M} = \vec{OA} \cdot \vec{F}$. Цей вектор напрямлений перпендикулярно площині, в якій діє пара сил. Таким чином, якщо переносити силу паралельно самій собі в іншу точку, то необхідно приєднати до неї пару сил. Лема доведена. В подальшому, саму пару сил показувати не будемо, а будемо показувати її вектор-момент (рис. 4.1,б)

4.2. Основна теорема статики (теорема Пуансо)

Теорема. Довільну систему сил, що діє на абсолютне тверде тіло, можна звести до сили, рівній головному вектору системи сил, і до пари сил, векторний момент якої дорівнює головному моменту системи сил відносно точки, вибраної за центр зведення.

Доведення. Нехай в просторі діє n сил: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Виберемо за центр зведення довільну точку O (рис. 4.2,а).

Перенесемо сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ паралельно самим собі в точку O . Згідно леми, в точці O до цих сил необхідно приєднати пари сил з векторними моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ (рис. 4.2,б).

$$\begin{aligned}\vec{M}_1 &= \vec{M}_o(\vec{F}_1) = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1), & \vec{M}_2 &= \vec{M}_o(\vec{F}_2) = (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2), \\ \vec{M}_k &= \vec{M}_o(\vec{F}_k) = (\vec{r}_k \times \vec{F}_k).\end{aligned}\tag{4.1}$$

В точці O отримали просторову збіжну систему сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ і просторову систему пар сил з моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$. Дію збіжної приведеної системи сил можна замінити дією сили $\vec{R}'$ (рис. 4.2,в).

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.\tag{4.2}$$

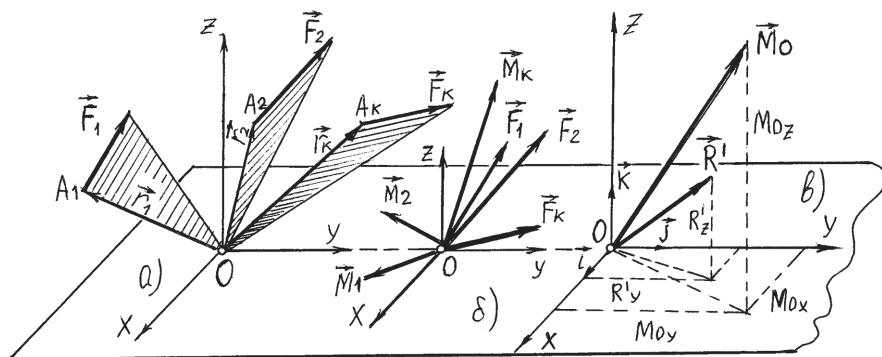


Рис. 4.2

Вектор $\vec{R}$, рівний геометричній сумі всіх сил довільної просторової системи сил, називається головним вектором цієї системи.

Дію приведених n пар сил, що розташовані в просторі, можна замінити дією однієї пари сил з моментом $\vec{M}_o$ (рис. 4.2,в).

$$\vec{M}_o = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k. \quad (4.3)$$

Використовуючи (4.1), запишемо вираз (4.3) в іншому вигляді:

$$\vec{M}_o = \vec{M}_o(\vec{F}_1) + \vec{M}_o(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_o(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k). \quad (4.4)$$

Вектор $\vec{M}_o$, рівний геометричній сумі векторів-моментів всіх сил довільної просторової системи сил відносно центра зведення O , називається головним моментом цієї системи сил відносно того ж центра зведення.

Таким чином, в результаті зведення довільної системи сил до даного центра отримали силу, рівну головному вектору цієї системи сил, і пару сил з моментом, рівним головному моменту системи сил відносно центра зведення.

Теорема доведена.

4.3. Аналітичний спосіб знаходження головного вектора і головного моменту просторової системи сил

Виберемо початок координат в точці O , точці зведення (рис. 4.2,в). Знайдемо спочатку головний вектор $\vec{R}$. Спроектуємо вираз (4.2) на координатні осі.

$$R'_x = \sum_{k=1}^n F_{k_x}; \quad R'_y = \sum_{k=1}^n F_{k_y}; \quad R'_z = \sum_{k=1}^n F_{k_z}. \quad (4.5)$$

Модуль головного вектора

$$R' = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{k_x}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{k_y}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{k_z}\right)^2}. \quad (4.6)$$

Напряг головного вектора знайдемо за напрямними косинусами

$$\cos(\vec{R'}, \vec{i}) = \frac{R'_x}{R'}; \quad \cos(\vec{R'}, \vec{j}) = \frac{R'_y}{R'}; \quad \cos(\vec{R'}, \vec{k}) = \frac{R'_z}{R'} \quad (4.7)$$

Щоб аналітичним шляхом знайти головний вектор, необхідно:

- 1) за формулами (4.5) знайти проекції головного вектора на координатні осі;
- 2) за формулою (4.6) знайти модуль головного вектора;
- 3) за формулами (4.7) знайти напрям дії головного вектора.

Знайдемо головний момент $\vec{M}_o$ системи сил. Спроєктуємо вираз (4.4) на координатні осі:

$$M_{o_x} = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k); \quad M_{o_y} = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k); \quad M_{o_z} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k). \quad (4.8)$$

Модуль головного моменту

$$M_o = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k)\right)^2}. \quad (4.9)$$

Напряг головного моменту знайдемо за напрямними косинусами

$$\cos(\vec{M}_o, \vec{i}) = \frac{M_{ox}}{M_o}; \quad \cos(\vec{M}_o, \vec{j}) = \frac{M_{oy}}{M_o}; \quad \cos(\vec{M}_o, \vec{k}) = \frac{M_{oz}}{M_o}. \quad (4.10)$$

Щоб аналітичним шляхом знайти головний момент $\vec{M}_o$, необхідно:

- 1) за формулами (4.8) знайти проекції головного моменту на осі координат;
- 2) за формулою (4.9) знайти модуль головного моменту;
- 3) за формулами (4.10) знайти напрям дії головного моменту.

Приклад. По сторонам паралелепіпеда діють чотири сили:

$$F_1 = 2\kappa H; \quad F_2 = 3\kappa H; \quad F_3 = 4\kappa H; \quad F_4 = 5\kappa H.$$

Розміри паралелепіпеда вказані на рисунку 4.3. Привести цю систему сил до простішого вигляду, тобто знайти головний вектор і головний момент.

Розв'язування. Виберемо за центр зведення точку O , яка одночасно буде і початком системи координат.

Знайдемо головний вектор $\vec{R}'$.

1) За формулами (4.5) знайдемо проекції головного вектора на координатні осі

$$R'_x = F_1 - F_4 = 2 - 5 = -3 \text{ (кН)},$$

$$R'_y = F_2 = 3 \text{ (кН)}, \quad R'_z = F_3 = 4 \text{ (кН)}.$$

2) За формулою (4.6) знайдемо модуль головного вектора

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2} = 5,83 \text{ (кН)}.$$

3) За формулами (4.7) знайдемо напрям дії головного вектора.

$$\cos(\vec{R}', \vec{i}) = \frac{R'_x}{R'} = -0,51,$$

$$\cos(\vec{R}', \vec{j}) = \frac{R'_y}{R'} = 0,51,$$

$$\cos(\vec{R}', \vec{k}) = \frac{R'_z}{R'} = 0,69.$$

4) Побудуємо головний вектор $\vec{R}'$. В даному випадку його краще побудувати по проекціям на координатні осі (рис. 4.3).

Знайдемо головний момент $\vec{M}_o$

а). За формулами (4.8) знайдемо

проекції головного моменту на координатні осі:

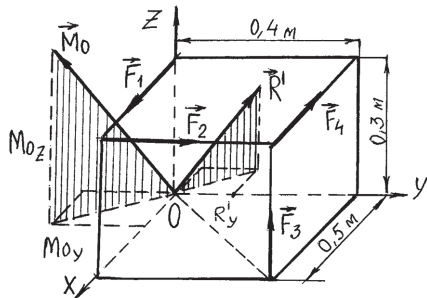


Рис. 4.3

$$M_{o_x} = -F_2 \cdot 0,3 + F_3 \cdot 0,4 = -3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 = 0,7 \text{ (кНм)};$$

$$M_{o_y} = F_1 \cdot 0,3 - F_3 \cdot 0,5 - F_4 \cdot 0,3 = 2 \cdot 0,3 - 4 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0,3 = -2,9 \text{ (кНм)};$$

$$M_{o_z} = F_2 \cdot 0,5 + F_4 \cdot 0,4 = 3 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,4 = 3,5 \text{ (кНм)}.$$

б). За формулою (4.9) знайдемо модуль головного моменту

$$M_o = \sqrt{M_{o_x}^2 + M_{o_y}^2 + M_{o_z}^2} = \sqrt{0,7^2 + (-2,9)^2 + 3,5^2} = 4,6 \text{ (кНм)}.$$

в). За формулами (4.10) знайдемо напрям дії головного моменту:

$$\cos(\overrightarrow{M_o}, \vec{i}) = \frac{M_{ox}}{M_o} = 0,15; \quad \cos(\overrightarrow{M_o}, \vec{j}) = \frac{M_{oy}}{M_o} = -0,63; \quad \cos(\overrightarrow{M_o}, \vec{k}) = \frac{M_{oz}}{M_o} = 0,76.$$

4). Побудуємо вектор $\overrightarrow{M_o}$ по його проєкціям на координатні осі (рис. 4.3).

4.4. Залежність головного вектора і головного моменту просторової системи сил від вибору центра зведення

Нехай в просторі діє довільна просторова система сил. На рис. 4.4 показана сила $\overrightarrow{F_k}$ – одна із цих сил. В пункті 4.2 за центр зведення взяли довільну точку O . При цьому система сил була зведена до однієї сили (головний вектор $\overrightarrow{R'}$) і однієї пари сил (головний момент $\overrightarrow{M_o}$)

$$\overrightarrow{R'} = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{F_k}; \quad \overrightarrow{M_o} = \sum_{k=1}^n (r_k \times \overrightarrow{F_k}), \quad (4.11)$$

де $\vec{r}_k$ – радіус-вектор точки A_k прикладання сили $\overrightarrow{F_k}$, проведений із центра O .

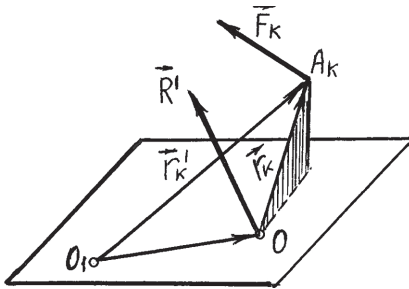


Рис. 4.4

Візьмемо за центр зведення нову точку O_1 . Вияснимо, як зміниться при цьому головний вектор і головний момент. Головний вектор $\overrightarrow{R'}$ зміниться не може, тому що він утворюється із векторів сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_k}$, які переносяться паралельно самим собі. А паралельне переміщення сили не залежить від положення точки O . Таким чином, *при зміні точки зведення головний вектор не змінюється.*

Розглянемо зміну головного моменту при переміні точки зведення. Нехай $\vec{r}'_k$ – радіус-вектор точки A_k прикладання сили $\overrightarrow{F_k}$, проведений із нового центра O_1 . Тоді

$$\overrightarrow{M_{o_1}} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}'_k \times \overrightarrow{F_k}). \quad (4.12)$$

З рис. 4.4 видно, що $\vec{r}'_k = \vec{O_1O} + \vec{r}_k$.

Підставимо $\vec{r}'_k$ в (4.12) і використаємо (4.11):

$$\vec{M}_{o_1} = \sum_{k=1}^n [(\vec{0_1} + \vec{r}_k) \times \vec{F}_k] = \sum_{k=1}^n (\vec{0_1} \times \vec{F}_k) + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k) = (\vec{0_1} \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k) + \vec{M}_o.$$

$$\vec{M}_{o_1} = \vec{M}_o + (\vec{0_1} \times \vec{R}'). \quad (4.13)$$

або інакше
$$\vec{M}_{o_1} = \vec{M}_o + \vec{M}_{o_1}(\vec{R}'). \quad (4.14)$$

При зміні центра зведення головний момент змінюється на величину, що дорівнює моменту головного вектора відносно нового центра зведення.

4.5. Інваріанти довільної просторової системи сил

Величини, які не змінюються при будь-якому перетворенні, називаються інваріантами по відношенню до цього перетворення.

В пункті 4.4 розглядалось питання про зміну головного вектора $\vec{R}'$ при зміні центра зведення. Було доведено, що головний вектор не змінюється при переміні центра зведення. Це означає, що головний вектор є інваріантом системи сил.

$$\vec{R}' = \text{in var.} \quad (4.15)$$

Крім цього інваріанта існує ще один інваріант. Покажемо, що другим інваріантом системи сил є скалярний добуток головного вектора на головний момент.

Помножимо обидві частини виразу (4.13) скалярно на $\vec{R}'$:

$$\vec{R}' \cdot \vec{M}_{o_1} = \vec{R}' \cdot \vec{M}_o + \vec{R}' \cdot (\vec{0_1} \times \vec{R}').$$

Другий член правої частини дорівнює нулю, тому що в мішаному добутку є два рівних множника.

Маємо
$$\vec{R}' \cdot \vec{M}_{o_1} = \vec{R}' \cdot \vec{M}_o = \text{in var} \quad (4.16)$$

Для довільної просторової системи сил є два інваріанта: першим (векторним) інваріантом є головний вектор $\vec{R}'$ цієї системи, другим (скалярним) інваріантом є скалярний добуток головного вектора на головний момент.

4.6. Окремі випадки зведення просторової системи сил

В загальному випадку просторова система сил зводиться до головного вектора $\vec{R}'$ і головного моменту $\vec{M}_o$.

Але можливі деякі окремі випадки зведення системи сил.

4.6.1. Зведення просторової системи сил до пари сил

Якщо при зведенні просторової системи сил до даного центра O виявиться, що головний вектор $\vec{R}' = 0$, а головний момент $\vec{M}_O \neq 0$, то ця система сил зводиться до однієї пари сил. Причому, момент цієї пари сил не залежить від вибору центра зведення.

Використаємо формулу (4.13) при умові, що $\vec{R}' = 0$:

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + (0,0 \times \vec{R}') = \vec{M}_O$$

Вільне тверде тіло під дією такої системи сил буде обертатись.

4.6.2. Зведення просторової системи сил до рівнодійної

1) Якщо при зведенні просторової системи сил до даного центра O виявиться, що головний момент $\vec{M}_O = 0$, а головний вектор $\vec{R}' \neq 0$, то ця система зводиться тільки до однієї сили, яка називається рівнодійною.

$$\vec{R} = \vec{R}' = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (4.17)$$

Лінія дії рівнодійної $\vec{R}$ проходить через центр зведення O .

2) В результаті зведення просторової системи сил до центра O може виявитись, що скалярний добуток $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O$ дорівнює нулю, а кожний із співмножників відмінний від нуля, тобто $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$, але $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ (рис. 4.5,а)

Якщо $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$, то це означає, що вектор $\vec{M}_O \perp \vec{R}'$.

Якщо вектор-момент $\vec{M}_O$ пари сил перпендикулярний площині Π , то це означає, що пара сил лежить в площині Π . Візьмемо сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}$, що складають цю пару, рівними по модулю $\vec{R}'$. Тоді плече цієї пари буде $OA = \frac{M_O}{R'}$. Розташуємо цю пару в площині Π таким чином, щоб одна із сил пари (наприклад $\vec{R}_1$) була прикладена в точці O і напрямлена в протилежну сторону головного вектора $\vec{R}'$. Друга сила буде мати точку прикладання A (рис. 4.5,б). Сили $\vec{R}'$ і $\vec{R}_1$ зрівноважені і їх можна відкинути. Залишилась одна сила $\vec{R}$, що діє в точці A (рис. 4.5,в). Звідси можна зробити висновок: якщо $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$, але $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, то дана система

сил зводиться до однієї рівнодійної $\vec{R} = \vec{R}'$, лінія дії якої проходить через точку A , що розміщена від точки O на відстані $OA = \frac{M_o}{R'}$.

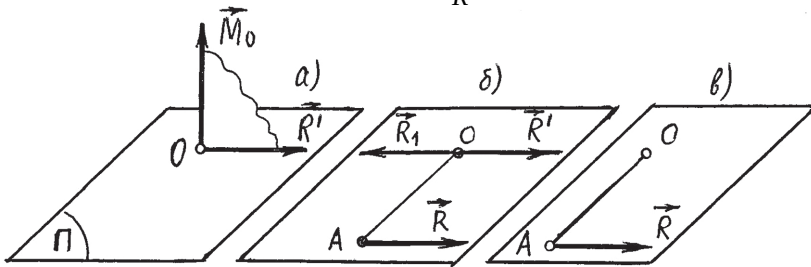


Рис. 4.5

4.6.3. Зведення довільної просторової системи сил до динамічного гвинта

Нехай в результаті зведення довільної системи сил до центра O виявилось, що головний вектор $\vec{R}' \neq 0$, головний момент $\vec{M}_o \neq 0$ і скалярний добуток головного вектора $\vec{R}'$ на головний момент $\vec{M}_o$ не дорівнює нулю: $(\vec{R}' \cdot \vec{M}_o) \neq 0$.

Якщо $\vec{R}' \cdot \vec{M}_o \neq 0$, то головний вектор $\vec{R}'$ не перпендикулярний головному моменту $\vec{M}_o$, а складає з ним деякий кут α (рис. 4.6, а)

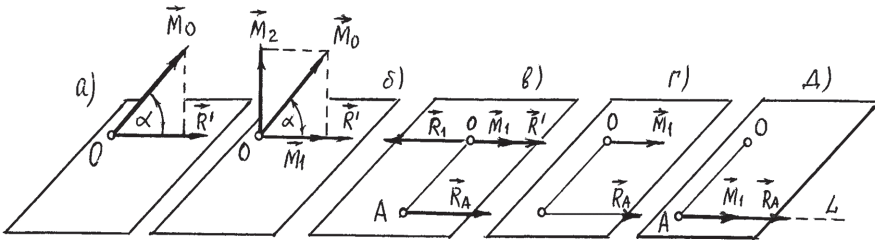


Рис. 4.6

Розкладемо вектор $\vec{M}_o$ на дві складові $\vec{M}_1$ і $\vec{M}_2$ (рис. 4.6, б).

$$M_1 = M_o \cos \alpha, \quad M_2 = M_o \sin \alpha.$$

Векторний момент $\vec{M}_2 \perp \vec{R}'$. З цим вектором-моментом зробимо ті ж самі перетворення, як і в попередньому випадку (див. п. 4.6.2). Плече пари

$$OA = \frac{M_2}{R'} = \frac{M_o \sin \alpha}{R'} \quad (\text{рис. 4.6, в, г})$$

На рис. 4.6(г) в точці O знаходиться вектор-момент $\vec{M}_1$, а в точці A сила $\vec{R}_A = \vec{R}_1$. Так як пару сил можна переносити в площині її дії, то перенесемо вектор-момент $\vec{M}_1$ в точку A (рис. 4.6.д).

Сумність сил $\vec{R}_A$, рівній головному вектору $\vec{R}'$, і пари сил, вектор-момент $\vec{M}_1$ якої паралельний силі $\vec{R}_A$, називається динамічним гвинтом, або динамою.

Лінія, яка проходить через точку A вздовж сили $\vec{R}_A$, називається центральною гвинтовою віссю даної системи сил, або віссю динами. На рис. 4.6(д) – це лінія LL .

Вільне тверде тіло під дією сили $\vec{R}_A$ і пари сил з векторним моментом $\vec{M}_1$ буде виконувати поступально-обертальний рух, подібний руху гвинта.

Виведемо рівняння центральної гвинтової лінії.

Центральна гвинтова вісь даної системи сил – це геометричне місце точок A , для яких вектори $\vec{R}_A$ і $\vec{M}_1$ паралельні між собою.

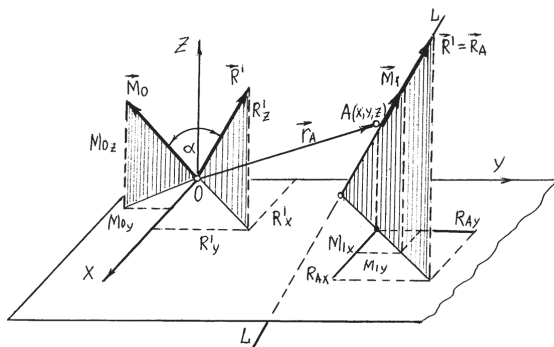


Рис. 4.7

$\vec{M}_1$ (рис. 4.7).

Запишемо умову паралельності векторів $\vec{R}_A$ і $\vec{M}_1$:

$$\frac{\vec{M}_1}{R_A} = p.$$

p – називається параметром динами.

Ця умова в проекціях на координатні осі має вигляд:

$$\frac{M_{1x}}{R'_x} = \frac{M_{1y}}{R'_y} = \frac{M_{1z}}{R'_z} = p. \quad (4.18)$$

Нехай просторова система сил в точці O зводиться до головного вектора $\vec{R}'$ і головного моменту $\vec{M}_o$, причому $\vec{R}' \cdot \vec{M}_o \neq 0$. Початок координат виберемо в точці O . Нехай центральна гвинтова лінія для даної системи проходить через точку A , де знаходяться вектори $\vec{R}_A$ і

Згідно виразів (4.13) і (4.14), можемо записати (див. рис. 4.7)

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_o - \vec{M}_o(\vec{R}_A) = \vec{M}_o - (\vec{r}_A \times \vec{R}_A).$$

Для проєкцій M_{1x} , M_{1y} , M_{1z} , використовуючи формулу (2.6), можемо записати:

$$\begin{aligned} M_{1x} &= M_{ox} - (yR'_z - zR'_y), \\ M_{1y} &= M_{oy} - (zR'_x - xR'_z), \\ M_{1z} &= M_{oz} - (xR'_y - yR'_x). \end{aligned} \quad (4.19)$$

де x , y , z – координати точки А на центральній осі.

Підставимо вираз (4.19) у вираз (4.18), знаходимо:

$$\frac{M_{ox} - (yR'_z - zR'_y)}{R'_x} = \frac{M_{oy} - (zR'_x - xR'_y)}{R'_y} = \frac{M_{oz} - (xR'_y - yR'_x)}{R'_z}. \quad (4.20)$$

Вираз (4.20) є рівнянням центральної гвинтової осі. Із виразу (4.20) можна отримати два рівняння, які характеризують рівняння прямої лінії.

Щоб із рівнянь (4.20) знайти точки перетину центральної осі з координатними площинами, треба послідовно в цих рівняннях покласти $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

R'_x , R'_y , R'_z знаходяться за формулами (4.5), а M_{Ox} , M_{Oy} , M_{Oz} – за формулами (4.8).

Знайдемо модуль вектора $\vec{M}_1$ аналітичним шляхом:

$$M_1 = M_o \cos \alpha = np_{R'} \vec{M}_o = \frac{(\vec{R}' \cdot \vec{M}_o)}{R'} = \frac{R'_x M_{ox} + R'_y M_{oy} + R'_z M_{oz}}{R'}. \quad (4.21)$$

4.6.4. Теорема Варіньона про момент рівнодійної

В пункті 4.6.2 розглядалися два випадки зведення просторової системи сил до рівнодійної. Доведемо слідувачу теорему про рівнодійну.

Теорема Варіньона. Якщо довільна просторова система сил зводиться до рівнодійної, то момент цієї рівнодійної відносно довільного центра дорівнює геометричній сумі моментів всіх сил системи відносно того ж центра.

Доведення. Нехай система сил зводиться до рівнодійної $\vec{R}$, прикладеній в точці А тіла (рис. 4.5)

$$\text{Тоді} \quad \vec{R} = \vec{R}', \quad M_A(\vec{R}) = 0. \quad (a)$$

Якщо за центр зведення взяти точку О, то

$$\overrightarrow{M_o} = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_k}). \quad (4.22)$$

Використаємо формулу (4.14)

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{R}) + \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{R}). \quad (4.23)$$

Підставивши вирази (а) і (4.22) у вираз (4.23), отримаємо:

$$\overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{R}) = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_k}). \quad (4.24)$$

Теорема доведена.

4.7. Умови рівноваги довільної просторової системи сил у векторній і аналітичній формах

В пункті 4.6 розглядалися різні випадки зведення системи сил. Залишився ще один випадок, коли головний вектор $\overrightarrow{R}'$ і головний момент $\overrightarrow{M_o}$ одночасно дорівнюють нулю:

$$\overrightarrow{R}' = 0, \overrightarrow{M_o} = 0. \quad (4.25)$$

Умови (4.25) є умовами рівноваги тіла під дією просторової системи сил в векторній формі.

Аналітичні умови рівноваги можна отримати із умов рівноваги (4.25) з використанням формул (4.6) і (4.9):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{k_x} &= 0, & \sum_{k=1}^n M_x(\overrightarrow{F_k}) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{k_y} &= 0, & \sum_{k=1}^n M_y(\overrightarrow{F_k}) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{k_z} &= 0, & \sum_{k=1}^n M_z(\overrightarrow{F_k}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Для рівноваги довільної просторової системи сил, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб три алгебраїчних суми проекцій всіх сил на декартові осі координат були рівними нулю і алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно трьох координатних осей також були рівними нулю.

4.8. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Нехай всі сили, що діють на тверде тіло паралельні між собою. В такому випадку доцільно одну із координатних осей (наприклад, вісь OZ) спрямувати

паралельно цим силам. Тоді із умов рівноваги (4.26) залишаться тільки три рівняння, а три перетворяться в тотожності. Дійсно, проекції сил на осі OX і OY дорівнюють нулю. Так як сили паралельні осі OZ , то моменти їх відносно цієї осі дорівнюють нулю. Тоді із шести рівнянь (4.26) залишаться тільки три

$$\sum_{k=1}^n F_{k_z} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0. \quad (4.27)$$

5. Методичні вказівки до розв'язування задач на просторову довільну систему сил

5.1. Загальні зауваження

Задачі на просторову систему сил розділяються на два основні типи:

- 1) Спростити задану систему сил;
- 2) Знайти реакції опор твердого тіла у випадку його рівноваги під дією системи сил.

При розв'язуванні задач першого типу необхідно:

- 1) Вибрати за центр зведення початок системи координат і осі напрямити так, щоб можна було простіше знаходити проекції сил на осі і моменти сил відносно цих осей.
- 2) Знайти проекції головного вектора $\vec{R}^1$ і головного моменту $\vec{M}_O$ на кожну із трьох координатних осей.
- 3) Встановити, до якого найпростішого вигляду приводиться дана система сил.

Методика розв'язування задач статки на рівновагу тіла приведена в модулі 1. Новим для просторової системи сил є те, що необхідно знаходити моменти сили відносно координатних осей. В тих випадках, коли важко знайти момент сили відносно осі, доцільно цю силу розкласти на складові сили і, використовуючи теорему Варіньона, шукати момент складових сил відносно координатних осей.

5.2. Задачі на зведення довільної просторової системи сил до даного центра

Задача 5.1.

$F_1=F_2=4 \text{ кН}$	До чого зводиться система сили, які напрямлені вздовж ребер паралелепіпеда, якщо $OA=0,5 \text{ м}$, $OB=0,4 \text{ м}$, $OC=0,3 \text{ м}$ (рис. 5.1)?
$F_3=F_4=3 \text{ кН}$	
$\vec{R}^1 = ?$	За центр зведення візьмемо точку O . В цій точці виберемо початок координат. Знайдемо величину і напрям головного век-
$\vec{M}_O = ?$	

тора $\vec{R}^1$. Для цього використаємо формули (4.5) – (4.7):

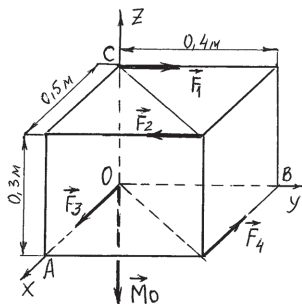


Рис. 5.1

$$R_x^1 = \sum_{k=1}^4 F_{kx} = F_3 - F_4 = 0;$$

$$R_y^1 = \sum_{k=1}^4 F_{ky} = F_1 - F_2 = 0;$$

$$R_z^1 = \sum_{k=1}^4 F_{kz} = 0.$$

Звідси видно, що головний вектор $\vec{R}^1 = 0$.

Знайдемо величину і напрям головного моменту $\vec{M}_O$. Для цього скористаємось формулами (4.8) – (4.10):

$$M_{ox} = \sum_{k=1}^4 M_x(\vec{F}_k) = -F_1 \cdot 0,3 + F_2 \cdot 0,3 = 0;$$

$$M_{oy} = \sum_{k=1}^4 M_y(\vec{F}_k) = 0;$$

$$M_{oz} = \sum_{k=1}^4 M_z(\vec{F}_k) = -F_2 \cdot 0,5 + F_4 \cdot 0,4 = -4 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,4 = -0,8 \text{ (кНм)}.$$

Головний момент системи M_O чисельно дорівнює M_{Oz} . $M_O = 0,8 \text{ кНм}$.

Система сил зводиться до однієї пари сил, що діє в площині XOY. Вектор-момент $\vec{M}_O$ напрямлений вздовж осі OZ в протилежну сторону додатному напрямку осі OZ (рис. 5.1).

Задача 5.2.

Звести до простішого вигляду систему із чотирьох рівних по модулю сил $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$, які прикладені до чотирьох вершин куба з ребром a , так як показано на рис. 5.2.

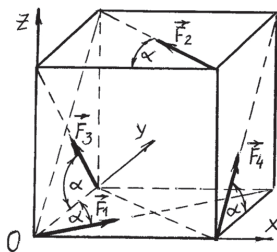


Рис. 5.2

Початок системи координат виберемо в точці зведення O. Кут $\alpha = 45^\circ$, тому що в даному випадку у нас куб зі стороною a .

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{2}/2.$$

Знайдемо головний вектор $\vec{R}^1$:

$$R_x^1 = \sum_{k=1}^4 F_{kx} = F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha = 0;$$

$$R_y^1 = \sum_{k=1}^4 F_{ky} = F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha - F_3 \cos \alpha + F_4 \cos \alpha = \sqrt{2}F;$$

$$R_z^1 = \sum_{k=1}^4 F_{kz} = F_3 \sin \alpha + F_4 \sin \alpha = \sqrt{2}F.$$

Модуль головного вектора $\vec{R}^1$:

$$R^1 = \sqrt{(R_x^1)^2 + (R_y^1)^2 + (R_z^1)^2} = 2F.$$

За напрямними косинусами знайдемо напрям головного вектора:

$$\cos(\vec{R}^1, \vec{i}) = \frac{R_x^1}{R^1} = 0; \quad \cos(\vec{R}^1, \vec{j}) = \frac{R_y^1}{R^1} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\vec{R}^1, \vec{k}) = \frac{R_z^1}{R^1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вектор $\vec{R}^1$ лежить в площині YOZ і складає кут 45° з віссю OZ (рис. 5.3).

Знайдемо головний момент $\vec{M}_O$:

$$M_{O_x} = \sum_{k=1}^4 M_x(\vec{F}_k) = -F_2 \sin \alpha \cdot a + F_3 \sin \alpha \cdot a = 0;$$

$$M_{O_y} = \sum_{k=1}^4 M_y(\vec{F}_k) = -F_4 \sin \alpha \cdot a - F_2 \cos \alpha \cdot a = -\sqrt{2}aF;$$

$$M_{O_z} = \sum_{k=1}^4 M_z(\vec{F}_k) = F_2 \sin \alpha \cdot a + F_4 \cos \alpha \cdot a = \sqrt{2}aF.$$

$$M_O = \sqrt{M_{O_x}^2 + M_{O_y}^2 + M_{O_z}^2} = 2aF; \quad M_O = 2aF.$$

Напрям знайдемо за напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{i}) = \frac{M_{O_x}}{M_O} = 0; \quad \cos(\vec{M}_O, \vec{j}) = \frac{M_{O_y}}{M_O} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\vec{M}_O, \vec{k}) = \frac{M_{O_z}}{M_O} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вектор-момент $\vec{M}_O$ лежить в площині YOZ і складає кут 135° з віссю OY (рис. 5.3).

Таким чином, система сил зводиться до головного вектора $\vec{R}^1$ і головного моменту $\vec{M}_O$. Залишилось встановити, чи зводиться ця система сил до рівнодійної, чи до динамічного гвинта.

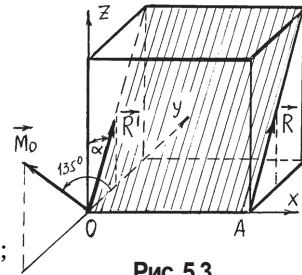


Рис. 5.3

Знайдемо скалярний добуток $\vec{R}^1 \cdot \vec{M}_O$:

$$\vec{R}^1 \cdot \vec{M}_O = R_x^1 M_{Ox} + R_y^1 M_{Oy} + R_z^1 M_{Oz} = 0 \cdot 0 + \sqrt{2}F \cdot (-\sqrt{2}aF) + \sqrt{2}F \cdot \sqrt{2}aF = 0.$$

Це означає, що $\vec{R}^1 \perp \vec{M}_O$. Цей випадок зведення розглянуто в п. 4.6.2. В даному випадку система сил зводиться до рівнодійної $\vec{R}$ з точкою прикладання A , що розміщена від точки O на відстані $OA = \frac{M_O}{R^1} = \frac{2aF}{2F} = a$ (рис. 5.3).

Задача 5.3.

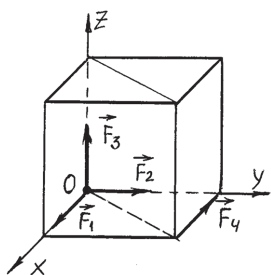


Рис. 5.4

Звести систему сил до простішого вигляду, якщо сили $F_1 = 2 \text{ кН}$, $F_2 = 4 \text{ кН}$, $F_3 = 3 \text{ кН}$, $F_4 = 2 \text{ кН}$, прикладені до вершин куба з ребром 2 м (рис. 5.4)

За центр зведення виберемо точку O . В цій точці виберемо початок системи координат. Знайдемо величину і напрям головного вектора $\vec{R}^1$:

$$R_x^1 = \sum_{k=1}^4 F_{kx} = F_1 - F_4 = 2 - 2 = 0;$$

$$R_y^1 = \sum_{k=1}^4 F_{ky} = F_2 = 4 (\text{кН});$$

$$R_z^1 = \sum_{k=1}^4 F_{kz} = F_3 = 3 (\text{кН}).$$

$$\vec{R}^1 = \sqrt{(R_x^1)^2 + (R_y^1)^2 + (R_z^1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 (\text{кН}).$$

Напрямок $\vec{R}^1$ знайдемо за напрямними косинусами:

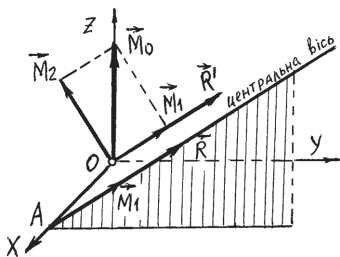


Рис. 5.5

$$\cos(\vec{R}^1, \hat{i}) = \frac{R_x^1}{R^1} = 0;$$

$$\cos(\vec{R}^1, \hat{j}) = \frac{R_y^1}{R^1} = \frac{4}{5}; \quad \cos(\vec{R}^1, \hat{k}) = \frac{R_z^1}{R^1} = \frac{3}{5}.$$

Вектор $\vec{R}^1$ лежить в площині YOZ (рис. 5.5)
Знайдемо величину і напрям головного

моменту $\vec{M}_O$:

$$M o_x = \sum_{k=1}^4 M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad M o_y = \sum_{k=1}^4 M_y(\vec{F}_k) = 0;$$

$$M o_z = \sum_{k=1}^4 M_z(\vec{F}_k) = F_4 \cdot 2 = 4(\kappa Hм);$$

$$M o = \sqrt{M o_x^2 + M o_y^2 + M o_z^2} = 4(\kappa Hм); \quad M o = 4 \kappa Hм.$$

Вектор $\vec{M}o$ напрямлений вертикально вгору по осі OZ (рис. 5.5). Система сил звелась до головного вектора $\vec{R}^1$ і головного моменту $\vec{M}o$. Розглянемо скалярний добуток $\vec{R}^1 \cdot \vec{M}o$:

$$\vec{R}^1 \cdot \vec{M}o = R_x^1 M o_x + R_y^1 M o_y + R_z^1 M o_z = 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 \neq 0.$$

Значить вектор $\vec{R}^1$ не перпендикулярний $\vec{M}o$. Ця система зводиться до динамічного гвинта (див. п. 4.6.3).

Щоб знайти положення центральної осі, використаємо рівняння (4.20), яке в нашій задачі набуде вигляд:

$$\frac{-(3y - 4z)}{0} = \frac{3x}{4} = \frac{4 - 4x}{3} \text{ або: } 3y - 4z = 0; \quad 9x = 16 - 16x.$$

Остаточно маємо:

$$y = \frac{4}{3}z; \quad x = \frac{16}{25}.$$

Якщо покласти в цих рівняннях $z = 0$, то знайдемо координати точки A перетину центральної осі з координатною площиною XOY (рис. 5.5):

$$x = \frac{16}{25}; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

Залишилось знайти значення моменту M_1 . Використаємо формулу (4.21). В нашому випадку вона запишеться так:

$$M_1 = \frac{0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4 (\kappa Hм). \quad M_1 = 2,4 \kappa Hм.$$

5.3. Задачі на рівновагу тіла під дією просторової системи сил

Задача 5.4.

$G = 10 \text{ кНх}$
 $AB = 2BC$

$S_1 = ? \quad S_2 = ?$
 $X_A = ? \quad Y_A = ?$
 $Z_A = ?$

Три невагомих стержня AC , BD і BL з'єднані в точці B і з горизонтальною площиною шарнірно. В точці C підвішений вантаж вагою 10 кН . Знайти реакції в стержнях 1 і 2 реакцію сферичного шарніра A , якщо площина DBL вертикальна (рис. 5.6).

Розглянемо рівновагу стержня AC . Для нього в'язями є стержні 1 і 2 і сферичний шарнір A . Відкинемо в'язі і їх дію на стержень AC замінимо дією реакцій в'язей. Реакції $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$ стержнів 1, 2 напрямлені по стержням, бо стержні невагомі і на кінцях мають шарнірні з'єднання. Реакцію сферичного шарніра розкладемо на три складові X_A , Y_A , Z_A . Отримали просторову довіль-

ну систему сил. Запишемо рівняння рівноваги стержня AC :

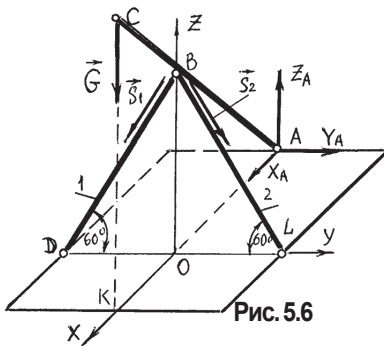


Рис. 5.6

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0;$$

$$-S_1 \cos 60^\circ + S_2 \cos 60^\circ + Y_A = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad -S_1 \sin 60^\circ - S_2 \sin 60^\circ + Z_A - G = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad S_1 \cos 60^\circ \cdot OB - S_2 \cos 60^\circ \cdot OB = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad Z_A \cdot OA + G \cdot OK = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad -Y_A \cdot OA = 0. \quad (6)$$

Розв'язавши систему рівнянь, маємо:

$$X_A=0; \quad Y_A=0; \quad Z_A=-\frac{G}{2}=-5 \text{ кН}; \quad S_1=S_2=-8,67 \text{ кН}.$$

Задача 5.5.

$$G=10 \text{ кН}$$

$$T_1=? \quad T_2=?$$

$$T_3=?$$

Однорідна плита $ACLD$ вагою 10 кН піднімається за допомогою трьох вертикальних тросів, закріплених в точках A , B і D . Знайти натяг тросів (рис. 5.7).

В даному випадку маємо просторову систему паралельних сил. Вісь AZ спрямуємо паралельно силам $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, . Запишемо рівняння рівноваги плити $ACLD$ (див. п. 4.8):

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad T_1 + T_2 + T_3 - G = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad -G \cdot 2 + T_3 \cdot 4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad -T_1 \cdot 6 + G \cdot 3 - T_3 \cdot 3 = 0.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, маємо: $T_1 = T_2 = 2,5 \text{ кН}$, $T_3 = 5 \text{ кН}$.

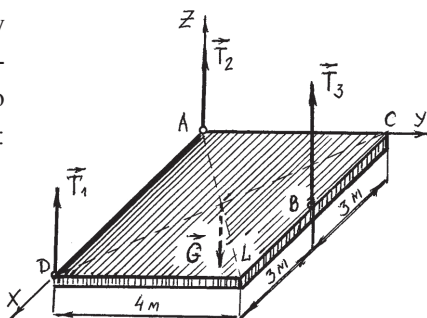


Рис. 5.7

Задача 5.6.

$$P=20 \text{ кН}$$

$$S_1=?, \quad S_2=?,$$

$$S_3=?, \quad X_A=?,$$

$$Y_A=?, \quad Z_A=?$$

Однорідна прямокутна плита $ABCD$ вагою 20 кН утримується в горизонтальному положенні стержнями 1, 2, 3, які мають на кінцях шарнірні з'єднання.

Крім цього в точці A плита сферичним шарніром з'єднана з нерухомою основою.

Знайти реакцію шарніра A і зусилля в стержнях, якщо $AK = DL = 3 \text{ м}$ (рис. 5.8).

Розглянемо рівновагу плити $ABCD$. Для неї в'язями є сферичний шарнір в точці A і стержні 1, 2, 3. Звільнилося від в'язів і замінимо їх дію на плиту реакціями в'язей. Невідому реакцію $\vec{R}_A$ розкладемо на складові X_A , Y_A , Z_A . Реакції стержнів напрямлені по стержням. Отримали просторову довільну

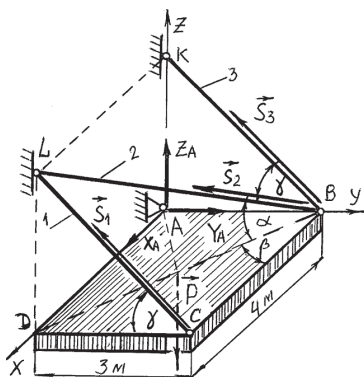


Рис. 5.8

систему сил. Перед тим, як скласти рівняння, зробимо деякі обчислення. З рівнобедреного $\triangle CDL$ випливає, що $\gamma = 45^\circ$.

$$3 \quad \triangle DCB \quad DB = \sqrt{DC^2 + CB^2} = 5 \text{ м.}$$

$$\text{Тоді} \quad \cos \beta = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \sin \beta = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$3 \quad \triangle DLB \quad BL = \sqrt{LD^2 + DB^2} = \sqrt{9 + 25} = 5,83 \text{ (м).}$$

$$\text{Тоді} \quad \sin \alpha = \frac{LD}{BL} = \frac{3}{5,83} = 0,51; \quad \cos \alpha = \frac{DB}{BL} = \frac{5}{5,83} = 0,86.$$

Запишемо рівняння рівноваги плити:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + S_2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - S_1 \cos \gamma - S_3 \cos \gamma - S_2 \cos \alpha \sin \beta = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A - P + S_1 \sin \gamma + S_3 \sin \gamma + S_2 \sin \alpha = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad S_1 \sin \gamma \cdot 3 - P \cdot 1,5 + S_3 \sin \gamma \cdot 3 + S_2 \sin \alpha \cdot 3 = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad -S_1 \sin \gamma \cdot 4 + P \cdot 2 = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad -S_1 \cos \gamma \cdot 4 - S_2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot 3 = 0. \quad (6)$$

З рівняння (5): $S_1 = 14,14 \text{ кН}$. З рівняння (6) $S_2 = -19,38 \text{ кН}$.

З рівняння (4): $S_3 = 14 \text{ кН}$.

З рівнянь (1), (2) і (3) маємо: $X_A = 13,33 \text{ кН}$; $Y_A = 9,89 \text{ кН}$; $Z_A = 10 \text{ кН}$.

Задача 5.7.

$$Q = 4 \text{ кН}$$

$$G = 6 \text{ кН}$$

$$P = ?, X_A = ?,$$

$$Y_A = ?, X_B = ?,$$

$$Y_B = ?$$

На валу 1 закріплений барабан 2 і шків 3, на які намотані троси з вантажем P і Q . Вага вала разом з барабаном і шківом G . Знайти реакції підшипників A і B , якщо $Q = 4 \text{ кН}$, $G = 6 \text{ кН}$, $R = 5r$, $a = 0,5 \text{ м}$. (рис. 5.9)

Розглянемо рівновагу вала CB . Для нього опорами є підшипники в точках A і B . Невідомі реакції підшипників розкладаються

Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad (2)$$

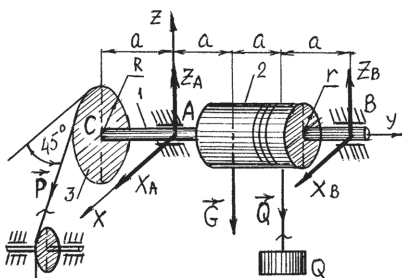


Рис. 5.9

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad P \sin 45^\circ \cdot a - G \cdot a - Q \cdot 2a + Z_B \cdot 3a = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad PR - Qr = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad P \cos 45^\circ \cdot a - X_B \cdot 3a = 0. \quad (6)$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, маємо:

$$P=0,8 \text{ } \kappa H; X_A=-0,76 \text{ } \kappa H; Z_A=6,08 \kappa H; X_R=0,19 \kappa H; Z_R=4,49 \text{ } \kappa H.$$

Задача 5.8.

$$\begin{aligned} \alpha &= 30^\circ; F = 20 \text{ kH} \\ R &= 0,2 \text{ M}; ED = 0,15 \text{ M} \\ a &= 0,15 \text{ M}; b = 0,2 \text{ M} \\ c &= 0,25 \text{ M} \end{aligned}$$
$$\begin{array}{l} Q=?; Y_A=?; Z_A=? \\ Y_B=?; Z_B=? \end{array}$$

Колінчатий вал може обертатись в підшипниках A і B . На кінці вала насаджена шестірня радіусом $0,2$ м. В точці D коліна під кутом α до вертикалі діє сила $\vec{F}_1$. Коліно розміщене в горизонтальній площині.

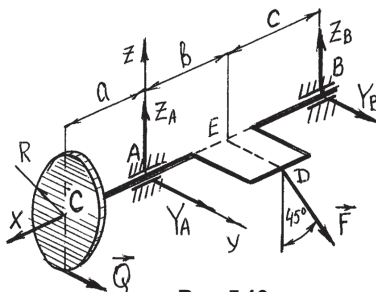


Рис. 5.10

щині. Знайти величину сили Q , яка прикладена до шестірні паралельно осі AU при рівновазі вала, і реакції підшипників (рис. 5.10). $\vec{F} \parallel YAZ$.

Розглянемо рівновагу вала САВ. В точках А і В знаходяться підшипники. Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Q + Y_A + Y_B + F \sin \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - F \cos \alpha = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad Q \cdot R - F \cos \alpha \cdot ED = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad -F \cos \alpha \cdot b + Z_B \cdot (b+c) = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad Q \cdot a - F \sin \alpha \cdot b - Y_B \cdot (b+c) = 0. \quad (6)$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, маємо:

$$Y_A = -22,9 \text{ кН}; \quad Z_A = 9,62 \text{ кН}; \quad Y_B = -0,11 \text{ кН}; \quad Z_B = 7,70 \text{ кН}; \quad Q = 12,99 \text{ кН}.$$

Задача 5.9.

Колінчатий стержень ABD в точці A має жорстке защемлення. В точці D стержня по лінії DC діє сила в 50 кН . Не враховуючи вагу стержня, знайти реакції жорсткого защемлення (рис. 5.11).

$F = 50 \text{ кН}$
 $AB = 1,2 \text{ м}$
 $DB = 1,6 \text{ м}$
 $AC = 2,1 \text{ м}$

$X_A = ?; \quad Y_A = ?$
 $Z_A = ?; \quad M_{Ax} = ?$
 $M_{Ay} = ?; \quad M_{Az} = ?$

Розглянемо рівновагу стержня ABD . Для нього єдиною в'язю є опора в точці A . Це жорстке защемлення. Защемлення для просторової системи сил створює невідому реакцію $\vec{R}_A$ з проекціями на осі координат X_A, Y_A, Z_A і пару сил з векторним моментом $\vec{M}_A$, проєкції якого на координатні осі M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az} (рис. 5.11).

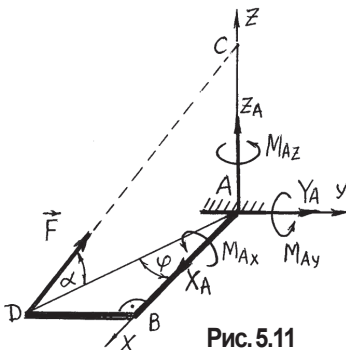


Рис. 5.11

В загальному випадку маємо шість невідомих. Для їх знаходження складемо шість рівнянь рівноваги просторової системи сил.

Перед тим, як скласти рівняння рівноваги, зробимо деякі обчислення:

$$AD = \sqrt{AB^2 + DB^2} = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = 2 \text{ (м)}.$$

$$DC = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{2^2 + 2,1^2} = 2,9 \text{ (м)}.$$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{DC} = 0,72; \quad \cos \alpha = \frac{AD}{DC} = 0,69; \quad \sin \varphi = \frac{DB}{AD} = 0,8; \quad \cos \varphi = \frac{AB}{AD} = 0,6.$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - F \cos \alpha \cos \varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + F \cos \alpha \sin \varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A + F \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad M_{Ax} - F \sin \alpha \cdot DB = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad M_{Ay} - F \sin \alpha \cdot AB = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad M_{Az} = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо:

$$X_A = 20,7 \text{ кН}, \quad Y_A = -27,6 \text{ кН}, \quad Z_A = -36 \text{ кН},$$

$$M_{Ax} = 57,6 \text{ кНм}, \quad M_{Ay} = 43,2 \text{ кНм}, \quad M_{Az} = 0.$$

Задача 5.10.

$$G = 4 \text{ кН}$$

$$F = 2 \text{ кН}$$

$$S_1 = ? \dots S_6 = ?$$

Однорідна квадратна плита вагою G утримується в горизонтальному положенні за допомогою шести стержнів. Знайти зусилля в стержнях, якщо в точці D вдовж діагоналі DB діє сила F . Стержні невагомі, на кінцях мають шарнірні з'єднання (рис. 5.12).

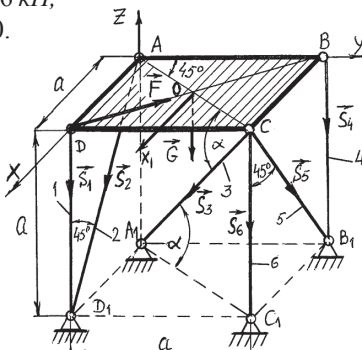


Рис. 5.12

Розглянемо рівновагу плити $ABCD$. Для неї в'язями є стержні 1–6. Реакції цих стержнів направлені по стержням. Напрями дії реакцій стержнів показані на рис. 5.12. Початок координат виберемо в точці A . Маємо довільну просторову систему сил. Перед тим, як записати рівняння рівноваги, знайдемо деякі кути.

$$\text{Діагональ } AC = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a;$$

$$\text{Діагональ } AC_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a ;$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577 ; \quad \cos \alpha = \frac{AC_1}{AC} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = 0,816 ;$$

Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 ; \quad S_2 \cos 45^\circ - S_3 \cos \alpha \sin 45^\circ - S_5 \sin 45^\circ - F \cos 45^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 ; \quad F \sin 45^\circ - S_3 \cos \alpha \cos 45^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 ; \quad -S_1 - S_2 \sin 45^\circ - S_3 \sin \alpha - S_4 - S_5 \cos 45^\circ - S_6 - G = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0 ; \quad -S_3 \sin \alpha \cdot a - G \frac{a}{2} - S_4 a - S_5 \cos 45^\circ \cdot a - S_6 a = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0 ; \quad S_1 a + G \frac{a}{2} + S_3 \sin \alpha \cdot a + S_5 \cos 45^\circ \cdot a + S_6 a = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0 ; \quad F \sin 45^\circ \cdot a + S_5 \sin 45^\circ \cdot a = 0. \quad (6)$$

Розв'язавши цю систему рівнянь отримаємо:

$$S_1 = -3,41 \text{ кН}; \quad S_2 = 2 \text{ кН}; \quad S_3 = 2,45 \text{ кН}; \quad S_4 = -3,82 \text{ кН}; \quad S_5 = -2 \text{ кН}; \quad S_6 = -1,41 \text{ кН}$$

Зробимо перевірку: запишемо суму моментів сил відносно осі OX_1 :

$$\sum M_{x1} = S_1 \frac{a}{2} + S_2 \sin 45^\circ \frac{a}{2} - S_3 \sin \alpha \cdot \frac{a}{2} - S_4 \cdot \frac{a}{2} - S_5 \cos 45^\circ \frac{a}{2} - S_6 \frac{a}{2}$$

Підставивши числові значення зусиль, маємо, що ця сума дорівнює нулю.

Задача 5.11.

$$a = 0,5 \text{ м}$$

$$T_1 = 2 \text{ кН}$$

$$T_2 = 3 \text{ кН}$$

$$G = 2 \text{ кН}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$R_1 = 0,5 \text{ м}$$

$$R_2 = 0,2 \text{ м}$$

$$b = 0,3 \text{ м}$$

$$X_A = ? \quad Y_A = ?$$

$$Z_A = ? \quad X_B = ?$$

$$Y_B = ? \quad P = ?$$

Вертикальний вал вагою G в точці A має підп'ятник, а в точці B – підшипник. Паралельні горизонтальні гілки пасу, що накинута на шків, мають сили натягу T_1 і T_2 . Вони складають з горизонтальною віссю CY кут α . Вал знаходиться в рівновазі завдяки дії вантажу вагою P .

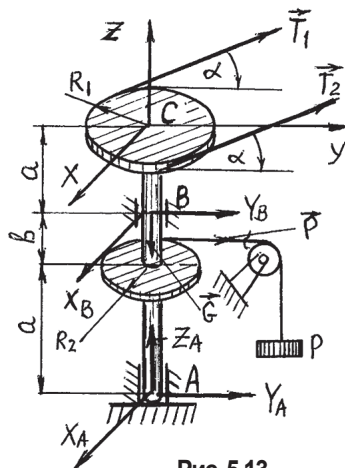


Рис. 5.13

Розглянемо рівновагу вертикального вала ABC . Для нього в'язями є підшипник в точці B (складові реакції X_B , Y_B) і підп'ятник A (складові реакції X_A , Y_A , Z_A).

Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha + X_B + X_A = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad (T_1 + T_2) \cos \alpha + Y_B + Y_A + P = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A - G = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad Y_B \cdot a + P \cdot (a + b) + Y_A \cdot (a + b + a) = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad -X_B \cdot a - X_A \cdot (a + b + a) = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0;$$

$$(T_2 - T_1) R_1 - P \cdot R_2 = 0.$$

(6)

Розв'язавши цю систему рівнянь, маємо:

$$X_A = -2,21 \text{ кН}, \quad X_B = 5,74 \text{ кН},$$

$$P = 2,5 \text{ кН}, \quad Y_A = 1,28 \text{ кН},$$

$$Y_B = -7,3 \text{ кН}, \quad Z_A = 2 \text{ кН}.$$

5.4. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 5.12.

Вздовж ребер куба зі стороною a спрямовані сили $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$.

Привести цю систему сил до простішого вигляду (рис. 5.14).

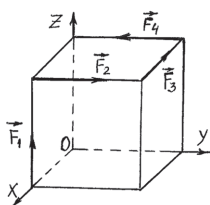


Рис. 5.14

Відповідь: Динама. $R = \sqrt{2}P$; $M = \sqrt{2}Pa$.

Рівняння центральної осі $y = a$, $x + z = 2a$.

Задача 5.13.

На колінчатий вал (рис. 5.15) діє шатун з силою $F = 12 \text{ кН}$, направленою перпендикулярно до шийки вала під кутом 75° до вертикалі. Нехтуючи вагою вала, знайти реакції підшипників A і B , і момент M пари сил, яку необхідно прикласти до маховика C вагою $Q = 4,2 \text{ кН}$, щоб вал був в рівновазі.

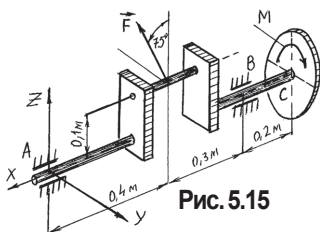


Рис. 5.15

Відповідь:

$$Y_A = 4,97 \text{ кН}; \quad Z_A = -2,53 \text{ кН};$$

$$Y_B = 6,63 \text{ кН}; \quad Z_B = 3,62 \text{ кН}; \quad M = 1,16 \text{ кНм}.$$

Задача 5.14.

Вертикальний стержень OA і горизонтальні стержні BC і DE розміщені взаємно перпендикулярно один до другого (рис. 5.16). В точках C і E на стержні діють сили $F_1 = 300 \text{ Н}$ і $F_2 = 400 \text{ Н}$. Нехтуючи вагою стержнів, знайти тиск стержнів на підшипник A і під'ятник O , якщо $BC = 0,16 \text{ м}$, $AD = 0,2 \text{ м}$, $OB = 0,18 \text{ м}$, $BD = 0,22 \text{ м}$, $DE = 0,20 \text{ м}$.

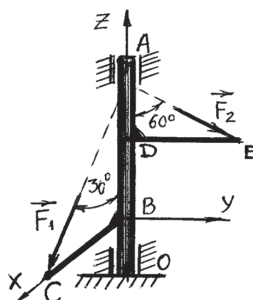


Рис. 5.16

Відповідь:

$$N_{Ax} = 114,3 \text{ H}; \quad N_{Ay} = 297,6 \text{ H}; \quad N_{Ox} = 35,7 \text{ H};$$

$$N_{Oy} = 48,8 \text{ H}; \quad N_{Oz} = -$$

459,8 Н.

Задача 5.15.

Знайти реакції підшипників вала редуктора, на якому закріплені косозубе колесо і прямозуба шестерня. На колесо діє осьова сила $Q_1 = 0,72 \text{ кН}$, радіальна сила $T_1 = 0,6 \text{ кН}$ і невідома колова сила F_1 , а на шестерню – радіальна сила $T_2 = 1,2 \text{ кН}$ і колова сила $F_2 = 3,2 \text{ кН}$ (рис. 5.17).

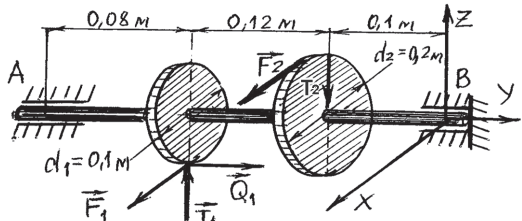


Рис. 5.17

Відповідь: $X_A = -5,77 \text{ кН}$; $Y_A = 0,08 \text{ кН}$; $X_B = -3,83 \text{ кН}$; $Y_B = 0,52 \text{ кН}$; $Z_B = -0,72 \text{ кН}$; $F_1 = 6,4 \text{ кН}$.

Задача 5.16.

Квадратна плита вагою $G = 20 \text{ кН}$ утримується в горизонтальному положенні стержнем CL . В точках A і B плита опирається на підшипники. В точці D діє вертикальна сила $Q = 10 \text{ кН}$. Знайти зусилля в стержні CL і реакції в підшипниках A і B (рис. 5.18).

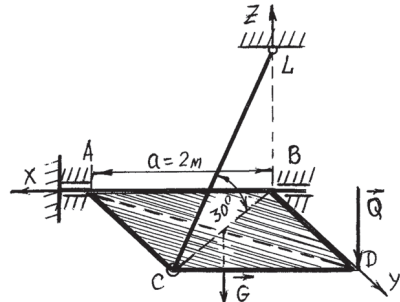


Рис. 5.18

Відповідь: $S = 40 \text{ кН}$;

$$X_A = 10\sqrt{6} \text{ кН}; \quad Y_A = 0; \quad Z_A = -10 \text{ кН}; \quad Y_B = 10 \text{ кН}; \quad Z_B = 20 \text{ кН}.$$

Задача 5.17.

Знайти реакції жорсткого защемлення A (рис. 5.19), якщо $a = 1,5 \text{ м}$, $q = 2,5 \text{ кН/м}$, $M = 4 \text{ кНм}$, $F = 1,5 \text{ кН}$.

Відповідь:

$$X_A = Y_A = 0;$$

$$Z_A = 5,25 \text{ кН};$$

$$M_{Ax} = 14,3 \text{ кНм};$$

$$M_{Ay} = 5,06 \text{ кНм};$$

$$M_{Az} = 0.$$

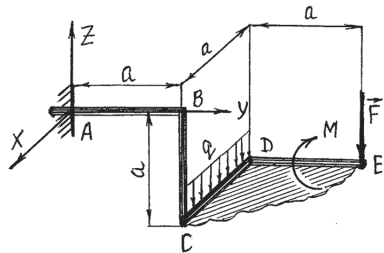


Рис. 5.19

6. Центр паралельних сил і центр тяжіння

6.1. Окремі випадки зведення просторової системи паралельних сил

Нехай в просторі діє n паралельних сил (рис. 6.1). Візьмемо за центр зведення точку O . Введемо одиничний орт $\vec{e}$, який паралельний силам. Тоді силу можна записати $\vec{F}_k = F_k \cdot \vec{e}$, де F_k – модуль сили. Головний вектор

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \left(\sum_{k=1}^n F_k \right) \cdot \vec{e}.$$

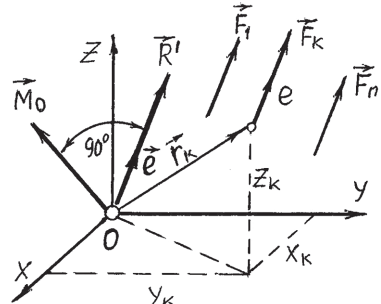


Рис. 6.1

Головний момент $\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k)$.

Головний вектор і головний момент можна записати в такому вигляді:

$$\vec{R}' = R' \cdot \vec{e}; \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^n (F_k \vec{r}_k) \cdot \vec{e}. \quad \vec{M}_O = \left(\sum_{k=1}^n F_k \vec{r}_k \right) \cdot \vec{e}.$$

Із означення векторного добутку видно, що векторний момент $\vec{M}_O \perp \vec{e}$.

Виясимо, чи приводиться система паралельних сил до динамічного гвинта. Розглянемо скалярний добуток

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = (\vec{R}' \cdot \vec{e}) \cdot \vec{M}_O = R' \cdot M_O \cos 90^\circ = 0.$$

Система паралельних сил не зводиться до динамічного гвинта. З цього можна зробити висновок: просторова система паралельних сил зводиться або до рівнодійної ($\vec{R}' \neq 0$), або до пари сил ($\vec{R}' = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$), або знаходиться в рівновазі ($\vec{R}' = 0$, $\vec{M}_O = 0$).

6.2. Центр паралельних сил. Формули для радіус-вектора і координат центра паралельних сил

Центром паралельних сил називається точка на лінії дії рівнодійної цих сил, яка не змінює свого місцезнаходження при одночасному повороті всіх сил на один і той же кут навколо точок прикладання сил.

Нехай точка C – центр паралельних сил, які діють в просторі в одному напрямі (рис. 6.2). Як і раніше, введемо одиничний орт $\vec{e}$.

$$\text{Тоді } \vec{F}_k = F_k \cdot \vec{e}, \quad (a)$$

Так як точка C – центр паралельних сил, то рівнодійна $\vec{R}^1$ проходить через точку C . Тому момент рівнодійної $\vec{R}^1$ відносно точки C буде дорівнювати нулю.

$\vec{M}_c(\vec{R}^1) = 0$. З другої сторони, згідно теореми Варіньона, момент рівнодійної сили дорівнює сумі моментів складових сил відносно точки C .

$$\vec{M}_c(\vec{R}^1) = \sum_{k=1}^n (\vec{CC}_k \times \vec{F}_k) = 0. \quad (б)$$

Виберемо в просторі довільну точку O , яка буде початком декартової системи координат. $\vec{r}_c$ – радіус-вектор центра паралельних сил, $\vec{r}_k$ – радіус-вектор точки C_k – точки прикладання сили $\vec{F}_k$. Із рисунка видно, що

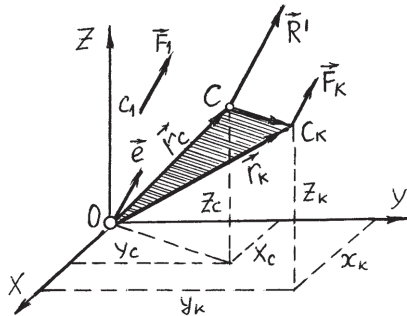


Рис. 6.2

$$\vec{CC}_k = \vec{r}_k - \vec{r}_c. \quad (c)$$

Підставимо (a) і (c) в (б).

$$\sum_{k=1}^n [(\vec{r}_k - \vec{r}_c) \times F_k \vec{e}] = \left[\sum_{k=1}^n (F_k \vec{r}_k - F_k \vec{r}_c) \right] \cdot \vec{e} = 0.$$

$$\text{Маємо } \sum_{k=1}^n F_k \vec{r}_k - \vec{r}_c \sum_{k=1}^n F_k = 0.$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n F_k}. \quad (6.1)$$

Формула (6.1) є формулою для радіуса-вектора центра паралельних сил.

Якщо вираз (6.1) спроектувати на осі декартової системи координат, то отримаємо координати центра паралельних сил.

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k x_k}{\sum_{k=1}^n F_k}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k y_k}{\sum_{k=1}^n F_k}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k z_k}{\sum_{k=1}^n F_k}, \quad (6.2)$$

де x_c, y_c, z_c – координати центра паралельних сил,
 x_k, y_k, z_k – координати точки прикладання k -ої сили.

6.3. Центр тяжіння

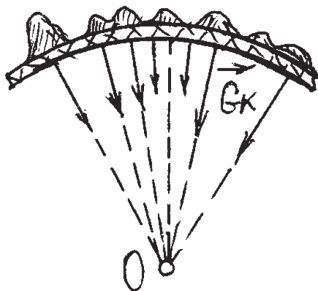


Рис. 6.3

Всі тіла, які знаходяться на Землі, зазнають дію сили тяжіння, яка напрямлена до центра Землі (рис. 6.3). Ці сили, як видно з рисунка, не паралельні. Будемо розглядати тіла, розміри яких набагато менші розмірів поверхні Землі. Тоді можна ввести гіпотезу про паралельність сил тяжіння (див. рис. 6.3).

Рівнодійна сил тяжіння, прикладених до всіх частин тіла, називається силою тяжіння, її модуль – вагою тіла, а центр цих сил – центром тяжіння тіла. Центр тяжіння твердого тіла – центр паралельних сил тяжіння, які діють на всі частини тіла.

Для знаходження центра тяжіння тіла можна використати формулу (6.2) для центра паралельних сил, де $F_k = G_k$.

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n G_k x_k}{G}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n G_k y_k}{G}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n G_k z_k}{G}, \quad (6.3)$$

де G_k – вага окремих частин тіла,

x_k, y_k, z_k – координати k -го елементу тіла, G – вага тіла.

6.4. Центр мас

Якщо позначити масу тіла через M , а маси окремих його частин – через $m_1, m_2, \dots, m_n$, то будемо мати $G = Mg$, $G_k = m_k g$ ($k=1, 2, \dots, n$), де g – прискорення вільного падіння. Підставивши ці значення в (6.3), отримаємо:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M}. \quad (6.4)$$

Точка, координати якої знаходяться за формулами (6.4), називається *центром маси або центром інерції тіла*.

Положення центра маси залежить тільки від розподілу маси в тілі і є однією із характеристик цього розподілу.

В той час як поняття про центр тяжіння має зміст тільки для тіла, яке розміщене в однорідному полі сили тяжіння, поняття центра маси не пов'язане з поняттям про силове поле, і в цьому розумінні є більш загальним.

6.5. Центр тяжіння об'єму

Розіб'ємо тіло на n достатньо малих об'ємних елементів. Позначимо координати довільної точки, яка лежить в границях k -го елемента через x_k, y_k, z_k (рис. 6.4).

Якщо об'ємне тіло однорідне, то $G_k = g\gamma V_k$, $G = g\gamma V$, де $\gamma = \text{const}$ – об'ємна густина тіла. Тоді із формули (6.3) маємо:

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^n V_k X_k}{V}, \quad Y_c = \frac{\sum_{k=1}^n V_k Y_k}{V}, \quad Z_c = \frac{\sum_{k=1}^n V_k Z_k}{V} \quad (6.5)$$

де V – об'єм тіла.

Із формули (6.5) видно, що положення центра тяжіння тіла залежить тільки від геометричної форми і розмірів твердого тіла. Тому центр тяжіння однорідного твердого тіла можна назвати центром об'єму тіла. Якщо тіло складної форми, то у виразі (6.5) суми, що знаходяться в чисельнику, доцільно замінити інтегральними сумами:

$$X_c = \frac{\int x dV}{V}, \quad Y_c = \frac{\int y dV}{V}, \quad Z_c = \frac{\int z dV}{V}, \quad (6.6)$$

де x, y, z – координати елементарного об'єму dv .

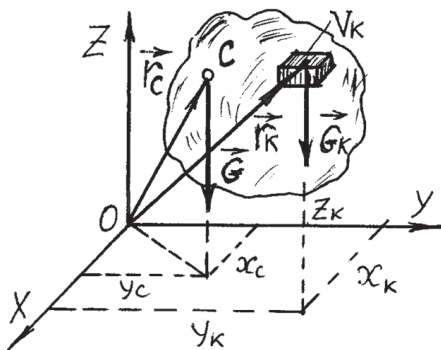


Рис. 6.4

6.6. Центр тяжіння однорідної оболонки

Для однорідної оболонки (поверхнева густина $\gamma = \text{const}$) (рис. 6.5): $G_k = g\gamma S_k$, $G = g\gamma S$. Тоді із формули (6.3) маємо:

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^n S_k X_k}{S}; \quad Y_c = \frac{\sum_{k=1}^n S_k Y_k}{S}; \quad Z_c = \frac{\sum_{k=1}^n S_k Z_k}{S}; \quad (6.7)$$

де S – площа всієї оболонки, S_k – площа k -го елемента оболонки, x_k, y_k, z_k – координати елемента S_k .

Якщо оболонка складної форми, то краще користуватись слідуючими формулами:

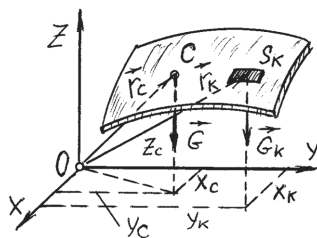


Рис. 6.5

$$X_c = \frac{\int_{(s)} x ds}{S}, \quad Y_c = \frac{\int_{(s)} y ds}{S}, \quad Z_c = \frac{\int_{(s)} z ds}{S}, \quad (6.8)$$

де x_k, y_k, z_k – координати елементарної площі ds .

6.7. Центр тяжіння площі плоскої фігури

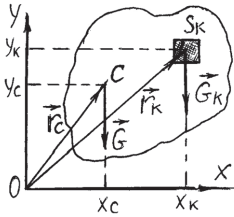


Рис. 6.6

Для плоскої однорідної фігури осі координат OX і OY виберемо в серединній площині (рис. 6.6). $G_k = g\gamma S_k$, $G = g\gamma S$, де $\gamma = \text{const}$ – густина одиниці площі. Тоді з формули (6.3) маємо:

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^n S_k X_k}{S}, \quad Y_c = \frac{\sum_{k=1}^n S_k Y_k}{S}. \quad (6.9)$$

Для плоскої фігури складної форми потрібно користуватися слідуючими формулами:

$$X_c = \frac{\int_{(s)} x ds}{S}, \quad Y_c = \frac{\int_{(s)} y ds}{S}. \quad (6.10)$$

6.8. Центр тяжіння лінії

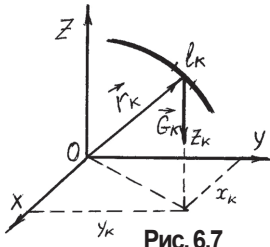


Рис. 6.7

Для однорідного криволінійного стержня лінійна густина $\gamma = \text{const}$ (рис. 6.7). $G_k = g\gamma l_k$, $G = g\gamma L$, де L – довжина стержня, l_k – елемент стержня. З формули (6.3) маємо:

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^n l_k X_k}{L}, \quad Y_c = \frac{\sum_{k=1}^n l_k Y_k}{L}, \quad Z_c = \frac{\sum_{k=1}^n l_k Z_k}{L}. \quad (6.11)$$

Для стержня складної форми:

$$X_c = \frac{\int_{(L)} x dl}{L}, \quad Y_c = \frac{\int_{(L)} y dl}{L}, \quad Z_c = \frac{\int_{(L)} z dl}{L}. \quad (6.12)$$

Зауважимо, що чисельники в формулах (6.5), (6.7), (6.9), (6.11) називаються статичними моментами об'єму, поверхні, площі і довжини тіла відносно координатних осей.

Візьмемо для прикладу формулу (6.9). Позначимо через S_x і S_y статичні моменти площі фігури відносно координатних осей X і Y :

$$S_x = \sum_{k=1}^n S_k Y_k, \quad S_y = \sum_{k=1}^n S_k X_k. \quad (6.13)$$

Тоді формула (6.9) запишеться в такому вигляді:

$$X_c = \frac{S_y}{S}; \quad Y_c = \frac{S_x}{S}. \quad (6.14)$$

6.9. Способи знаходження координат центра тяжіння тіл

6.9.1. Спосіб симетрії

1. Якщо однорідне тіло має площину геометричної симетрії, то центр тяжіння цього тіла знаходиться в цій площині симетрії;

2. Якщо однорідне тіло має вісь геометричної симетрії, то центр тяжіння знаходиться на цій осі;

3. Якщо однорідне тіло має центр геометричної симетрії, то центр тяжіння знаходиться в центрі симетрії.

Доведемо це. Якщо тіло симетричне відносно деякої площини Π (рис. 6.8), то кожній частинці тіла по одну сторону цієї площини відповідає рівна їй по вазі і симетрично розміщена частинка по другу сторону площини.

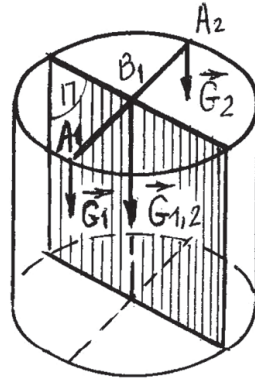


Рис. 6.8

Візьмемо яку-небудь частинку A_1 по одну сторону площини Π і знайдемо симетричну їй частинку A_2 по другу сторону. На ці частинки будуть діяти однакові по модулю сили тяжіння $\vec{G}_1$ і $\vec{G}_2$. Рівнодійна $\vec{G}_{1,2}$ цих двох рівних і паралельних сил буде прикладена в середині B_1 відрізка A_1A_2 , т. б. в площині симетрії.

Складаючи подібним чином сили тяжіння кожної пари симетричних частинок, отримаємо систему паралельних сил, які лежать в площині симетрії тіла. В цій площині і буде лежати центр тяжіння тіла.

Для випадків, коли тіло має вісь або центр симетрії, доведення теореми аналогічне.

Висновок:

1. Центр тяжіння відрізка матеріальної прямої лінії лежить в його середині.

2. Центр тяжіння круглого кільця, круглої або прямокутної пластинки, площі правильного многокутника і еліпса, об'єму прямокутного

паралелепіеда і кулі, і других тіл, які мають центр симетрії, лежить в їх геометричних центрах (в центрах симетрії).

6.9.2. Спосіб розбиття

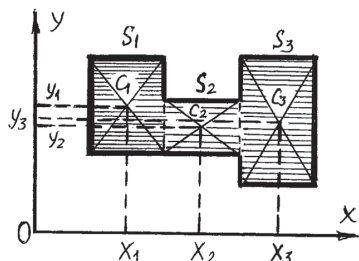


Рис. 6.9

Цей спосіб використовується для знаходження центра тяжіння тіл складної геометричної форми. Один із прикладів тіла складної форми приведено на рис. 6.9.

Розіб'ємо дану фігуру на ряд простих фігур, центри тяжіння яких можна знайти. В даному випадку фігура розбилась на три прямокутника, площі яких s_1, s_2, s_3 , а центри тяжіння C_1, C_2, C_3 . Виберемо систему координат.

Тоді центри тяжіння мають координати $C_1(x_1; y_1)$, $C_2(x_2; y_2)$, $C_3(x_3; y_3)$.

Для знаходження центра тяжіння площі використаємо формулу (6.9):

$$x_c = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{s_1 + s_2 + s_3}; \quad y_c = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{s_1 + s_2 + s_3}.$$

Після обчислення, отримаємо центр тяжіння площі $C(x_c; y_c)$.

6.9.3. Спосіб доповнення

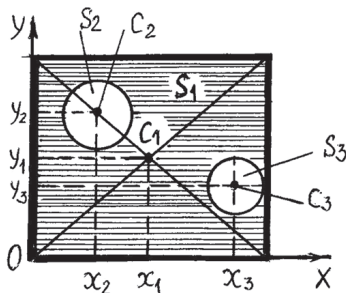


Рис. 6.10

Цей спосіб застосовується для тіл, в яких є отвори, якщо центри тяжіння тіла без отворів і вирізаних отворів відомі. Розглянемо фігуру, яка показана на рис. 6.10.

В пластині є два отвори. Ці отвори доповнимо до пластинки, яка після цього доповнення стала суцільною. Самі ж отвори будемо вважати тілами з від'ємними площами.

Для знаходження центра тяжіння площі використаємо формулу (6.9)

$$x_c = \frac{s_1 x_1 - s_2 x_2 - s_3 x_3}{s_1 - s_2 - s_3}$$

$$y_c = \frac{s_1 y_1 - s_2 y_2 - s_3 y_3}{s_1 - s_2 - s_3}.$$

6.9.4. Спосіб інтегрування

Якщо тіло складної форми і його неможливо розбити на ряд частин, положення центрів яких можна знайти, то використовують спосіб інтегрування.

Розглянемо спосіб інтегрування на конкретному прикладі. Знайдемо центр тяжіння дуги кола. Нехай є дуга AB кола радіуса R з центральним кутом 2α (рис. 6.11). Початок координат виберемо в центрі кола і вісь OX спрямуємо по осі симетрії.

Так як вісь OX є віссю симетрії, то центр тяжіння дуги лежить на цій осі. $y_c = 0$.

Знайдемо координату x_c способом інтегрування. Виділимо на дузі AB елемент дуги $dl = R d\varphi$. Положення дуги dl визначається кутом φ . Координата x цього елемента буде $x = R \cos \varphi$. Використаємо першу із формул (6.12):

$$x_c = \frac{\int_{(L)} x dl}{\int_{(L)} dl} = \frac{R^2 \int_{(-\alpha)}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{\int_{(-\alpha)}^{\alpha} d\varphi} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

$$\text{Остаточно} \quad x_c = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}, \quad (6.15)$$

де кут α вимірюється в радіанах.

$$\text{Для півкола } (\alpha = \frac{\pi}{2}) \text{ маємо} \quad x_c = \frac{2R}{\pi}. \quad (6.16)$$

6.10. Центр тяжіння деяких ліній, площ і об'ємів

1. *Центр тяжіння площі трикутника* лежить в точці перетину його медіан (рис. 6.12). Як відомо із геометрії

$$CL = \frac{1}{3} BL; \quad CE = \frac{1}{3} AE; \quad CK = \frac{1}{3} DK.$$

2. *Центр тяжіння площі кругового сектора.*

Розглянемо круговий сектор радіуса R з центральним кутом 2α (рис. 6.13). Розіб'ємо площу сектора на елементарні плоскі трикутники. Центри тяжіння цих трикутників лежать на дузі A_1B_1 , радіус якої $r = 2R/3$. Знайдемо тепер центр тяжіння дуги A_1B_1 з центральним кутом 2α і радіуса

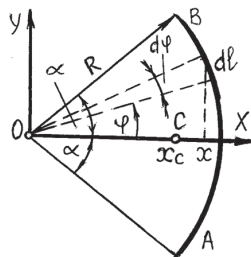


Рис. 6.11

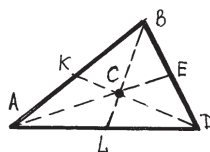


Рис. 6.12

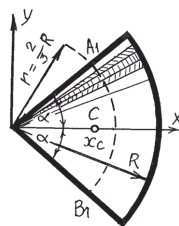


Рис. 6.13

r . Цей центр і буде центром тяжіння сектора. Використаємо формулу (6.15), де замість R треба написати r .

$$x_c = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}. \quad (6.17)$$

$$\text{Для півкола } (\alpha = \frac{\pi}{2}) \quad x_c = \frac{4R}{3\pi}. \quad (6.18)$$

3. Центр тяжіння об'єму однорідної призми, циліндра.

Центр тяжіння C однорідної призми (циліндра) знаходиться в середині відрізка, що з'єднує центри тяжіння верхньої і нижньої основ призми (циліндра).

4. Центр тяжіння об'єму піраміди, конуса.

Центр тяжіння об'єму піраміди або конуса лежить на відрізку, що з'єднує вершину з центром тяжіння основи, на відстані одної четвертої висоти піраміди (конуса) від площі основи, або $Z_c = \frac{3}{4}h$, якщо відстань рахувати від вершини.

5. Центр тяжіння об'єму півкулі.

Центр тяжіння об'єму півкулі лежить на осі симетрії Z :

$$Z_c = \frac{3}{8}R,$$

де R – радіус півкулі.

Координата Z_c відраховується від діаметральної площини півкулі.

Примітка. З доведенням формул, що приведені в пунктах 3–5, можна ознайомитись в підручнику [15].

6.11. Методичні вказівки до розв'язування задач

Задача 6.1.

$$R = 6\text{ м}$$

$$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$X_c = ? \quad Y_c = ?$$

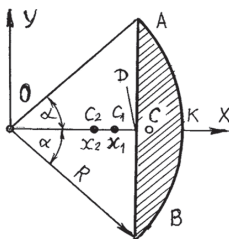


Рис. 6.14

Знайти центр тяжіння кругового сегмента, якщо радіус кола R , а центральний кут 2α (рис. 6.14).

Вісь OX є віссю симетрії. Це означає, що $Y_c = 0$

Доповнимо ΔOAB до сегмента. Отримали сектор ΔOBK з радіусом R і центральним кутом 2α . Сегмент AKB можна розглядати як сектор з трикутною порожниною. Маємо дві фігури: 1) сектор $OAKB$ і 2) трикутник OAB з від'ємною площею.

Для знаходження центра тяжіння плоскої фігури використаємо формулу (6.9):

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2}, \quad (a)$$

де s_1 , x_1 – площа сектора і його координата центра тяжіння,
 s_2 , x_2 – площа трикутника і його координата центра тяжіння.
 Складемо таку таблицю:

Тіло 1		Тіло 2	
S_1 (м ²)	X_1 (м)	S_2 (м ²)	X_2 (м)
18,85	3,82	– 15,59	3,46

Площа сектора $S_1 = \frac{\varphi R^2}{2}$, де φ – центральний кут. В нашому випадку $\varphi = 2\alpha$. Тому $S_1 = \alpha \cdot R^2 = 18,85$ (м²). Для знаходження центра тяжіння сектора звернемось до формули (6.17):

$$x_1 = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{2R \sin \frac{\pi}{6}}{3 \cdot \frac{\pi}{6}} = 3,82 \text{ (м)}.$$

Площа трикутника OAB $S_2 = -\frac{OD \cdot AB}{2}$; $OD = R \cos \alpha$;

$$AB = 2 \cdot AD = 2R \sin \alpha.$$

$$\text{Тоді } S_2 = -\frac{2R^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = -\frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} = -15,59 \text{ (м)}.$$

$$x_2 = \frac{2}{3}OD = \frac{2}{3}R \cos \alpha = 3,46 \text{ (м)}.$$

Підставимо числові дані в вираз (а):

$$x_c = \frac{18,85 \cdot 3,82 - 15,59 \cdot 3,46}{18,85 - 15,59} = 5,52 \text{ (м)}.$$

Якщо задачу розв'язати в загальному вигляді, то для сегмента його площа і положення центра тяжіння знаходяться за формулами:

$$S = \frac{R^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha); \quad x_c = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}. \quad (6.19)$$

Задача 6.2.

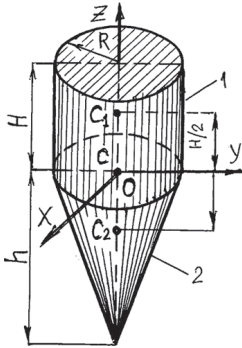


Рис. 6.15

Тіло складається з циліндра і конуса, які мають спільну рівну основу. Висота циліндра дорівнює H , а висота конуса h . Яким повинно бути відношення h/H , щоб центр тяжіння тіла співпав з центром основи конуса? (рис. 6.15)

Початок системи координат візьмемо в точці O основи. Тіло має вісь симетрії, тому доцільно одну із осей координат спрямувати по осі симетрії. Це буде вісь OZ . По умові задачі центр тяжіння об'єму лежить в точці O . Тобто $X_c = Y_c = Z_c = 0$. Необхідно знайти співвідношення між висотами циліндра і конуса, щоб $Z_c = 0$.

Скористаємося формулами (6.5):

$$Z_c = \frac{V_1 Z_1 + V_2 Z_2}{V_1 + V_2}$$

де V_1 і Z_1 – відповідно об'єм циліндра і координата центра тяжіння;
 V_2 і Z_2 – відповідно об'єм конуса і координата центра тяжіння.

Складемо наступну таблицю:

Тіло 1		Тіло 2	
V_1	Z_1	V_2	Z_2
$\pi R^2 H$	$H/2$	$\frac{1}{3} \pi R^2 h$	$-h/4$

$$Z_c = \frac{\pi R^2 H \cdot \frac{H}{2} + \frac{1}{3} \pi R^2 h \cdot (-\frac{1}{4} h)}{\pi R^2 H + \frac{1}{3} \pi R^2 h} = \frac{6H^2 - h^2}{4(3H + h)} = 0.$$

$$\text{Звідси маємо } 6H^2 = h^2, \quad \text{або} \quad \frac{h}{H} = \sqrt{6}.$$

Задача 6.3.

Знайти центр тяжіння ферми, яка складається з семи однорідних стержнів (рис. 6.16)

Початок координат виберемо в точці O . Використаємо формули (6.11):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^7 l_k x_k}{\sum_{k=1}^7 l_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^7 l_k y_k}{\sum_{k=1}^7 l_k}.$$

Складемо таку таблицю:

Стержень	l_k	x_k	y_k
1	1	0	0,5
2	1	0,5	1
3	1,41	0,5	0,5
4	1	0,5	0
5	1	1	0,5
6	1,41	1,5	0,5
7	1	1,5	0

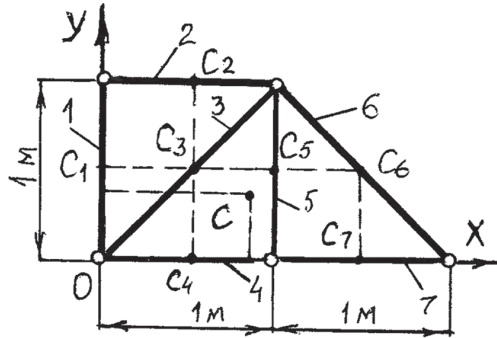


Рис. 6.16

$$x_c = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0,5 + 1,41 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 + 1,41 \cdot 1,5 + 1 \cdot 1,5}{1 + 1 + 1,41 + 1 + 1 + 1,41 + 1} = 0,81 \text{ (м)}$$

$$y_c = \frac{1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 + 1,41 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0,5 + 1,41 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0}{7,82} = 0,44 \text{ (м)}$$

$$x_C = 0,81 \text{ (м)}, \quad y_C = 0,44 \text{ (м)}$$

6.12. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 6.4.

Знайти положення центра тяжіння площі круглої пластини радіусом $R = 50$ см, в якій є прямокутний виріз зі сторонами $a = 20$ см, $b = 40$ см (рис. 6.17).

Відповідь: $x_c = -1,13$ см.

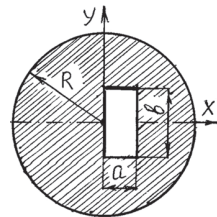


Рис. 6.17

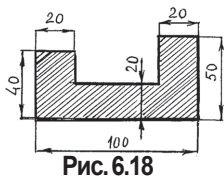
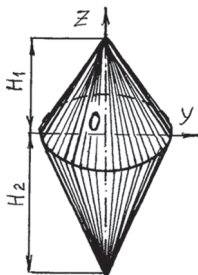


Рис. 6.18

Задача 6.5.

Знайти координати центра тяжіння металевого листа, розміри якого (в сантиметрах) позначені на рис. 6.18.

Відповідь: $x_c = 52,7$ см, $y_c = 17,7$ см.



Задача 6.6.

Знайти положення центра тяжіння подвійного конуса, тобто тіла, що складається з двох конусів з спільною основою радіусом R і висотою H_1 і H_2 (рис. 6.19).

Відповідь: $z_c = \frac{H_1 - H_2}{4}$

Рис. 6.19

7. Збірник завдань для розрахунково-графічної роботи № 3 “Визначення реакцій опор просторової конструкції”

Варіанти 1–30

Елементи конструкції зображені на рисунках 7.1–7.6, а необхідні для розрахунків дані приведені в таблиці 7.1. Лінійні розміри задані в сантиметрах, а сили в кілоньютонах. По даним варіанта 1 побудована конструкція (рис. 7.7).

Аналогічно кожний студент по даним свого варіанту будує конструкцію і визначає реакції опор конструкції і одну з невідомих активних сил (в таблиці 7.1 стоїть знак “?”). У всіх варіантах вісь обертання горизонтальна, а початок координат вибирається в ближчій до нас опорі. Елементи 3–6 конструкції перпендикулярні до осі обертання вала. Сили $\vec{T}_3, \vec{t}_3, \vec{T}_4, \vec{t}_4, \vec{F}_5, \vec{P}_6$ паралельні площині ZAX . Сила $\vec{F}_5$ знаходиться в точці T , що є серединою сторони ES .

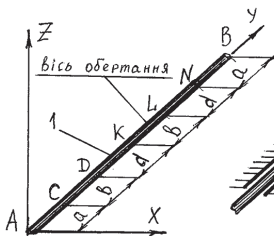


Рис. 7.1



Рис. 7.2

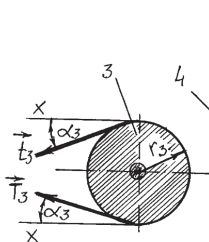


Рис. 7.3

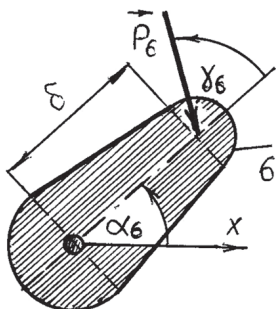


Рис. 7.6

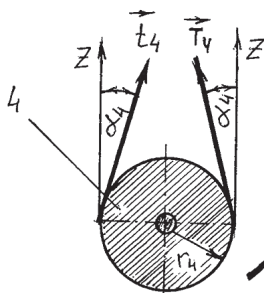


Рис. 7.4

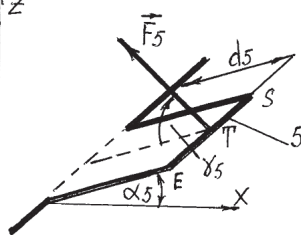


Рис. 7.5

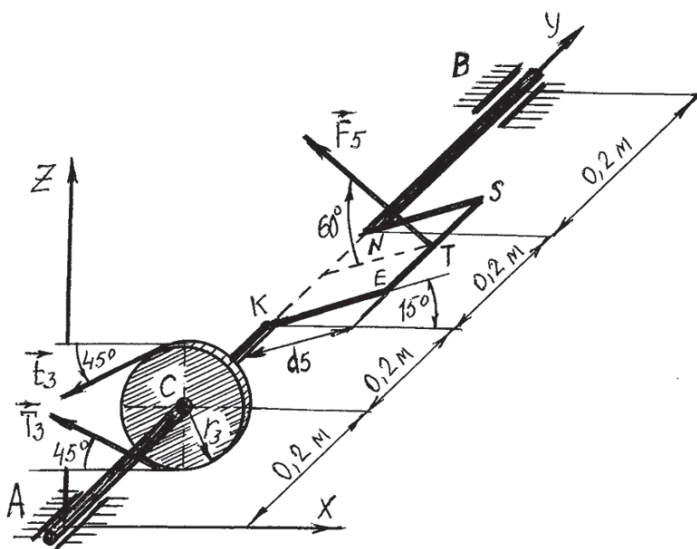


Рис. 7.7. Побудований за даними варіанта 1.

Таблиця 7.1

Варіант	Геометричні розміри			Місцезоташування елементів і дані про них																					
				Ел.2	Елемент 3					Елемент 4					Елемент 5					Елемент 6					
	a	b	d		Точки	Точка	r ₃	α ₃	T _γ /t ₃	t ₃	Точка	r ₄	α ₄	T _γ /t ₄	t ₄	Ділянка	d ₅	α ₅	γ ₅	F ₅	Точка	δ	α ₆	γ ₆	P ₆
							см	град	-	кН		см	град	-	кН		см	град	град	кН		см	град	град	кН
1	20	10	10	A,B	C	12	45	2	20	-	-	-	-	-	кN	20	15	60	?	-	-	-	-	-	
2	30	10	10	C,B	A	15	30	1,5	15	L	10	45	1,2	?	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
3	40	15	15	C,B	A	10	15	1,2	?	-	-	-	-	-	кL	20	20	45	8	-	-	-	-	-	
4	25	25	40	C,B	-	-	-	-	-	A	15	25	1,5	6	-	-	-	-	-	N	12	30	45	?	
5	45	20	30	A,B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	CD	18	30	30	?	L	14	45	30	10	
6	50	30	20	D,B	A	20	35	1,4	10	-	-	-	-	-	LN	15	60	35	?	-	-	-	-	-	
7	60	30	15	D,B	-	-	-	-	-	A	20	30	1,8	12	-	-	-	-	-	K	16	35	40	?	
8	45	35	20	A,N	B	20	30	0,8	?	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C	25	75	30	15	
9	55	45	25	A,N	-	-	-	-	-	B	18	45	0,9	?	DK	25	45	60	10	-	-	-	-	-	
10	65	30	30	C,N	A	30	20	0,7	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	B	15	90	30	?	
11	42	32	28	A,N	C	25	35	1,6	15	B	15	30	1,3	?	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
12	60	40	30	D,N	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	AC	20	90	35	?	B	18	60	40	14	
13	50	40	20	D,N	-	-	-	-	-	B	25	32	1,6	20	-	-	-	-	-	A	16	80	30	?	
14	55	45	35	D,B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	AC	13	80	30	12	N	10	90	45	?	
15	52	45	30	D,B	N	22	15	0,5	?	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	A	12	65	35	13	
16	70	30	30	C,N	A	20	40	1,8	25	B	35	30	1,2	?	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
17	75	35	30	C,B	A	15	38	1,4	?	N	22	35	1,6	1,2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
18	80	20	40	C,B	-	-	-	-	-	A	30	18	2,0	18	-	-	-	-	-	L	20	85	35	?	
19	85	25	35	A,B	-	-	-	-	-	L	35	22	1,7	?	-	-	-	-	-	C	25	0	55	18	
20	84	28	32	A,N	B	16	42	1,5	15	-	-	-	-	-	CD	20	85	35	?	-	-	-	-	-	
21	60	30	25	A,N	-	-	-	-	-	B	40	28	0,7	?	KL	22	35	65	12	-	-	-	-	-	
22	50	25	25	A,B	-	-	-	-	-	K	25	40	1,2	20	-	-	-	-	-	N	15	60	40	?	
23	40	30	30	A,K	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	NB	15	82	35	?	D	10	40	60	9	
24	55	35	25	A,K	B	12	45	1,6	8	-	-	-	-	-	DK	30	90	30	?	-	-	-	-	-	
25	40	40	30	A,L	C	14	38	0,6	?	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	B	20	0	60	12	
26	30	30	30	A,L	-	-	-	-	-	D	15	10	1,5	12	-	-	-	-	-	B	10	20	70	?	
27	45	55	30	C,N	-	-	-	-	-	A	16	12	0,8	?	Dk	25	60	45	18	-	-	-	-	-	
28	42	32	30	DB	N	16	20	1,4	?	-	-	-	-	-	AC	20	75	35	15	-	-	-	-	-	
29	30	40	30	D,L	A	15	25	0,8	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	B	12	65	35	?	
30	40	30	20	A,B	-	-	-	-	-	D	15	30	2,0	?	-	-	-	-	-	L	18	75	45	10	

Варіанти 31–60

Прямокутна плита $ABCD$ вагою G підтримується в горизонтальному положенні за допомогою шести стержнів. Знайти зусилля в цих стержнях, якщо вони невагомі, на кінцях мають шарнірні з'єднання. Кінцями стержнів можуть бути точки A, B, C, D, E, K, L, N плити і точки A_1, B_1, D_1, C_1 опор.

В площині плити вздовж однієї із сторін плити або її діагоналі діє сила F .

Необхідні числові дані наведені в таблиці 7.2. У всіх варіантах початок системи координат знаходиться в точці A (рис. 7.8).

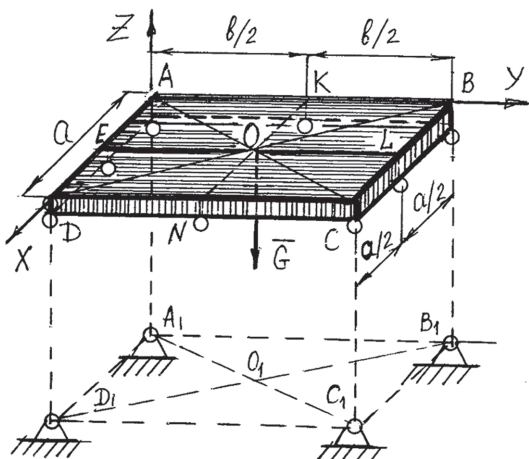


Рис. 7.8

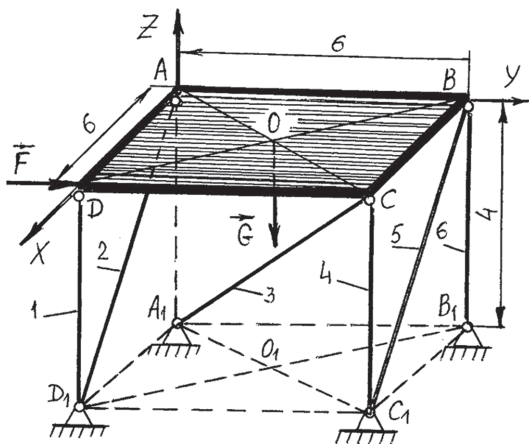


Рис. 7.9. Побудований за даними варіанта 1.

Таблиця 7.2

Варіант	розмір плити		d	Стержні						Сила $\vec{F}$			G
	a	b		1	2	3	4	5	6	Точка прикладання	Напрям дії	F	
	м	м		—	—	—	—	—	—	—	—	кН	кН
31	6	6	4	D ₁ D	D ₁ A	A ₁ C	C ₁ C	C ₁ B	B ₁ B	D	DC	20	10
32	4	6	3	D ₁ D	D ₁ C	A ₁ A	C ₁ A	B ₁ B	B ₁ A	D	DB	15	12
33	1,5	6	2,5	D ₁ D	A ₁ D	A ₁ B	B ₁ B	B ₁ C	C ₁ C	C	CB	22	16
34	2	5	3	D ₁ A	D ₁ C	A ₁ A	A ₁ B	B ₁ B	B ₁ C	C	CA	24	18
35	3	4	5	D ₁ C	A ₁ D	A ₁ B	C ₁ A	C ₁ B	C ₁ C	B	BC	26	20
36	5	3	4	D ₁ E	A ₁ A	A ₁ B	C ₁ C	C ₁ L	B ₁ B	B	BA	15	16
37	3	5	4	D ₁ N	B ₁ K	B ₁ L	A ₁ A	A ₁ B	C ₁ B	A	AD	14	14
38	4	4	4	A ₁ E	A ₁ C	C ₁ B	B ₁ B	D ₁ C	C ₁ C	A	AB	8	10
39	2	4	3	B ₁ C	B ₁ B	B ₁ D	B ₁ A	A ₁ D	A ₁ A	A	AC	12	11
40	2	3	3	B ₁ B	A ₁ A	C ₁ C	C ₁ L	B ₁ K	D ₁ A	D	DB	18	12
41	2	4	2	D ₁ D	D ₁ E	D ₁ N	B ₁ A	C ₁ C	C ₁ B	D	DC	10	11
42	3	3	2	B ₁ B	B ₁ K	B ₁ D	D ₁ D	D ₁ A	C ₁ C	D	DA	8	10
43	2,5	2,5	2,5	C ₁ C	C ₁ L	D ₁ N	A ₁ A	B ₁ B	D ₁ D	C	CB	6	7
44	3	2,5	1,5	D ₁ B	D ₁ C	A ₁ A	C ₁ L	C ₁ C	B ₁ B	C	CA	7	9
45	2	5	1,5	C ₁ D	D ₁ D	D ₁ E	A ₁ A	A ₁ B	B ₁ B	C	CD	8	7
46	2	4	1,5	C ₁ B	B ₁ B	B ₁ K	A ₁ A	A ₁ E	D ₁ B	B	BA	9	8
47	2	3	2	A ₁ A	A ₁ K	B ₁ B	B ₁ C	C ₁ C	D ₁ D	B	BC	12	13
48	3	4	2	A ₁ A	A ₁ D	D ₁ D	D ₁ B	C ₁ N	B ₁ B	B	BD	22	20
49	5	5	3	A ₁ A	A ₁ C	B ₁ K	B ₁ C	C ₁ C	D ₁ D	A	AC	19	11
50	4,5	5	3	C ₁ A	A ₁ A	C ₁ B	D ₁ C	D ₁ D	B ₁ B	A	AD	25	20
51	3	5	3	D ₁ D	D ₁ B	C ₁ B	A ₁ K	C ₁ C	A ₁ A	A	AB	30	20
52	3	4	2	D ₁ D	A ₁ E	A ₁ A	D ₁ C	B ₁ C	B ₁ K	D	DC	40	20
53	6	4	3	B ₁ C	B ₁ A	B ₁ D	D ₁ D	A ₁ A	C ₁ C	D	DA	42	22
54	5	4	3	D ₁ A	D ₁ B	A ₁ A	C ₁ N	B ₁ K	B ₁ B	D	DC	38	30
55	4	3	3	A ₁ D	B ₁ A	C ₁ D	C ₁ C	C ₁ L	B ₁ B	C	CB	36	26
56	4	4	2	D ₁ A	D ₁ N	C ₁ C	C ₁ B	A ₁ A	B ₁ K	C	CA	35	35
57	3	4	1,5	A ₁ E	C ₁ B	A ₁ A	D ₁ C	A ₁ B	C ₁ C	C	CD	41	31
58	1	2	1	D ₁ D	D ₁ C	D ₁ A	C ₁ C	A ₁ A	AB ₁	B	BC	16	20
59	5	4	3	B ₁ B	B ₁ D	C ₁ L	D ₁ D	D ₁ C	A ₁ A	B	BA	28	20
60	3	4	4	D ₁ C	D ₁ E	C ₁ A	C ₁ C	B ₁ B	B ₁ A	B	BD	16	18

Варіанти 61–90

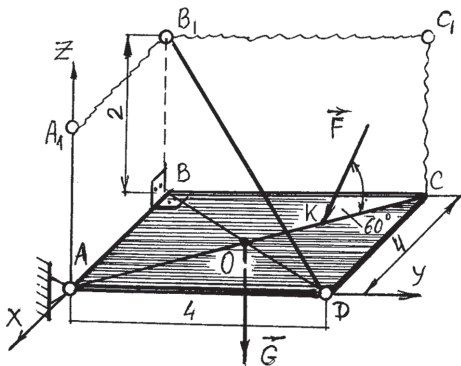
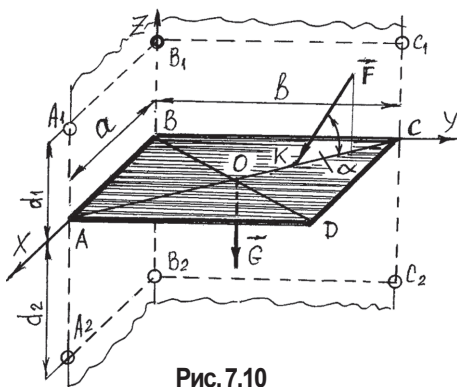
Прямокутна плита $ABCD$ вагою G має дві опори: сферичний шарнір і завісу (підшипник). Плита підтримується в рівновазі в горизонтальному положенні невагомим стержнем, який має на кінцях шарнірні з'єднання. Один кінець стержня може бути в одній із точок A, B, C, D, O плити, а другий – в одній із точок $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ вертикальної стіни. В вертикальній площині на діагоналі AC плити діє зосереджена сила $\vec{F}$, яка складає з діагоналлю кут α (рис. 7.10).

Знайти опорні реакції і зусилля в стержні.

Варіанти розміщення опор, стержня і сили $\vec{F}$ наведені в таблиці 7.3. Початок системи координат знаходиться в сферичному шарнірі.

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = d_1$, $AA_2 = BB_2 = CC_2 = d_2$, $CK = l$.

Конструкція, яка побудована за даними варіанта 61, показана на рисунку 7.11.



Таблиця 7.3

Варіант	Розміри плити		Місцезнаходження опор			Стержень	d ₁	d ₂	Зосереджена сила F			G
	a	b	Сферичний шарнір	Підшипник					F	l	α	
	м	м		точка	точка				Вісь обертання	кН	м	град.
61	4	4	A	B	AB	DB ₁	2	–	4	1,8	60	2
62	3	2	B	C	BC	DB ₁	3	–	5	1	70	4
63	3	3	C	A	AB	DC ₁	4	–	6	2	45	3
64	4	2	A	B	AB	OC ₂	–	3	8	3	30	5
65	4	4	B	A	AB	OB ₂	–	4	6	2	75	4
66	5	2	B	C	BC	DA ₂	–	3	8	3	60	3
67	3	1,5	A	C	BC	DB ₁	4	–	10	2	30	4
68	2,5	2,5	A	B	AB	DC ₁	3	–	12	0,9	75	6
69	5	5	C	B	AB	DB ₂	–	4	14	4	80	10
70	6	1,5	C	B	BC	DC ₂	–	5	10	3	60	8
71	4	3	A	B	BA	CB ₁	2	–	8	1,5	40	12
72	4	4	B	C	CB	AB ₂	–	3	10	2	45	11
73	5	4	B	C	CB	OA ₂	–	2	14	3	65	10
74	4	5	B	C	CB	OC ₂	–	3	16	2,5	30	12
75	3	5	C	A	AB	OB ₂	–	2	18	2	45	14
76	3	4,5	C	A	AB	OB ₁	2	–	20	1,5	50	16
77	3,5	3	C	A	AB	DB ₂	–	1,5	22	1	60	20
78	4	2	B	A	AB	CB ₁	1,5	–	24	1,5	75	22
79	5	3	B	A	AB	OA ₂	–	3	26	2,5	70	18
80	5	2	B	A	AB	OC ₁	2	–	25	2	30	20
81	5	5	A	B	BC	OA ₁	3	–	20	3	35	15
82	4	3,5	A	B	AB	OB ₂	–	2	16	1,5	40	14
83	4	2,5	A	B	AB	CB ₁	1,8	–	12	1,6	70	10
84	3	2,5	B	C	CB	DB ₂	–	1	10	1	85	8
85	2	6	B	C	CB	AB ₁	2	–	28	3	60	20
86	2	5	B	C	CB	AC ₂	–	3	30	2	65	15
87	2	4	C	A	AB	BC ₂	–	1,5	35	1,6	35	20
88	1	2	C	A	AB	BB ₁	1	–	10	0,5	30	5
89	1,5	1,5	A	B	BC	OB ₁	1,5	–	12	1	65	7
90	4	6	B	C	CB	OC ₁	2	–	18	2	60	9

Варіанти 91–120

Елементи конструкції зображені на рис. 7.12, а необхідні для розрахунків дані наведені в таблиці 7.4. Лінійні розміри задані в сантиметрах, а сили – в кілоньютонах. За даними варіанта 91 побудована конструкція (рис. 7.13).

Аналогічно кожний студент за даними свого варіанта будує конструкцію і визначає реакції опор конструкції і одну із невідомих сил (якщо така є). У всіх варіантах вісь обертання вертикальна, а початок системи координат вибирається в точці A .

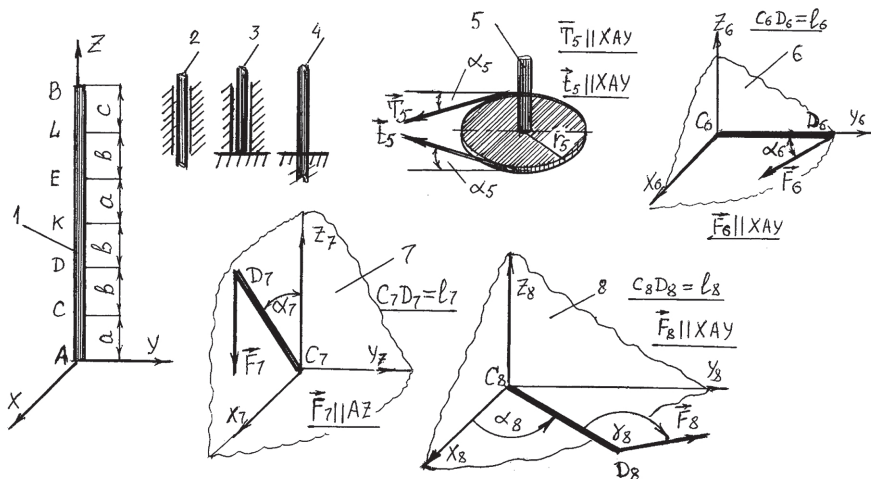


Рис. 7.12

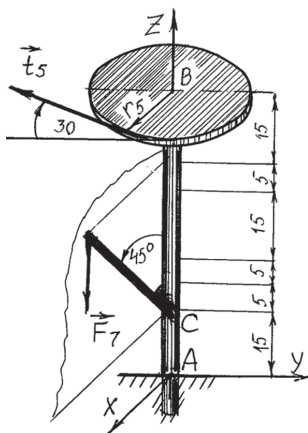


Рис. 7.13

Таблиця 7.4

	Геометричні розміри			Місцезнаходження елементів і дані про них																				
				Елемент			Елемент 5				Елемент 6				Елемент 7				Елемент 8					
																							2	3
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	Точка	Точка	Точка	Точка	<i>r</i> ₅	<i>α</i> ₅	<i>T</i> ₅ / <i>t</i> ₅	<i>t</i> ₅	Точка	<i>α</i> ₆	<i>l</i> ₆	<i>F</i> ₆	Точка	<i>α</i> ₇	<i>l</i> ₇	<i>F</i> ₇	Точка	<i>α</i> ₈	<i>l</i> ₈	<i>γ</i> ₈	<i>F</i> ₈
см	см	см	см					град.	<i>t</i>	Кн	см		см	Кн	град.		см	Кн	град.		см	град.	Кн	
91	15	5	15	—	—	A	B	16	30	0	8	—	—	—	—	C	45	20	10	—	—	—	—	—
92	10	10	10	—	—	A	B	18	35	0	10	—	—	—	—	D	60	25	12	—	—	—	—	—
93	12	10	12	—	—	A	—	—	—	—	—	B	50	22	12	D	70	30	15	—	—	—	—	—
94	8	12	15	—	—	A	—	—	—	—	—	—	—	—	—	L	80	35	16	C	30	20	45	10
95	14	10	10	B	A	—	D	22	40	1.5	12	L	30	28	?	—	—	—	—	—	—	—	—	—
96	16	5	5	B	A	—	C	20	25	0.8	14	—	—	—	—	—	—	—	—	E	20	25	120	?
97	12	12	10	B	A	—	—	—	—	—	—	E	120	30	?	—	—	—	—	D	45	18	150	12
98	11	10	10	B	A	—	K	18	30	1.2	?	L	90	20	35	—	—	—	—	C	45	22	60	16
99	13	8	9	B	A	—	L	20	20	1.4	40	K	135	25	?	—	—	—	—	C	60	25	150	10
100	10	12	15	—	—	A	—	—	—	—	—	B	30	18	10	E	30	20	13	D	30	18	90	11
101	20	10	20	—	—	A	E	30	45	0	20	—	—	—	—	C	45	30	22	C	75	20	35	8
102	25	15	20	—	—	A	D	22	42	0	25	B	115	20	15	K	50	25	20	—	—	—	—	—
103	26	14	20	—	—	A	B	20	38	0	15	—	—	—	—	L	75	20	16	D	70	40	95	16
104	22	18	12	—	—	A	—	—	—	—	—	C	120	25	22	D	10	20	13	B	90	30	100	14
105	23	17	13	E	A	—	B	30	35	0.9	?	—	—	—	—	—	—	—	—	D	20	25	150	12
106	13	17	12	K	A	—	C	18	43	1.2	4	B	150	23	?	—	—	—	—	E	0	16	105	10
107	12	18	10	L	A	—	—	—	—	—	—	B	45	25	28	—	—	—	—	C	85	21	30	?
108	14	16	12	L	A	—	K	16	48	0.6	14	C	40	21	?	—	—	—	—	B	90	12	120	18
109	16	14	11	E	A	—	D	18	36	0.7 5	?	L	130	19	10	—	—	—	—	C	45	16	75	15
110	20	15	12	—	—	A	L	20	45	0	12	K	140	25	14	C	50	22	10	—	—	—	—	—
111	21	16	13	—	—	A	—	—	—	—	—	E	60	22	17	B	60	23	17	—	—	—	—	—
112	22	18	14	—	—	A	—	—	—	—	—	K	160	23	18	B	72	24	19	D	60	17	20	21
113	23	17	14	—	—	A	C	23	35	0	13	—	—	—	—	L	30	25	14	K	90	18	130	16
114	11	18	10	—	—	A	D	14	32	0	10	—	—	—	—	B	90	15	12	E	0	19	120	10
115	12	13	14	K	A	—	B	12	30	1.4	?	E	48	16	11	C	70	16	13	—	—	—	—	—
116	14	15	16	E	A	—	—	—	—	—	—	B	160	18	16	E	40	20	18	D	30	25	70	?
117	16	15	14	L	A	—	B	18	35	0.8	28	—	—	—	—	K	65	30	19	C	20	20	40	?
118	13	12	14	—	—	A	—	—	—	—	—	C	145	20	15	L	35	25	11	D	60	22	115	20
119	30	40	20	B	A	—	—	—	—	—	—	D	120	40	?	L	60	30	18	K	45	30	90	22
120	20	30	15	—	—	A	B	20	30	0.7	?	—	—	—	—	E	45	25	20	D	60	30	120	16

8. Запитання для самоперевірки і до захисту розрахунково-графічної роботи

1. Яким чином аналітично визначається рівнодійна просторової системи збіжних сил?
2. Які аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил?
3. Як напрямлений вектор-момент сили відносно точки в просторі?
4. Як напрямлений і чому дорівнює по модулю вектор-момент пари сил?
5. Які дві пари еквівалентні?
6. Чи можна пару сил переносити в паралельну площину?
7. Якщо дві пари сил діють в різних площинах, то чи можна їх дію замінити однією парою?
8. Сформулюйте умови рівноваги системи пар сил, що діють на тверде тіло.
9. Чи зміниться вектор-момент сили відносно даної точки при перенесенні точки прикладання сили по лінії її дії?
10. Як визначається момент сили відносно осі і як вибирається знак цього моменту?
11. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
12. Яка залежність між вектором-моментом сили відносно даної точки і моментом тієї ж сили відносно осі, що проходить через цю точку?
13. Що називається головним вектором довільної просторової системи сил?
14. Яка різниця між рівнодійною і головним вектором?
15. Що називається головним моментом довільної просторової системи сил?
16. Чи залежить головний вектор довільної просторової системи сил від вибору центра зведення?
17. Чи залежить головний момент довільної просторової системи сил від вибору центра зведення?
18. В яких випадках довільна просторова система сил зводиться до однієї пари?
19. В яких випадках довільна просторова система сил зводиться до рівнодійної?
20. В яких випадках довільна просторова система сил зводиться до динамічного гвинта?
21. Які умови рівноваги довільної просторової системи сил?
22. Які умови рівноваги просторової системи паралельних сил?
23. Що називається центром даної системи паралельних сил?
24. За якою формулою визначається центр паралельних сил?
25. За якими формулами визначається центр тяжіння, центр мас, центр об'єму, центр площі плоскої фігури і центр тяжіння ліній?
26. Які є способи знаходження координат центра тяжіння?

МОДУЛЬ 3. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

1. Основні відомості з кінематики точки

1.1. Предмет кінематики

Кінематикою називається розділ механіки, в якому визначається рух тіл без врахування їх маси і діючих на них сил.

Коли кажуть про рух тіла, то розуміють під цим зміну його положення з бігом часу по відношенню до якого-небудь другого тіла. Це означає, що при вивченні руху тіла ми завжди повинні вказувати, відносно якого другого тіла розглядається цей рух і на цьому другому тілі потрібно вибрати початок відліку (тобто вибрати систему координат). У кінематиці рух вважається заданим, якщо задані як функції часу параметри, які визначають положення тіла по відношенню до вибраної системи відліку.

При вивченні руху завжди встановлюється початок відліку часу $t = t_0 = 0$.

Під проміжком часу Δt (розуміють різницю між значеннями часу в який-небудь момент t_2 і момент t_1 ($\Delta t = t_2 - t_1$)).

Якщо розміри тіла малі по відношенню до тих відстаней, які воно проходить, то це тіло називають точкою. Наприклад, планету Земля можна розглядати як точку, якщо вивчати її рух навколо Сонця. Неперервну криву, яку описує точка при своєму русі, називають *траєкторією* точки. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, то рух точки називають *прямолінійним*, якщо траєкторією є крива лінія, то рух точки називають *криволінійним*.

Основна задача кінематики полягає в тому, щоб, знаючи закон руху даного тіла (точки), визначити всі кінематичні величини (траєкторію, швидкість, прискорення). Для розв'язання цієї задачі необхідно, щоб був заданий закон руху даного тіла (точки). Існує і обернена задача: по відомим швидкостям і прискоренням знайти закон руху точки.

В модулі 3 ми будемо розглядати тільки рух точки.

1.2. Способи визначення руху точки

Щоб описати рух точки, потрібно для кожного моменту часу задати її положення по відношенню до вибраної системи відліку. Для визначення криволінійного руху точки можна використати один із слідуєчих трьох способів:

1) векторний, 2) координатний, 3) натуральний.

1.2.1. Векторний спосіб визначення руху точки

Нехай точка M рухається в просторі по деякій траєкторії. Виберемо в просторі довільну точку O (рис. 1.1). Положення точки M в довільний момент часу можна визначити, якщо задати вектор $\vec{r}$, проведений з точки O в точку M . Вектор $\vec{r}$ називається *радіусом-вектором* точки M , а крива, яку описує кінець вектора називається *годографом радіуса-вектора*.

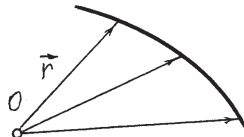


Рис. 1.1

При русі точки M її радіус-вектор неперервно змінюється (в загальному випадку і по модулю і по напрямку), тобто є функцією часу.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) називається векторним рівнянням руху точки.

1.2.2. Координатний спосіб визначення руху точки

а) Декартова система координат

Нехай точка M рухається в просторі по деякій траєкторії. Виберемо в просторі довільну точку O і прийнемо її за початок декартової системи координат $OXYZ$ (рис. 1.2).

Положення точки M по відношенню до даної системи відліку $OXYZ$ можна визначити її декартовими координатами x, y, z . При русі точки M її координати змінюються з бігом часу, тобто є функціями часу t :

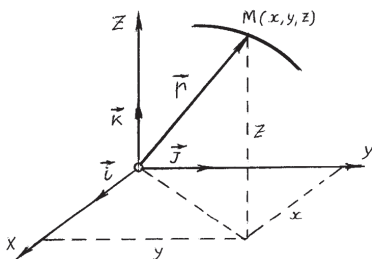


Рис. 1.2

$$\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рівняння (1.2) називаються рівняннями руху точки в декартових координатах.

Якщо під час руху точка M залишається в одній площині, то доцільно систему координат OXY розмістити в цій площині. Тоді плоский рух точки визначається двома рівняннями руху в прямокутних координатах:

$$\begin{aligned}x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Якщо точка M здійснює прямолінійний рух, то зручно прийняти пряму, по якій рухається точка, за одну із координатних осей, наприклад, за вісь x . Положення точки M на цій осі визначається однією координатою $OM = x$:

$$x = f_1(t).\tag{1.4}$$

Між координатним і векторним способами існує зв'язок (див. рис. 1.2):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\tag{1.5}$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки M ; x, y, z – координати точки M ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні орти, тобто вектори, які чисельно дорівнюють одиниці і напрямлені відповідно вздовж осей x, y, z .

Рівняння (1.2), (1.3) одночасно представляють і рівняння траєкторії точки в параметричній формі, де роль параметра відіграє час t . Щоб знайти рівняння траєкторії точки в координатній формі, необхідно з рівнянь руху виключити час t .

Задача 1.1.

Точка M рухається так, що її координати x і y змінюються слідуючим чином

$$x = \frac{1}{2}t; \quad y = \frac{1}{16}t^2 \quad (x, y - \text{в метрах}).$$

Знайти траєкторію точки M в координатній формі та зв'язок між векторним і координатним способами.

З рівнянь руху виключимо час:

$$t = 2x, \quad \text{тоді} \quad y = \frac{1}{4}x^2.$$

Траєкторією руху точки M є парабола (рис. 1.3). Використовуючи дані задачі 1.1. і формулу (1.5), знайдемо зв'язок між радіусом-вектором і координатами точки M (рис. 1.3):

$$\vec{r} = \frac{1}{2}t \cdot \vec{i} + \frac{1}{16}t^2 \cdot \vec{j}.$$

По цьому рівнянню можна для будь-якого моменту часу побудувати вектор $\vec{r}$ і знайти положення точки M .

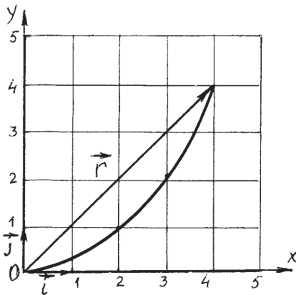


Рис. 1.3

Задача 1.2.

Точка M рухається згідно рівнянням

$$x = 5 \sin \frac{\pi}{2} t; \quad y = 3 \cos \frac{\pi}{2} t \quad (x, y - \text{в метрах}). \text{ Знайти рівняння траєкторії точки.}$$

В цьому випадку виключити час t із рівнянь руху можна слідуєчим чином:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} = \sin \frac{\pi}{2} t; \\ \frac{y}{3} = \cos \frac{\pi}{2} t. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{5^2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} t; \\ \frac{y^2}{3^2} = \cos^2 \frac{\pi}{2} t. \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Траєкторією руху точки M є еліпс, який має півосі 5 м і 3 м (рис. 1.4). Знайдемо положення точки M на траєкторії в початковий момент часу ($t_0 = 0$). Підставимо цей час у рівняння руху точки. Маємо $x_0 = 0$; $y_0 = 3$; $M_0(0; 3)$.

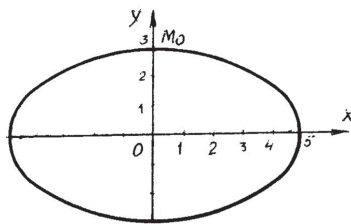


Рис. 1.4

В трьохмірному просторі, крім декартової системи координат, використовуються циліндричні і сферичні координати.

Якщо точка M рухається в одній площині, то, крім декартової системи координат (1.3) можна використати й полярну систему координат.

В цьому посібнику циліндричні й сферичні координати не будуть розглядатись.

б) Полярна система координат (рис. 1.5)

Коли точка M весь час рухається в одній і тій же площині, то її положення можна визначити полярними координатами r і φ , де r — відстань від полюса O до точки M , φ — кут, який утворюється радіусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки M з горизонтальною прямою Ox — віссю полярних координат.

Під час руху точки M полярні координати r і φ будуть змінюватись. Закон руху точки в полярних координатах буде визначатись рівняннями:

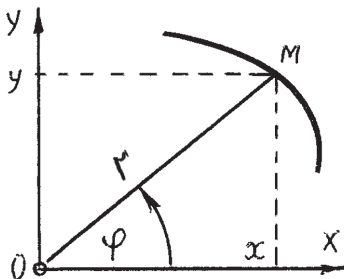


Рис. 1.5

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t). \quad (1.6)$$

Між полярними координатами r і φ та декартовими координатами x і y існує зв'язок:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.7)$$

1.2.3. Натуральна форма рівнянь руху

Цей спосіб можна використовувати тоді, коли наперед відома траєкторія руху точки.

Нехай траєкторія руху точки M відома (це може бути дуга кола, параболи, еліпса та ін.) (рис. 1.6).

Виберемо на цій лінії довільну точку відліку O . Положення точки M на траєкторії будемо визначати дуговою координатою (тобто довжиною дуги OM).

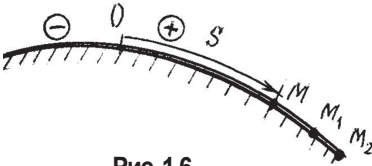


Рис. 1.6

Знак дугової координати визначаємо самостійно. Нехай зліва від точки O дугова координата буде від'ємна, праворуч від точки O – додатня. При русі точки M в положення M_1 , M_2 дугова координата буде змінюватись, тобто буде залежати від часу.

Щоб знайти положення точки M на траєкторії в будь-який момент часу необхідно знати залежність:

$$S = f(t). \quad (1.8)$$

Рівняння (1.8) і виражає закон руху точки M вздовж траєкторії.

Примітка 1. У рівнянні (1.8) величина S визначає положення точки M на дуговій координаті, а не пройдений нею шлях. Наприклад, точка, рухаючись із точки відліку O , попадає в положення M_1 (рис. 1.6), а потім переміщуючись у зворотному напрямі попадає в положення M , то в цей момент її дугова координата $S = OM$, а пройдений шлях буде $OM = 2 M_1 M$, тобто не дорівнює S .

У випадку прямолінійного руху, якщо вісь Ox няпрямити вздовж траєкторії точки, будемо мати $S = x$ і закон прямолінійного руху точки буде:

$$x = f(t). \quad (1.9)$$

Примітка 2. Традиційно прийнято пройдений точкою шлях позначити буквою S . Від цього і ми не будемо відступати. А щоб відрізнити дугову координату точки і шлях, пройдений нею, то зробимо такі позначення: S – дугова координата, s – шлях, пройдений точкою.

Вектором переміщення $\vec{l}$ називають відрізок прямої, який проведений з початкового положення в кінцеве положення переміщуваної точки (рис. 1.7).

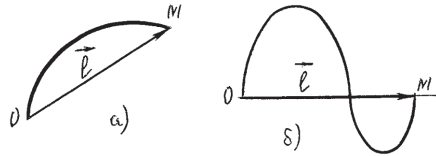


Рис. 1.7

При прямолінійному русі точки вектор переміщення являється відрізком траєкторії, при криволінійному русі – він замикає розглядувану частину траєкторії.

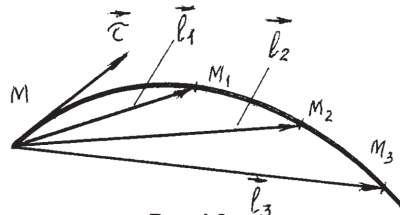


Рис. 1.8

Для різних проміжків часу вектори переміщень $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ мають різну величину і напрям (рис. 1.8). Для нескінченно малого проміжку часу вектор переміщення при криволінійному русі співпадає по напрямку з напрямком дотичної $\vec{\tau}$ до траєкторії руху (мова йде про дотичну до траєкторії), де в даний момент часу знаходиться рухома точка M .

Задача 1.3.

$s_1 = 40 \text{ км}$ $s_2 = 30 \text{ км}$ $s = ? \quad l = ?$	Вертоліт пролетів по прямій 40 км, а потім повернув на кут 90° і пролетів ще 30 км. Знайти шлях і переміщення вертоліта (рис. 1.9).
---	--

Пройдений шлях

$$s = s_1 + s_2 = 40 + 30 = 70 \text{ (км)}$$

Переміщення

$$l = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ (км)}$$

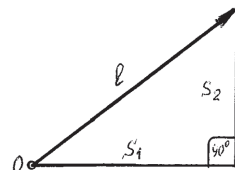


Рис. 1.9

Задача 1.4.

$R = 3 \text{ м}$ $\alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ рад}$ $s = ? \quad l = ?$	Точка M рухається по дузі кола радіусом 3 м із точки A в точку B , описавши при цьому дугу в 120° . Знайти пройдений точкою M шлях s і модуль переміщення l (рис. 1.10).
---	---

Шлях s , пройдений точкою M , є довжиною дуги AB . Відомо, що довжина дуги s зв'язана з центральним

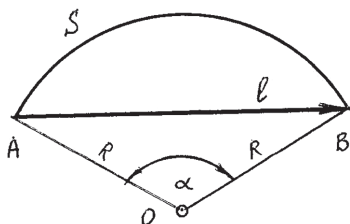


Рис. 1.10

кутом α залежністю $s = \alpha R$, де α – кут дуги, виражений в радіанах.

$$s = \frac{2\pi}{3} \cdot 3 = 2\pi = 6,28 \text{ (м)}.$$

Модуль переміщення l – це довжина хорди AB .

$$l = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5,19 \text{ (м)}.$$

1.3. Знаходження швидкості та прискорення точки при векторному способі визначення її руху

1.3.1. Знаходження швидкості точки

Нехай точка M рухається по деякій траєкторії. Скористаємось векторним способом визначення руху точки M (див. пункт 1.2.1), тобто нам відомо

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

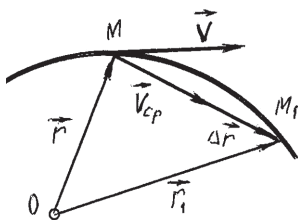


Рис. 1.11

Нехай рухома точка M в момент часу t знаходилась у положенні M , радіус-вектор якої $\vec{r}$, а в момент часу t_1 точка попала в положення M_1 , радіус-вектор якої $\vec{r}_1$ (рис. 1.11).

Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ точка M отримала переміщення $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$. Візьмемо

відношення $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{V}_{cp}$ і назвемо його *середньою швидкістю*. Середня швидкість характеризує зміну вектора переміщення точки за деякий проміжок часу Δt .

Вектор середньої швидкості напрямлений по вектору $\Delta \vec{r}$. При криволінійному русі точки вектор середньої швидкості напрямлений по хорді MM_1 в сторону руху точки, а при прямолінійному русі – вздовж самої траєкторії.

Якщо зменшувати проміжок часу Δt , то точка M_1 буде наближатись до точки M , а хорда MM_1 прямує до положення дотичної в точці M (див. рис. 1.8), а

середня швидкість буде характеризувати швидкість точки в положенні M . Така швидкість називається *миттєвою швидкістю* або швидкістю точки в даний момент часу.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.10)$$

Вектор швидкості точки в даний момент часу дорівнює першій похідній по часу від радіуса-вектора точки.

Вектор швидкості направлений по дотичній до траєкторії руху в сторону руху точки.

Позначення $\dot{\vec{r}}$ говорить про те, що похідна береться тільки по часу t .

1.3.2. Знаходження прискорення точки

Нехай в деякий момент часу t точка знаходиться в положенні M і має швидкість $\vec{V}$, а в момент часу t_1 знаходиться в положенні M_1 і має швидкість $\vec{V}_1$ (рис. 1.12).

Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ сталася зміна швидкості

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}. \quad (a)$$

Візьмемо відношення $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \vec{a}_{cp}$ і назовемо його середнім прискоренням. *Середнє прискорення точки характеризує зміну вектора швидкості точки за деякий проміжок часу.*

Побудуємо вектор $\Delta \vec{V}$. Для цього умовно перенесемо вектор швидкості $\vec{V}_1$ в точку M . Із виразу (a) маємо $\vec{V}_1 = \vec{V} + \Delta \vec{V}$. Вектор $\vec{V}_1$ повинен бути діагональною паралелограма, а вектори $\vec{V}$ і $\Delta \vec{V}$ його сторонами.

Вектор середнього прискорення $\vec{a}_{cp}$ направлений по вектору $\Delta \vec{V}$, а цей вектор завжди направлений в сторону увігнутості кривої лінії.

Вектор прискорення в даний момент часу дорівнює граничному значенню середнього прискорення точки коли проміжок часу Δt наближається до нуля.

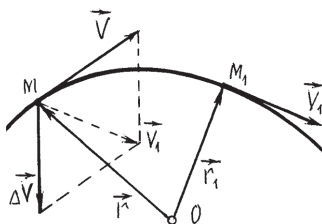


Рис. 1.12

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (1.11)$$

Прискорення руху точки дорівнює першій похідній по часу від вектора швидкості.

Якщо підставити вираз (1.10) в (1.11), то отримаємо ще одну формулу для обчислення прискорення точки:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.12)$$

Прискорення точки дорівнює другій похідній по часу від радіуса-вектора рухомої точки.

1.4. Швидкість та прискорення точки в прямокутній декартовій системі координат

1.4.1. Знаходження швидкості точки

Нехай точка M рухається відносно деякої системи координат $OXYZ$ згідно рівнянь $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ (рис. 1.13).

Приймаючи за початок радіуса-вектора $\vec{r}$ рухомої точки M початок даної декартової системи координат, можна записати, згідно (1.5),

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (a)$$

де одиничні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ постійні як по модулю так і за напрямом.

Використаємо формулу (1.10). Підставимо вираз (a) в (1.10):

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

Враховуючи те, що вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ незмінні, то похідні від них дорівнюють нулю, тому для швидкості $\vec{V}$ отримаємо

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}. \quad (1.13)$$

Оскільки швидкість $\vec{V}$ є вектор, то його можна розкласти на три складові вектори, які паралельні координатним осям:

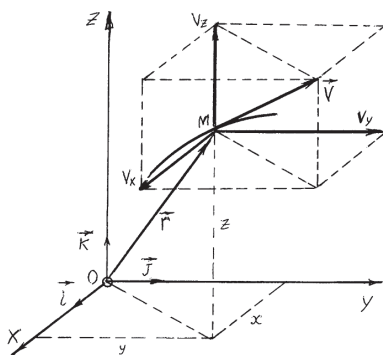


Рис. 1.13

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}. \quad (1.14)$$

Порівняючи (1.13) і (1.14), маємо:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (1.15)$$

Проекція швидкості точки на яку-небудь координатну вісь дорівнює похідній по часу відповідної координати точки.

Маючи проекцію швидкості точки на осі координат, можна знайти модуль і напрям вектора швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (1.16)$$

$$\cos(\hat{\vec{V}}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(\hat{\vec{V}}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}; \quad \cos(\hat{\vec{V}}, \vec{k}) = \frac{V_z}{V}. \quad (1.17)$$

1.4.2. Знаходження прискорення точки

Підставимо вираз (а) для радіуса-вектора $\vec{r}$ в (1.12). Маємо

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \quad (1.18)$$

З другого боку вектор прискорення $\vec{a}$ можна розкласти на три складові

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1.19)$$

де a_x , a_y , a_z – проекції прискорення $\vec{a}$ на координатні осі.

Порівнюючи вирази (1.18) і (1.19), маємо

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (1.20)$$

Маючи проекції прискорення точки на координатні осі, можна знайти модуль і напрям вектора прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.21)$$

$$\cos(\hat{\vec{a}}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\hat{\vec{a}}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\hat{\vec{a}}, \vec{k}) = \frac{a_z}{a}. \quad (1.22)$$

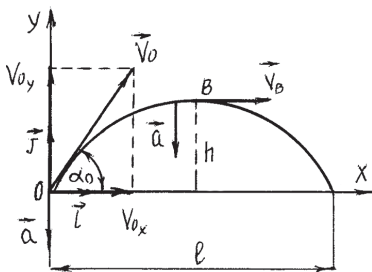


Рис. 1.14

Задача 1.5.

Снаряд рухається в вертикальній площині згідно рівнянням

$$x = 300t, \quad y = 400t - 5t^2 \quad (x, y - \text{в метрах, } t - \text{в секундах}).$$

Знайти: 1) траєкторію руху; 2) швидкість і прискорення снаряда в початковий момент часу ($t = 0$); 3) висоту і дальність обстрілу.

Щоб знайти траєкторію руху снаряда, потрібно з рівнянь руху виключити час t .

$$t = \frac{x}{300}; \quad y = \frac{4}{3} \cdot x - \frac{x^2}{1800}.$$

Це рівняння параболи (рис. 1.14).

Для знаходження швидкості снаряда використаємо формули (1.15) – (1.17):

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 300 \text{ (м/с)}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = 400 - 10t \text{ (м/с)}.$$

В початковий момент часу ($t = 0$) початкова швидкість буде:

$$V_{0x} = 300 \text{ (м/с)}, \quad V_{0y} = 400 \text{ (м/с)}, \quad V_0 = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2} = 500 \text{ (м/с)}.$$

Знайдемо напрям початкової швидкості:

$$\cos(\vec{V}_0, \vec{i}) = \frac{V_{0x}}{V_0} = \frac{300}{500} = 0,6; \quad \alpha_0 = 53^\circ.$$

Для знаходження прискорення точки використаємо формули (1.20) – (1.22):

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt} = 0, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt} = -10,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Прискорення снаряда не залежить від часу і напрямлене вертикально вниз. Знайдемо висоту h і дальність l обстрілу. Для цього необхідно знати час польоту. Звернемо увагу на те, що в точці B , в найвищій точці траєкторії швидкість напрямлена горизонтально, тобто на вісь OY вона проектується в точку. Тоді з виразу (а)

$$Vy = 400 - 10t_1 = 0; \quad t_1 = \frac{400}{10} = 40 \text{ (с)}.$$

Час польоту снаряда $t_2 = 2t_1 = 80 \text{ (с)}$.

Підставимо час t_1 і t_2 в рівняння руху і отримаємо значення максимальної висоти і дальності польоту снаряда:

$$l = 300 \cdot 80 = 24000 \text{ (м)}, \quad h = 400 \cdot 40 - 5 \cdot 40^2 = 8000 \text{ (м)}.$$

Примітка: Час польоту можна знайти й іншим способом. В рівнянні руху $y = 400t - 5t^2$ значення $y = 0$ можливе тільки у двох випадках:

1) на початку руху і 2) в кінці руху, коли снаряд впаде на землю.

$$400t - 5t^2 = 0, \quad t(400 - 5t) = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_2 = 80 \text{ с}.$$

1.5. Швидкість і прискорення точки при натуральному способі визначення її руху

1.5.1. Знаходження швидкості точки

При натуральному способі визначення руху точки нам відома траєкторія руху і рівняння руху цієї точки на траєкторії (див. пункт 1.2.3).

$$S = S(t)$$

Крім натурального способу введемо і векторний спосіб визначення руху точки (рис. 1.15). При русі точки дугова координата S змінюється, змінюється і радіус-вектор $\vec{r}$.

Можна сказати, що радіус-вектор $\vec{r}$ є функцією дугової координати S , яка в свою чергу є функцією часу t .

$$\vec{r} = \vec{r}(S(t)). \quad (1.23)$$

Для знаходження швидкості точки використаємо формули (1.10) і (1.23):

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}. \quad (a)$$

Розглянемо чому дорівнює відношення $\frac{d\vec{r}}{dS}$. Нехай в момент часу t точка була в положенні M , радіус-вектор якої $\vec{r}$, а за час $t + \Delta t$ точка попала в положення M_1 , радіус-вектор якої $(\vec{r} + \Delta\vec{r})$.

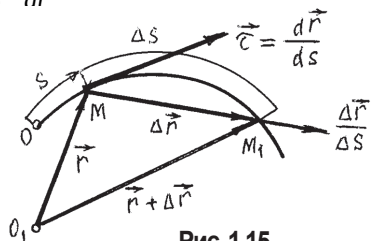


Рис. 1.15

$\Delta \vec{r}$ – переміщення точки за час Δt , ΔS – довжина дуги MM_1 .

$$\text{Тоді} \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \right| = 1$$

як границя відношення нескінченно малої дуги до хорди, що її стягує. Вектор $\frac{d\vec{r}}{dS}$

як границя $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S}$ напрямлений по дотичній до траєкторії точки в сторону збільшення дугової координати S .

Одиничний орт $\frac{d\vec{r}}{dS}$ позначимо через $\vec{\tau}$.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS}. \quad (6)$$

Підкреслимо, що одиничний орт $\vec{\tau}$ напрямлений по дотичній до траєкторії руху точки в додатньому напрямку відліку S .

Підставимо вираз (6) у вираз (а):

$$\vec{V} = \frac{dS}{dt} \vec{\tau}. \quad (1.24)$$

$$\text{Введемо позначення} \quad V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \quad (1.25)$$

$$\text{Тоді} \quad \vec{V} = V \vec{\tau}, \quad (1.26)$$

де V – алгебраїчне значення швидкості, а вектор $\vec{\tau}$ показує напрям вектора швидкості.

1.5.2. *Натуральні осі та натуральний тригранник*

Нехай точка M рухається по відомій траєкторії. Введемо систему координат з початком в точці M . Точка M рухається і разом з нею рухається система координат. Осями координат являються одиничні орти $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{e}$ (рис. 1.16).

За одиничний орт $\vec{\tau}$ ми мову вели в пункті 1.5.1. Одиничний орт $\vec{\tau}$ напрямлений по дотичній до траєкторії руху в сторону збільшення дугової координати.

Одиничний орт $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ і напрямлений до центра кривини лінії (траєкторії). Орт $\vec{n}$ називається *головною нормаллю*. Одиничний орт $\vec{e}$ одночасно перпенди-

кулярний векторам $\vec{n}$ і $\vec{\tau}$ і називається *бінормаллю*.

$$\vec{b} \perp \vec{\tau} \perp \vec{n}.$$

Напрямок вектора $\vec{b}$ можна визначити із векторного добутку $\uparrow \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

Осі (дотична, головна нормаль і бінормаль) називаються *натуральними*. Ці осі утворюють натуральний тригранник. Площина 1, яка утворена головною нормаллю $\vec{n}$ і бінормаллю $\vec{b}$, називається *нормальною*. Координатна

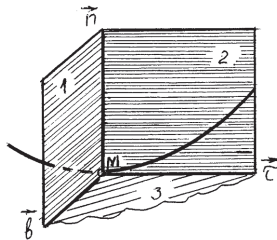


Рис. 1.16

площина 2, яка проходить через дотичну $\vec{\tau}$ і головну нормаль $\vec{n}$, називається *стичною*, а площина 3, яка проходить через дотичну і бінормаль $\vec{b}$, називається *спрямною*.

Якщо траєкторією руху точки є плоска крива, то вона повністю лежить в стичній площині.

1.5.3. Кривина лінії

Одним із критеріїв лінії (траєкторії) є її кривина. Візьмемо на траєкторії точки M і M_1 . В точці M траєкторії одиничний вектор дотичної $\vec{\tau}$, а в точці M_1 – $\vec{\tau}_1$ (рис. 1.17).

Умовно перенесемо вектор $\vec{\tau}_1$ в точку M . Кут $\Delta\varphi$ між одиничними ортами $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$ двох сусідніх точок M і M_1 називається кутом суміжності. Позначимо довжину дуги MM_1 через Δs .

Візьмемо відношення $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$. Це відношення називається середньою кривиною лінії на ділянці MM_1

$$K_{\text{сеп}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Візьмемо границю цього відношення

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = K.$$

$$K = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (1.27)$$

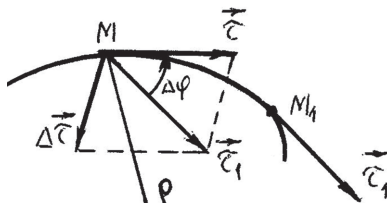


Рис. 1.17

K – кривина лінії в даній точці M . Кривина лінії міняється від точки до точки.

Величина $\bar{\rho}$, яка обернена кривині, називається *радіусом кривини* траєкторії в даній точці M .

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{dS}{d\varphi}. \quad (1.28)$$

Точка C називається центром кривини траєкторії: $MC = \rho$. $MC \perp \vec{\tau}$, тобто відрізок MC лежить на головній нормалі.

Для прямолінійної траєкторії $\Delta\varphi = 0$, тому її кривина $K = 0$, а радіус кривини дорівнює нескінченності:

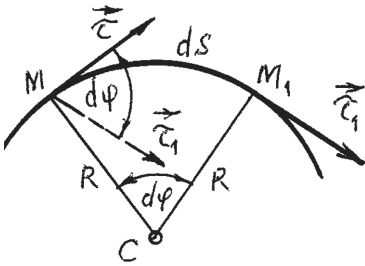


Рис. 1.18

$$\rho = \frac{1}{K} = \infty. \quad (1.29)$$

Нехай траєкторією є дуга кола радіусом R (рис. 1.18). Із рисунка 1.18 видно, що $dS = R d\varphi$. Підставимо цей вираз в (1.27):

$$K = \frac{d\varphi}{R d\varphi} = \frac{1}{R}; \quad K = \frac{1}{R}. \quad (1.29, a)$$

Кривина кола є величина, яка обернена радіусу R і постійна для всіх точок кола.

1.5.4. Знаходження прискорення точки. Дотичне і нормальне прискорення

Для знаходження прискорення точки при натуральному способі визначення її руху використаємо формули (1.11) і (1.26). Підкреслимо, що при русі точки M міняється з часом модуль швидкості $\vec{V}$ і її напрям, а напрям швидкості характеризується одиничним ортом $\vec{\tau}$, т. б. $\vec{\tau}$ є функцією часу $\vec{\tau} = \vec{\tau}(t)$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V \cdot \vec{\tau}) = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} + V \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.30)$$

З виразу (1.30) видно, що повне прискорення $\vec{a}$ розкладається на два прискорення. Одне з них (перше) напрямлене по вектору $\vec{\tau}$, тобто по дотичній до траєкторії руху і називається *дотичним прискоренням*

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau}. \quad (1.31)$$

Модуль дотичного прискорення

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} = \ddot{S}. \quad (1.32)$$

Модуль дотичного прискорення дорівнює похідній по часу від модуля швидкості.

Напрямок другого прискорення поки невідомий, бо невідома суть виразу $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Позначимо це прискорення через

$$\vec{a}_n = V \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.33)$$

Вияснимо, що означає $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. По-перше, це похідна від одиничного орту по часу, тобто це похідна від вектора постійного модуля по скалярному аргументу, по-друге, цей вектор є функцією часу, тому що він міняє свій напрям.

Розглянемо очевидний скалярний добуток $(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 1$.

Візьмемо похідну як від добутку векторів:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0; \quad 2 \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau} = 0.$$

Звідси можна зробити висновок, що вектор $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ перпендикулярний вектору

$\vec{\tau}$. Крім цього, як видно з рис. 1.17, вектор $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ лежить в стичній – площині, а це означає, що напрям цього вектора співпадає з напрямом $\vec{n}$ головної нормалі траєкторії. Тому вектор $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ можна записати в такому вигляді

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| \cdot \vec{n}. \quad (1.34)$$

З рис. 1.17 видно, що $|\Delta \vec{\tau}| = |\vec{\tau}| \cdot \Delta \varphi$, де враховано, що при малих кутах $\sin \Delta \varphi = \Delta \varphi$. Тоді $|\Delta \vec{\tau}| = \Delta \varphi$, тому що $|\vec{\tau}| = 1$.

Розділимо на Δt

$$\left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$

Останній вираз домножимо і розділимо на ΔS :

$$\left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \text{де } \Delta S = MM_1.$$

Знайдемо границю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| = \frac{d\varphi}{dS} \cdot V. \quad (1.35)$$

Підставимо вираз (1.35) у вираз (1.34):

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dS} V \cdot \vec{n}. \quad (1.36)$$

Використовуючи формули (1.27) і (1.28), маємо

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = KV\vec{n} = \frac{V}{\rho} \cdot \vec{n}. \quad (1.37)$$

Висновок: *Похідна по часу від одиничного вектора є вектор, напрямлений перпендикулярно даному вектору, модуль якого знаходиться за формулою (1.37).*

Підставимо вираз (1.37) у вираз (1.33). Маємо

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho} \cdot \vec{n}. \quad (1.38)$$

Прискорення $\vec{a}_n$ називається *нормальним прискоренням*. Воно напрямлене по *головній нормалі до центра кривини траєкторії*. Модуль нормального прискорення

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (1.39)$$

Повне прискорення (рис. 1.19)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.40)$$

Модуль повного прискорення знаходиться за формулою:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.41)$$

Відхилення вектора повного прискорення $\vec{a}$ від головної нормалі $\vec{n}$ характеризується кутом α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{\tau}}{a_n}. \quad (1.42)$$

Дотичне прискорення a_{τ} характеризує зміну швидкості точки по величині, а нормальне прискорення a_n – по напрямку.

Таким чином, якщо рух точки заданий натуральним способом, то, знаючи траєкторію (а це означає, що і радіус кривини ρ в довільній точці) і закон руху (1.8) точки вздовж цієї траєкторії, ми за формулами (1.24), (1.31), (1.32), (1.38) – (1.42) можемо визначити модуль і напрям векторів швидкості та прискорення точки в будь-який момент часу.

Якщо рух точки заданий в декартовій системі координат, то і при цьому способі можна визначити дотичне прискорення, використовуючи формули (1.16) і (1.32):

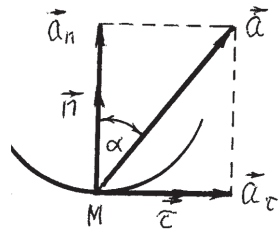


Рис. 1.19

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \right) = \frac{2 \left(V_x \frac{dV_x}{dt} + V_y \frac{dV_y}{dt} + V_z \frac{dV_z}{dt} \right)}{2 \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}},$$

$$a_{\tau} = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V}. \quad (1.43)$$

Задача 1.6.

$$R = 2 \text{ м}$$

$$S = 2\pi^2 (\text{м})$$

$$t_1 = \frac{1}{2} c$$

$$\alpha = ? \quad V_1 = ?$$

$$\alpha_{\tau} = ? \quad \alpha_n = ?$$

$$\alpha_1 = ?$$

Точка рухається по колу радіусом 2 м згідно рівняння $S = 2\pi t^2 (\text{м})$. Знайти положення точки на колі, величину і напрям швидкості та прискорення точки в момент часу $t_1 = \frac{1}{2} c$ (рис. 1.20).

В момент часу $t_1 = \frac{1}{2} c$ дугова координата

$$S = 2\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} (\text{м}). \text{ Кут } \alpha, \text{ що відповідає цій дузі, буде } \alpha = \frac{S}{R} = \frac{\pi}{4} (\text{рад}); \alpha = 45^\circ.$$

$$\text{Швидкість, згідно формули (1.25), буде } V = \frac{dS}{dt} = 4\pi t (\text{м/с}).$$

$$\text{При } t_1 = \frac{1}{2} \text{ с, } \quad V_1 = 2\pi = 6,28 (\text{м/с}).$$

Швидкість напрямлена по дотичній до кола, тобто перпендикулярна радіусу в точці M_1 .

Числове значення дотичного прискорення, згідно формули (1.32), буде

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(4\pi t) = 4\pi = 12,56 (\text{м/с}^2) \text{ і по}$$

напрямку співпадає з вектором швидкості. В даному випадку дотичне прискорення від часу не залежить, т. б. точка рухається по колу з постійним дотичним прискоренням.

Нормальне прискорення, згідно (1.39),

$$a_n = \frac{V^2}{R} \text{ і при } t_1 = \frac{1}{2} \text{ с}$$

$$a_n = \frac{6,28^2}{2} = 19,74 (\text{м/с}^2).$$

Нормальне прискорення визначається

за формулою і напрямлене до центра кола. Повне прискорення визначається за формулою (1.41):

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{12,56^2 + 19,74^2} = 23,40 (\text{м/с}^2).$$

Задача 1.7.

$$S = \frac{1}{2} t^3 (\text{м})$$

$$t_1 = 2 \text{ с}$$

$$S_1 = ? \quad V_1 = ?$$

$$a_1 = ?$$

Точка рухається по відрізку прямої за законом $S = \frac{1}{2} t^3 (\text{м})$. Знайти положення точки, величину швидкості і повного прискорення через 2 с після початку її руху (рис. 1.21).

$$\text{При } t_1 = 2 \text{ с, } S_1 = 4 \text{ м.}$$

$$\text{Швидкість } V = \frac{dS}{dt} = 1,5t^2. \text{ При } t_1 = 2 \text{ с, } V_1 = 6 \text{ м/с.}$$

Дотичне прискорення $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 3t$.

На відміну від попередньої задачі, в даному випадку дотичне прискорення не постійне, а збільшується з часом.

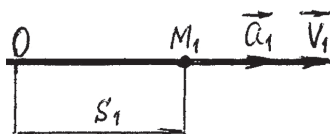


Рис. 1.21

При $t_1 = 2c$ $a_\tau = 6$ (м/с²).

Нормальне прискорення $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, де ρ – радіус кривини прямої лінії. Пряму лінію можна вважати окремим випадком кривої лінії з нескінченно великим радіусом $\rho = \infty$. Тоді

$$a_n = \frac{V^2}{\infty} = 0.$$

Таким чином, повне прискорення точки буде дорівнювати дотичному прискоренню: $a_l = a_\tau$.

1.6. Закон рівномірного і рівноприскореного (рівносповільненого) руху точки по траєкторії

1.6.1. Закон рівномірного руху точки по траєкторії

Рівномірним рухом називається такий рух, при якому точка за довільні рівні проміжки часу проходить рівні відстані. При цьому русі модуль швидкості точки є величиною постійною. $V = const$.

Скористаємось формулою (1.25): $V = \frac{dS}{dt} = const$.

Звідси $dS = Vdt$. Проінтегрувавши це рівняння, маємо:

$$S = Vt. \quad (1.44)$$

Вираз (1.44) характеризує закон *рівномірного руху точки* по траєкторії, незалежно від того, рухається ця точка по прямій лінії (рис. 1.22,а), чи по кривій (рис. 1.22,б).

Графік швидкості рівномірного руху точки показаний на рис. 1.23, а закон рівномірного руху – на рис. 1.24.

Слід зауважити, що площа, яка утворена на графіку в координатах V, t (рис. 1.23), дорівнює Vt , тобто співпадає з формулою (1.44).

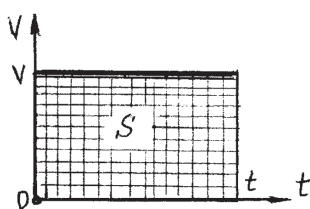


Рис. 1.23

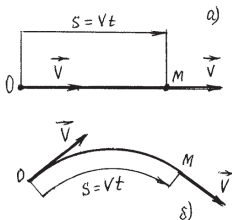


Рис. 1.22

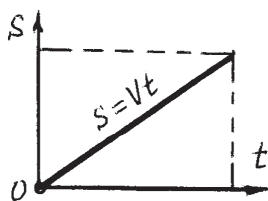


Рис. 1.24

1.6.2. Закон рівноприскореного (рівносповільненого) руху точки по траєкторії

Рівноприскореним (рівносповільненим) рухом точки називається такий її рух, при якому за рівні проміжки часу алгебраїчне значення швидкості точки змінюється на одну й ту ж величину, тобто дотичне прискорення $a_\tau = \text{const}$.

Скористаємось формулою (1.32): $a_\tau = \frac{dV}{dt}$. Звідси $dV = a_\tau dt$.

Інтегруємо це рівняння: $\int dV = \int a_\tau dt$; $V = a_\tau t + C_1$,

де C_1 – постійна інтегрування. Постійна C знаходиться в механіці із початкових умов. Нехай в початковий момент часу $t = 0$ швидкість дорівнює початковій швидкості V_0 :

$$V = V_0.$$

Підставимо початкові умови в рівняння для швидкості:

$V_0 = 0 + C_1$. Звідси $C_1 = V_0$. Тому остаточно маємо

$$V = V_0 + a_\tau t. \quad (1.45)$$

Формула (1.45) справедлива як для криволінійного руху точки, так і для прямолінійного. При прямолінійному русі точки дотичне прискорення a_τ дорівнює повному прискоренню a , тому що нормальне прискорення $a_n = 0$. (див. задачу 1.7). Тому при вивченні прямолінійного руху замість прискорення a_τ можна писати повне прискорення a .

В формулу (1.45) підставимо вираз (1.25):

$$\frac{dS}{dt} = V_0 + a_\tau t. \text{ Тоді } dS = V_0 dt + a_\tau t dt.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int dS = \int V_0 dt + \int a_\tau t dt. \text{ Маємо: } S = V_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2} + C_2.$$

Постійну інтегрування C_2 знайдемо із початкових умов: $t = 0$, $S = 0$.

Тоді $0 = 0 + 0 + C_2$. Маємо $C_2 = 0$.

Остаточно

$$S = V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (1.46)$$

Вираз (1.46) є законом рівнозмінного руху точки по траєкторії. У випадку, коли точка рухається по прямій лінії, то замість дотичного прискорення a_τ можна писати повне прискорення a .

На рис. 1.25 показаний графік швидкості, а на рис. 1.26 – закон рівноприскореного руху.

Знайдемо площу заштрихованої фігури на рис. 1.25.

$$S = V_0 t + \frac{1}{2}(V - V_0)t = V_0 t + \frac{1}{2} \frac{(V - V_0)}{t} t^2.$$

$$S = V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

де $\frac{(V - V_0)}{t} = a_\tau$ – є прискорення точки (див. формулу 1.45).

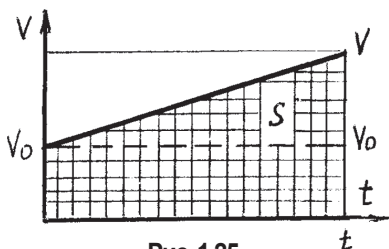


Рис. 1.25

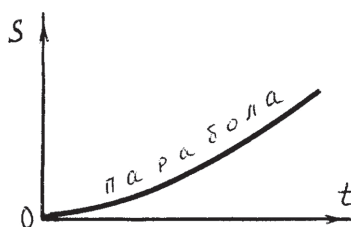


Рис. 1.26

Як бачимо, значення площі співпадає з виразом (1.46).

Якщо дотичне прискорення $a_\tau > 0$, то рух точки прискорений, якщо $a_\tau < 0$, то рух сповільнений.

При розв'язуванні задач кінематики часто зручно користуватись слідуючою формулою:

$$V^2 = V_0^2 + 2a_\tau S. \quad (1.47)$$

Читачу надаємо можливість самим вивести цю залежність, використовуючи формули (1.45) і (1.46).

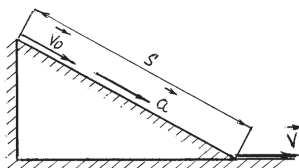


Рис. 1.27

Задача 1.8.

$$\begin{aligned} S &= 100 \text{ м} \\ V_0 &= 10 \text{ (м/с)} \\ a &= 0,5 \text{ м/с}^2 \\ V &=? \\ t &=? \end{aligned}$$

Лижник спускається з гори довжиною 100 м. Скільки часу займе спуск, якщо прискорення $0,5 \text{ м/с}^2$, а початкова швидкість 10 м/с ? Яка швидкість в кінці спуску? (рис. 1.27).

Рух лижника рівноприскорений: $V^2 = V_0^2 + 2aS$.

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2aS}. \quad V = 10\sqrt{2} = 14,15 \text{ м/с}.$$

Знайдемо час лижника:

$$V = V_0 + at; \quad t = \frac{V - V_0}{a}; \quad t = 8,3 \text{ с}.$$

Задача 1.9.

Які з приведених рівнянь описують рівномірний рух, рівнозмінний рух?
1) $V = 4 - 2t \text{ (м/с)}$; 2) $S = 8 + 3t \text{ (м)}$; 3) $S = 14t^2 \text{ (м)}$.

Рівномірний рух тоді, коли швидкість $V = \text{const}$, рівнозмінний – коли дотичне прискорення $a_\tau = \text{const}$.

У виразі (1) швидкість залежить від часу. Це означає, що рівняння (1) не описує рівномірний рух. Використаємо формулу (1.32): $a_\tau = \frac{dV}{dt} = -2 \text{ (м/с}^2\text{)}$. В даному випадку дотичне прискорення не залежить від часу, а це означає, що рівняння (1) описує рівносповільнений рух.

Розглянемо рівняння (2). Використаємо формулу (1.25): $V = \frac{dS}{dt} = 3 \text{ (м/с)}$. Швидкість $V = \text{const}$. Рівняння (2) описує рівномірний рух.

Розглянемо рівняння (3). Знайдемо швидкість $V = \frac{dS}{dt} = 28t$. Видно, що швидкість не постійна, залежить від часу. Знайдемо прискорення $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 28 \text{ (м/с}^2\text{)}$. Прискорення $a_\tau = \text{const}$. Рівняння (3) характеризує рівноприскорений рух.

Задача 1.10.

Знаючи рівняння швидкості рухомої точки $V = 6 + 3t$ (м/с), знайти закон (рівняння) її руху.

$$\text{Відомо, що } V = \frac{dS}{dt} \text{ (див. 1.25), тоді } \frac{dS}{dt} = 6 + 3t, \quad dS = 6dt + 3tdt.$$

$$\text{Проінтегруємо: } \int dS = \int 6dt + 3 \int tdt. \quad S = 6t + \frac{3t^2}{2} + C_1.$$

C_1 знайдемо із початкових умов: $t = 0, S = 0$. Тоді $0 = 0 + 0 + C_1, C_1 = 0$.

$$\text{Остаточно} \quad S = 6t + 1,5t^2.$$

1.7. Знаходження швидкості та прискорення точки при полярному способі визначення її руху

1.7.1. Знаходження швидкості точки

В полярній системі координат відомі полярні координати r і φ (див. пункт 1.2.2,б).

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t).$$

Введемо радіус-вектор $\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0$, де $\vec{r}_0$ – одиничний орт, а $r = OM$ (рис. 1.28). При русі точки M одиничний орт $\vec{r}_0$ міняє свій напрям, т.б. є функцією часу. Для знаходження швидкості використаємо формулу (1.10).

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \vec{r}_0) = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{r}_0 + r \frac{d\vec{r}_0}{dt}. \quad (a)$$

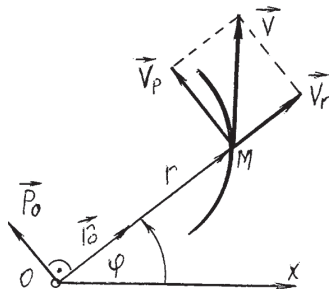


Рис. 1.28

Чому дорівнює $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$? Звернемось до ормули (1.36), в якій $\vec{r}$ також одиничний орт.

$$\text{Тоді} \quad \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\varphi}{dS} \cdot V \vec{P}_0 = \frac{d\varphi}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \cdot \vec{P}_0 = \frac{d\varphi}{dt} \vec{P}_0.$$

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{P}_0, \quad (1.48)$$

де $\vec{P}_0$ – одиничний орт, який перпендикулярний орту $\vec{r}_0$:

$$\vec{P}_0 \perp \vec{r}_0. \quad (1.49)$$

Підставимо (1.48) в (а)

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{r}_0 + r \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{P}_0. \quad (1.50)$$

Із формули (1.50) видно, що швидкість точки розкладається на дві взаємно перпендикулярні складові $\vec{V}_r$ і $\vec{V}_p$

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_p. \quad (1.51)$$

$$\text{де} \quad \vec{V}_r = \frac{dr}{dt} \vec{r}_0, \quad \vec{V}_p = r \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{P}_0. \quad (1.52)$$

$\vec{V}_r$ – називається *радіальною швидкістю*. Вона характеризує зміну радіуса-вектора $\vec{r}$ по модулю. $\vec{V}_p$ – називається *поперечною швидкістю* (або трансверсальною). Вона характеризує зміну швидкості по напрямку.

$$\text{Модуль швидкості} \quad V = \sqrt{V_r^2 + V_p^2}. \quad (1.53)$$

Напрямок швидкості знайдемо по формулам:

$$\cos(\vec{V}, \vec{r}_0) = \frac{V_r}{V}; \quad \cos(\vec{V}, \vec{P}_0) = \frac{V_p}{V}. \quad (1.54)$$

1.7.2. Знаходження прискорення точки

Використаємо формули (1.11), (1.50) і (1.48)

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \cdot \vec{r}_0 + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{P}_0 + \\ &+ r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{P}_0 + r \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\vec{P}_0}{dt} = \ddot{r}\vec{r}_0 + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{P}_0 + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{P}_0 + \\ &+ r\ddot{\varphi}\vec{P}_0 - r\dot{\varphi}^2\vec{r}_0. \end{aligned}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{P}_0.$$

або
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p, \quad (1.55)$$

де
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}. \quad (1.56)$$

$$\vec{a}_p = (2\dot{r}\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi})\vec{P}_0. \quad (1.57)$$

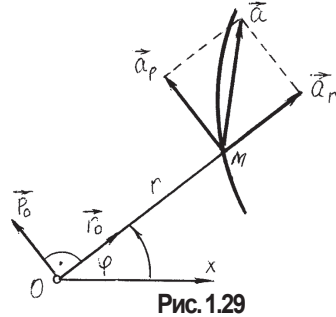
Прискорення $\vec{a}_r$, називається *радіальним прискоренням*, а $\vec{a}_p$ – *трансверсальним* (рис. 1.29).

Прискорення $\vec{a}_r \perp \vec{a}_p$, тому модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2}. \quad (1.58)$$

Напрямок повного прискорення знаходиться за формулами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{r}_0) = \frac{a_r}{a}; \quad \cos(\vec{a}, \vec{P}_0) = \frac{a_p}{a}. \quad (1.59)$$



Задача 1.11.

Рух точки в полярних координатах задано рівняннями

$r = 4 \cos 2t$, $\varphi = 2t$, де r – в метрах, а φ – в радіанах.

Знайти рівняння траєкторії, швидкість і прискорення точки для моменту

часу $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{8} c$.

Траєкторію руху знайдемо, якщо з рівнянь руху виключимо параметр часу t .

Маємо $r = 4 \cos \varphi$.

Траєкторією руху є коло радіуса 2 м з центром C на полярній осі, причому це коло проходить через полюс O (рис. 1.30).

Знайдемо положення точки M на траєкторії в момент часу $t_0 = 0$ і $t_1 = \frac{\pi}{8} c$

При $t_0 = 0$, $r = 4$ м, $\varphi = 0$. Точка M_0 .

При $t_1 = \frac{\pi}{8} c$, $r = 2\sqrt{2}$ м, $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Точка M_1 .

По формулам (1.52) – (1.54) знайдемо величину і напрям швидкості точки M .

$$V_r = \frac{dr}{dt} = -8 \sin 2t, \quad V_p = r \frac{d\varphi}{dt} = 8 \cos 2t.$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_p^2} = 8(\text{м/с})$$

З останнього виразу видно, що модуль швидкості точки M не залежить від часу, тобто точка M рухається по колу рівномірно ($V = \text{const}$).

Відомо, що швидкість точки напрямлена по дотичній до траєкторії руху, т. б. вектор швидкості в точці M_0 перпендикулярний радіусу CM_0 , а в точці M_1 перпендикулярний CM_1 . Перевіримо це за допомогою напрямних косинусів (див. 1.54).

$$\text{При } t=0 \quad \cos(\vec{V}, \vec{r}_0) = \frac{V_r}{V} = 0; \quad \cos(\vec{V}, \vec{p}_0) = \frac{V_p}{V} = 1,$$

тобто швидкість $\vec{V}_0 \perp \vec{r}_0$ і напрямлена вертикально вгору.

$$\text{При } t_1 = \frac{\pi}{8} \text{ с} \quad V_r = -4\sqrt{2}, \quad V_p = 4\sqrt{2},$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{r}_0) = \frac{V_r}{V} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\vec{V}, \vec{p}_0) = \frac{V_p}{V} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Знайдемо прискорення точки M за допомогою формул (1.56) – (1.59)

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -16 \cos 2t - 16 \cos 2t = -32 \cos 2t.$$

$$a_p = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -32 \sin 2t.$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2} = 32 (\text{м/с}^2).$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{r}_0) = \frac{a_r}{a}; \quad \cos(\vec{a}, \vec{p}_0) = \frac{a_p}{a}.$$

$$\text{При } t_0 = 0, \quad a_r = -32, \quad a_p = 0,$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{r}_0) = -1; \quad \cos(\vec{a}, \vec{p}_0) = 0.$$

$$\text{При } t_1 = \frac{\pi}{8} \text{ с}, \quad a_r = -16\sqrt{2}, \quad a_p = -16\sqrt{2},$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{r}_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(\vec{a}, \vec{p}_0) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

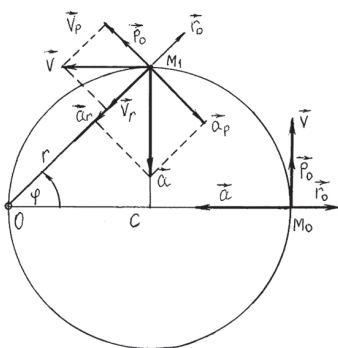


Рис. 1.30

Вектори швидкості і прискорення показані на рис. 1.30. Треба зазначити, що вектор прискорення напрямлений по радіусу до центра кола. Це визвано тим, що точка рухається з постійною швидкістю і дотичне прискорення дорівнює нулю.

2. Збірник задач з кінематики та методика їх розв'язування

2.1. Прямолінійний рух точки.

Задача 2.1.

$V_0 = 1 \text{ м/с}$
 $V_2 = 7 \text{ м/с}$
 $S_1 = \frac{1}{2} S_2$

Тіло, рухаючись з початковою швидкістю 1 м/с , пройшовши деяку відстань, набуло швидкості 7 м/с . Яка була швидкість тіла на половині цієї відстані? (рис. 2.1).

На ділянці AC:

$$V_1^2 - V_0^2 = 2aS_1. \quad (\text{а})$$

На ділянці AB:

$$V_2^2 - V_0^2 = 2aS_2. \quad (\text{б})$$

Розділимо почленно вирази (а) і (б)

$$\frac{V_1^2 - V_0^2}{V_2^2 - V_0^2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}.$$

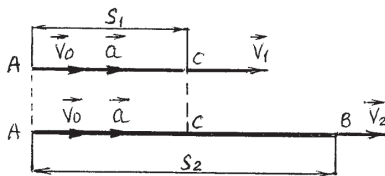


Рис. 2.1

Тоді $2(V_1^2 - V_0^2) = V_2^2 - V_0^2$. Звідси $V_1 = \sqrt{\frac{V_0^2 + V_2^2}{2}}$, $V_1 = 5 \text{ м/с}$.

Задача 2.2.

$t = 10 \text{ с}$
 $S = 18 \text{ м}$
 $V_1 = 5V_0$

За 10 с тіло пройшло відстань 18 м , при цьому його швидкість збільшилась в 5 разів. Вважаючи рух рівноприскореним, знайти прискорення тіла (рис. 2.2). V_0 – початкова швидкість V_1 – кінцева швидкість

$$V_1 = V_0 + at \quad (\text{а})$$

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (\text{б})$$

З виразу (а) $5V_0 = V_0 + at$, $V_0 = \frac{at}{4}$.

Підставимо V_0 у вираз (б) $S = \frac{at^2}{2} + \frac{at^2}{4} = \frac{3at^2}{4}$.

Звідси $a = \frac{4S}{3t^2}$; $a = 0,24 \text{ м/с}^2$.

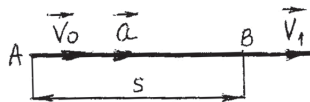


Рис. 2.2

Задача 2.3.

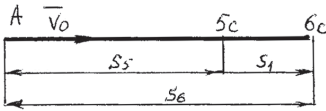


Рис. 2.3

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 \\ t_1 &= 1 \text{ с} \\ t &= 6 \text{ с} \\ S &= 33 \text{ м} \\ a &= ? \end{aligned}$$

З яким прискоренням рухається тіло, якщо за шосту секунду руху воно пройшло 33 м. Початкова швидкість дорівнює нулю (рис. 2.3).

$$S_1 = S_6 - S_5, \quad S_6 = \frac{at^2}{2},$$

$$S_5 = \frac{a(t-1)^2}{2}.$$

Тоді

$$S_1 = \frac{a}{2} [t^2 - (t-1)^2]. \quad S_1 = a(t-0,5). \quad a = \frac{S_1}{t-0,5}. \quad a = 6 \text{ м/с}^2.$$

Задача 2.4.

$$\begin{aligned} V_1 &= 16 \text{ м/с} \\ l &= 60 \text{ м} \\ S &= 400 \text{ м} \\ V &= 4 \text{ м/с} \\ a &= ? \end{aligned}$$

По прямому шосе з швидкістю 16 м/с рухається автобус. На відстані 60 м від шосе та 400 м від автобуса знаходиться чоловік. В якому напрямі він повинен бігти, щоб вийти в якій-небудь точці шосе одночасно з автобусом або раніше його? Чоловік може бігти з швидкістю 4 м/с.

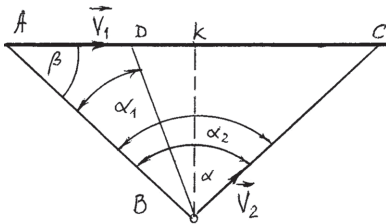


Рис. 2.4

Автобус знаходиться в точці А, а чоловік – в точці В (рис. 2.4).

$$AB = S = 400 \text{ м}, \quad BK = l = 60 \text{ м}.$$

Нехай точка С – точка зустрічі чоловіка з автобусом. Кут α характеризує напрям лінії ВС, по якій повинен бігти чоловік.

$$AC = V_1 t_1 \text{ (а)}, \quad BC = V_2 t_2 \text{ (б)}.$$

де t_1 і t_2 – відповідно час руху автобуса і чоловіка.

Потрібно, щоб чоловік прибіг раніше до точки зустрічі з автобусом, або, в крайньому випадку, одночасно, т. б. $t_2 \leq t_1$

$$\text{Розділимо почлено (а) на (б).} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{V_1 t_1}{V_2 t_2}. \quad (\text{в})$$

$$\text{З } \triangle ABC \text{ по теоремі синусів} \quad \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \beta}, \quad \text{т. б.} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Підставимо останній вираз у вираз (в)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{V_1 t_1}{V_2 t_2}, \quad \sin \alpha = \frac{V_1 t_1}{V_2 t_2} \sin \beta. \quad \text{З } \triangle ABK \quad \sin \beta = \frac{l}{S}.$$

$$\text{Тоді} \quad \sin \alpha = \frac{V_1 t_1}{V_2 t_2} \cdot \frac{l}{S}.$$

$$\text{Якщо } t_1 = t_2, \text{ то } \sin \alpha = \frac{V_1 l}{V_2 S}, \quad \sin \alpha = 0,6.$$

Значенню $\sin \alpha = 0,6$ задовольняє два значення кута: $\alpha_1 = 36^\circ 45'$ і $\alpha_1 = 143^\circ 15'$.

Куту α_1 відповідає точка D , куту α_2 – точка C .

Висновок: Чоловік одночасно з автобусом може потрапити в точки D і C . В будь-яку із точок шосе, що знаходиться між точками D і C , чоловік приблизить раніше автобуса.

Задача 2.5.

$$S = 300 \text{ м.}$$

$$V_{01} = 72 \text{ км/год.} = 20 \text{ м/с}$$

$$V_{02} = 36 \text{ км/год.} = 10 \text{ м/с}$$

$$a_1 = a_2 = 2 \text{ м/с}^2$$

$$x_c = ?$$

Два автомобіля рухаються назустріч один одному з пунктів A і B , відстань між якими 300 м. Перший автомобіль, що рухається з пункту A , піднімається в гору рівносповільнено з початковою швидкістю 72 км/год і прискоренням 2 м/с², другий – спускається з гори з пункту B рівноприскорено з початковою швидкістю 36 км/год і прискоренням 2 м/с². Знайти час руху і відстань, що пройшов перший автомобіль до зустрічі з другим?

Так як рух автомобілів прямолінійний, то виберемо тільки одну вісь X з початком в точці A з напрямом в сторону руху першого автомобіля. Точка C – точка зустрічі автомобілів.

x_c – координата точки C .

Координата x_1 характеризує рух першого автомобіля за час t , а координата x_2 – другого автомобіля за той же час (рис. 2.5).

Рівняння руху автомобілів мають вигляд:

$$x_1 = x_{01} + V_{01}t - \frac{a_1 t^2}{2}, \quad x_2 = x_{02} - V_{02}t - \frac{a_2 t^2}{2}, \quad \text{де } x_{01} = 0, x_{02} = S = 300 \text{ м;}$$

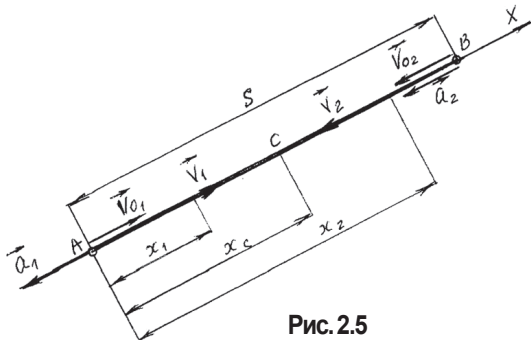


Рис. 2.5

В рівняннях руху появився знак “-” внаслідок того, що швидкість V_{02} і прискорення a_1 і a_2 напрямлені в протилежну сторону осі X .

В момент зустрічі автомобілів $x_1 = x_2 = x_c$, а час руху t_1 . Тоді

$$V_{01}t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = S - V_{02}t_1 - \frac{a_2 t_1^2}{2}.$$

$$\text{Звідки } t_1 = \frac{S}{V_{01} + V_{02}}; \quad t_1 = 10 \text{ с.}$$

Відстань x_c , яка пройдена першим автомобілем до зустрічі, буде:

$$x_c = V_{01}t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2}; \quad x_c = 100 \text{ м.}$$

Задача 2.6.

$$\begin{array}{l} V_A = 0; \quad S = 40 \text{ м} \\ t_1 = 10 \text{ с}; \quad S_2 = 20 \text{ м} \\ a_1 = ? \quad V_B = ? \\ a_2 = ? \quad t_2 = ? \end{array}$$

Хлопчик з'їхав на санках з гори довжиною 40 м за 10 с, а потім проїхав по горизонтальній ділянці шляху ще 20 м до зупинки. Знайти швидкість в кінці гори, прискорення на кожній з ділянок і час руху на горизонтальній ділянці шляху.

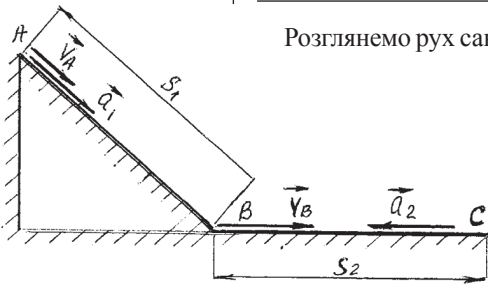


Рис. 2.6

Розглянемо рух санок на ділянці AB (рис. 2.6).

$$S_1 = V_A t_1 + \frac{a_1 t_1^2}{2}, \quad V_A = 0.$$

$$\text{Тоді } a_1 = \frac{2S_1}{t_1^2}; \quad a_1 = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

Знайдемо швидкість в точці B :

$$V_B = V_A + a_1 t_1, \quad V_B = 8 \text{ м/с.}$$

Розглянемо рух санок на ділянці BC (рис. 2.6).

В точці C санки зупинились. Швидкість $V_C = 0$.

$$V_C^2 = V_B^2 + 2a_2 S_2.$$

$$\text{Маємо: } a_2 = -\frac{V_B^2}{2S_2}; \quad a_2 = -1,6 \text{ м/с}^2.$$

Знак “-” говорить про те, що рух санок на ділянці BC уповільнений.

Знайдемо час t_2 руху на ділянці BC :

$$V_C = V_B + a_2 t_2, \quad V_C = 0, \quad t_2 = -\frac{V_B}{a_2}; \quad t_2 = 5 \text{ с.}$$

Задача 2.7.

$t_1 = t_2$	Машина половину часу рухається з швидкістю 12 м/с, а другу половину часу – з швидкістю 16 м/с. Знайти середню швидкість руху машини за весь проміжок часу (рис. 2.7).
$V_1 = 12 \text{ м/с}$	
$V_2 = 16 \text{ м/с}$	
$V_{cp} = ?$	

Середня швидкість знаходиться за формулою

$$V_{cp} = \frac{S}{t}, \quad (2.1)$$

де S – весь пройдений шлях, t – час руху на всьому шляху.

$$S = S_1 + S_2, \quad S_1 = V_1 t_1, \quad S_2 = V_2 t_2, \quad S = V_1 t_1 + V_2 t_2.$$

$$\text{Але } t_1 = t_2, \text{ тоді } S = (V_1 + V_2) t_1, \text{ а } t = 2t_1.$$

$$\text{Маємо } V_{cp} = \frac{V_1 + V_2}{2}; \quad V_{cp} = 14 \text{ м/с.}$$

Примітка: Ми отримали, що середнє значення швидкості дорівнює середньому арифметичному значенню відомих швидкостей. Але це справедливо не для всіх випадків руху. Це наочно показано в задачах 2.8 і 2.9.

Задача 2.8.

Машина першу половину шляху їхала з швидкістю 12 м/с, а другу половину шляху з швидкістю 16 м/с. Знайти середню швидкість руху на всьому шляху (рис. 2.7)

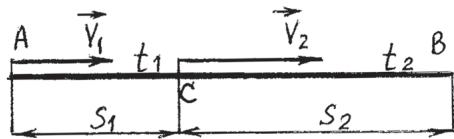


Рис. 2.7

$S_1 = S_2$	$V_{cp} = \frac{S}{t}$ $S = S_1 + S_2 = 2S_1$	$t = t_1 + t_2$ $t_1 = \frac{S_1}{V_1}$ $t_2 = \frac{S_2}{V_2}$	$t = S_1 \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right)$ $V_{cp} = \frac{2V_1 V_2}{V_1 + V_2}$ $V_{cp} = 13,7 \text{ м/с}$
$V_1 = 12 \text{ м/с}$			
$V_2 = 16 \text{ м/с}$			
$V_{cp} = ?$			

Як бачимо, значення середньої швидкості в задачах 2.7 і 2.8 не співпадають. Тому, для знаходження середньої швидкості необхідно користуватись формулою (2.1).

В задачах 2.7 і 2.8 на кожній з ділянок шляху тіло рухалось рівномірно, але з різними швидкостями. Як бути, якщо рух тіла рівнозмінний?

Використаємо формулу (1.46):

$$S = V_0 t + \frac{a_t t^2}{2}.$$

Для знаходження середньої швидкості використаємо формулу (2.1)

$$\text{Маємо: } V_{cp} = V_0 + \frac{a_t t}{2}. \quad (2.2)$$

У випадку, коли початкова швидкість дорівнює нулю ($V_0 = 0$), то

$$V_{cp} = \frac{a_t t}{2}. \quad (2.3)$$

Задача 2.9.

$$\begin{aligned} V &= 270 \text{ км/год.} = 75 \text{ м/с} \\ S &= 1000 \text{ м;} \\ a &= \text{const} \\ a = ? \quad t = ? \quad V_{cp} &= ? \end{aligned}$$

Літак для підйому повинен набрати швидкість 270 км/год., пробігши полосу довжиною 1 км. Скільки часу тривав розбіг? Яке прискорення мав літак і яка була середня швидкість руху? Рух вважати рівноприскореним.

$$\left. \begin{aligned} V^2 &= V_0^2 + 2aS \\ V_0 &= 0, \quad V^2 = 2aS. \\ a &= 2,81 \text{ м/с}^2 \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} V &= V_0 + at, \quad V_0 = 0 \\ t &= \frac{V}{a} \quad t = 26,7 \text{ с} \end{aligned} \right| \begin{aligned} V_{cp} &= \frac{at}{2}; \\ V_{cp} &= 37,5 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Середню швидкість можна знайти і за формулою (2.1):

$$V_{cp} = \frac{S}{t} = \frac{1000}{26,7} = 37,5 (\text{м/с}).$$

2.2. Криволінійний рух точки

На рис. 2.8 показано рух тіла, кинутого з землі з початковою швидкістю V_0 під кутом α до горизонту. Необхідно знайти дальність польоту l , висоту підняття h . Практично – це потрібно розв’язати обернену задачу кінематики (див. пункт 1.1). Перша задача динаміки розв’язана в задачі 1.5.

Використаємо координатний спосіб визначення руху точки. Початок декартової системи координат XOY виберемо в початку руху тіла. Розкладемо рух тіла на два незалежних рухи:

1) горизонтальний рух вздовж осі OX і

2) вертикальний рух з прискоренням вільного падіння g .

Результуючий рух тіла, як показує досвід, буде криволінійним. Горизонтальний рух є рівномірним, тобто тіло рухається з постійною швидкістю вздовж осі OX . Розкладемо початкову швидкість на дві складові V_{0x} і V_{0y} :

$$V_{0x} = V_0 \cos \alpha, \quad V_{0y} = V_0 \sin \alpha \quad (2.4)$$

Тоді дальність польоту $l = V_{0x} T$, де T – час польоту тіла і нам поки що невідомий. (2.5)

Від точки O до точки B (найвищої точки над землею) тіло рухається рівносповільнено з прискоренням $\vec{g}$. В точці B швидкість $\vec{V}_B$ напрямлена горизонтально, а це означає, що проекція її на вісь OY дорівнює нулю, т. б. $V_{By} = 0$.

Використаємо формулу (1.45): $V_{By} = V_{0y} - gt_1$.

Звідси $t_1 = \frac{V_{0y}}{g}$, або, з урахуванням (2.4),

$$t_1 = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}, \quad (2.6)$$

де t_1 – час підйому тіла до найвищої точки B .

Враховуючи, що час підйому тіла і час падіння однакові, то час польоту

$$T = 2t_1 = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}. \quad (2.7)$$

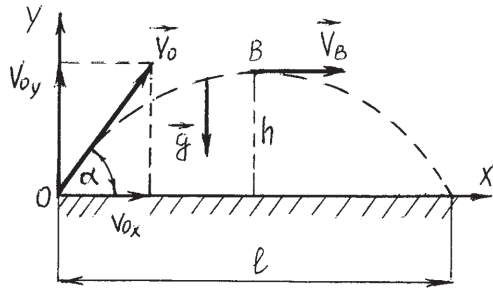


Рис. 2.8

Для знаходження висоти підйому h використаємо формулу (1.47):

$$V_{By}^2 = V_{0y}^2 - 2gh.$$

Звідси: $h = \frac{V_{0y}^2}{2g}$, або, з урахуванням (2.4),

$$h = \frac{V_{0y}^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (2.8)$$

Для знаходження дальності польоту у вираз (2.5) підставимо вирази (2.4) і (2.7):

$$l = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}. \quad (2.9)$$

Задача 2.10.

$V_0 = 8 \text{ м/с}$
 $\alpha = 60^\circ$
 $g = 9,8 \text{ м/с}^2$
 $t_l = l \text{ с}$

Баскетболіст кинув м'яч в кільце з швидкістю 8 м/с під кутом 60° до горизонту. З якою швидкістю м'яч попав в кільце, якщо долетів до нього за 1 с? (рис. 2.9).

$V = ?$

Складові початкової швидкості

$$V_{0x} = V_0 \cos \alpha, \quad V_{0y} = V_0 \sin \alpha.$$

Розкладемо швидкість $\vec{V}_A$ в точці A

на V_{Ax} і V_{Ay} .

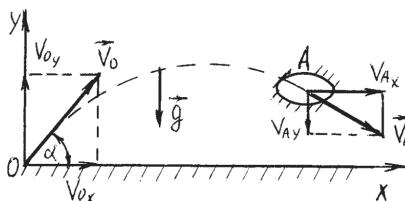


Рис. 2.9

Тоді
$$V_A = \sqrt{V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2}. \quad (a).$$

Так як в горизонтальному напрямі м'яч рухається з постійною швидкістю, то

$$V_{Ax} = V_{0x} = V_0 \cos \alpha. \quad (б)$$

Вертикальну складову швидкості V_{Ay} знайдемо за формулою:

$$V_{Ay} = V_{0y} - gt_1 = V_0 \sin \alpha - gt_1. \quad (в)$$

Підставимо вирази (б) і (в) у вирази (а):

$$V_A = \sqrt{(V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha - gt_1)^2}; \quad V_A = 5 \text{ м/с}.$$

Задача 2.11.

$$\begin{aligned} V_A &= 360 \text{ км/год} = 100 \text{ м/с} \\ h &= 490 \text{ м;} \\ g &= 9,8 \text{ м/с}^2 \\ l &= ? \end{aligned}$$

Літак летить горизонтально з швидкістю 360 км/год. на висоті 490 м. На якій відстані по горизонталі від точки B потрібно скинути вантаж з літака, щоб він попав в точку B ? (рис. 2.10).

Початок координат виберемо в точці A . Вісь AX спрямуємо горизонтально, а вісь OY – вертикально вниз.

В горизонтальному напрямі вантаж летить з постійною швидкістю

$$V_x = V_A = 100 \text{ м/с.}$$

Тоді координата x вантажу змінюється по закону

$$x = V_A \cdot t. \quad (a)$$

Вертикальний рух вниз є рівноприскореним з прискоренням g :

$$y = V_{Ay}t + \frac{gt^2}{2}.$$

Але в точці A швидкість $\vec{V}_A$ паралельна осі AX , а це означає, що $V_{Ay} = 0$.

$$\text{Тоді} \quad y = \frac{gt^2}{2}. \quad (б)$$

За час t_1 вантаж досягає точки B . Тоді з виразів (а) і (б) маємо:

$$y_B = h = \frac{gt_1^2}{2}. \quad (в)$$

$$x = l = V_A t_1. \quad (г)$$

$$\text{З виразів (в) і (г) маємо:} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad l = V_A \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad l = 1000 \text{ м.}$$

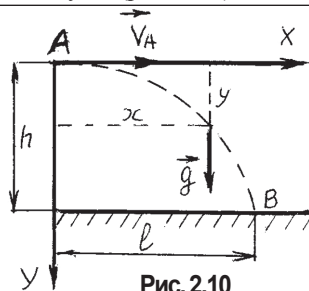


Рис. 2.10

Задача 2.12.

$$\begin{aligned} t_1 &= 3 \text{ с;} \quad t_2 = 5 \text{ с} \\ \alpha &= 30^\circ \\ g &= 9,8 \text{ м/с}^2 \\ V_0 &= ? \quad h = ? \end{aligned}$$

Камінь, кинутий під кутом 30° до горизонту, двічі був на одній висоті h : через 3 с і 5 с після початку руху. Знайти початкову швидкість і висоту h (рис. 2.11).

Початок координат виберемо в точці O – початку руху.

Координата y каменя з часом змінюється по закону:

$$y = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \text{ де } V_{0y} = V_0 \sin \alpha.$$

В момент часу t_1 $y_1 = h$, в момент часу t_2 $y_2 = h$.

$$\text{Тоді } h = V_{0y}t_1 - \frac{gt_1^2}{2} \quad (\text{a}), \quad h = V_{0y}t_2 - \frac{gt_2^2}{2}.$$

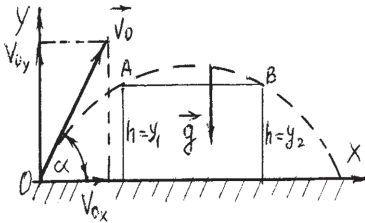


Рис. 2.11

$$\text{Маємо } V_{0y}t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = V_{0y}t_2 - \frac{gt_2^2}{2}.$$

$$\text{Тоді } V_{0y} = \frac{g}{2} \cdot \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{g}{2} (t_2 + t_1).$$

$$V_0 = \frac{V_{0y}}{\sin \alpha} = \frac{g(t_2 + t_1)}{2 \sin \alpha}. \quad V_0 = 78,4 \text{ м/с}.$$

$$\text{З виразу (a)} \quad h = 73,5 \text{ м}.$$

Задача 2.13.

$$V = 1440 \text{ км/год} = 400 \text{ м/с}$$

$$h = 20000 \text{ м};$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$V_0 = ? \quad \alpha_0 = ?$$

Літак летить горизонтально з швидкістю 1440 км/год на висоті 20 км. Коли літак пролітає над зенітною установкою, з гармати виконується постріл. Яка повинна бути мінімальна початкова швидкість снаряда і кут α_0 її з горизонтом, щоб снаряд попав в літак?

Початок координат виберемо в точці O – початку руху снаряда (рис. 2.12).

Щоб снаряд досягнув літака, необхідно щоб горизонтальна проекція його швидкості V_x була не менша швидкості V літака.

$$V_{Bx} = V_{0x} = V.$$

Вертикальна проекція початкової швидкості V_{0y} повинна бути такою, щоб в точці B проекція швидкості $V_{By} = 0$.

$$V_{By}^2 = V_{0y}^2 - 2gh. \text{ Звідси } V_{0y} = \sqrt{2gh}.$$

$$\text{Повна швидкість в точці } O: \quad V_0 = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}.$$

$$V_0 = \sqrt{V^2 + 2gh} \cdot V_0 = 743 \text{ м/с}.$$

З рисунка 2.12 видно

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{V_{0y}}{V_{0x}}; \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{V};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = 1,56; \quad \alpha_0 = 57^\circ.$$

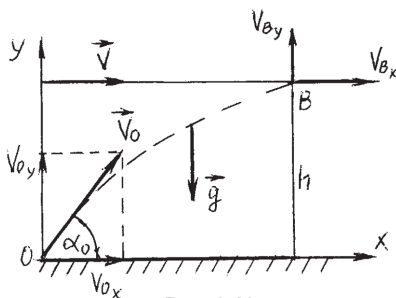


Рис. 2.12

3. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 3.1.

Координата точки, яка рухається прямолінійно вздовж осі x , змінюється за законом $x = 11 + 35t + 4,1t^2$ (x вимірюється в метрах, t – в секундах). Знайти прискорення точки і початкову швидкість.

$$\text{Відповідь: } V_0 = 35 \text{ м/с}, \quad a = 8,2 \text{ м/с}^2.$$

Задача 3.2.

Тіло, яке знаходиться на висоті 45 см над землею, кинути горизонтально з швидкістю 4 м/с. Знайти його швидкість в момент удару об землю.

$$\text{Відповідь: } 5 \text{ м/с}.$$

Задача 3.3.

Тіло кинуто горизонтально. Через 5 с кут α між напрямом швидкості $\vec{V}$ і прискоренням $\vec{a}$ став рівним 45° . Знайти швидкість V тіла в цей момент часу.

$$\text{Відповідь: } V = \sqrt{2}gt = 70,6 \text{ м/с}.$$

Задача 3.4.

Тіло, яке кинути вертикально вгору, повернулось на землю через 3 с. Яка була початкова швидкість тіла? На якій максимальній висоті воно побувало?

$$\text{Відповідь: } V_0 = \frac{1}{2}gt \approx 15 \text{ м/с}; \quad h_{\max} = \frac{1}{8}gt^2 \approx 11,2 \text{ м}.$$

Задача 3.5.

Знайти шлях вільно падаючого тіла за сьому секунду руху.

Відповідь: 63,7 м.

Задача 3.6.

Висота критого манежу для гри в футбол зимою 10 м. На яку максимальну відстань l можна послати м'яч в цьому залі, надавши йому початкової швидкості 40 м/с? Який кут α з підлогою повинен в цьому випадку складати вектор початкової швидкості м'яча? М'яч не повинен торкатись потолка залу.

Відповідь: $\alpha = 20^\circ 30'$, $l = 107$ м.

Задача 3.7.

Тіло на канаті піднімають з землі вертикально вгору з прискоренням 2 м/с. Через 5 с канат обірвався. Скільки часу тіло рухалось до землі після того, як канат обірвався?

Відповідь: 3,5 с.

4. Збірник завдань для розрахунково-графічної роботи № 4 “Знаходження швидкості і прискорення точки по заданим рівнянням її руху”

4.1. Варіанти завдань РГР № 4

Знайти траєкторію руху, швидкість, повне, дотичне, нормальне прискорення точки, а також радіус кривини лінії, якщо точка рухається згідно рівнянь, які приведені в таблиці 4.1.

Розрахунки провести для моменту часу t_1 і t_2 .

Побудувати траєкторію руху і показати вектори швидкості і прискорення точки для заданих моментів часу.

Таблиця 4.1

Варіант	Рівняння руху		Час	
	$x = x(t)$	$y = y(t)$	t_1	t_2
	см	см	с	с
1	$\sin(\pi t / 2)$	$\cos(\pi t / 2) - 3$	0	1
2	$4 \cos 2t$	$2 - 5 \sin 2t$	0	$\pi/4$
3	$2t$	$5 - 2t^2$	0	1
4	$2 \sin t$	$4 \cos t$	$1/2$	1
5	$t^2 + 4$	$5 - t^2$	0	2
6	$3t^2$	$5 - t$	0	1
7	$8t^2 - 2$	$4t$	0	2
8	$3 \cos(\pi t / 2)$	$3 \sin(\pi t / 2) - 2$	0	$\pi/4$
9	$4t$	$2 + \sin \pi t$	0	1
10	$1 - 2 \cos(\pi t / 2)$	$3 \sin(\pi t / 2) + 2$	0	1
11	$t^2 / 2$	$3 - t$	1	3
12	$2 \sin \pi t / 2$	$3 \cos \pi t$	0	2
13	$3 \cos \pi$	$4 \sin (t/2)$	0	$\pi/2$
14	$3 \sin \pi t$	$4 \cos 2\pi t$	0	$1/2$
15	$4t^2$	$2t - 1$	0	1
16	$3 \sin \pi t / 2$	$\cos(\pi t / 2)$	0	2
17	$4t^2 - 1$	$t - 2$	0	1
18	$1,5 \cos \pi t$	$0,5 \sin \pi t$	0	$1/2$
19	$0,5 \cdot (e^{3t} + e^{-3t})$	$0,5 \cdot (e^{3t} - e^{-3t})$	0	2
20	$0,25 \cdot (e^t + e^{-t})$	$0,25 \cdot (e^t - e^{-t})$	0	1
21	$3 \cos(\pi t^3 / 3) - 1$	$-3 \sin(\pi t^3 / 3) + 2$	0	2
22	$2 + 3 \cos t^2$	$3 \sin t^2$	0	2
23	$4 + 3 \cos \pi t$	$2 \sin \pi t + 3$	$1/2$	1
24	$3 \sin(\pi t^2 / 3)$	$2 + \cos(\pi t^2 / 3)$	0	1

Варіант	Рівняння руху		Час	
	$x = x(t)$	$y = y(t)$	t_1	t_2
	см	см	с	с
25	$3 \cos 2t$	$6 \sin t$	0	$\pi/2$
26	$3 \sin 2t$	$6 \cos t$	$\pi/2$	π
27	$\sqrt{t}$	e^{-t}	0	1
28	$2t^2$	$2t - 1$	0	2
29	$\sin \pi t + 3$	$\cos \pi t - 1$	0	1
30	$5 \cos(\pi t / 2)$	$-3 \sin(\pi t / 2)$	0	2
31	$2 \sin^2 t$	$2 \cos^2 t$	0	1
32	$4t^2$	$5t - 2$	1	2
33	$3t - 1$	$2t^2$	1	2
34	$\cos^2 t$	$5 - \sin t$	0	$\pi/2$
35	$\sin t$	$1 - \cos^2 t$	0	$\pi/2$
36	$8t^2 - 1$	$2t + 3$	1	2
37	$t - 1$	$1 - 2t^2$	$1/2$	1
38	$t^3 - 3$	$5 - t^3$	$1/2$	1
39	$2ctgt$	$2 \sin t$	0	2
40	$-5t$	$-2t^2 + 3$	$1/2$	1
41	$2 \sin^2(\pi t / 4)$	$2 \cos^2(\pi t / 4)$	0	2
42	$\cos(\pi t^2 / 3) + 2$	$\sin(\pi t^2 / 3) - 2$	0	2
43	$2t+2$	$-2/(t+1)$	0	2
44	$3 \sin(\pi t / 6)$	$2 \cos(\pi t / 6) - 2$	0	3
45	$2t+1$	$-2t$	$1/2$	2
46	$-3/(t+3)$	$3t+9$	0	1
47	$\cos(\pi t / 2) - 1$	$\sin(\pi t / 2) + 3$	1	2
48	$2 \cos^2 t$	$\sin t + 1$	0	$1/2$
49	$7t$	$3 - 2t^2$	1	2

Варіант	Рівняння руху		Час	
	$x = x(t)$	$y = y(t)$	t_1	t_2
	см	см	с	с
50	$3\sin^2(\pi t/2)$	$4\cos^2(\pi t/2)$	0	1
51	$2t^2 + 2t - 3$	$3t^2 + 3t + 2$	0	1
52	$3t+3$	$3/(t+1)$	0	1
53	$2\sin(\pi t/3)$	$4\cos(\pi t/3) - 2$	0	3
54	$\cos \pi t$	$3\sin(\pi t/2)$	0	1
55	$2t$	$3 - t^2/2$	1	2
56	$2t^2 - 3$	$-2t$	0	3
57	$-1 - 2\sin(\pi t/4)$	$-2\cos(\pi t/4)$	0	4
58	$-4t$	$-4/t$	1	4
59	$2t^2 - t + 2$	$3t^2 - 2t + 1$	1	2
60	$-3/t$	$3t$	1	3
61	$2\cos(\pi t/2)$	$6\sin(\pi t/2)$	0	$1/2$
62	$4t$	$8t - 4t^2$	0	$1/2$
63	$2tg(t/2)$	$\cos t$	0	1
64	$2\sin(2\pi t/3)$	$\cos(2\pi t/3) + 2$	0	6
65	$3\sin(\pi t/8)$	$3\cos(\pi t/8) - 2$	0	4
66	$t^2 - 1$	$2t$	0	2
67	$2\sin \pi t$	$\cos(\pi t/2)$	0	1
68	$2\sqrt{t}$	e^{-t}	0	1
69	$2t$	$2t^3$	0	1
70	$2t - 1$	$2t + 1$	1	2
71	$2 - t$	$(2+t)^2$	0	1
72	$t - 4$	$2 - 3t^2$	1	2
73	$2t$	$(t+1)^2$	1	2
74	$8\cos 2\pi t$	$8\sin \pi t$	0	4
75	$7e^{3t}$	$24e^{-3t}$	0	1

Варіант	Рівняння руху		Час	
	$x = x(t)$	$y = y(t)$	t_1	t_2
	см	см	с	с
76	$3t^2$	$6t$	0	2
77	$3\cos\pi t^2$	$3\sin\pi t^2$	0	2
78	$12t - 5$	$4t + 3$	0	$\frac{1}{2}$
79	$12t^2 + 5$	$9t^2 - 4$	0	1
80	$1 - 3e^{2t}$	$2 + 4e^{2t}$	0	1
81	$8\sin^2\pi t$	$5 + 4\sin 2\pi t$	0	$\frac{1}{2}$
82	$2\cos^2\pi t - 3$	$4\sin^2\pi t - 3$	0	$\frac{1}{2}$
83	$3t^2 + 1$	$6t$	1	-2
84	$\cos^2 t$	$4\sin t$	0	$\frac{\pi}{2}$
85	$4\sin t$	$\cos^2(t/2)$	0	$\frac{\pi}{2}$
86	$5 - 2\cos t$	$-2 + 3\sin t$	0	$\frac{\pi}{2}$
87	$2(e^t + e^{-t})$	$2(e^t - e^{-t})$	0	1
88	$t^3 + 2$	$3 - t^3$	1	2
89	$2tg(t/2)$	$3\sin t$	0	$\frac{\pi}{2}$
90	$3tg(t/2)$	$\cos t$	0	$\frac{\pi}{2}$
91	$3t$	$6t - 5t^2$	0	1
92	$\sin 2t + \cos 2t$	$\sin 2t - \cos 2t$	0	$\frac{\pi}{4}$
93	$2\sin(t^2)$	$3\cos(t^2)$	0	$\frac{\pi}{2}$
94	$3t^2 - 1$	$2t + 2$	0	1
95	$2t$	$1 - 2\sin t$	0	1
96	t^2	$\sin\pi t$	0	2
97	$3\sec t$	$2tgt$	0	$\frac{\pi}{2}$
98	$3tgt$	$-4\sec t$	0	$\frac{\pi}{4}$
99	$2 - 3\sin 2t$	$3 + 2\cos 2t$	0	$\frac{\pi}{4}$

Варіант	Рівняння руху		Час	
	$x = x(t)$	$y = y(t)$	t_1	t_2
	см	см	с	с
100	$ctgt$	$-2 \cos ect$	$\pi/4$	$\pi/2$
101	$3 + 3 \cos 2t$	$4 - 3 \sin 2t$	$\pi/4$	$\pi/3$
102	e^{-3t}	$4e^{-3t}$	0	$1/3$
103	$2t + 3$	$2 - 4t$	0	1
104	$0,5t^2 - 2t$	$3t$	0	2
105	$0,25t^3$	$5t^3$	0	2
106	$2e^t$	t	0	1
107	$t^2 - 3t$	$-3t$	0	2
108	$2 \cos 2t$	$3 \sin t$	0	$\pi/6$
109	$2 \sin^2(\pi t / 4)$	$\cos(\pi t / 2)$	0	1
110	$2 \cos^2(\pi t / 2)$	$\sin \pi t$	0	1
111	$3 \cos ect$	$3ctgt$	$\pi/4$	$\pi/2$
112	t	$-2t + t^2$	0	3
113	$2(e^{2t} - e^{-2t})$	$3 (e^{2t} - e^{-2t})$	0	2
114	$1 + 2 \sec t$	$-1 + tgt$	0	$\pi/4$
115	$t^2 - 2t + 1$	$t - 1$	0	3
116	$1,5(t + 1/t)$	$2,5(t - 1/t)$	1	6
117	$1 - 2 \cos ect$	$-1 + ctgt$	$\pi/4$	$\pi/6$
118	$2ctgt^2t$	$2ctgt$	$\pi/4$	$\pi/6$
119	$2ctgt$	$3 \cos ect$	$\pi/4$	$\pi/6$
120	2^{-t}	2^{2t}	0	1

4.2. Вказівки до виконання РГР № 4

Знайти траєкторію руху, швидкість, повне, дотичне і нормальне прискорення точки, а також радіус кривини лінії, якщо точка рухається згідно рівнянь:

$$\begin{aligned}x &= 4 \cos t - 2 \cos 2t \text{ (м);} \\ y &= 4 \sin t - 2 \sin 2t \text{ (м).}\end{aligned}\tag{1}$$

Розрахунки провести для моменту часу $t_0 = 0$ і $t_1 = \frac{\pi}{2}$ с.

1. *Знайдемо траєкторію руху.* Для цього необхідно з рівнянь руху виключити час t . Для кожного з рівнянь руху треба шукати свої способи виключення часу t . В даному випадку зробимо слідує: піднесемо до квадрату ліві і праві частини рівнянь руху (1) і почленно додамо

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 16(\cos^2 t + \sin^2 t) + 4(\cos^2 2t + \sin^2 2t) - \\ &- 16(\cos t \cdot \cos 2t + \sin t \cdot \sin 2t) = \\ &= 4 + 16[1 - (\cos t \cdot \cos 2t + \sin t \cdot \sin 2t)] = \\ &= 4 + 16[1 - \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t + 2 \sin^2 t)].\end{aligned}$$

Маємо:

$$x^2 + y^2 - 4 = 16(1 - \cos t).\tag{2}$$

Знову звернемося до рівнянь руху (1) і перепишемо їх в іншому вигляді:

$$\begin{aligned}x &= 4 \cos t - 2(2 \cos^2 t - 1) = 4(1 - \cos t) \cdot \cos t + 2 \\ y &= 4(1 - \cos t) \cdot \sin t.\end{aligned}\tag{3}$$

Піднесемо до квадрату ліві і праві частини рівнянь (3) і почленно додамо:

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 + y^2 &= 16(1 - \cos t)^2 \cos^2 t + 16(1 - \cos t)^2 \sin^2 t = \\ &= 16(1 - \cos t)^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)\end{aligned}$$

Маємо:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 16(1 - \cos t)^2,\tag{4}$$

Використовуючи вирази (2) і (4), отримаємо рівняння траєкторії руху точки:

$$(x^2 + y^2 - 4)^2 = 16[(x-2)^2 + y^2]. \quad (5)$$

Траєкторією руху точки є кардіоїда.

На рис. 4.1 зображена траєкторія руху точки і показано на ній положення точки в початковий момент часу і в

момент часу $t_1 = \frac{\pi}{2} c$.

Побудова цієї лінії та багато інших приводиться в книзі М. Я. Выгодский “Справочник по высшей математике”, Москва, 1963 г., стр. 751 - 834.

2. Знайдемо швидкість точки.

Рух точки заданий в координатній формі. Тому при визначенні швидкості і прискорення точки будемо користуватись формулами пункту 1.4.

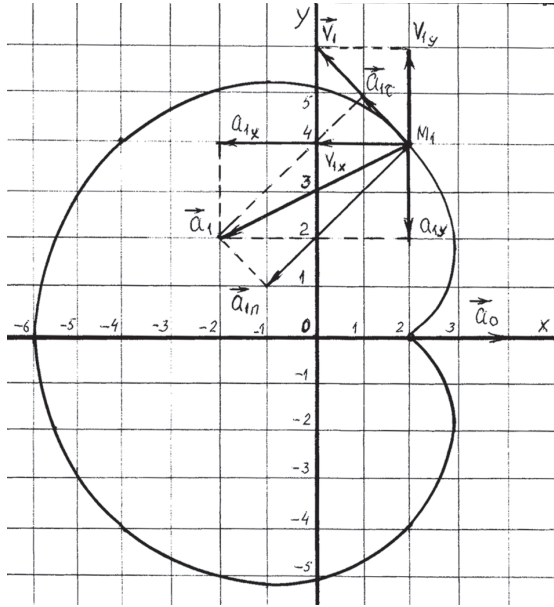


Рис. 4.1

Знайдемо проекції швидкості на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -4\sin t + 4\sin 2t;$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 4\cos t - 4\cos 2t.$$

Повна швидкість

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

Після перетворень маємо

$$V = 4\sqrt{2(1 - \cos t)}. \quad (6)$$

Напрямок швидкості знайдемо за непрямыми косинусами:

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}.$$

Знайдемо величину і напрям швидкості для заданих моментів часу:

$$t_0 = 0, V_{0x} = 0, V_{0y} = 0, V_0 = 0.$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2}, V_{1x} = -4, V_{1y} = 4, V = 4\sqrt{2} \text{ м/с}.$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Напрямок швидкості показаний на рис. 4.1.

3. Знайдемо прискорення точки.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -4\cos t + 8\cos 2t;$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -4\sin t + 8\sin 2t.$$

Повне прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$

Після перетворень маємо

$$a = 4\sqrt{1 + 4(1 - \cos t)}. \quad (7)$$

Напрямок прискорення знайдемо за непрямыми косинусами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}.$$

Знайдемо величину і напрям прискорення для заданих моментів часу:

$$t_0 = 0, \quad a_{0x} = 4, \quad a_{0y} = 0, \quad a_0 = 4 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad a_{1x} = -8, \quad a_{1y} = -4,$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{-8}{4\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{-4}{4\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Напрямок прискорення показаний на рис. 4.1.

4. Знайдемо дотичне прискорення.

Для цього використаємо формулу (1.32)

Візьмемо похідну по часу від виразу (6). Остаточно маємо:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{4\sin t}{\sqrt{2(1 - \cos 2t)}}.$$

При $t_0 = 0, \quad a_{0\tau} = 0.$ При $t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad a_{1\tau} = 2\sqrt{2} = 2,82 \text{ (м/с}^2\text{)}.$

Дотичне прискорення напрямлене по дотичній до траєкторії руху і для часу

$t_1 = \frac{\pi}{2} c$ воно є додатнім. Це означає, що рух точки M є прискореним в точці M_1 і

дотичне прискорення $\vec{a}_{1r}$ напрямлене в ту ж сторону, що і швидкість $\vec{V}_1$ (рис. 4.1).

Якщо похідна по часу від модуля швидкості є громіздкою функцією, то доцільно використати формулу (1.43).

В нашому випадку для часу $t_1 = \frac{\pi}{2} c$ розрахунки показують:

$$a_{1r} = \frac{V_{1x}a_{1x} + V_{1y}a_{1y}}{V_1} = \frac{(-4)(-8) + 4(-4)}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = 2,82 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Цей розрахунок співпадає з раніше отриманим результатом для дотичного прискорення.

5. Знайдемо нормальне прискорення точки M .

Використаємо формулу (1.41), з якої

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_r^2}.$$

$$\text{При } t_0 = 0, \quad a_{0n} = a_0 = 4; \quad a_{0n} = 4 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

$$\text{При } t_1 = \frac{\pi}{2} c, \quad a_{1n} = \sqrt{80 - 8} = 8,48, \quad a_{1n} = 8,48 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектори дотичного і нормального прискорень складають вектор повного прискорення $\vec{a}$ точки. Побудова цих векторів показана на рис. 4.1.

6. Знайдемо радіус кривини лінії.

Радіус кривини лінії знаходиться за формулою (1.39) для нормального прискорення:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

$$\text{При } t_0 = 0, \quad \rho_0 = \frac{V_0^2}{a_{0n}} = \frac{0}{4} = 0, \quad \rho_0 = 0.$$

$$\text{При } t_1 = \frac{\pi}{2} c, \quad \rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{1n}} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{8,48} = 3,78; \quad \rho_1 = 3,78 \text{ (м)}.$$

5. Запитання для самоперевірки і до захисту розрахунково-графічної роботи

1. Які способи задання руху точки використовуються в кінематиці точки?
2. В яких випадках використовується натуральний спосіб визначення руху точки?
3. За якою формулою визначається швидкість і прискорення точки при векторному способі задання її руху?
4. Яким чином визначаються проекції швидкості точки на координатні осі?
5. Яким чином визначаються проекції прискорення точки на координатні осі?
6. Як знайти модуль і напрям швидкості точки при координатному способі задання її руху?
7. Як знайти модуль і напрям прискорення точки при координатному способі задання її руху?
8. За якою формулою визначається швидкість точки при натуральному способі задання її руху?
9. Які осі називаються натуральними осями ?
10. Як напрямлені натуральні осі в довільній точці кривої?
11. За якою формулою визначається кривина кола?
12. За якою формулою визначається дотичне прискорення точки?
13. Що характеризує дотичне прискорення?
14. За якою формулою визначається нормальне прискорення точки?
15. Як напрямлений вектор нормального прискорення?
16. Що характеризує нормальне прискорення?
17. Яким чином знаходиться прискорення точки при натуральному способі задання її руху?
18. При якому русі точки дорівнює нулю дотичне прискорення і при якому – нормальне прискорення?
19. В якій площині натурального тригранника лежить вектор прискорення?
20. Який вираз має закон рівномірного руху точки по траєкторії?
21. Як записується закон рівнозмінного руху точки по траєкторії?
22. Яким чином знаходиться радіус кривини лінії кінематичним способом?

МОДУЛЬ 4. КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

ПЕРЕДМОВА

Як зазначалось раніше, кінематика поділяється на кінематику точки і кінематику абсолютно твердого тіла. В модулі 3 розглядалась кінематика точки. В цьому модулі будемо розглядати рух абсолютно твердого тіла без урахування діючих на нього сил.

Нагадаємо, що абсолютно твердим тілом називається тіло, відстань між точками якого не змінюється при русі цього тіла. В подальшому замість терміну “абсолютно тверде тіло” ми будемо говорити “тверде тіло”, або просто “тіло”.

Як в кінематиці точки, так і в кінематиці твердого тіла розв’язуються дві основні задачі.

Перша задача кінематики полягає в тому, щоб знайти рівняння руху твердого тіла по відношенню до вибраної системи відліку. Це означає, що треба записати такі рівняння, за допомогою яких для довільного моменту часу можна знайти положення твердого тіла відносно вибраної системи відліку.

Друга задача кінематики полягає в тому, щоб по знайдених рівняннях руху твердого тіла знайти кінематичні характеристики руху тіла в цілому, а потім швидкість і прискорення точок, що належать цьому тілу.

Перед тим, як перейти до вивчення довільного або самого загального випадку руху тіла, спочатку вивчимо прості рухи тіла. До простих рухів тіла відноситься поступальний рух і обертальний рух навколо нерухомої осі.

1. Поступальний рух твердого тіла

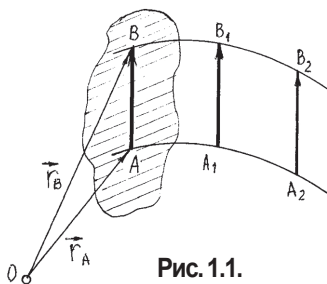


Рис. 1.1.

Рух тіла називається поступальним, якщо будь-який відрізок, який взятий в цьому тілі, рухається паралельно самому собі (рис. 1.1).

Використаємо векторний спосіб задання руху точки. Рух точки A тіла будемо характеризувати радіус-вектором $\vec{r}_A$, а точки B – радіус-вектором $\vec{r}_B$.

Запишемо очевидну векторну рівність:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}, \quad (1.1)$$

де $\overrightarrow{AB}$ – вектор, який з’єднує точки A і B .

Так як тіло абсолютно тверде, то відстань між точками A і B при русі

тіла не змінюється, тобто довжина AB постійна. Напрямок вектора також не міняється згідно означенню поступального руху. Таким чином, можна стверджувати: вектор

$$\overrightarrow{AB} = \text{const.} \quad (1.2)$$

Тоді з виразу (1.1), з урахуванням (1.2), можна зробити висновок: траєкторії точок A і B будуть однаковими, тільки зміщеними на відстань AB одна від одної.

Візьмемо першу похідну по часу від виразу (1.1).

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt},$$

Але похідна по часу від постійного вектора $\overrightarrow{AB}$ (див.(1.2)) дорівнює нулю.

Тоді
$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt},$$

або інакше

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A. \quad (1.3)$$

Візьмемо похідну по часу від виразу (1.3).

Тоді
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A. \quad (1.4)$$

Можемо зробити остаточний висновок:

При поступальному русі твердого тіла всі точки тіла рухаються по однаковим траєкторіям, мають однакові швидкості і прискорення.

Тому при розгляді поступального руху достатньо розглянути рух однієї з точок цього тіла (як правило – це центр тяжіння). Всі виведені раніше формули, які описують рух точки, справедливі і для поступального руху твердого тіла.

Виберемо в тілі яку-небудь точку, наприклад центр тяжіння $C(x, y, z)$ і запишемо рівняння її руху у вигляді:

$$\begin{aligned} x_c &= f_1(t); \\ y_c &= f_2(t); \\ z_c &= f_3(t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Рівняння (1.5) є рівняннями поступального руху твердого тіла.

Примітка. Не слід думати, що при поступальному русі тіла його точки повинні рухатись по прямим лініям. Що це не завжди так видно з рис. 1.2, на якому представлено рух педалі AB велосипеда. З цього рисунка видно, що

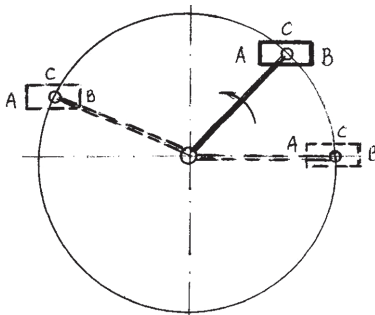


Рис. 1.2

педаль виконує поступальний рух, а точки A , B , C педалі рухаються по колу.

2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Якщо хоча б дві точки тіла залишаються нерухомими при його русі, то такий рух називається обертальним рухом тіла навколо нерухомої осі.

Лінія, яка проходить через нерухомі точки тіла, називається *віссю обертання* (рис. 2.1). Лінія O_1O_2 – вісь обертання. Вісь обертання проходить через підшипники, які розміщені в точках O_1 і O_2 .

2.1. Рівняння обертального руху, кутова швидкість, кутове прискорення

Виведемо рівняння руху тіла, яке дозволить побудувати положення тіла для довільного моменту часу.

Введемо дві площини Π і Π_1 . Площина Π нерухома, а площина Π_1 зв'язана з тілом і якщо тіло обертається, то і ця площина обертається. Між цими площинами проведемо кут φ (рис. 2.1) і якщо буде відомо як він змінюється з плином часу, то це і буде рівняння обертального руху тіла.

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.1)$$

Кут φ вимірюється в радіанах.

Нехай в момент часу t кут був φ , а в момент часу t_1 – кут φ_1 . Тоді за час $\Delta t = t_1 - t$ пройшла зміна кута $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi$.

Візьмемо відношення $\frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ і назовемо його середньою ку-

товою швидкістю

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$

ω_{cp} – середня кутова швидкість, яка характеризує зміну кута φ за деякий проміжок часу. Розмірність кутової швидкості рад/с.

Чим менший буде проміжок часу Δt , тим ближче по значенню середня кутова швидкість відповідає кутовій швидкості тіла в момент часу t .

Спрямуємо Δt до нуля. Знайдемо границю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

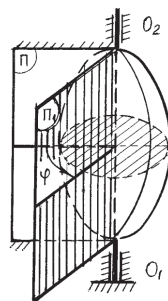


Рис. 2.1

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (2.2)$$

де ω – миттєва кутова швидкість тіла, тобто кутова швидкість тіла в даний момент часу.

Миттєва кутова швидкість тіла в даний момент часу дорівнює першій похідній по часу від функції кута обертання.

В подальшому замість “миттєва кутова швидкість” будемо говорити “кутова швидкість”.

Нехай в деякий момент часу t кутова швидкість тіла ω , а в момент часу t_1 – кутова швидкість ω_1 . Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ ми отримаємо зміну кутової швидкості $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$. Візьмемо відношення $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ і назвемо його середнім кутовим прискоренням:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

ε_{cp} – середнє кутове прискорення, яке характеризує зміну кутової швидкості за деякий проміжок часу. Розмірність кутового прискорення – рад./с².

Спрямуємо Δt до нуля. Знайдемо границю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon.$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}. \quad (2.3)$$

ε – миттєве кутове прискорення, тобто кутове прискорення тіла в даний момент часу.

Миттєве кутове прискорення тіла в даний момент часу дорівнює першій похідній по часу від функції кутової швидкості.

В подальшому замість “миттєве кутове прискорення” будемо говорити “кутове прискорення”.

Якщо вираз (2.2) підставити у вираз (2.3), то

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (2.4)$$

Кутове прискорення дорівнює другій похідній по часу від функції кута обертання.

Додатний знак ε вказує на те, що кутова швидкість ω збільшується, т. б. маємо прискорений обертальний рух тіла. Від’ємне значення ε вказує на те, що обертальний рух сповільнений.

2.2. Рівняння рівномірного обертального руху тіла

При рівномірному обертанні тіла кутова швидкість постійна ($\omega = \text{const}$). Використаємо формулу (2.2), з якої $d\varphi = \omega dt$.

Візьмемо інтеграл

$$\int d\varphi = \omega \int dt .$$

Маємо

$$\varphi = \omega t + C_1. \quad (\text{a})$$

Постійну інтегрування C_1 знайдемо, використовуючи початкові умови. Нехай на початку руху (при $t = 0$) початковий кут повороту дорівнював φ_0 .

Початкові умови підставимо у вираз (а). Маємо: $C_1 = \varphi_0$. Отже, рівняння рівномірного обертального руху має вигляд

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (2.5)$$

У випадку, коли $\varphi_0 = 0$, маємо

$$\varphi = \omega t. \quad (2.6)$$

Якщо тіло за деякий час зробило N обертів, то кут φ зв'язаний з кількістю обертів залежністю

$$\varphi = 2\pi N. \quad (2.7)$$

Раніше ми відмітили, що розмірність кутової швидкості – рад/с . Але в техніці існує і друга розмірність – об/хв . Між цими розмірностями існує зв'язок

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad n = \frac{30\omega}{\pi}. \quad (2.8)$$

де ω – кутова швидкість в рад/с ; n – кутова швидкість в об/хв .

2.3. Рівняння рівнозмінного обертального руху тіла

Рівнозмісний обертальний рух буде в тому випадку, коли кутове прискорення $\varepsilon = \text{const}$. Використаємо формулу (2.3), з якої $d\omega = \varepsilon dt$.

Проінтегрувавши останній вираз, маємо

$$\omega = t + C_2. \quad (\text{б})$$

Постійну інтегрування знайдемо, використовуючи початкові умови.

Нехай на початку руху ($t = 0$) початкова кутова швидкість була ω_0 .

Тоді з виразу (б), маємо $C_2 = \omega_0$.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2.9)$$

де ω – кутова швидкість тіла в даний момент часу;

ω_0 – кутова швидкість тіла в початковий момент часу ($t = 0$).

Підставимо формулу (2.2) в (2.9):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Звідси

$$d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt.$$

Проінтегруємо цей вираз: $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_3.$

П.У. $t = 0$, $\varphi = \varphi_0.$

Тоді

$$C_3 = \varphi_0.$$

Остаточно маємо

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.10)$$

Вираз (2.10) є рівнянням рівнозмінного обертального руху тіла. В тому випадку, коли $\varphi_0 = 0$, маємо

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.11)$$

Якщо кутове прискорення $\varepsilon > 0$, то обертальний рух прискорений, якщо $\varepsilon < 0$, то обертальний рух сповільнений.

2.4. Швидкість і прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

Нехай тіло обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε (рис. 2.2). Нерухома вісь проходить через точку O перпендикулярно рисунку. Вияснимо, чому дорівнює швидкість і прискорення точки, яка знаходиться на відстані R від осі обертання.

Всі точки твердого тіла рухаються по коловим траєкторіям, але з різними радіусами обертання. Так як нам відома траєкторія руху, то скористаємось натуральним способом визначення руху точки.

$$V = \frac{ds}{dt}.$$

Нехай за елементарний проміжок часу dt тіло повернулось на кут $d\varphi$, а точка A тіла пройшла відстань $ds = R d\varphi$.

Тоді
$$V = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

$$V = \omega R. \quad (2.12)$$

Швидкість точки, яка належить тілу, що обертається, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус обертання точки.

Вектор швидкості напрямлений перпендикулярно радіусу обертання (рис. 2.2). Так як точки тіла рухаються по криволінійним траєкторіям, то їх прискорення в загальному випадку складаються з дотичного і нормального прискорень. (Див. формули (1.32), (1.39) модуля 3) (рис. 2.2.).

Дотичне прискорення:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R.$$

$$\alpha_\tau = \varepsilon R. \quad (2.13).$$

Дотичне прискорення точки, яка належить тілу, що обертається, дорівнює добутку кутового прискорення тіла на радіус обертання точки.

Дотичне прискорення точки напрямлене перпендикулярно радіусу обертання. Якщо обертальний рух тіла прискорений, то дотичне прискорення співпадає по напрямку з вектором швидкості, а якщо сповільнений-то вектор дотичного прискорення напрямлений в протилежну сторону вектора швидкості.

Нормальне прискорення точки:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R; \quad \alpha_n = \omega^2 R \quad (2.14)$$

Нормальне прискорення точки, яка належить тілу, що обертається, дорівнює добутку квадрата кутової швидкості тіла на радіус обертання точки.

Вектор нормального прискорення точки напрямлений по радіусу обертання до центра обертання, т. б. $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$ (рис. 2.2.).

$$\text{Повне прискорення точки} \quad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (2.15)$$

$$\text{Модуль повного прискорення} \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (2.16)$$

З урахуванням формул (2.13) і (2.14), повне прискорення буде

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.17)$$

Напрямок повного прискорення можна знайти з формули

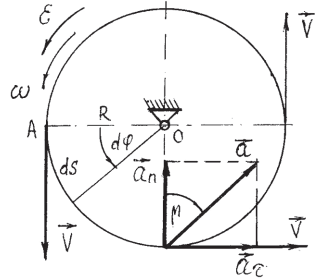


Рис. 2.2.

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_{\tau}}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (2.18)$$

Кут μ однаковий для всіх точок тіла в даний момент часу.

2.5. Кутова швидкість і кутове прискорення як вектори

В доведених раніше формулах кутова швидкість і кутове прискорення – це скалярні величини. В подальшому кутову швидкість і кутове прискорення будемо розглядати не тільки як скалярні величини, а як і вектори.

Домовились вектор кутової швидкості напрямляти по осі обертання в ту сторону, звідки бачимо обертальний рух тіла проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.3).

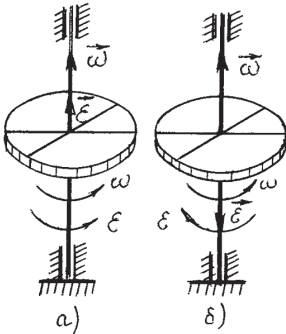


Рис. 2.3

Точка прикладання вектора $\vec{\omega}$ на осі обертання довільна, т. б. вектор $\vec{\omega}$ є ковзним вектором.

Вектор кутового прискорення також напрямлений по осі обертання. Точка прикладання вектора довільна, т. б. цей вектор також є ковзним вектором. Якщо обертальний рух тіла прискорений, то напрям вектора $\vec{\varepsilon}$ співпадає з вектором кутової швидкості (рис. 2.3,а). Якщо обертальний рух сповільнений, то вектор $\vec{\varepsilon}$ напрямлений в протилежну сторону вектора $\vec{\omega}$ (рис. 2.3,б).

2.6. Векторні формули для знаходження швидкості і прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

Модулі швидкості, нормального і дотичного прискорення точки тіла, що обертається, визначаються з формул (2.12) – (2.15). Безпосередньо з цих формул неможливо встановити напрям швидкості і прискорення точки. В п. 2.5 введено поняття вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ і вектора кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$. Використовуючи вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$, запишемо такі формули, з яких для точки можна знайти не тільки модулі, а й напрями швидкості і прискорення.

Нехай точка M належить тілу, що обертається навколо нерухомої осі O_1O_2 з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ і кутовим прискоренням $\vec{\varepsilon}$. Візьмемо на цій осі точку O і проведемо радіус-вектор $\vec{r}$ точки M (рис. 2.4.). Точка M має швидкість $\vec{V}$, до-

тичне $\vec{a}_\tau$ і нормальне $\vec{a}_n$ прискорення. Вектор швидкості $\vec{V}$ можна обчислити за допомогою векторного добутку

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.19)$$

Перевіримо, чи справедлива ця формула:

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha = \omega CM = \omega R.$$

Модуль швидкості, знайдений з формули (2.19), співпадає з формулою (2.12). Відомо, що вектор швидкості $\vec{V}$ перпендикулярний радіусу $R=CM$. По означенню векторного добутку вектор $\vec{V}$ є вектор, перпендикулярний до площини, яка проходить через $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$, і напрямлений так, що з його кінця найкоротший перехід від вектора $\vec{\omega}$ до $\vec{r}$ видно проти ходу годинникової стрілки. Напрямок швидкості $\vec{V}$, отриманий з формули (2.19), співпадає з дійсним напрямом швидкості точки M (рис. 2.4).

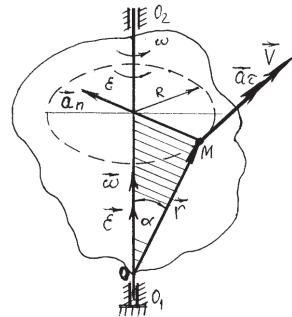


Рис. 2.4

Отже, з формули (2.19) можна знайти величину і напрям швидкості точки, яка належить тілу, що обертається.

Формула (2.19) називається формулою Ейлера.

Вектор швидкості будь-якої точки твердого тіла в обертальному русі дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла і радіус-вектора точки.

Швидкість точки в будь-якому випадку виражається похідною по часу від радіус-вектора $\vec{r}$, т. б.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.20)$$

У випадку обертального руху тіла навколо нерухомої осі, величина радіус-вектора як відрізка, що з'єднує дві точки твердого тіла, залишається постійною при обертанні тіла.

Отже, вираз (2.20) виражає похідну по часу від вектора постійного модуля $\vec{r}$. Формула (2.20) нам знадобиться, коли будемо розглядати складний рух точки.

Візьмемо похідну по часу від виразу (2.19):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + (\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}).$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}.$$

Маємо: $\vec{a} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{V}).$

Введемо позначення :

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (2.21)$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V}, \quad (2.22)$$

де $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ – відповідно дотичне і нормальне прискорення точки M тіла.

Надаємо читачеві можливість довести, що формули (2.21) і (2.22) дійсно є формулами дотичного і нормального прискорення точки в векторній формі і що з цих формул можна отримати вірні напрями цих прискорень (див. рис. 2.4).

2.7. Передаточні механізми

Передаточні механізми служать для передачі обертового руху від одного тіла до другого. Таких різноманітних передач велика кількість. Ми розглянемо випадок, коли осі обертання тіл нерухомі.

2.7.1. Зовнішнє зачеплення коліс

Розглянемо систему двох коліс (рис. 2.5).

Нехай колесо 1 має кутову швидкість ω_1 . Тоді колесо 2 буде мати кутову швидкість ω_2 . Знайдемо зв'язок між цими кутовими швидкостями. В точці A контакту коліс швидкість точки A зі сторони першого колеса буде $V_A = r_1 \omega_1$, зі сторони другого колеса $V_A = r_2 \omega_2$.

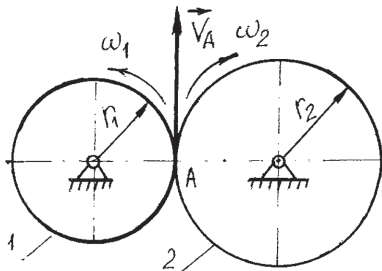


Рис. 2.5.

Тоді $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, або

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.23)$$

Відношення кутових швидкостей коліс дорівнює оберненому відношенню радіусів цих коліс.

При зовнішньому зачепленні двох коліс колеса обертаються в протилежних напрямках. Якщо в зачепленні зубчасті колеса, то відношення кутових швидкостей можна виразити через відношення кількості зубців в колесах:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (2.24)$$

де z_1 і z_2 – кількість зубців відповідно в колесі 1 і 2.

Відношення кутової швидкості ω_1 ведучого колеса до кутової швидкості ω_2 веденого колеса називається передаточним числом i :

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (2.25)$$

Розглянемо систему трьох коліс (рис. 2.6).

Знайдемо передаточне число

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_3}.$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2}.$$

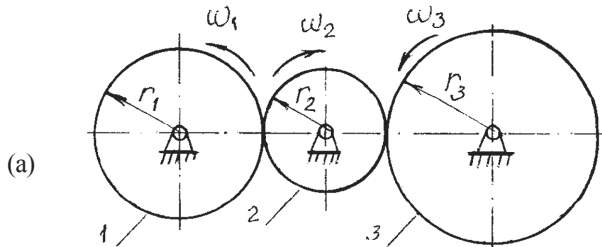


Рис. 2.6

(а)

(б)

Перемножимо вираз (а) на вираз (б):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \quad \text{Маємо} \quad i = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_1}.$$

Передаточне число між колесами 1 і 3 не залежить від радіуса другого колеса. Колесо 2 служить для того, щоб дати можливість колесу 3 обертатися в тому напрямі, що і колесо 1.

2.7.2. Внутрішнє зачеплення коліс

На рис 2.7 показано внутрішнє зачеплення двох коліс. Точка А є точкою контакту коліс 1 і 2.

Тому $r_1\omega_1 = r_2\omega_2$, тобто:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.26)$$

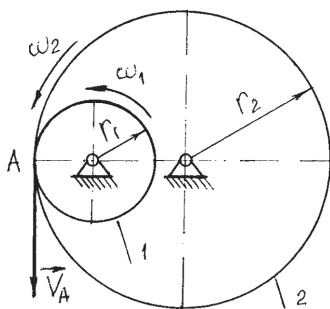


Рис. 2.7

Передаточне число цієї пари коліс знаходиться з такої самої формули, як і при зовнішньому зачепленні коліс (порівняйте формули (2.23) і (2.26)). При внутрішньому зачепленні колеса обертаються в одному напрямі.

2.7.3. Пасова передача

Якщо колеса знаходяться на деякій відстані одне від одного, то передачу обертального руху можна здійснити за допомогою суцільного паса (рис. 2.8).

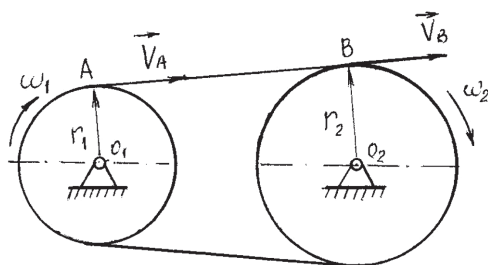


Рис. 2.8

$$V_A = r_1 \omega_1, \quad V_B = r_2 \omega_2,$$

$$\text{але } V_A = V_B.$$

Тоді

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.27)$$

При пасовій передачі колеса обертаються в одному напрямі.

На цьому ми закінчимо розгляд передаточних механізмів. Більш детально ці питання будуть розглядатися в таких дисциплінах як «Теорія механізмів і машин» та «Деталі машин».

2.8. Методика розв'язування задач на поступальний та обертальний рух твердого тіла

При поступальному русі швидкість і прискорення всіх точок тіла однакові. Тому при поступальному русі тіла достатньо розглянути рух однієї точки тіла. Всі доведені раніше формули, що описують рух точки, справедливі і для поступального руху твердого тіла.

Задачі, які відносяться до обертального руху тіла відносно нерухомої осі, можна розділити на три основні типи: 1) знаходження кута повороту, кутової швидкості і кутового прискорення тіла; 2) знаходження лінійних швидкостей і

прискорень точок тіла; 3) задачі, які відносяться до передачі обертового руху від одного тіла до другого.

Розглянемо конкретні задачі і ознайомимось з методикою їх розв'язування.

Задача 2.1

$$\rho = 0,8 \text{ м}$$

$$S = 0,07t^2 \text{ м}$$

$$S_1 = 1,4 \text{ м}$$

Тіло рухається по криволінійним напрямним згідно рівняння: $S = 0,07t^2$, де S – в м, t – в с (відлік ведеться від положення S_0). Знайти дотичне і нормальне прискорення тіла в положенні $S_1 = 1,4$ м (рис. 2.9).

$$a^\tau = ?$$

$$a^n = ?$$

Якщо взяти відрізок AB в цьому тілі, то цей відрізок рухається паралельно самому собі. Рух цього тіла є поступальним. Тому розглянемо рух однієї точки тіла, а саме точки A . Знайдемо, за який час тіло перемістилось з початкового положення (дугова координата $S_0 = 0$) в положення з дуговою координатою $S_1 = 1,4$ м. $S_1 = 0,07t_1^2$.

Звідси
$$t_1 = \sqrt{\frac{S_1}{0,07}} = 4,47 \text{ с.}$$

Знайдемо швидкість точок.

$$V = \frac{dS}{dt} = 0,14t.$$

При

$$t = t_1 = 4,47 \text{ с, } V_A = 0,626 \text{ м/с.}$$

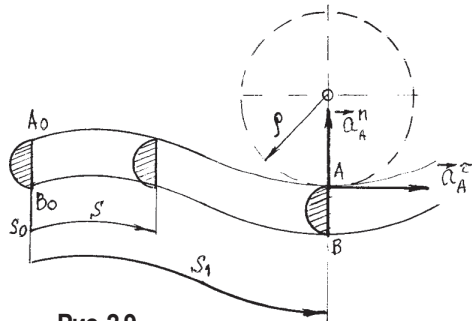


Рис. 2.9

Знайдемо дотичне і нормальне прискорення точки A з дуговою координатою S_1 :

$$a_A^\tau = \frac{dV}{dt} = 0,14 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

$$\text{Нормальне прискорення } a_A^n = \frac{V_A^2}{\rho} = \frac{0,626^2}{0,8} = 0,49 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

ρ – радіус кривини лінії в даній точці.

Вектори дотичного і нормального прискорення точки A показані на рис. 2.9.

Задача 2.2.

$x=2t$ см	Кулачок у формі півкола рухається по горизонтальним напрямним за законом $x=2t$, де x -в см., t – в с. Координата x відраховується по горизонталі від точки O , коли стержень AB , що опирається одним своїм кінцем на коловий контур, знаходиться в найнижчому положенні (тобто в точці O). Знайти рівняння руху стержня і швидкість точки B стержня AB (рис. 2.10).
$r=4$ см	
$y=f(t)$	
$V_B=?$	

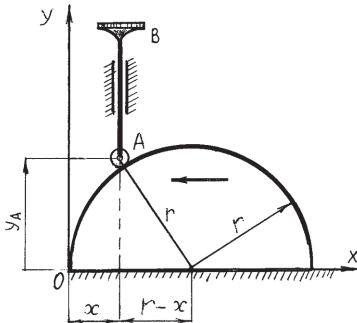


Рис. 2.10.

Кулачок рухається поступально вздовж осі OX . Рух кулачка передається стержню AB . Стержень AB також виконує поступальний рух вздовж осі OY . Нехай точка A в даний момент часу має координати $x_A=x$ і y_A . Виразимо координату y_A через x_A .

$$r^2 = y_A^2 + (r-x)^2 = y_A^2 + r^2 - 2rx + x^2.$$

$$\text{Звідси } y_A = \sqrt{2rx - x^2}; \text{ або } y_A = 2\sqrt{4t - t^2}.$$

Вертикальна швидкість точки A :

$$V_A = \frac{dy_A}{dt} = \frac{2(2-t)}{\sqrt{t(4-t)}}.$$

Так як рух стержня поступальний, то швидкість точки B : $V_B=V_A$.

Задача 2.3.

Знайти кутову швидкість секундної стрілки годинника.

Будемо вважати, що стрілка обертається рівномірно. Тоді з формули (2.6) маємо $\omega = \frac{\varphi}{t}$. Нехай стрілка зробила один оберт. Тоді кут $\varphi = 2\pi$ радіан, а час

$$t=60 \text{ с. Кутова швидкість буде } \omega = \frac{\pi}{30} \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Задача 2.4.

Знайти кутову швидкість турбіни, що відповідає 15000 об/хв. Скористаємось формулою (2.8): $\omega = \frac{\pi n}{30}$. Після підстановки числових даних $\omega = 1571 \text{ рад/с}$.

Задача 2.5.

$$\begin{array}{l} \omega_0 = 0 \\ N = 7200 \text{ об.} \\ t = 120 \text{ с} \\ \varepsilon = ? \end{array}$$

Тіло, починаючи обертатись рівноприскорено зі стану спокою, робить 7 200 обертів за перші дві хвилини. Знайти кутове прискорення тіла.

Використаємо формулу (2.11): $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$. Але

$$\omega_0 = 0. \text{ Тоді } \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}. \text{ Звідки } \varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2}. \text{ Кут } \varphi \text{ знайдемо з формули (2.7). } \varphi = 2\pi N.$$

$$\text{Тоді } \varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2}; \quad \varepsilon = 2\pi \text{ рад./с.}$$

Задача 2.6.

$$\begin{array}{l} \omega_0 = 0 \\ n = 120 \text{ об./хв.} \\ t = 600 \text{ с} \\ N = ? \end{array}$$

Махове колесо починає обертатись зі стану спокою рівноприскорено. Через 10 хвилин після початку руху воно має кутову швидкість, яка відповідає 120 об/хв. Скільки обертів N зробило колесо за цей час?

Виразимо кутову швидкість в рад/с:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 4\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Використаємо формули (2.9), (2.10) і (2.7):

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \omega = \omega_0 + \varepsilon t & \omega = \varepsilon t & \varepsilon = \frac{\omega}{t} & \varphi = 2\pi N & N = \frac{\omega t}{4\pi} \\ \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} & \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} & \varphi = \frac{\omega t}{2} & N = \frac{\varphi}{2\pi} & N = 600 \text{ об.} \\ \omega_0 = 0 & & & & \end{array}$$

Задача 2.7.

$$\begin{array}{l} V_A = 6 \text{ м/с} \\ V_B = 5,5 \text{ м/с} \\ AB = l = 0,15 \text{ м} \\ OA = R = ? \end{array}$$

Знайти радіус R маховика, якщо при обертанні швидкість точок на його ободі 6 м/с, а швидкість точок, які знаходяться на 15 см ближче до осі обертання, 5,5 м/с (рис. 2.11).

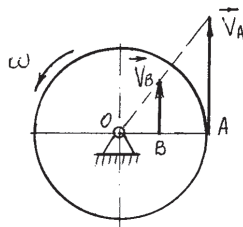


Рис. 2.11.

Скористаємось формулою (2.12):

$$V_A = \omega \cdot OA.$$

(а)

$$V_B = \omega \cdot OB. \quad \text{Тоді } V_A - V_B = \omega(OA - OB) = \omega \cdot AB = \omega \cdot l.$$

$$\text{Звідси} \quad \omega = \frac{V_A - V_B}{l}. \quad \text{З виразу (а): } OA = R = \frac{V_A}{\omega}.$$

$$\text{Тоді} \quad R = \frac{V_A \cdot l}{V_A - V_B}; \quad R = 1,8 \text{ м.}$$

Задача 2.8.

$$\omega_0 = 0; \quad R = 2 \text{ м}$$

$$t_1 = 10 \text{ с}; \quad t_2 = 15 \text{ с}$$

$$V_1 = 100 \text{ м/с}$$

$$V_2 = ?$$

$$a_n = ?$$

$$a_\tau = ?$$

Махове колесо радіусом 2 м обертається рівноприскорено зі стану спокою. Через 10 с точки, які знаходяться на ободі, набули швидкості 100 м/с. Знайти швидкість, нормальне і дотичне прискорення цих точок колеса для моменту часу 15 с (рис. 2.12).

$$\text{В момент часу } t_1 \text{ швидкість } V_1 = \omega_1 R. \text{ Тоді } \omega_1 = \frac{V_1}{R} =$$

50 рад/с , ω_1 — де кутова швидкість колеса в момент часу t_1 . Знайдемо кутове прискорення колеса: $\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1$, $\omega_0 = 0$. Тоді $\omega_1 = \varepsilon t_1$.

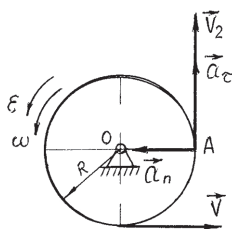


Рис. 2.12

$$\text{Звідси } \varepsilon = \frac{\omega_1}{t_1} = 5 \text{ (рад/с)}.$$

В момент часу $t_2 = 15 \text{ с}$ кутова швидкість $\omega_2 = \varepsilon t_2 = 75 \text{ рад/с}$. Знайдемо швидкість і прискорення точки А колеса в момент часу t_2 :

$$V_2 = \omega_2 R = 75 \cdot 2 = 150 \text{ (м/с)};$$

$$a_n = \omega_2^2 \cdot R = 75^2 \cdot 2 = 11250 \text{ (м/с)};$$

$$a_\tau = \varepsilon R = 5 \cdot 2 = 10 \text{ (м/с)}.$$

Задача 2.9.

$$R = 0,2 \text{ м}; \quad x = 2t^2 \text{ м}; \quad t_1 = 2 \text{ с}$$

$$\omega_1 = ? \quad \varepsilon_1 = ? \quad V_A = ? \quad a_A^n = ?$$

$$a_A^\tau = ?$$

Вал радіусом 0,2 м приводиться в рух тілом D, яке опускається вниз по закону $x = 2t^2$ (м), де x — відстань тіла D до місця сходу троса з поверхні вала, t — час в секундах. Знайти кутову швидкість

і кутове прискорення вала, а також швидкість, дотичне і нормальне прискорення точок на поверхні валу через дві секунди після початку руху тіла D (рис. 2.13.).

Нам відомий закон руху тіла D . Тому швидкість і прискорення тіла D :

$$V_D = \frac{dx}{dt} = 4t, \quad a_D = \frac{dV_D}{dt} = 4 \text{ (м/с)}.$$

Точка A вала має таку ж швидкість, як і тіло D :

$$V_A = V_D = 4t.$$

Дотичне прискорення точки A і прискорення тіла D однакові:

$$a_A^{\tau} = a_D = 4 \text{ (м/с}^2\text{)}. \quad \text{При } t_1 = 2\text{с, } V_A = 8 \text{ (м/с)}.$$

Знайдемо кутову швидкість тіла:

$$\omega_1 = \frac{V_A}{R} = \frac{8}{0,2} = 40 \text{ (рад/с)}. \quad \omega_1 = 40 \text{ рад/с}.$$

Тоді нормальне прискорення точки A :

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot R = 40^2 \cdot 0,2 = 320 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

$$\text{Кутове прискорення: } \varepsilon = \frac{a_A^{\tau}}{R} = \frac{4}{0,2} = 20 \text{ (рад/с}^2\text{)};$$

Задача 2.10.

$l = 0,3 \text{ м}$
 $n = 2400 \text{ об/хв.}$
 $R = 0,1 \text{ м}$
 $S = 0,03 \text{ м}$
 $V - ?$

Два тонких диска обертаються на загальній осі. Відстань між дисками $0,3 \text{ м}$, швидкість обертання 2400 об/хв. Куля, яка летить паралельно осі обертання на відстані $0,1 \text{ м}$ від неї, пробиває ці диски. Отвори в дисках зміщені один відносно другого на відстань $0,03 \text{ м}$, рахуючи її по дузі кола. Чому дорівнює швидкість кулі? (рис. 2.14)

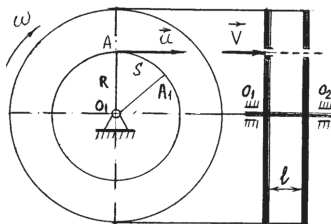


Рис. 2.14.

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 2400}{30} = 80\pi \text{ (рад/с)}.$$

Відстань l між дисками куля пролітає з швидкістю

$$V = \frac{l}{t}, \quad (1)$$

де t – час руху кулі між дисками.

За цей же самий час t точка A диска зміщується на відстань S і попадає в положення A_1 :

$$S = U \cdot t,$$

де U – швидкість точки A диска, $t = \frac{S}{U}$.

$$\text{Швидкість } U = \omega \cdot R. \quad \text{Тоді } t = \frac{S}{\omega \cdot R} \quad (2)$$

Підставимо вираз (2) у вираз (1): $V = \frac{l \cdot \omega \cdot R}{S} = 251 \text{ (м/с)}.$

Задача 2.11.

$n_I = 630 \text{ об/хв.}$
 $z_1 = 20; \quad z_2 = 60$
 $z_3 = 10; \quad z_4 = 70$

$\omega_{II} = ?$
 $i = ?$

Редуктор швидкості передає обертання від вала I до вала II за допомогою чотирьох зубчастих коліс 1, 2, 3, 4, які обертаються навколо нерухомих осей (рис. 2.15). Вал I робить 630 об/хв. Яка кутова швидкість в об/хв вала II , якщо зубчасті колеса мають слідувачі числа зубців: $z_1 = 20, z_2 = 60, z_3 = 10, z_4 = 70$. Яке передаточне число редуктора?

Кутова швидкість колеса 1 і вала I однакові. Розглянемо пару коліс 1–2. Використаємо формулу (2.24):

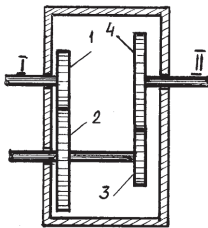


Рис. 2.15.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad \text{Звідси} \quad \omega_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \omega_1.$$

Кутові швидкості коліс 3 і 2 однакові, тому що вони жорстко закріплені на загальному валу:

$$\omega_3 = \omega_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \omega_1. \quad (1)$$

Розглянемо пару коліс 3–4:

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Звідси

$$\omega_4 = \frac{z_3}{z_4} \cdot \omega_3. \quad (2).$$

Кутові швидкості колеса 4 і вала II однакові: $\omega_{II} = \omega_4$.

Підставимо вираз (1) у вираз (2):

$$\omega_4 = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} \cdot \omega_1. \quad (3).$$

Відношення кутових швидкостей дорівнює відношенню чисел обертів за хвилину. Тоді з рівняння (3):

$$n_{II} = n_4 = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} \cdot n_1 = \frac{20 \cdot 10}{60 \cdot 70} \cdot 630 = 30 \text{ (об/хв)}.$$

$$\text{Передачне число } i = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{\omega_1}{\omega_4}, \quad i = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}, \quad i = \frac{60 \cdot 70}{20 \cdot 10} = 21.$$

Отже $n_{II} = 30 \text{ об/хв.}; \quad i=21.$

Задача 2.12

$r_1 = 0,1 \text{ м}$
 $r_2 = 0,2 \text{ м}$
 $r_3 = 0,3$
 $n = 120 \text{ об/хв.}$

З якою швидкістю піднімається вантаж В, якщо радіуси коліс слідуєчі: $r_1=0,1 \text{ м}$, $r_2=0,2 \text{ м}$, $r_3=0,3 \text{ м}$. Колеса 2 і 3 знаходяться на одному валу і жорстко з ним з'єднані. Колесо 1 обертається з кутовою швидкістю, що відповідає 120 об/хв (рис. 2.16).

$V_B = ?$

Маємо пасову передачу (див. пункт 2.7.3.):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}; \quad \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_1,$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{120\pi}{30} = 4\pi \text{ (рад/с)}.$$

В зв'язку з тим, що колеса 2 і 3 жорстко з'єднані з їхнім загальним валом,

$$\text{маємо } \omega_3 = \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_1.$$

Швидкість точки А колеса 3:

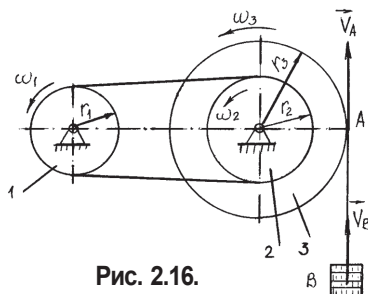


Рис. 2.16.

$$V_A = \omega_3 \cdot r_3; \quad V_A = \frac{r_1 r_3}{r_2} \cdot \omega_1.$$

Швидкості точок B і A однакові: $V_B = V_A$.

$$V_B = \frac{r_1 r_3}{r_2} \cdot \omega_1; \quad V_B = 0,6\pi \text{ м/с}.$$

2.9. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 2.13.

На краю диска, який рівномірно обертається навколо нерухомої осі, знаходиться невелике тіло. В той момент, коли швидкість тіла напрямлена вертикально вгору, тіло відривається від диска і летить вгору. Максимальна висота, яку досягає тіло, дорівнює 1,8 м. Яка кутова швидкість обертання диска в об/хв.?

Прийняти $g = 10 \text{ м/с}^2, \quad \pi = 3,14.$

Відповідь: $n = 191 \text{ об/хв}.$

Задача 2.14.

На диск радіусом 0,2 м намотаний трос, до кінця якого прикріплений вантаж. Вантаж починає опускатись з прискоренням $0,2 \text{ м/с}^2$. Яка буде кутова швидкість диска, коли вантаж опуститься на 10 м? З яким кутовим прискоренням обертається диск?

Відповідь: $\omega = 10 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2.$

Задача 2.15.

При запуску електродвигуна ротор радіусом $r=0,4 \text{ м}$ обертається по закону $\varphi = 0,3t^2$, де φ – в рад, t – в с. Знайти кут повороту ротора через 10 с після початку обертання, його кутову швидкість і кутове прискорення, а також лінійну швидкість, дотичне і нормальне прискорення точок на ободі ротора.

Відповідь: $\varphi_1 = 30 \text{ рад}; \quad \omega_1 = 6 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_1 = 0,6 \text{ рад/с}^2; \quad V_l = 2,4 \text{ м/с};$
 $a_n = 14,4 \text{ м/с}; \quad a_\tau = 0,24 \text{ м/с}^2.$

Задача 2.16.

По проекту Ціолковського для створення штучної сили тяжіння на жилих штучних супутниках, які мають форму кільця (тора), необхідно надати їм обертальний рух навколо осі симетрії. Знайти період такого обертання, щоб люди, які знаходяться в цьому супутнику, мали земну силу тяжіння, якщо їх відстань до осі обертання дорівнює 39,2 м ($g = 9,8 \text{ м/с}^2$).

Відповідь: $T = 4 \text{ с}$.

Задача 2.17.

При рівносповільненому гальмуванні привода ведучий шків 1 пасової передачі зробив 350 обертів і зупинився. Яке кутове прискорення веденого шківу 2, якщо в момент початку гальмування він обертася з кутовою швидкістю, що відповідає 300 об/хв? (рис. 2.17).

Відповідь: $\varepsilon_2 = -0,393 \text{ рад/с}^2$.

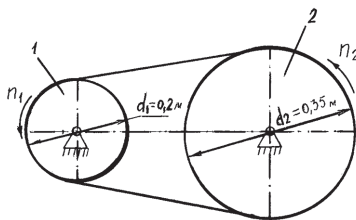


Рис. 2.17

Задача 2.18.

Через скільки часу зубчасте конічне колесо 1 радіусом $r_1 = 10 \text{ см}$ буде мати кутову швидкість $\omega_1 = 300 \text{ рад/с}$, якщо воно приводиться в обертальний рух колесом 2 радіусом $r_2 = 15 \text{ см}$. Колесо 2 обертається рівноприскорено з стану спокою з кутовим прискоренням $\varepsilon_2 = 2 \text{ рад/с}^2$ (рис. 2.18).

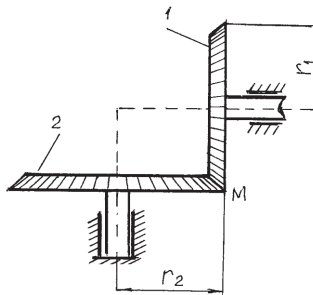


Рис. 2.18

Задача 2.19.

Електродвигун, зробивши після відключення 675 обертів, зупинився через 30 секунд. Вважаючи рух рівносповільненим, знайти початкову кутову швидкість і закон обертання електродвигуна.

Відповідь: $\omega_0 = 90\pi \text{ рад/с}$; $\varphi = \frac{3\pi}{2} \cdot (60 - t) \text{ рад}$.

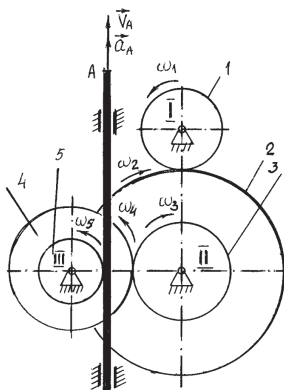


Рис. 2.19

Задача 2.20.

В механізмі домкрата з валом *II* жорстко з'єднані зубчасті колеса 2 і 3, а з валом *III* – зубчасті колеса 4 і 5 (рис. 2.19). Ведучий вал *I* передає обертання за допомогою зубчастих коліс 3 і 4 валу *III*, а від останнього за допомогою зубчастого колеса 5 – зубчастій рейці *A*. Число зубців: $z_1 = 8$, $z_2 = 32$, $z_3 = 16$, $z_4 = 24$. Радіус колеса 5 $r_5 = 5$ см.

Знайти швидкість і прискорення рейки *A* через 3 секунди, якщо ведучий вал *I* обертається рівноприскорено зі стану спокою з кутовим прискоренням $\varepsilon_1 = 6\pi$ рад/с².

Відповідь: $V_A = 0,471$ м/с ; $a_A = 0,157$ м/с².

3. Плоский рух твердого тіла

3.1. Означення плоского руху

Якщо всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині, то такий рух тіла називається плоскопаралельним (плоским) рухом тіла.

Цей рух тіла в практичній діяльності людини відіграє важливу роль, тому ми приділимо значну кількість часу для вивчення цього руху. Наведемо деякі приклади цього руху (рис. 3.1, 3.2). На рис. 3.1 (а) показано рух круглого циліндричного котка. Проведемо нерухому площину Π , яка перпендикулярна осі обертання $O_1 O_2$ катка.

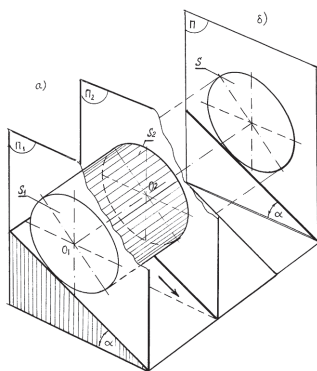


Рис. 3.1

Проведемо площини Π_1, Π_2 і т. д., які паралельні площині Π і перетинають тіло котка. Отримали кругові перерізи S_1, S_2 і т. д. Точки, які знаходяться в цих перерізах, рухаються разом з перерізами паралельно нерухомій площині Π . Якщо при русі котка всі перерізи S_1, S_2 і т. д. будуть залишатись в площинах Π_1, Π_2 і т. д., то в цьому випадку тіло виконує плоский рух. В подальшому площини будемо суміщати з нерухомою площиною (з площиною рисунка), а замість всього тіла будемо зображати тільки фігуру S (рис. 3.1.б) і вивчати рух цієї плоскої фігури.

Рух кривошипно-шатунного механізму показано на рис. 3.2. Всі ланки цього механізму можуть рухатись тільки в одній площині.

Кривошип OA виконує обертальний рух навколо осі, що проходить через точку O ; повзун B виконує поступальний рух. Шатун AB ,

як видно з рис. 3.2, виконує складний рух, але всі точки шатуна AB рухаються в одній площині. Шатун AB виконує плоско-паралельний (плоский) рух.

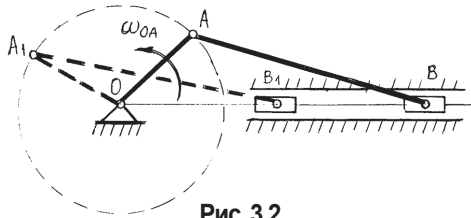


Рис. 3.2.

3.2. Рівняння плоского руху твердого тіла

Як уже відмічалось раніше, плоский рух твердого тіла тотожний руху його плоского перерізу. Тому в подальшому будемо розглядати рух тільки перерізу тіла, сумістивши його для зручності з площиною рисунка.

Нехай тіло виконує плоский рух. Розглянемо рух плоского перерізу S цього тіла (рис. 3.3). В площині руху фігури S виберемо систему координат XOY . Візьмемо на площині S точки A і B , і проведемо вектор $\overline{AB}$.

Запишемо очевидну векторну рівність:

$$\vec{\rho}_B = \vec{\rho}_A + \vec{AB}, \quad (3.1)$$

де $\vec{\rho}_B$ і $\vec{\rho}_A$ – радіус-вектори відповідно точок A і B тіла.

З плином часу радіус-вектори $\vec{\rho}_B$ і $\vec{\rho}_A$ змінюються, тобто є функціями часу. При русі тіла відстань між точками A і B не змінюється (тіло тверде), тобто модуль вектора $|\overline{AB}| = \text{const}$, але змінюється напрям вектора $\overline{AB}$ завдяки тому, що фігура S може обертатись в площині XOY . Це означає, що вектор $\overline{AB}$ є функцією часу:

$$\overline{AB} = \overline{AB}(t). \quad (3.2)$$

Вирази (3.1) і (3.2) є векторними рівняннями плоского руху твердого тіла.

Примітка: При поступальному русі тіла вектор $\overline{AB} = \text{const}$ (див. розділ 1).

При плоскому русі тіла вектор $\overline{AB} \neq \text{const}$.

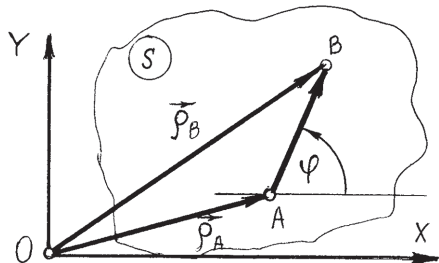


Рис. 3.3.

3.3. Представлення плоского руху тіла на поступальний рух разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса

Нехай тіло виконує плоский рух. Рух цього тіла будемо розглядати як рух відрізка AB , що з'єднує точки A і B цього тіла (рис. 3.4).

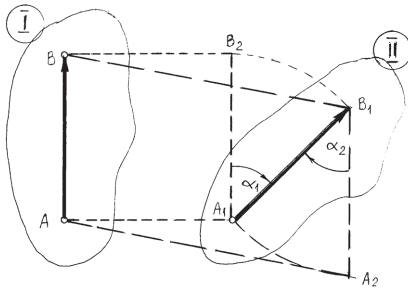


Рис. 3.4

Нехай в початковий момент часу тіло займало положення I , а через деякий проміжок часу—положення II . В положенні II тіла відрізок AB зайняв положення A_1B_1 .

Яким чином відрізок AB із положення I попав в положення II ? Візьмемо за полюс точку A . Нехай тіло рухалось поступально і точка A попала в точку A_1 . Тоді точка B відрізка AB повинна попасти в точку B_2 . Щоб точка B_2 попала

в положення B_1 , необхідно, щоб тіло виконало обертальний рух на кут α_1 навколо точки A_1 (полюса).

Таким чином, плоский рух тіла можна розглядати як суму двох простих рухів: 1) поступального руху тіла разом з полюсом, 2) обертального руху тіла навколо полюса.

Яку ж точку тіла брати за полюс і що зміниться, якщо поміняти полюс?

Візьмемо за полюс точку B , тобто поміняємо полюс (рис. 3.4). Нехай тіло з положення I рухається поступально і точка B попала в точку B_1 . Тоді точка A попадає в положення A_2 .

Щоб точка A_2 попала в положення A_1 , необхідно тілу зробити обертальний рух на кут α_2 навколо точки B_1 . Проаналізуємо ці два випадки. По-перше, при обертальному русі кути $\alpha_1 = \alpha_2$ і, по-друге, напрям обертання однаковий.

Висновок:

1. Вибір полюса не впливає на обертальний рух тіла, а це означає, що значення кутової швидкості ω і кутового прискорення тіла не буде залежати від вибору полюса.

2. Вибір полюса впливає на поступальний рух тіла.

В зв'язку з тим, що плоский рух можна розглядати як поступальний рух тіла разом з полюсом і обертальний навколо полюса, то можна інакше записати рівняння плоского руху тіла.

Нехай тіло виконує плоский рух (рис. 3.5). Виберемо декартову систему координат в площині руху плоскої фігури S . Виберемо на твердому тілі відрізок AB . Візьмемо за полюс точку A .

Запишемо такі рівняння руху:

$$\begin{aligned}x_A &= f_1(t); \\ y_A &= f_2(t); \\ \varphi &= \varphi(t).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Перші два рівняння виразу (3.3) характеризують рух точки A , тобто характеризують поступальний рух тіла. Третє рівняння виразу (3.3) характеризує обертальний рух тіла навколо полюса A . Таким чином, рівняння (3.3) є рівняннями плоского руху твердого тіла. Рівняння (3.3) і (3.1) разом з (3.2) не суперечать одне одному. Рівняння (3.1), (3.2) записані в векторній формі, а (3.3) – в координатах.

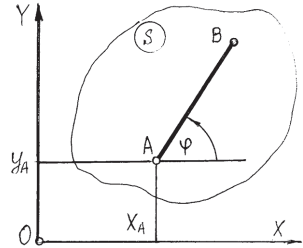


Рис. 3.5

Розглянемо окремі випадки плоского руху тіла.

1. Нехай полюс A не рухається. Тоді тіло буде виконувати обертальний рух навколо точки A . Це означає, що обертальний рух тіла є одним із видів плоского руху.

2. Нехай при плоскому русі тіла кут $\varphi = const$, тобто тіло не обертається навколо полюса A . Це означає, що тіло виконує поступальний рух в одній площині. Треба зазначити, що поступальний рух тіла може бути не тільки в одній площині. Тому не можна говорити, що поступальний рух тіла є завжди частинним випадком плоского руху тіла. На рис. 3.2 поступальний рух повзуна B є частинним випадком плоского руху, тому що цей рух проходить в одній площині.

3.4. Швидкість точок тіла при його плоскому русі

Знайдемо швидкість точок тіла, яке виконує плоский рух. Візьмемо за полюс точку A . Використаємо формули (3.1) і (3.2).

Візьмемо похідну по часу від виразу (3.1):

$$\frac{d\vec{\rho}_B}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}, \quad \frac{d\vec{\rho}_B}{dt} = \vec{V}_B, \quad \frac{d\vec{\rho}_A}{dt} = \vec{V}_A.$$

Вектор $\overline{AB}$ характеризує обертальний рух тіла навколо полюса A . Це означає,

що $\frac{d\vec{\rho}_B}{dt} = \vec{V}_{BA}$ є обертальна швидкість точки B відносно точки A (рис. 3.6).

$$\text{Маємо} \quad \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.\tag{3.4}$$

Швидкість довільної точки тіла при його плоскому русі дорівнює векторній сумі швидкості полюса і обертальної швидкості цієї точки навколо полюса.

Запис $\vec{V}_{BA}$ означає, що точка B обертається навколо точки A . Запис $\vec{V}_{CA}$ говорить про те, що розглядається обертальна швидкість точки C відносно точки A .

При обертальному русі модуль швидкості V_{BA} дорівнює:

$$V_{BA} = \omega \cdot AB, \quad (3.5)$$

де ω – кутова швидкість тіла при його обертанні навколо полюса A .

Обертальна швидкість $\vec{V}_{BA}$ напрямлена перпендикулярно радіусу обертання AB :

$$\vec{V}_{BA} \perp \vec{AB}. \quad (3.6)$$

Якщо використати формулу Ейлера, то $\vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$. (3.7)

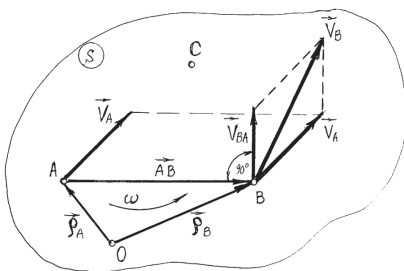


Рис. 3.6

де $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості тіла.

Якщо розглянути рис. 3.6, то вектор $\vec{\omega}$ напрямлений по осі обертання, що проходить через точку A , до нас.

Використовуючи формулу (3.7), формулу (3.4) можна записати в такому вигляді:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + (\vec{\omega} \times \vec{AB}). \quad (3.8)$$

3.5. Властивості швидкостей точок плоскої фігури, які лежать на одній прямій

Властивість 1: Проекції швидкостей точок плоскої фігури на лінію, що проходить через ці точки, рівні.

Нехай тіло виконує плоский рух. Візьмемо за полюс точку A , швидкість якої $\vec{V}_A$. Обертання плоскої фігури відносно точки A показано на рис. 3.7.

Знайдемо швидкість точки C .

Використаємо формулу (3.4):

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA}, \text{ де } \vec{V}_{CA} \perp \vec{AC} \quad (a)$$

Спроєкуємо вираз (a) на лінію AC :

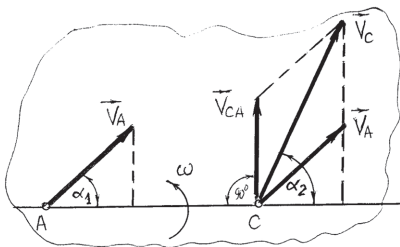


Рис. 3.7.

$$np_{AC}\vec{V}_C = np_{AC}\vec{V}_A + np_{AC}\vec{V}_{CA}.$$

Але $np_{AC}\vec{V}_{CA}=0$, тому що $\vec{V}_{CA} \perp AC$.

$$\text{Маємо} \quad np_{AC}\vec{V}_C = np_{AC}\vec{V}_A. \quad (3.9)$$

Вираз (3.9) можна записати інакше:

$$V_A \cos \alpha_1 = V_C \cos \alpha_2. \quad (3.10)$$

Властивість 2: Кінці векторів швидкостей точок плоскої фігури, які лежать на одній прямій, також лежать на одній прямій і ділять її на частини, пропорційні відстаням між цими точками.

На рис. 3.8 показані три точки A, C, B , які лежать на одній прямій, швидкості яких:

$$\vec{V}_A, \vec{V}_C, \vec{V}_B.$$

$$\text{Маємо:} \quad \frac{ac}{AC} = \frac{cb}{CB}. \quad (3.11)$$

Цю властивість швидкостей приводимо без доведення.

3.6. Миттєвий центр швидкостей

В пункті 3.3 ми представили плоский рух тіла як поступальний рух тіла разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса. Але плоский рух тіла можна розглядати як суму миттєво обертальних рухів відносно деякої системи точок. Покажемо, що дійсно існують такі точки фігури, швидкість яких в даний момент часу дорівнює нулю і тіло в цей час виконує миттєво обертальний рух.

Нехай тіло в плоскому русі в даний момент часу має кутову швидкість ω , а точка A – швидкість $\vec{V}_A$ (рис. 3.9). Проведемо через точку A перпендикуляр до вектора швидкості $\vec{V}_A$. Візьмемо на цьому перпендикулярі точку P . Використовуючи формулу (3.4), для точки P запишемо:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}, \quad (a)$$

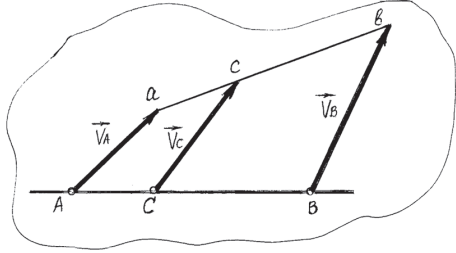


Рис. 3.8

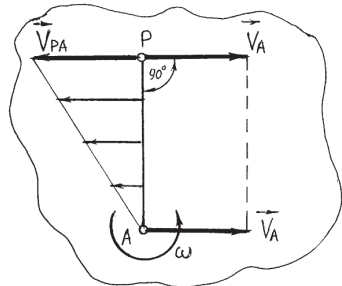


Рис. 3.9

де швидкість $\vec{V}_{PA}$ перпендикулярна відрізку AP .

Модуль швидкості
$$V_{PA} = \omega \cdot PA. \quad (6)$$

Побудуємо векторну рівність (а) в точці P . В точці P швидкості $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_{PA}$ напрямлені по одній прямій в протилежні сторони. Тому модуль швидкості точки P буде:

$$V_P = V_A - V_{PA}.$$

З урахуванням виразу (б):
$$V_P = V_A - \omega \cdot AP.$$

Міняючи положення точки P на перпендикулярі, тобто міняючи відстань AP , можна знайти таке положення точки P , при якому швидкість $V_P = 0$.

$$0 = V_A - \omega \cdot AP.$$

Звідси
$$AP = \frac{V_A}{\omega}. \quad (3.12)$$

Таким чином довели, що існує така точка плоскої фігури, швидкість якої дорівнює нулю. Ця точка називається *миттєвим центром швидкостей* (м. ц. ш.).

Миттєвим центром швидкостей називається така точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Миттєвий центр швидкостей знаходиться на перпендикулярі до вектора швидкості на відстані, яка визначається за формулою (3.12).

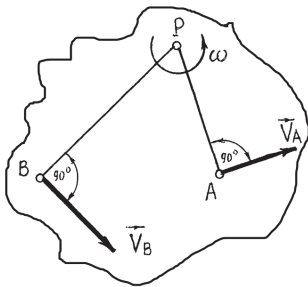


Рис. 3.10

Визначимо розподіл швидкостей точок плоскої фігури в тому випадку, коли в даний момент часу відомо положення миттєвого центра швидкостей. Нехай це буде точка P (рис. 3.10).

Візьмемо за полюс точку P . Знайдемо швидкості довільних точок A і B :

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP}; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP}.$$

Але швидкість $V_P = 0$.

Тоді
$$\vec{V}_A = \vec{V}_{AP}; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_{BP}.$$

Це означає, що:

$$\vec{V}_A \perp AP; \quad \vec{V}_B \perp BP. \quad (3.13)$$

$$V_{AP} = \omega \cdot AP; \quad V_{BP} = \omega \cdot BP.$$

Маємо:

$$V_A = \omega \cdot AP; \quad V_B = \omega \cdot BP. \quad (3.14)$$

AP, BP – називаються *миттєвими радіусами обертання*.

Візьмемо відношення:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\omega \cdot AP}{\omega \cdot BP}.$$

Маємо:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}. \quad (3.15)$$

Можна зробити такі висновки:

1. Швидкості точок плоскої фігури в даний момент часу розподіляються так само, як при обертанні фігури навколо осі, що проходить через миттєвий центр швидкості перпендикулярно площині фігури.

2. Модуль швидкості довільної точки плоскої фігури в кожний момент часу дорівнює добутку кутової швидкості тіла на миттєвий радіус обертання точки. Вектор швидкості перпендикулярний миттєвому радіусу обертання.

3. Миттєвий центр швидкостей знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів швидкостей в даних точках.

4. Відношення швидкостей двох точок плоскої фігури прямо пропорційне відношенню відстаней цих точок до м. ц. ш.

5. Кутова швидкість обертання за допомогою м. ц. ш. визначається за допомогою формули

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (3.16)$$

Щоб знайти кутову швидкість тіла при його плоскому русі за допомогою м. ц. ш., необхідно швидкість якої-небудь точки тіла розділити на її відстань до м. ц. ш.

3.7. Прийоми знаходження миттєвого центра швидкостей

Розглянемо деякі випадки плоского руху тіла і прийоми знаходження м. ц. ш.

1. Нехай відома величина і напрям швидкості точки A . Треба знайти положення м. ц. ш., якщо відомо напрям швидкості точки B (рис. 3.11). Проведемо через точки A і B перпендикуляри до напрямів швидкостей $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$. В точці P , перетину перпендикулярів знаходиться миттєвий центр швидкостей тіла. Швидкість точки B і кутова швидкість тіла знаходяться за формулами:

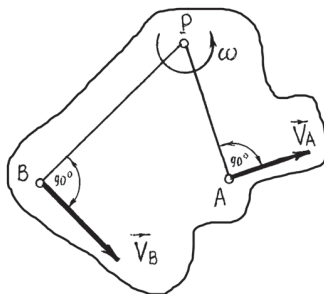


Рис. 3.11

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}; \quad \omega = \frac{V_A}{AP}.$$

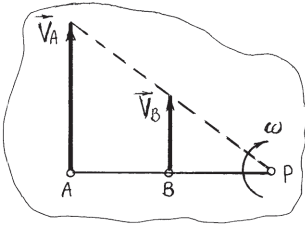


Рис. 3.12.

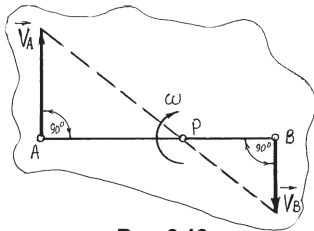


Рис. 3.13.

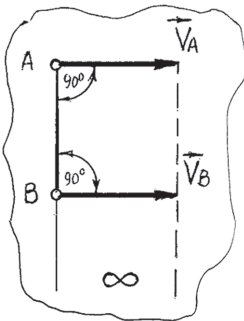


Рис. 3.14.

2. Нехай точки лежать на спільному перпендикулярі до швидкостей цих точок, швидкості цих точок паралельні (рис. 3.12). Проведемо лінію через кінці векторів швидкостей до перетину з спільним перпендикуляром. Точка перетину P є миттєвим центром швидкостей.

3. Нехай точки лежать на спільному перпендикулярі до швидкостей цих точок, швидкості паралельні, але напрямлені в протилежні сторони (рис. 3.13). Знаходження положення м. ц. ш. подібне пункту 2.

4. Точки на одному перпендикулярі і, швидкості їх однакові по величині і напрямку (рис. 3.14). Якщо виконати побудову, аналогічну пункту 2, то отримаємо, що лінії не перетинаються, тобто немає такої точки, відносно якої тіло обертається. Говорять, що м. ц. ш. знаходиться на нескінченності. Це означає, що тіло виконує миттєвий поступальний рух. Швидкості $\vec{V}_A = \vec{V}_B$ і, взагалі, швидкості всіх точок тіла в цей момент часу однакові.

Кутова швидкість

$$\omega = \frac{V_A}{\infty} = 0. \quad (3.17)$$

5. Розглянемо рух колеса радіусом R по нерухомій площині (рис. 3.15).

Нехай колесо котиться без ковзання по нерухомій лінії. Нерухома лінія може бути прямолінійною MN , або криволінійною M_1N_1 . Точка P – точка контакту колеса з нерухомою площиною. Швидкість точки P , що належить колесу, повинна бути такою ж самою, як і швидкість точки P , що належить лінії MN . Але швидкості точок, що належать лінії MN , дорівнюють нулю. Тому швидкість точки P , що належить колесу, дорівнює нулю.

$$V_P = 0. \quad (3.18)$$

Це означає, що точка контакту P контура плоскої фігури з нерухомою лінією MN (M_1N_1) є миттєвим центром швидкостей плоскої фігури.

Кутова швидкість колеса знаходиться з формули

$$\omega = \frac{V_C}{CP}. \quad (3.19)$$

Напрями швидкостей точок A, B, D відповідно перпендикулярні до AP, BP, DP . Знайдемо модуль швидкостей точок A, B, D :

$$\frac{V_A}{V_C} = \frac{AP}{CP}, \text{ але } \frac{AP}{CP} = \frac{R\sqrt{2}}{R} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Тоді} \quad V_A = V_C \sqrt{2}. \quad (3.20)$$

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{BP}{CP}; \quad \frac{BP}{CP} = 2.$$

$$\text{Тоді} \quad V_B = 2V_C. \quad (3.21)$$

Швидкість точки D по модулю дорівнює швидкості точки A :

$$V_D = V_C \sqrt{2}. \quad (3.22)$$

Крім миттєвого центра швидкостей P плоскої фігури можна розглядати збіжну з нею точку P нерухомої площини. Слід миттєвих центрів швидкостей в нерухомих площині називається *миттєвим центром обертання плоскої фігури*.

Миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр обертання (м. ц. о.) – геометрично одна і та ж точка, з тією тільки різницею, що м. ц. ш. – точка рухомої плоскої фігури, а м. ц. о. – точка нерухомої площини, по якій рухається плоска фігура. Миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр обертання з часом міняють своє положення. При цьому кожний з них викреслює деяку криву: миттєвий центр швидкостей в площині фігури, а миттєвий центр обертання – в нерухомих площині.

Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей називається *рухомою центроїдою*, а геометричне місце миттєвих центрів обертання називається *нерухомою центроїдою*.

Звернемось до рис. 3.15. Так як площина MN нерухома, то швидкості точок контакту P_1, P_2 дорівнюють нулю, т. б. точки P_1, P_2 – є миттєвими центрами обертання. В розглянутому прикладі лінія MN є нерухомою центроїдою. Точкам

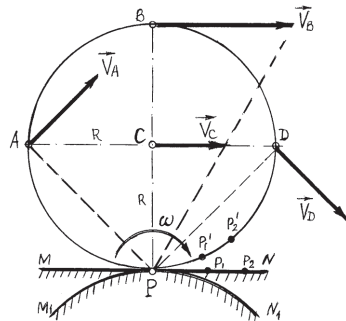


Рис. 3.15.

$P_1, P_2 \dots$ відповідають точки $P'_1, P'_2 \dots$ поверхні (кола) колеса. Це означає, що рухомою центроїдою є коло колеса.

Узагальнюючи цей приклад, можна сказати, що при всякому не поступальному русі плоскої фігури рухома центроїда котиться по нерухомій центроїді.

3.8. План швидкостей і його властивості

Швидкості точок тіла можна знайти графічно, побудовою плану швидкостей.

Планом швидкостей називається діаграма, на якій від одного центра відкладені вектори швидкостей точок плоскої фігури. Ця діаграма дозволяє знайти швидкість будь-якої точки плоскої фігури.

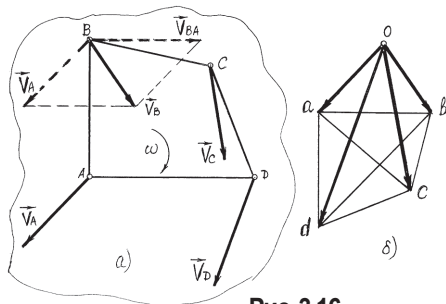


Рис. 3.16.

Нехай в деякий момент часу руху плоскої фігури S швидкості її точок A, B, C і D відомі (рис. 3.16, а). Відкладемо від довільної точки O (рис. 3.16, б) вектори швидкостей цих точок у вибраному масштабі, так що

$$\vec{V}_A = \vec{oa}; \vec{V}_B = \vec{ob}; \vec{V}_D = \vec{od}; \vec{V}_C = \vec{oc} \quad (3.23)$$

і з'єднаємо a, b, c, d відрізками прямих.

Діаграма, яку отримали, називається *планом швидкостей*.

Відрізки oa, ob, oc, od називаються *променями*, а точки a, b, c, d – *вершинами плану швидкостей*.

Розглянемо властивості плану швидкостей.

З трикутника oab плану швидкостей маємо:

$$\vec{ob} = \vec{oa} + \vec{ab}. \quad (a)$$

Якщо взяти точку A за полюс, то швидкість точки B плоскої фігури згідно формули (3.4) буде:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (b)$$

Враховуючи позначення (3.23), вираз (в) перепишемо:

$$\vec{ob} = \vec{oa} + \vec{V}_{BA}. \quad (c)$$

З порівняння виразів (a) і (c), маємо:

$$\vec{ab} = \vec{V}_{BA} \quad (3.24)$$

Виконуючи аналогічні операції по відношенню до других точок плоскої фігури, отримаємо:

$$b\vec{c} = \vec{V}_{CB}, \quad c\vec{d} = \vec{V}_{DC}, \quad d\vec{a} = \vec{V}_{AD}, \quad a\vec{c} = \vec{V}_{CA}, \quad b\vec{d} = \vec{V}_{DB}, \quad (3.25)$$

тобто відрізки, що з'єднують вершини плану швидкостей, геометрично рівні обертальній швидкості відповідної точки плоскої фігури навколо другої точки, як навколо полюса.

Тому маємо:

$$\begin{aligned} ab &= AB \cdot \omega & i & ab \perp AB; \\ bc &= BC \cdot \omega & i & bc \perp BC; \\ cd &= CD \cdot \omega & i & cd \perp CD; \\ ad &= AD \cdot \omega & i & ad \perp AD; \\ bd &= BD \cdot \omega & i & bd \perp BD; \\ ac &= AC \cdot \omega & i & ac \perp AC. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Крім цього:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \dots = \omega. \quad (3.27)$$

Вираз (3.27) дозволяє за допомогою плану швидкостей знайти кутову швидкість плоскої фігури.

Всі відрізки прямих, що з'єднують вершини плану швидкостей, пропорційні відріzkам прямих, що з'єднують відповідні точки плоскої фігури, і повернуті відносно останніх на кут 90° в сторону обертального руху плоскої фігури.

План швидкостей можна побудувати не тільки для окремої плоскої фігури, але і для плоского механізму, який є сукупністю взаємозалежних плоских фігур. При цьому, формули (3.26), (3.27) справедливі тільки для кожної ланки плоского механізму окремо, але не для всього механізму в цілому.

3.9. Побудова плану швидкостей

Розв'яжемо графічно слідуючу задачу. Нехай тіло виконує плоский рух. Нехай відома швидкість точки A по модулю і напрямку. В точці B фігури відомо тільки лінія MN , по якій напрямлена швидкість цієї точки, а в других точках фігури невідомі ні модулі, ні напрями швидкостей. Необхідно знайти модуль і напрям швидкості всіх точок плоскої фігури (рис. 3.17).

З довільної точки O (рис. 3.17,б), відкладемо відрізок $\overrightarrow{oa} = \vec{V}_A$ і проведемо пряму, паралельну MN . З властивостей плану швидкостей випливає, що відрізки, які з'єднують вершини плану швидкостей, перпендикулярні відріzkам, які з'єднують відповідні точки фігури, тобто $ab \perp AB$ і т. д.

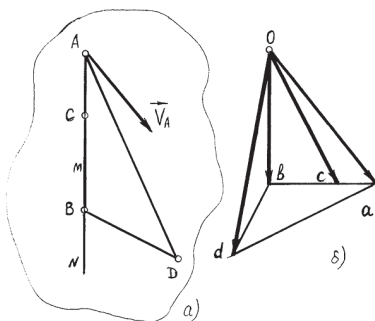


Рис. 3.17

точками A і B прямими на плоскій фігурі і провівши перпендикуляри з точок a і b плану швидкостей до AD і BD до їх перетину. Так знайдеться положення вершини d плану швидкостей і відрізок, який визначає швидкість точки D .

Побудова, яка виконана для знаходження швидкості $\vec{V}_D$ точки D , ґрунтується на наступному:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA}, \quad \vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{DB},$$

де за полюси взяті точки A і B .

Використовуючи позначення (3.25), маємо:

$$\overrightarrow{od} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ad}, \quad \overrightarrow{od} = \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{bd}.$$

де

$$\overrightarrow{ad} \perp AD, \quad \overrightarrow{bd} \perp BD.$$

Побудову плану швидкостей можна продовжити для будь-якої кількості точок плоскої фігури.

Якщо промені $\overrightarrow{oa}$ і $\overrightarrow{ob}$ побудовані і є необхідність знайти швидкість точки C , яка лежить на прямій AB , наприклад на відстані $1/3AB$ від точки A , скористуємося властивістю 2 швидкостей точок фігури (див. пункт 3.5, формула 3.11).

$$\frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bc}.$$

Тому вершина c плану швидкостей буде розміщена на прямій ab в $1/3ab$ від точки a (рис. 3.17,б).

Побудову плану швидкостей для механізмів ми розглянемо в подальшому при розв'язанні конкретних задач.

3.10. Методика розв'язування задач на знаходження швидкостей точок при плоскому русі тіла

В цьому пункті ми будемо розглядати рух плоских механізмів, які складаються з декількох ланок. Знаходити будемо лінійну швидкість точок механізму і кутову швидкість окремих його ланок.

При вирішенні цих задач механізм необхідно зображати на рисунку в тому положенні, для якого потрібно знайти швидкість точок і кутову швидкість ланок. Починати розв'язування задачі потрібно з тієї ланки механізму, рух якої відомий за умовою задачі. Потім потрібно розглянути рух ланки, що має спільну точку з попередньою ланкою, і так послідовно розглянути рух всіх ланок механізму.

При розгляді руху окремої ланки механізму треба вибрати дві точки цієї ланки, швидкості яких відомі по напрямку, а швидкість однієї з точок повинна бути відома і по модулю. Це дає можливість знайти миттєвий центр швидкостей для даної ланки. Знаючи положення м. ц. ш. для даної ланки, можна знайти швидкість всіх розглядуваних точок цієї ланки, а також кутову швидкість ланки. Кожна ланка механізму в даний момент часу має свій миттєвий центр швидкостей і свою кутову швидкість.

В ряді випадків доцільно швидкість точок розглядуваної ланки механізму знаходити за допомогою теореми про проекції швидкостей точок відрізка на його напрям.

Якщо для визначення точок механізму використовується план швидкостей, то механізм в даному положенні зображається в певному масштабі. Доцільно механізм зображувати в певному масштабі і в випадку використання м. ц. ш., якщо відстань точок до м. ц. ш. аналітично важко знайти. В цьому випадку відстані точок до м. ц. ш. вимірюються на рисунку з врахуванням масштабу.

Необхідні додаткові вказівки надаються при розв'язуванні конкретних задач.

Задача 3.1.

$$\begin{aligned} AC = CB &= 0,2 \text{ м} \\ OA = r &= 0,2 \text{ м} \\ \omega_{OA} &= 4 \text{ рад/с} \\ AB &= 0,4 \text{ м} \\ \beta &= 45^\circ; \quad \beta = 90^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_B &= ? \quad \omega_{AB} = ? \\ V_C &= ? \end{aligned}$$

Кривошип OA довжиною 20 см рівномірно обертається навколо осі O з кутовою швидкістю $\omega_{OA} = 4$ рад/с і приводить в рух шатун AB довжиною 40 см. Кінець B шатуна рухається по прямій LD , яка складає з горизонтом кут $\beta = 45^\circ$. Знайти швидкість повзуна B , кутову швидкість ω_{AB} шатуна AB і швидкість точки C середини шатуна AB , якщо кут $\beta = 90^\circ$ (рис. 3.18).

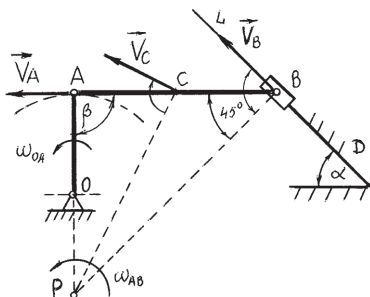


Рис. 3.18.

На рис. 3.18 механізм, що складається з трьох рухомих елементів, зображений в масштабі за заданими кутами α і β . Допоміжні лінії, які необхідно було побудувати для розв'язування задачі, показані штриховими.

Кривошип OA виконує обертальний рух навколо осі, що проходить через точку O перпендикулярно площині рисунка.

Швидкість точки A кривошипа:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA, \quad V_A = 4 \cdot 0,2 = 0,8 \text{ м/с.}$$

Швидкість $\vec{V}_A$ перпендикулярна радіусу обертання OA .

Повзун B рухається вздовж напрямної лінії LD , тому швидкість $\vec{V}_B$ напрямлена по лінії LD . Повзун B виконує поступальний рух. Шатун AB виконує плоский рух (див. рис. 3.2). Знайдемо миттєвий центр швидкостей для шатуна AB . Нагадаємо, що м. ц. ш. знаходиться в точці перетину перпендикулярів до швидкостей точок розглядуваної ланки. Побудуємо перпендикуляри до напрямів швидкостей в точках A і B . Точкою перетину перпендикулярів є точка P . Точка P – м. ц. ш. шатуна AB .

Використаємо формулу (3.15):

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}. \quad (a)$$

Щоб знайти швидкість V_B , необхідно знати величину відношення $\frac{AP}{BP}$.

$\triangle ABP$ прямокутний ($\beta = 90^\circ$), рівнобедрений, бо кут $ABP = 45^\circ$, $AP = AB = 0,4 \text{ м}$.

Маємо
$$\frac{AP}{BP} = \sin 45^\circ.$$

Тоді з виразу (a):
$$V_B = \frac{V_A}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} V_A = 1,13 \text{ м/с}.$$

Кутова швидкість $\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}$, $\omega_{AB} = \frac{0,8}{0,4} = 2 \text{ (рад/с)}.$

Щоб знайти напрям швидкості точки C шатуна AB , необхідно з'єднати точку C з точкою P (м. ц. ш.) і провести лінію в точці C перпендикулярну CP . По цій лінії

в сторону обертання шатуна AB і буде напрямлена швидкість точки C (рис. 3.18).

Використовуючи формули (3.14), можна знайти модуль швидкості точки C

$$V_c = \omega_{AB} CP.$$

$$\text{З трикутника } ACP \quad CP = \sqrt{AP^2 + AC^2} = 0,2\sqrt{5}(\text{м}).$$

$$\text{Маємо} \quad V_c = 0,89 \text{ м/с.}$$

Задача 3.2.

$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 20 \text{ рад/с} \\ OA &= 0,3 \text{ м} \\ OA &= AB = BD \\ \alpha &= 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{AD} &= ? \\ V_B &= ? \\ V_D &= ? \end{aligned}$$

Навколо осі, що проходить через точку O перпендикулярно до площини рисунка, обертається кривошип $OA = 0,3$ м сіноворушилки з кутовою швидкістю 20 рад/с і приводить в рух шатун AD , який з'єднаний шарнірно в точці B з повзуном. Повзун B рухається вздовж горизонтальних напрямних. Для положення механізму, коли кут $\alpha = 30^\circ$, $OA = AB = BD$, знайти миттєву кутову швидкість ω_{AD} шатуна AD і швидкість точок B і D (рис. 3.19).

Швидкість точки A $V_A = \omega_{OA} \cdot OA$; $V_A = 6$ м/с; $V_A \perp OA$. Швидкість точки B напрямлена вздовж горизонтальних напрямних. Шатун AD виконує плоский рух. Миттєвий центр швидкостей для шатуна AD знаходиться в точці P . Швидкість точки D перпендикулярна лінії, що з'єднує точки D і P .

Для знаходження швидкості точки B використаємо формулу (3.15)

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{BP}{AP}.$$

$$V_B = V_A \frac{BP}{AP}.$$

$$\text{Знайдемо відношення } \frac{BP}{AP}.$$

Трикутник ABP рівнобедренний в зв'язку з тим, що $OA = AB$. Тоді $\angle ABO = \angle AOB = 30^\circ$, $\angle OPB = 60^\circ$, $\angle ABP = 60^\circ$. Це означає, що $\triangle APB$ рівносторонній, т. б. $AP = BP = AB = 0,3$ м.

$$\text{Тоді} \quad \frac{BP}{AP} = 1.$$

$$\text{Маємо:} \quad V_B = V_A = 6 \text{ м/с.}$$

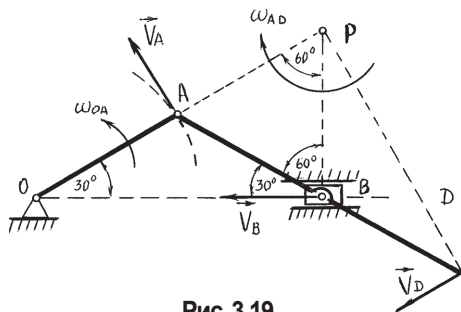


Рис. 3.19.

Кутова швидкість шатуна AD знаходиться з формули 3.16:

$$\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP} = \frac{6}{0,3} = 20 \text{ (рад./с)}.$$

Швидкість точки D : $V_D = \omega_{AD} \cdot PD$.

$$\text{В } \triangle PBD \quad PB = BD = 0,3 \text{ м}, \quad \angle PBD = 120^\circ.$$

Тоді з $\triangle PBD$ за теоремою косинусів:

$$PD = \sqrt{PB^2 + BD^2 - 2 \cdot PB \cdot BD \cos 120^\circ} = 0,3\sqrt{3} \text{ (м)}.$$

$$\text{Маємо:} \quad V_D = 20 \cdot 0,3\sqrt{3} = 10,38 \text{ (м/с)}.$$

Задача 3.3.

$$\omega_{OA} = \omega_O$$

$$OA = a$$

$$AC = 2a$$

$$CB = 3a$$

$$CD = 3a$$

$$DL = 3a$$

$$\omega_{CD} = ?$$

$$\omega_{DL} = ?$$

В механізмі приводу решета DL , яке використовується для виділення великих фракцій сипучих матеріалів, кривошип OA обертається з постійною кутовою швидкістю ω_0 . Знайти кутові швидкості ω_{CD} і ω_{DL} , решета DL і шатуна CD для чотирьох положень кривошипа OA (рис. 3.20, а, б, в, г). Прийняти, що $OA = a$, $AC = 2a$, $CB = 3a$, $CD = 3a$, $DL = 3a$.

Механізм складається з кривошипа OA , який обертається навколо осі, що проходить через точку O перпендикулярно площині рисунка, шатунів AB і CD , повзуна B , який може переміщуватись тільки по горизонтальному напрямку MN і решета DL , яке може виконувати обертальний рух навколо осі, що проходить через точку L перпендикулярно площині рисунка.

а) Нехай кривошип OA займає горизонтальне положення (рис 3.20,а). Точки A , C , B знаходяться на одній прямій, а точки C , D , L , B знаходяться в вершинах квадрата $CDLB$ зі стороною $3a$.

Швидкість точки A кривошипа $V_A = \omega_0 a$, $\vec{V}_A \perp OA$. При обертанні кривошипа модуль швидкості точки A не змінюється, тому що кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю ω_0 .

Швидкість точки B повзуна напрямлена вздовж горизонтальної напрямної MN . Знайдемо миттєвий центр швидкостей шатуна AB .

Проведемо перпендикуляри до швидкостей в точках A і B . Ці перпендикуляри перетинаються в точці B . Це означає, що м. ц. ш. шатуна AB знаходиться в точці B , швидкість $V_B = 0$ і шатун AB в цей час виконує миттєвий обертальний рух навколо цієї точки (дивись пункт 3.7). Знайдемо швидкість точки C , швидкість якої перпендикулярна CB .

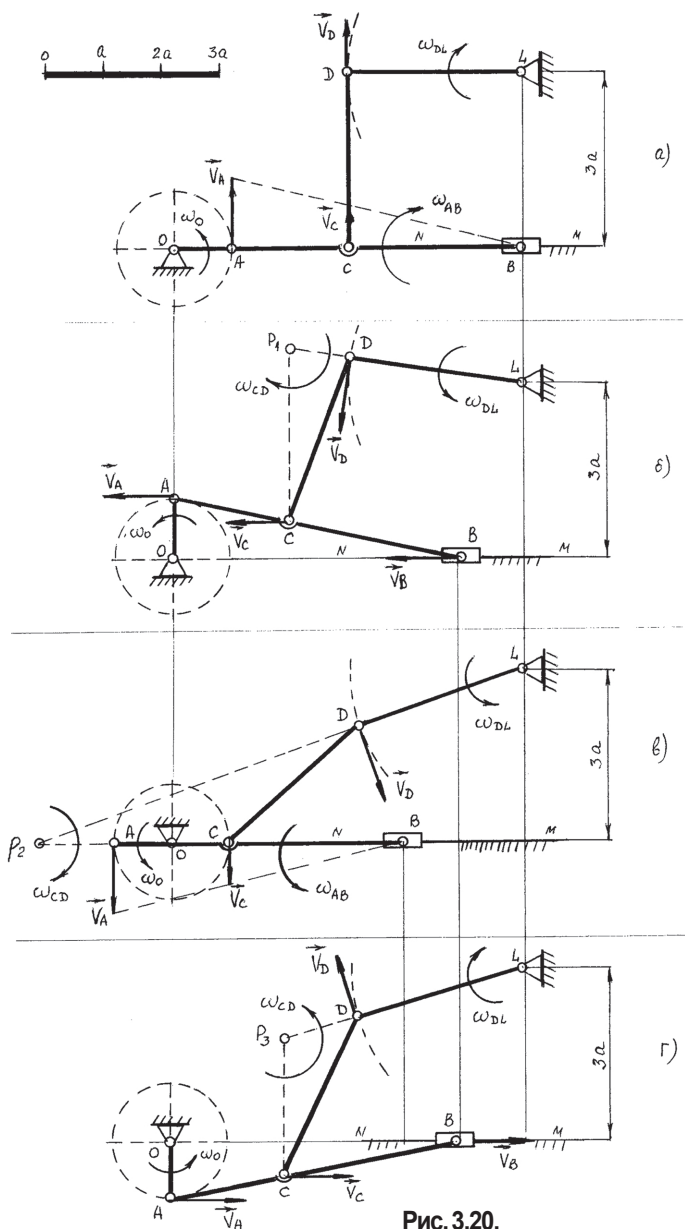


Рис. 3.20.

$$\frac{V_c}{V_A} = \frac{CB}{AB}; \quad \frac{CB}{AB} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}; \quad V_c = \frac{3}{5}V_A; \quad V_c = \frac{3}{5}\omega_0 a.$$

Миттєва кутова швидкість шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{\omega_0 a}{5a}, \quad \omega_{AB} = \frac{1}{5}\omega_0.$$

Швидкість точки D $\vec{V}_D \perp DL$. Знайдемо м. ц. ш. шатуна CD . Проведемо перпендикуляри до напрямів швидкостей в точках C і D . Ці перпендикуляри паралельні і тому ніде не перетинаються. Це означає, що м. ц. ш. для шатуна CD знаходиться на нескінченності, шатун CD виконує миттєво поступальний рух, швидкості всіх його точок однакові і кутова швидкість шатуна CD дорівнює нулю (дивись пункт 3.7).

$$\omega_{CD} = 0; \quad V_D = V_C = \frac{3}{5}\omega_0 a.$$

Решето DL обертається навколо осі, що проходить через точку L .

$$\omega_{DL} = \frac{V_D}{DL}; \quad \omega_{DL} = \frac{\frac{3}{5}\omega_0 a}{3a} = \frac{1}{5}\omega_0; \quad \omega_{DL} = 0,2 \omega_0.$$

б) Нехай кривошип OA повернувся на кут 90° і зайняв верхнє вертикальне положення. Всі ланки механізму поміняли своє положення (рис 3.20,б). Швидкість точки A $V_A \perp OA$, швидкість точки B напрямлена вздовж лінії MN . Знайдемо миттєвий центр швидкостей шатуна AB в цьому його положенні. Швидкості точок A і B паралельні, а значить паралельні будуть і перпендикуляри до напрямів швидкостей в точках A і B . Це означає, що м. ц. ш. шатуна AB в цьому його положенні знаходиться на нескінченності, швидкості всіх його точок однакові і кутова швидкість дорівнює нулю:

$$V_C = V_B = V_A = \omega_0 a; \quad \omega_{AB} = 0.$$

Розглянемо рух шатуна CD . Швидкість точки D $\vec{V}_D \perp DL$. Миттєвий центр швидкостей шатуна CD знаходиться в точці P_1 і шатун CD виконує миттєвий обертальний рух навколо осі, що проходить через точку P_1 , з кутовою швидкістю ω_{CD} . Знайдемо швидкість точки D і кутову швидкість ω_{CD} :

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{DP_1}{CP_1}; \quad V_D = V_C \frac{DP_1}{CP_1}; \quad \omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_1} = \frac{V_D}{DP_1}.$$

Необхідно знайти відстані DP_1 і CP_1 точок D і C до м. ц. ш. P_1 . Аналітично ці відстані знайти важко, тому їх значення візьмемо з рисунка. Зрозуміло, що механізм побудований в певному масштабі (масштаб показаний на рис. 3.20,а)

Маємо: $DP_1 = a, \quad CP_1 = 3a.$

Тоді: $V_D = \frac{1}{3}\omega_0 a, \quad \omega_{CD} = \frac{1}{3}\omega_0 = 0,33\omega_0.$

Для решета DL : $\omega_{DL} = \frac{V_D}{DL}; \quad \omega_{DL} = \frac{1}{9}\omega_0 = 0,11\omega_0.$

в) Нехай кривошип від початкового положення повернувся на кут 180° і зайняв горизонтальне положення (рис 3.20, в).

Миттєвий центр швидкостей для шатуна AB знаходиться в точці B (подібне розглядалося в пункті “а”)

$$V_B = 0; \quad \omega_{AB} = \frac{V_A}{AB}; \quad \omega_{AB} = \frac{1}{5}\omega_0 = 0,2\omega_0.$$

Швидкість точки C : $V_C = \frac{3}{5}V_A; \quad V_C = \frac{3}{5}\omega_0 a.$

Розглянемо рух шатуна CD . Для нього м. ц. ш. знаходиться в точці P_2 :

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{DP_2}{CP_2}; \quad V_D = V_C \frac{DP_2}{CP_2}; \quad \omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_2} = \frac{V_D}{DP_2}.$$

З рисунка (3.20, в) $DP_2 = 5,8a, \quad CP_2 = 3,3a.$

Тоді:

$$V_D = 1,76V_C; \quad V_D = \omega_0 a; \quad \omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_2} = \frac{0,6\omega_0 a}{3,3a}; \quad \omega_{CD} = 0,18\omega_0.$$

Кутова швидкість решета DL :

Розмір $\omega_{DL} = \frac{V_D}{DL} = \frac{\omega_0 a}{3a} = \frac{1}{3}\omega_0; \quad \omega_{DL} = 0,33\omega_0.$

г) Нехай кривошип від початкового положення повернувся на кут 270° (рис. 3.20,г). В цьому випадку шатун AB виконує миттєвий поступальний рух:

$$V_B = V_C = V_A = \omega_0 a; \quad \omega_{AB} = 0.$$

Для ланки CD м. ц. ш. знаходиться в точці P_3 :

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{DP_3}{CP_3}; \quad V_D = V_C \frac{DP_3}{CP_3}; \quad \omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_3}.$$

З рисунка маємо: $DP_3 = 1,3a$; $CP_3 = 2,3a$.

Тоді

$$V_D = 0,57V_C; \quad V_D = 0,57\omega_0 a; \quad \omega_{CD} = \frac{\omega_0 a}{2,3a} = 0,43\omega_0; \quad \omega_{CD} = 0,43\omega_0$$

Знайдемо кутову швидкість решета:

$$\omega_{DL} = \frac{V_D}{DL}; \quad \omega_{DL} = \frac{0,57\omega_0 a}{3a} = 0,19\omega_0; \quad \omega_{DL} = 0,19\omega_0$$

Проаналізуємо рух решета DL . На рис. 3.20(а, г) решето обертається відносно точки L за ходом годинникової стрілки, а на рис. 3.20(б, в) – проти ходу годинникової стрілки. Це означає, що решето виконує коливальний рух навколо осі L .

Задача 3.4.

ω	Поршень приводиться в рух за допомогою кривошипного механізму з зубчастою рейкою і зубчастим сегментом. Знайти швидкість поршня в положенні механізму, яке показане на рис. 3.21, якщо при цьому $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Кутова швидкість кривошипа ω_0 . Розміри вказані на рисунку.
$\alpha = 30^\circ$	
$\beta = 60^\circ$	
$a; b; r$	
$V_D - ?$	

Швидкість точки A кривошипа OA

$$V_A = r\omega_0.$$

Швидкість точки A напрямлена перпендикулярно радіусу OA обертання, а штатун AB перпендикулярний до OA (згідно умови задачі), тому напрям швидкості $\vec{V}_A$ співпадає з напрямом відрізка AB . Ланка BC обертається навколо осі, що проходить через точку O_1 перпендикулярно рисунку. Тому швидкості точок B і C перпендикулярні BC :

$$\vec{V}_B \perp BC; \quad \vec{V}_C \perp BC.$$

Штатун AB виконує плоский рух. В попередніх задачах швидкість точок при плоскому русі тіла ми знаходили за допомогою миттєвого центра швидкостей. В цій задачі знайдемо швидкість точки B , використовуючи те, що про-

екції швидкостей двох точок плоскої фігури на лінію, що з'єднує ці точки, рівні (дивись пункт 3.5).

$$V_B \cos \alpha = V_A; V_B = \frac{V_A}{\cos \alpha}; V_B = \frac{r\omega_0}{\cos \alpha}.$$

Так як центр обертання ланки BC є точкою O_I , то

$$\frac{V_C}{V_B} = \frac{a}{b}; V_C = V_B \frac{a}{b}; V_C = \frac{ra\omega_0}{b \cos \alpha}.$$

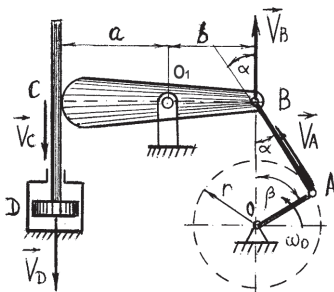


Рис. 3.21.

Всі точки зубчастої рейки мають однакові швидкості. Тому швидкість поршня D буде:

$$V_D = V_C; V_D = \frac{2\sqrt{3}ar\omega_0}{3b}.$$

Задача 3.5.

$\omega = 20$ рад/с	Для заданого положення шарнірного чотирьохланкового механізму знайти швидкості точок A і B , якщо кривошип OA обертається з кутовою швидкістю $\omega = 20$ рад/с. $OA = 0,1$ м (рис. 3.22).
$OA = 0,1$ м	
$V_A = ?$ $V_B = ?$	

Знайдемо швид-

кість точки A .

$$V_A = \omega \cdot OA = 2 \text{ (м/с)}, \quad V_A = 2 \text{ м/с};$$

$$\vec{V}_A \perp OA.$$

Так як ланка BC обертається навколо осі, що проходить через точку C , то вектор швидкості точки B перпендикулярний радіусу BC :

$$\vec{V}_B \perp BC.$$

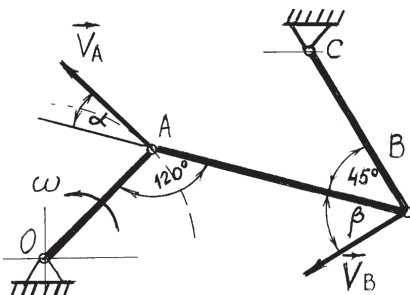


Рис. 3.22.

Ланка AB механізму здійснює плоский рух. Точки A і B належать ланці AB . Проекції швидкостей $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$ на лінію AB повинні бути рівними:

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta.$$

З рисунка 3.22 можна встановити, що $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$.

$$V_A \cos 30^\circ = V_B \cos 45^\circ; \quad V_B = V_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ}; \quad V_B = 2,45 \text{ м/с.}$$

Читачеві даємо можливість перевірити цей результат, використовуючи м. ц. ш.

Задача 3.6.

$\omega = 15 \text{ рад/с.}$	Кривошип O_1A обертається з кутовою швидкістю $\omega = 15 \text{ рад/с.}$ Знайти для заданого положення механізму швидкості повзунів B і C , якщо $O_1A = 0,2 \text{ м}$, а значення відповідних кутів показано на рис. 3.23,а. Швидкість повзунів C і B знайти за допомогою плану швидкостей.
$O_1A = 0,2 \text{ м}$	
$V_B = ? \quad V_C = ?$	

Знайдемо швидкість точки A :

$$V_A = \omega \cdot O_1A; \quad V_A = 3 \text{ м/с.}$$

Швидкість повзуна B напрямлена по лінії MN , а повзуна C – по лінії ML .

Щоб знайти швидкість точки B , візьмемо за полюс точку A . Тоді, використовуючи формулу (3.4), маємо:

$$\underline{\underline{\vec{V}_B}} = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_{BA}}}, \quad \text{де } \vec{V}_{BA} \perp AB.$$

Проведемо аналіз цього векторного рівняння: для вектора $\vec{V}_A$ відомі величина і напрям (підкреслимо двома рисками), для векторів $\vec{V}_B$ і $\vec{V}_{BA}$ – тільки напрями (підкреслимо однією рисою).

Розв'яжемо векторне рівняння графічно. Виберемо масштаб для швидкості (рис. 3.23,б). Візьмемо на площині полюс O . З полюса O проведемо вектор $\vec{Oa}$, який паралельний швидкості $\vec{V}_A$ і чисельно рівний в масштабі модулю швидкості точки A .

$$\vec{Oa} = \vec{V}_A.$$

З точки o проведемо пряму, паралельну швидкості $\vec{V}_B$, а з кінця вектора $\vec{Oa}$ проведемо пряму, перпендикулярну AB (т. б. паралельну $\vec{V}_{BA}$). Перетин цих прямих дає точку b .

$$\text{Вектор} \quad \vec{Ob} = \vec{V}_B, \quad \vec{ab} = \vec{V}_{BA}.$$

З трикутника oab на плані швидкостей маємо:

$$V_B = 1,75 \text{ м/с}; \quad V_{AB} = 3,5 \text{ м/с.}$$

Щоб знайти швидкість точки C , візьмемо за полюс точку B .

Тоді

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB},$$

$$\vec{V}_{CB} \perp CB.$$

Проведемо аналіз цього векторного рівняння: вектор $\vec{V}_B$ відомий за величиною і напрямом з попередніх обчислень (підкреслимо двома рисками), для векторів $\vec{V}_C$ і $\vec{V}_{CB}$ відомі тільки напрями (підкреслимо однією рискою).

На плані швидкостей вектор $\vec{V}_B = \vec{ob}$ вже є. З точки O проведемо пряму, паралельну швидкості $\vec{V}_C$, а з кінця вектора $\vec{ob}$ проведемо пряму, перпендикулярну BC . Перетин цих прямих дає точку c . Вектор $\vec{oc} = \vec{V}_C$; $\vec{bc} = \vec{V}_{CB}$.

З трикутника ocb на плані швидкостей маємо:

$$V_c = 0,45 \text{ м/с},$$

$$V_{CB} = 1,8 \text{ м/с}.$$

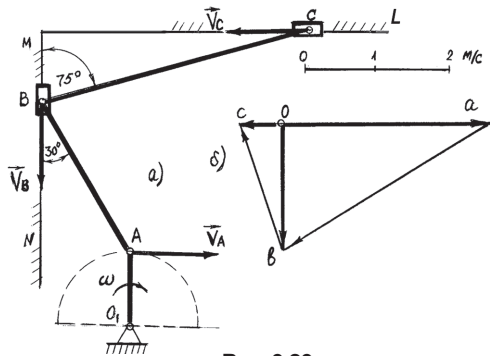


Рис. 3.23

Задача 3.7.

$$\omega_{OA} = 16 \text{ рад/с}.$$

$$OA = AC = 1 \text{ м}.$$

$$R = 0,5 \text{ м}$$

$$BD = 2 \text{ м}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$V_A = ? \quad V_C = ?$$

$$V_B = ? \quad V_D = ?$$

$$\omega_K = ?$$

Показаний на рис. 3.24 механізм приводиться в рух кривошипом, який обертається з постійною кутовою швидкістю 16 рад/с. $OA = AC = 1 \text{ м}$. Радіус колеса, яке котиться без ковзання по опорній площині, дорівнює 50 см. Шатун BD довжиною 2 м приводить в рух повзун D . Знайти швидкості точок A, B, C, D механізму і швидкість колеса, якщо кривошип OA знаходиться під кутом 30° до горизонту, а точка B лежить на горизонтальному діаметрі колеса.

Перед ознайомленням з розв'язуванням цієї задачі рекомендуємо читачеві звернутися до пункту 3.7(5).

Швидкість точки A кривошипа:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA;$$

$$V_A = 16 \text{ м/с}.$$

Швидкість точки C (центра колеса) паралельна площині, по якій колесо котиться. Для шатуна AC , який виконує плоский рух, м. ц. ш. знаходиться в точці P_1 .

$$\frac{V_C}{V_A} = \frac{CP_1}{AP_1}; \quad V_C = V_A \frac{CP_1}{AP_1}.$$

Легко довести, що трикутник ACP_1 рівносторонній. Тому $AP_1 = CP_1$.
Маємо: $V_C = 16 \text{ м/с}$.

Для колеса миттєвим центром швидкостей є точка P_2 , точка контакту колеса з нерухомою поверхнею.

Швидкість точки B напрямлена перпендикулярно BP_2 і чисельно дорівнює:

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{BP_2}{CP_2}; \quad V_B = V_C \frac{BP_2}{CP_2}; \quad V_B = \sqrt{2} V_C; \quad V_B = 22,6 \text{ м/с}.$$

Кутова швидкість колеса:

$$\omega_K = \frac{V_C}{CP_2}; \quad \omega_K = \frac{16}{0,5} = 32 \text{ (рад/с.)};$$

Швидкість повзуна D напрямлена по лінії DK . Шатун BD виконує плоский рух.

Спроектуємо вектори швидкостей точок B і D на пряму DB :

$$V_B \cos \varphi = V_D \cos \gamma.$$

Знайдемо кути φ і γ з трикутника DBK : $\sin \gamma = \frac{BK}{BD} = \frac{0,5}{2} = 0,25$.

Маємо: $\gamma = 14,5^\circ$; $\varphi = 45^\circ - 14,5^\circ = 30,5^\circ$.

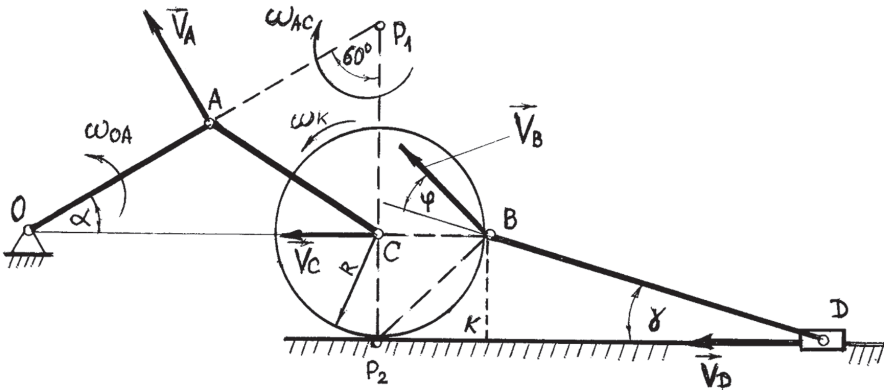


Рис. 3.24.

$$\text{Тоді } V_D = V_B \frac{\cos \varphi}{\cos \gamma};$$

$$V_D = 11,8 \text{ м/с.}$$

Задача 3.8.

$$\begin{aligned} V_K &= 0,72 \text{ м/с} \\ r_1 &= r_2 = 0,12 \text{ м} \\ \omega_1 &= ? \quad \omega_2 = ? \\ V_D &= ? \end{aligned}$$

Через блоки 1 і 2 перекинтий трос, кінець K якого рухається з швидкістю $0,72 \text{ м/с}$. Знайти кутові швидкості блоків 1 і 2, і швидкість вантажу D , якщо радіуси блоків $r_1 = r_2 = 0,12 \text{ м}$ (рис. 3.25). Блок 1 – нерухомий блок, блок 2 – рухомий блок.

Блок 2 обертається навколо осі, що проходить через точку C , і разом з віссю обертання переміщається вгору (в даному випадку). Тому блок 2 називається рухомим блоком.

Блок 1 обертається навколо осі, що проходить через точку O_1 , але його вісь обертання не переміщується. Тому блок 1 називається нерухомим блоком.

Кінець K троса рухається з швидкістю $\vec{V}_K$. Швидкості всіх точок троса, аж до точки B , однакові. Тому швидкості точки A ободу блока 1 і точки B ободу блока 2 однакові.

$$V_K = V_A = V_B = 0,72 \text{ м/с.}$$

Постає цілком закономірне запитання: чому тільки до точки B швидкості точок троса однакові? Звернемо увагу на ділянку K_1P троса. Ця ділянка троса нерухома, бо нерухомим є кінець K_1 . Всі точки троса K_1P нерухомі. Для блока 2 точка P є миттєвим центром швидкостей ($V_P = 0$). В даному випадку рух блока 2 подібний руху колеса, який розглядався в задачі 3.7. Тут нерухомою площиною є K_1P і по ній блок 2 котиться. Швидкість точок ободу блока 2 на ділянці від B до P змінюється від $V_B = V_K$ до $V_P = 0$.

Розподіл швидкостей точок, які розміщені по діаметру BP , показаний на рис. 3.25. Швидкість точки C (центра блока):

$$V_C = \frac{1}{2} V_B; \quad V_C = 0,36 \text{ м/с.}$$

Швидкості точки D вантажу і точки C однакові:

$$V_D = V_C = 0,36 \text{ м/с.}$$

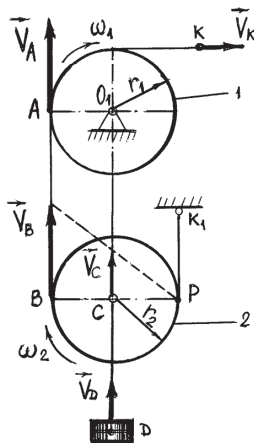


Рис. 3.25.

Щоб знайти кутову швидкість обертання тіла, необхідно модуль швидкості точки тіла розділити на радіус обертання точки.

Для блока 1: $\omega_1 = \frac{V_A}{r_1}$, $\omega_1 = \frac{0,72}{0,12} = 6$ (рад./с); $\omega_1 = 6$ рад./с.

Для блока 2: $\omega_2 = \frac{V_B}{BP}$, $\omega_2 = \frac{V_B}{2r_2}$, $\omega_2 = \frac{0,72}{0,24} = 3$ (рад./с); $\omega_2 = 3$ рад./с.

Для точки B блока 2 миттєвим радіусом обертання є відстань BP від точки B до миттєвого центра швидкостей P .

Задача 3.9.

r_1	Колесо 2 радіусом r_2 , за допомогою кривошипа OA котиться без ковзання по нерухомому колесу 1, радіус якого r_1 . Кутова швидкість кривошипа OA дорівнює ω_0 . З якою кутовою швидкістю обертається колесо 2? Знайти швидкості точок B і D колеса 2 (рис. 3.26).
r_2	
ω_0	
$V_B = ?$	
$V_D = ?$	

Швидкість точки A кривошипа OA :

$$V_A = \omega_0 \cdot (r_1 + r_2)$$

Колесо 2 виконує плоский рух. Воно рухається по нерухомій поверхні колеса 1. В точці P контакту колеса 2 з колесом 1 і знаходиться миттєвий центр швидкості колеса 2. Швидкість точки A колеса 2 відома.

Кутова швидкостей колеса 2 визначається за тією ж самою формулою, за яким визначалась кутова швидкість блока 2 (задача 3.8.):

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP}, \quad AP = r_2;$$

$$\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot \omega_0.$$

Швидкість точки B :

$$V_B = 2V_A,$$

$$V_B = 2(r_1 + r_2) \omega_0.$$

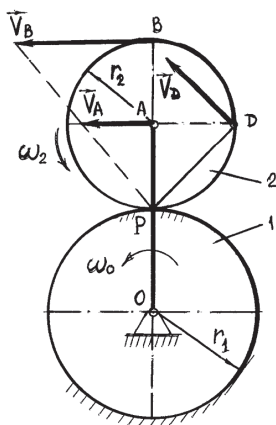


Рис. 3.26

Швидкість точки D: $V_D = \sqrt{2}V_A$,

$V_D = \sqrt{2}(r_1 + r_2)\omega_0$.

Якщо колеса мають однакові радіуси ($r_1 = r_2$), то кутова швидкість колеса 2 як видно з формули (1), вдвічі більша за кутову швидкість кривошипа: $\omega_2 = 2\omega_0$.

Задача 3.10.

$\omega = 2 \text{ рад/с}$

$R_1 = 20 \text{ см}$

$r_1 = 10 \text{ см}$

$V_C = ?$

За допомогою талевого ступінчастого барабана 1, вал якого обертається з кутовою швидкістю 2 рад/с, виконується підйом труби 2. Знайти швидкість підйому труби, якщо $R_1 = 20 \text{ см}$, $r_1 = 10 \text{ см}$. Ділянки тросів BN і AE вважати вертикальними (рис. 3.27).

Знайдемо швидкості точок K і L ступінчастого барабана 1. $V_K = \omega_1 r_1 = 40 \text{ см/с}$; $V_L = \omega_1 R_1 = 20 \text{ см/с}$. Швидкості точок троса на ділянці від точки K до точки B труби однакові. Тому швидкість точки B труби $V_B = V_K = 40 \text{ см/с}$. Швидкості точок троса на ділянці від точки L до точки A труби однакові. Тому швидкість точки A труби $V_A = V_L = 20 \text{ см/с}$.

Напрями швидкостей точок A і B труби показані на рис. 3.27. Рух труби є плоским рухом. Рух цієї труби подібний руху рухомого блока 2 (див. рис. 3.25). Відмінності такі: у рухомого блока 2 одна ділянка троса рухома, а друга (права) – нерухома, тому миттєвий центр швидкостей для блока 2 співпадає з точками нерухомої ділянки троса; при русі труби і ліва, і права ділянки троса рухомі і тому місцезнаходження м. ц. ш. для труби невідоме.

Знайдемо положення миттєвого центра швидкостей для труби.

Точки A і B труби, що лежать на кінцях горизонтального діаметра, мають різні швидкості по величині, паралельні і напрямлені в протилежні сторони. Такий випадок плоского руху тіла розглядався в пункті 3.7 (рис. 3.13). З'єднаємо кінці векторів швидкостей точок

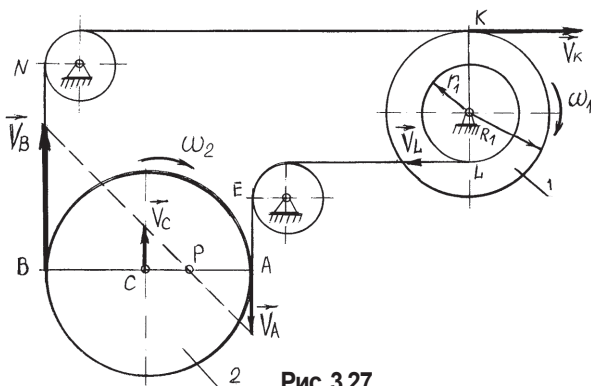


Рис. 3.27.

A і B лінією. Точка P перетину цієї лінії з діаметром AB є миттєвим центром швидкостей для труби 2. На рис. 3.27 показано положення точки P і напрям швидкості точки C – центра тяжіння труби.

Запишемо залежність між швидкостями точок при плоскому русі тіла:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{BP}{AP}, \quad \frac{V_B}{V_A} = 2, \quad BP = r + CP, \quad AP = r - CP, \quad \frac{BP}{AP} = \frac{r + CP}{r - CP} = 2.$$

Маємо: $CP = \frac{1}{3}r.$

Знайдемо швидкість точки C :

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{BP}{CP}; \quad BP = r + \frac{1}{3}r = \frac{4}{3}r; \quad \frac{BP}{CP} = 4.$$

Маємо: $V_C = \frac{1}{4}V_B, \quad V_C = 10 \text{ см/с}.$

Задача 3.11.

$\omega_0; \quad r_1$	Планетарний механізм приводиться в рух кривошипом OB , який з'єднує осі трьох коліс 1, 2, 3. Колесо 1 нерухоме; кривошип обертається з кутовою швидкістю ω_0 . Знайти кутові швидкості коліс 2 і 3, якщо радіуси коліс r_1, r_2, r_3 . (рис. 3.28).
$r_2; \quad r_3$	
$\omega_2 = ?$	
$\omega_3 = ?$	

Знайдемо швидкості точок A і B кривошипа:

$$V_A = \omega_0(r_1 + r_2), \quad V_B = \omega_0(r_1 + 2r_2 + r_3).$$

Колеса 2 і 3 виконують плоский рух.

Колесо 2 рухається по поверхні нерухомого колеса 1. Тому точка P_2 є миттєвим центром швидкостей колеса 2. Для колеса 2 відомо положення м. ц. ш. і швидкість точки A . Це дозволяє нам знайти швидкість точки D колеса 2:

$$\frac{V_D}{V_A} = \frac{DP_2}{AP_2}, \quad \frac{DP_2}{AP_2} = \frac{2r_2}{r_2} = 2, \quad \frac{V_D}{V_A} = 2.$$

$$V_D = 2V_A \cdot V_D = 2\omega_0(r_1 + r_2).$$

Кутова швидкість колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2}, \quad \omega_2 = \frac{(r_1 + r_2)}{r_2} \cdot \omega_0, \quad \omega_2 = \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \omega_0.$$

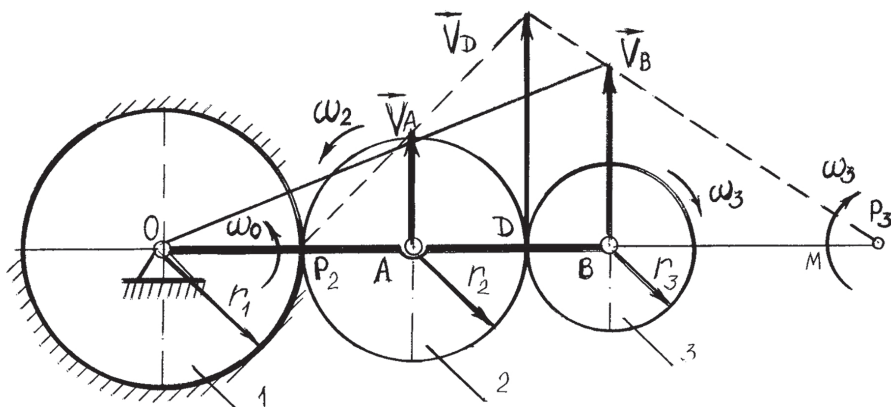


Рис. 3.28.

Швидкості точки D колеса 2 і точки D колеса 3 однакові. Для колеса 3 відомі швидкості точок D і B . Вектори цих швидкостей паралельні і напрямлені в одну сторону. Проведемо лінію через кінці векторів швидкостей точок D і B до перетину з лінією OM . Точка P_3 є миттєвим центром швидкостей колеса 3.

Тоді кутова швидкість колеса 3 буде: $\omega_3 = \frac{V_B}{BP_3}$.

Знайдемо відстань точки B до точки P_3 :

$$\frac{V_D}{V_B} = \frac{DP_3}{BP_3}; \quad DP_3 = r_3 + BP_3; \quad \frac{V_D}{V_B} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1 + 2r_2 + r_3}.$$

Маємо:
$$\frac{2(r_1 + r_2)}{r_1 + 2r_2 + r_3} = \frac{r_3 + BP_3}{BP_3} = 1 + \frac{r_3}{BP_3}.$$

Звідси знаходимо:

$$BP_3 = \frac{r_3(r_1 + 2r_2 + r_3)}{r_1 - r_3}.$$

Тоді
$$\omega_3 = \frac{(r_1 - r_3)}{r_3} \cdot \omega_0, \quad \omega_3 = \left(\frac{r_1}{r_3} - 1 \right) \cdot \omega_0.$$

Розглянемо окремий випадок.

Нехай колеса однакові: $r_1 = r_2 = r_3 = r$. Тоді кутова швидкість колеса 2 буде $\omega_3 = 2\omega_0$. Кутова швидкість колеса 3 дорівнює нулю ($\omega_3 = 0$).

Те, що кутова швидкість $\omega_3 = 0$, означає, що колесо 3 виконує поступальний рух.

Задачу 3.11 ми розв'язали методом миттєвих центрів швидкостей (*миттєвих осей обертання*). Цю задачу (та і багато інших) можна розв'язати іншим способом, який має назву – *метод миттєвої зупинки* (*метод Віллеса*). Роберт Віліс (1800–1875) – англійський механік.

В розділі 2 (пункт 2.7) ми розглядали передаточні механізми, в яких осі обертання коліс були нерухомими. В механізмі, який показаний на рис. 3.28, осі, що проходять через точки A і B коліс 2 і 3, обертаються навколо осі, яка проходить через точку O . Тому формули, які використовувались в пункті 2.7, тут використати не можна. Якби кривошип OA не обертався, а всі колеса механізму обертались, то в цьому випадку можна було б використати формули п. 2.7.

Розглянемо тепер суть метода миттєвої зупинки.

Нехай в даний момент часу, тобто до зупинки, кривошип OA має кутову швидкість ω_0 , а колеса 2 і 3 – відповідно ω_2 і ω_3 . Так як колесо 1 нерухоме, то його кутова швидкість $\omega_1 = 0$.

Метод Віллеса полягає в наступному: надамо всьому механізму рух, протилежний руху кривошипа OA , з кутовою швидкістю ω_0 . В цьому випадку ми отримали зупинку кривошипа, а механізм перетворився в звичайний зубчастий механізм з нерухомими осями, для якого можемо використати формули пункту 2.7.

Для зручності використання цього метода складають таблицю значень миттєвих кутових швидкостей всіх ланок механізму до і після зупинки кривошипа.

	Кривошип	Колесо 1	Колесо 2	Колесо 3
До зупинки	ω_0	0	ω_2	ω_3
Після зупинки	0	$-\omega_0$	$\omega_2 - \omega_0$	$\omega_3 - \omega_0$

Як видно з таблиці, кривошип зупинився, а колесо 1 стало обертатись, тобто планетарний механізм перетворився в редуктор з нерухомими осями обертання.

$$\text{При зачепленні коліс 1 і 2:} \quad \frac{-\omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{r_2}{r_1}. \quad (a).$$

$$\text{При зачепленні коліс 2 і 3:} \quad \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = -\frac{r_3}{r_2}. \quad (б).$$

В правих частинах виразів (а) і (б) стоїть знак мінус, який показує, що кутові швидкості контактуючих коліс протилежно напрямлені.

Розв'язуючи рівняння (а) і (б), знаходимо:

$$\omega_2 = \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right); \quad \omega_3 = -\left(\frac{r_1}{r_3} - 1\right)\omega_0.$$

Ці значення кутових швидкостей співпадають з раніше знайденими значеннями кутових швидкостей. Знак “-” у виразі для кутової швидкості ω_3 говорить про те, що кутова швидкість ω_3 має протилежний напрям кутової швидкості кривошипа, що видно з рис. 3.28.

Задача 3.12.

$z_1 = 20$	Планетарний редуктор швидкостей складається з чотирьох зубчастих коліс. Перше колесо (число зубців $z_1 = 20$) насаджено на ведучий вал I , який обертається з кутовою швидкістю, що відповідає 4500 об/хв. Колеса 2 і 2' ($z_2 = 25$) вільно надсажені на водило H , яке жорстко зв'язане з веденим валом II . Третє колесо ($z_3 = 70$), з внутрішнім зачепленням, нерухоме. Знайти передаточне число $i = n_I/n_{II}$ цього редуктора і число обертів за хвилину веденого вала II (рис. 3.29).
$z_2 = 25$	
$z_3 = 70$	
$N_I = 4\,500 \text{ об/хв.}$	
$n_{II} = ? \quad i = ?$	

Розв'яжемо цю задачу двома способами: 1) методом миттєвих осей обертання, 2) методом миттєвої зупинки.

1. Метод миттєвих осей обертання

Згідно умови задачі, ми можемо знайти швидкість точки B колеса 1:

$$V_B = \omega_1 r_1,$$

де r_1 – радіус колеса 1.

Точка B – спільна точка коліс 1 і 2. Колесо 2 в точці C контактує з колесом 3, яке нерухоме. Тому точка C є миттєвим центром швидкостей колеса 2 і через цю точку проходить миттєва вісь обертання (м. в. о.). Для колеса 2 відома швидкість точки B і відоме розміщення миттєвого центра швидкостей.

З рис. 3.29.б видно, що швидкість точки A

$$V_A = \frac{1}{2} V_B; \quad V_A = \frac{\omega_1 r_1}{2}.$$

Аналогічно знаходиться швидкість точки A_1 .

Водило H обертається разом з валом II . Для водила відомі швидкості точок A

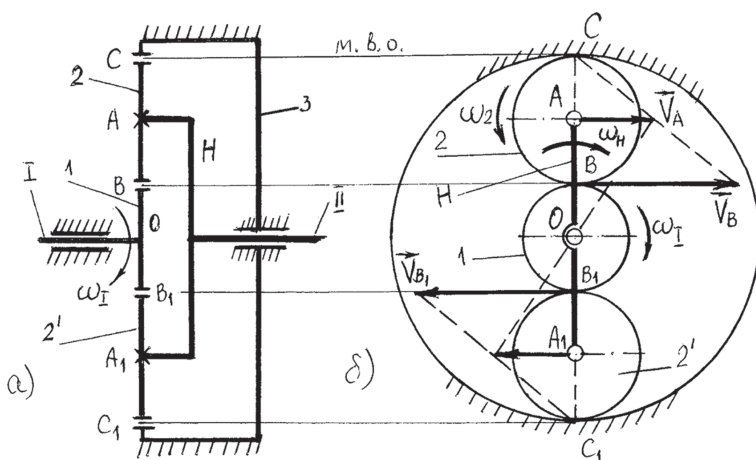


Рис. 3.29.

і A_1 . Тоді кутова швидкість ω_H водила буде:

$$\omega_H = \omega_{II} = \frac{V_A}{r_1 + r_2} = \frac{\omega_1 r_1}{2(r_1 + r_2)},$$

де $r_1 + r_2$ – радіус обертання точки A навколо осі II , r_2 – радіус колеса 2.

Звідси

$$\frac{\omega_1}{\omega_{II}} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1} = 2 \cdot \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right).$$

Враховуючи те, що відношення радіусів пропорційне відношенню

кількості зубців, то

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_{II}} = \frac{n_1}{n_{II}} = 2 \cdot \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right).$$

Після підстановки числових даних, маємо: $i = 4,5$.

Тоді

$$n_{II} = \frac{n_1}{i} = \frac{4500}{4,5} = 1000 (\text{об/хв.}); \quad n_{II} = 1000 \text{ об/хв.}$$

2. Метод миттєвої зупинки

Складемо таблицю значень миттєвих кутових швидкостей коліс редуктора і водила.

	Водило	Колесо 1	Колесо 2	Колесо 3
До зупинки	ω_H	ω_1	ω_2	0
Після зупинки	0	$\omega_1 - \omega_H$	$\omega_2 - \omega_H$	$-\omega_H$

При зачепленні коліс 1 і 2 :

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{r_2}{r_1}. \quad (a)$$

При зачепленні коліс 2 і 3 :

$$\frac{\omega_2 - \omega_H}{-\omega_H} = +\frac{r_3}{r_2}. \quad (б)$$

Між колесами 1 і 2 зовнішнє зачеплення, тому в правій частині виразу (а) стоїть знак “-”. Між колесами 2 і 3 внутрішнє зачеплення, тому в правій частині виразу (б) стоїть знак “+”

Перемножимо почленно вираз (а) на (б):

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = -\frac{r_3}{r_1}.$$

Звідси:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 1 + \frac{r_3}{r_1}, \quad i = 1 + \frac{z_3}{z_1}.$$

Після підстановки числових даних $i = 4,5$.

3.11. Задачі для самостійної роботи на знаходження швидкостей точок при плоскому русі тіла

Задача 3.13.

В кривошипно-шатунному механізмі OAB дано: $OA = 0,1$ м; $AB = 0,2$ м; $a = 0,1$ м; $\omega_{OA} = 10$ рад/с.

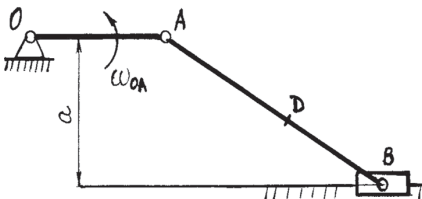


Рис. 3.30.

Визначити швидкість точки B . Знайти на шатуні AB точку D , швидкість якої напрямлена по шатуну, і визначити величину цієї швидкості (рис. 3.30).

Відповідь: $V_B = 0,577$ м/с;

$V_D = 0,5$ м/с; $BD = 0,05$ м.

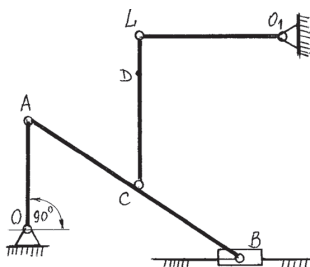


Рис. 3.31.

Задача 3.14.

Знайти швидкість точки D шатуна CL в показаному на рисунку 3.31 положенні механізму. Кут $CLO_1 = 90^\circ$; ланка LO_1 горизонтальна, а ланка OA – вертикальна. Швидкість повзуна B

$$V_B = 12 \text{ м/с}; DL = \frac{1}{3} CL.$$

Відповідь: $V_D = 4 \text{ м/с}$.

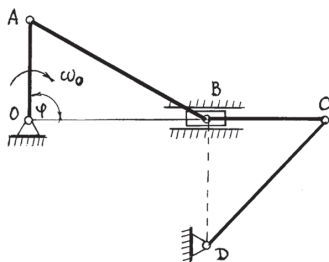


Рис. 3.32.

Задача 3.15.

В механізмі компресора кривошип OA довжиною r обертається з постійною кутовою швидкістю ω_0 .

Знайти швидкість V_C точки C в момент, коли кут $\varphi = 90^\circ$, якщо при цьому точки O, B, C , лежать на горизонтальній прямій, а відрізок $BD = b$ перпендикулярний до OB .

$CD = a$ (рис. 3.32).

$$\text{Відповідь: } V_C = \frac{ra}{b} \omega_0.$$

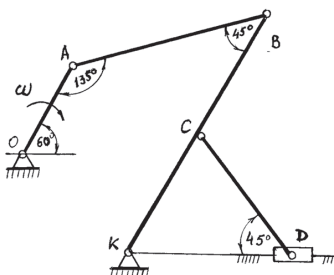


Рис. 3.33.

Задача 3.16.

Для заданого положення механізму знайти швидкості шарнірів B, C і повзуна D . Кривошип обертається з кутовою швидкістю $\omega = 10 \text{ рад/с}$, $OA = 0,25 \text{ м}$, $BC = CK$ (рис. 3.33).

$$\text{Відповідь: } V_B = 2,5 \text{ м/с}, V_C = 1,25 \text{ м/с}, V_D = 1,71 \text{ м/с}.$$

Задача 3.17.

Механізм, який показаний на рисунку 3.34, приводиться в рух силою, що діє на повзун E . Знайти швидкість точок D , B , A механізму і кутову швидкість кривошипа O_1A , якщо в даний момент часу швидкості повзуна E $V_E = 4$ м/с. Розміри ланок механізму:

$$r = 0,1 \text{ м}; \quad AB = 3,5r, \quad \frac{BC}{DC} = 0,6; \quad BC = DE = 4r.$$

Відповідь: $V_D = 4$ м/с, $V_B = 2,5$ м/с,

$$V_A = 2,8 \text{ м/с}, \quad \omega_{O_1A} = 28 \text{ рад/с}.$$

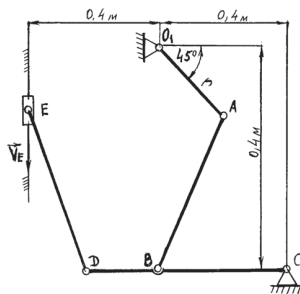


Рис. 3.34.

Задача 3.18.

Кривошип OA обертається навколо осі O з кутовою швидкістю 4 рад/с. Зубчасте колесо 2 радіусом $r_2 = 20$ см котиться без ковзання по нерухомому колесу 1 радіусом 10 см і приводить в рух шатун BC . Знайти кутову швидкість колеса 2, шатуна BC і швидкість точок B і C в момент, коли радіус AB складає продовження кривошипа. $CO \perp OB$ (рис. 3.35).

Відповідь: $\omega_2 = 6$ рад/с; $\omega_{BC} = 0$, $V_B = V_C = 240$ см/с.

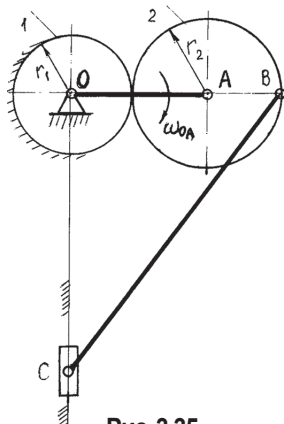


Рис. 3.35.

Задача 3.19.

Для зображеного на рис. 3.36 механізму шляхом побудови плану швидкостей знайти швидкості точок B , D кутові швидкості всіх ланок, якщо ведучий кривошип O_1C обертається з кутовою швидкістю $\omega_{O_1C} = 10$ рад/с,

$$O_1A = 15 \text{ см}, \quad O_1C = 30 \text{ см},$$

$$AB = 100 \text{ см}, \quad O_1O_2 = 100 \text{ см},$$

$$O_2B = 50 \text{ см}, \quad CD = 80 \text{ см}.$$

Відповідь: $V_B = 107$ см/с, $\omega_{BA} = 0,07$ рад/с,

$$V_D = 190 \text{ см/с}, \quad \omega_{CD} = 3,4 \text{ рад/с}$$

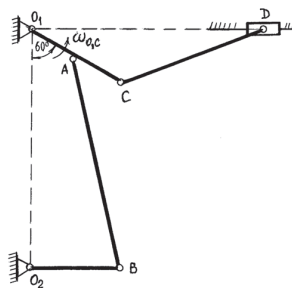


Рис. 3.36.

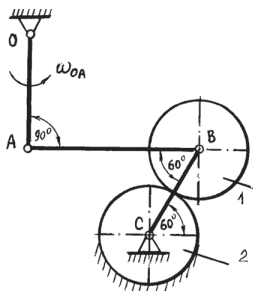


Рис. 3.37

Задача 3.20.

Кривошип OA обертається рівномірно з кутовою швидкістю $\omega_{OA} = 3$ рад/с і приводить в рух шатун AB . Точка B шатуна є центром колеса 1, яке котиться без ковзання по нерухомому колесу 2. Радіуси обох коліс однакові: $r_1 = r_2 = 20$ см. Знайти кутові швидкості колеса 1 і кривошипа CB , який має вісь обертання, що проходить через центр C нерухомого колеса 2. $OA = AB = 40$ см (рис. 3.37).

Відповідь: $\omega = 4\sqrt{3}$ рад/с, $\omega_{CB} = 2\sqrt{3}$ рад/с.

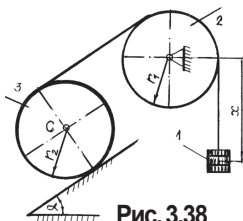


Рис. 3.38

Задача 3.21.

Рух вантажу 1 описується рівнянням $x = 10t^2 + 5$ (см). Яку кутову швидкість мають блок 2 і коток 3 в момент часу $t = 2$ с. Радіуси $r_1 = r_2 = 80$ см (рис. 3.38).

Відповідь: $V_C = 20$ см/с, $\omega_2 = 0,5$ рад/с, $\omega_3 = 0,25$ рад/с.

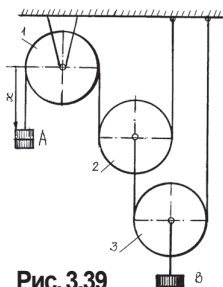


Рис. 3.39

Задача 3.22.

Система складається з нерухомого блока 1 і рухомих блоків 2 і 3, радіуси яких однакові. Вантаж A рухається вниз згідно рівняння $x = 5t^3$ (см).

Яку швидкість буде мати вантаж B в момент часу $t = 2$ с (рис. 3.39).

Відповідь: $V_B = 15$ см/с.

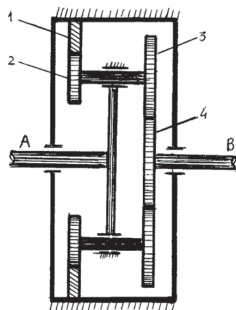


Рис. 3.40

Задача 3.23.

Зубчасте колесо 1 редуктора швидкостей нерухоме. Спарені зубчасті колеса 2 і 3, які вільно насажені на вісь, приводяться в рух валом A , який робить 50 об/хв. (рис. 3.40). Знайти число обертів за хвилину вала B , з'єднаного з зубчастим колесом 4, якщо число зубців $z_1 = 120$, $z_2 = 20$, $z_3 = 60$, $z_4 = 40$.

Відповідь: 500 об/хв.

3.12. Прискорення точок тіла при його плоскому русі

Ми розглядали різні способи знаходження швидкостей точок тіла при його плоскому русі. Не менш важливою задачею є визначення прискорення точок тіла при його плоскому русі.

Нехай тіло виконує плоский рух. Відомі його кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\epsilon}$. Вектори кутової швидкості і кутового прискорення напрямлені перпендикулярно площині рухомої фігури. На рис. 3.41(а) вектори $\vec{\epsilon}$ і $\vec{\omega}$ співпадають по напрямку, тобто вважається, що плоска фігура виконує прискорений рух.

Візьмемо за полюс точку A , прискорення $\vec{a}_A$ якої відоме. Знайдемо прискорення іншої точки B цього тіла.

Використаємо формулу (3.8) пункту 3.4:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + (\vec{\omega} \times \overline{AB}). \quad (a)$$

Підкреслимо, що кутова швидкість $\vec{\omega}$ і вектор $\overline{AB}$ є величини змінні, тобто залежать від часу. Модуль вектора $\overline{AB}$ при русі тіла не змінюється, але змінюється його напрям.

Візьмемо похідну по часу від векторного виразу (a):

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overline{AB} \right) + (\vec{\omega} \times \frac{d\overline{AB}}{dt}).$$

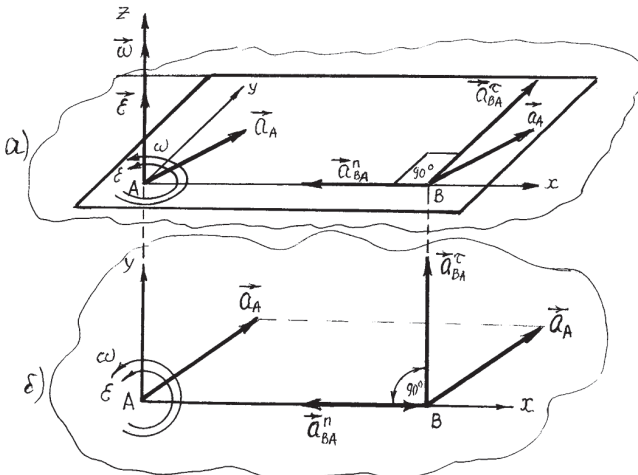


Рис. 3.41.

В цьому виразі $\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \vec{a}_B$, $\frac{d\vec{V}_A}{dt} = \vec{a}_A$ – відповідно прискорення точок B і A ,

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення, $\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{V}_{BA}$ – обертальна швидкість

точки B навколо точки A .

Таким чином, прискорення точок A і B зв'язані між собою співвідношенням:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (\vec{\varepsilon} \times \vec{AB}) + (\vec{\omega} \times \vec{V}_{BA}). \quad (б)$$

В розділі 2 ми розглядали обертальний рух тіла навколо нерухомої осі і представили дотичне і нормальне прискорення точки у вигляді векторного добутку (див. формули 2.21, 2.22).

Векторний добуток $(\vec{\varepsilon} \times \vec{AB})$ в даному випадку дає вектор, який лежить в площині фігури і перпендикулярний вектору $\vec{AB}$. Позначимо цей вектор через $\vec{a}_{BA}^\tau$ і назовемо дотичним прискоренням точки B при обертанні її навколо полюса A :

$$\vec{a}_{BA}^\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{AB}, \quad \vec{a}_{BA}^\tau \perp \vec{AB} \quad (3.28)$$

В зв'язку з тим, що вектор $\vec{\varepsilon}$ завжди перпендикулярний вектору $\vec{AB}$ (рис. 3.41, а) то модуль прискорення $\vec{a}_{BA}^\tau$ можна знайти з формули:

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB. \quad (3.29)$$

Напрямок дотичного прискорення $\vec{a}_{BA}^\tau$ показаний на рис. 3.41(а) і 3.41(б). На рис. 3.41(б) показано вид фігури з додатного напрямку осі AZ .

Вектор обертальної швидкості $\vec{V}_{BA}$ точки B при обертанні її навколо полюса A напрямлений перпендикулярно вектору $\vec{AB}$ і лежить в площині плоскої фігури.

Векторний добуток $(\vec{\omega} \times \vec{V}_{BA})$ дає вектор, який лежить в площині фігури і напрямлений по AB до полюса A . Позначимо цей вектор через $\vec{a}_{BA}^n$ і назовемо його нормальним прискоренням точки B при обертанні її навколо полюса A (рис. 3.41).

$$\vec{a}_{BA}^n = \vec{\omega} \times \vec{V}_{BA}. \quad (3.30)$$

Вектор швидкості $\vec{V}_{BA}$ завжди лежить в площині фігури, а вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ перпендикулярний цій площині фігури, тому кут між цими векторами 90° .

Модуль нормального прискорення буде: $a_{BA}^n = \omega \cdot V_{BA}$. Враховуючи те, що $V_{BA} = \omega \cdot AB$ (див. формулу 2.12), маємо:

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB. \quad (3.31)$$

Вектор нормального прискорення довільної точки плоскої фігури завжди напрямлений до вибраного полюса.

Співвідношення (б) між векторами прискорень точок плоскої фігури, з урахуванням позначень (3.28) і (3.30), запишеться у вигляді:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (3.32)$$

Прискорення довільної точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса, нормального і дотичного прискорень цієї точки при обертанні її навколо полюса.

Але геометрична сума нормального і дотичного прискорень є прискоренням точки при її обертанні навколо полюса A:

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (3.33)$$

Вектори $\vec{a}_{BA}^n$ і $\vec{a}_{BA}^\tau$ взаємно перпендикулярні:

$$\vec{a}_{BA}^n \perp \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (3.34)$$

Прискорення $\vec{a}_{BA}$ є діагональ прямокутника, сторонами якого є прискорення $\vec{a}_{BA}^n$ і $\vec{a}_{BA}^\tau$. Модуль прискорення $\vec{a}_{BA}$ знаходиться з формули:

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^\tau)^2}. \quad (3.35)$$

З урахуванням виразів (3.29) і (3.31), маємо:

$$a_{BA} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.36)$$

Співвідношення (3.32) можна записати в іншому вигляді:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \quad (3.37)$$

Щоб побудувати вектор прискорення точки B, доцільно спочатку отримати вектор $\vec{a}_{BA}$ як діагональ прямокутника, побудованого на дотичному і нормальному прискореннях точки B при обертальному русі навколо полюса A. Потім на векторі $\vec{a}_{BA}$ і векторі $\vec{a}_A$, перенесеному в точку B, побудувати паралелограм, діагональ якого по модулю і напрямку відповідає вектору прискорення точки B (рис. 3.42).

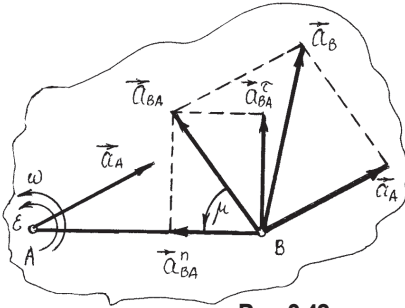


Рис. 3.42

Кут між векторами $\vec{a}_{BA}$ і $\vec{AB}$ позначимо через μ (рис. 3.42). Тоді напрям прискорення $\vec{a}_{BA}$ знайдемо з виразу:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_{BA}^{\tau}}{a_{BA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (3.38)$$

З цього виразу видно, що для всіх точок плоскої фігури кут μ однаковий,

тому що відношення $\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ не залежить від положення точок плоскої фігури.

На рис. 3.43 показаний механізм, у якого ланка AB здійснює плоский рух. Нехай кривошип OA радіусом r обертається з кутовою швидкістю ω_{OA} і кутовим прискоренням ε_{OA} .

Прискорення точки A :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO}^{\tau} + \vec{a}_{AO}^n. \quad (3.39)$$

Згідно умови задачі прискорення точки A можна знайти. Щоб знайти прискорення точки B , необхідно за полюс взяти точку A , прискорення якої відоме. Тоді згідно (3.32) і (3.39) маємо:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau}. \quad (3.40)$$

Якби точка B належала повзуну, то напрям її прискорення $\vec{a}_B$ був би відомий. В даному випадку точка B належить кривошипу BK , який обертається навколо точки K . В цьому русі прискорення точки B можна розглядати як геометричну суму нормального і дотичного прискорень:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BK}^n + \vec{a}_{BK}^{\tau}. \quad (3.41)$$

Підставмо (3.41) в (3.40):

$$\vec{a}_{BK}^n + \vec{a}_{BK}^{\tau} = \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau}. \quad (3.42)$$

Рівняння (3.42) є найбільш повним векторним рівнянням для знаходження прискорення точки B .

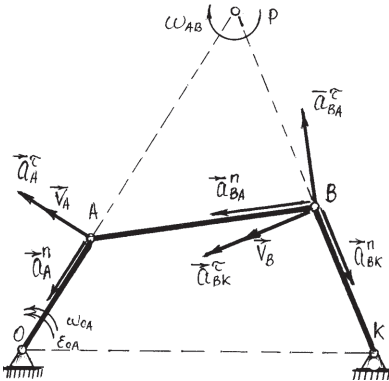


Рис. 3.43.

Запишемо формули, за якими знаходяться модулі окремих складових векторів прискорень виразу (3.42):

$$a_{AO}^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA; \quad a_{AO}^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot AO; \quad a_{BK}^n = \frac{V_B^2}{BK} = \omega_{BK}^2 \cdot BK;$$

$$a_{BK}^\tau = \varepsilon_{BK} \cdot BK; \quad a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Проаналізуємо, які величини відомі і невідомі в векторній рівності (3.42). Нормальне і дотичне прискорення точки A відомі. В рівності (3.42) підкреслимо їх двома рисками. Прискорення a_{BA}^n і a_{BK}^n можна знайти, якщо заздалегідь знайти кутову швидкість ω_{AB} ланки AB і швидкість точки B . Це можна зробити за допомогою миттєвого центра швидкостей (на рис. 3.43 – це точка P), або плану швидкостей. Таким чином, прискорення a_{BA}^n і a_{BK}^n також відомі. Підкреслимо їх у виразі (3.42) двома рисками. У векторному виразі (3.42) залишились невідомими модулі прискорень $\vec{a}_{BA}^\tau$ і $\vec{a}_{BK}^\tau$. Напрями цих прискорень відомі, вони відповідно перпендикулярні векторам $\vec{a}_{BA}^n$ і $\vec{a}_{BK}^n$:

$$\vec{a}_{BA}^n \perp \vec{a}_{BA}^\tau; \quad \vec{a}_{BK}^n \perp \vec{a}_{BK}^\tau.$$

В рівнянні (3.42) ці вектори підкреслимо однією рисою.

Таким чином, у векторному рівнянні (3.42) маємо дві невідомі величини.

Ними є дотичні прискорення a_{BA}^τ і a_{BK}^τ .

Для розв'язання векторного рівняння (3.42) існує декілька способів:

1) аналітичний спосіб, 2) графічний (план прискорень).

Аналітичний спосіб полягає в тому, що векторне рівняння (3.42) проектується на дві координатні осі. В цьому випадку отримуємо два скалярних рівняння для знаходження двох прискорень.

Графічний спосіб полягає в побудові плану прискорень.

Більш детально ці способи будуть розглянуті при розв'язуванні конкретних задач.

Прискорення точок плоскої фігури можна знаходити за допомогою миттєвого центра прискорень.

3.13. Миттєвий центр прискорень

Миттєвим центром прискорень (м. ц. п.) називається точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Доведемо, що така точка існує. Нехай відомо прискорення $\vec{a}_A$ точки A і відомі кутова швидкість ω і кутове прискорення ε плоскої фігури (рис. 3.44).

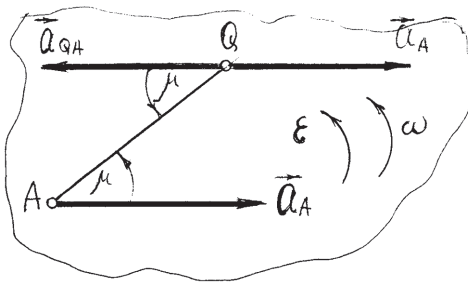


Рис. 3.44.

Через точку A проведемо промінь під кутом μ до вектора прискорення. Кут μ будемо відкладати від вектора прискорення в напрямі, що співпадає з напрямом кутового прискорення ε . Значення кута μ знайдемо з виразу

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \text{ На цьому промені}$$

візьмемо точку Q . Знайдемо прискорення точки Q . Візьмемо за полюс точку A . Тоді, згідно (3.37), $\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA}$.

Згідно (3.36) модуль прискорення $a_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, а напрям прискорення $\vec{a}_{QA}$ складає кут μ з відрізком AQ (див. 3.38).

Прискорення $\vec{a}_A$ і $\vec{a}_{QA}$ напрямлені по одній прямій в протилежні сторони.

Тому прискорення точки Q буде: $a_Q = a_A - a_{QA}$,

$$\text{або } a_Q = a_A - AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

На промені можна підібрати таке положення точки Q , щоб її прискорення було рівним нулю. $a_Q = 0$. Тоді $a_A - AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0$.

$$\text{Маємо} \quad AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (3.43)$$

Таким чином довели, що існує така точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Щоб знайти положення миттєвого центра прискорень, необхідно:

- 1) за формулою $\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ знайти кут μ ;
- 2) під кутом μ , що відкладається від відомого вектора $\vec{a}_A$ прискорення точки в сторону прискорення ε , провести промінь;
- 3) на промені на відстані $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ взяти точку Q , яка і буде миттєвим центром прискорень.

Якщо миттєвий центр прискорень прийняти за полюс, то прискорення довільної точки плоскої фігури в даний момент знаходиться як прискорення цієї точки при її обертальному русі навколо м. ц. п.

Дійсно, прийнявши за полюс точку Q – миттєвий центр прискорень, для довільних точок A і B плоскої фігури, отримаємо:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_Q + \vec{a}_{AQ}; \quad \vec{a}_B = \vec{a}_Q + \vec{a}_{BQ}.$$

$$\text{Так як } a_Q = 0, \quad \text{то } \vec{a}_A = \vec{a}_{AQ} \quad \text{і} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_{BQ},$$

де $\vec{a}_{AQ} = \vec{a}_{AQ}^n + \vec{a}_{AQ}^\tau$, $\vec{a}_{BQ} = \vec{a}_{BQ}^n + \vec{a}_{BQ}^\tau$ – прискорення точок A і B при їх обертальному русі навколо м. ц. п.

З цих співвідношень випливає:

$$a_A = a_{AQ} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (б)$$

$$a_B = a_{BQ} = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (б)$$

Розділимо почленно вираз (а) на вираз (б):

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}. \quad (3.44)$$

Модулі прискорень точок плоскої фігури в кожний момент часу пропорційні відстаням цих точок до м. ц. п., а вектора прискорень утворюють один і той же кут μ з відрізками, що з'єднують ці точки з м. ц. п.

На рис. 3.45 показані положення Q – миттєвого центра прискорень і напрями прискорень точок A і B плоскої фігури.

3.14. Визначення положення миттєвого центра прискорень

При визначенні положення м. ц. п. плоскої фігури, в залежності від початкових даних, можна використати або умови (3.38), (3.43), або той факт, що вектори прискорень точок плоскої фігури складають з напрямом на м. ц. п. один і той же кут.

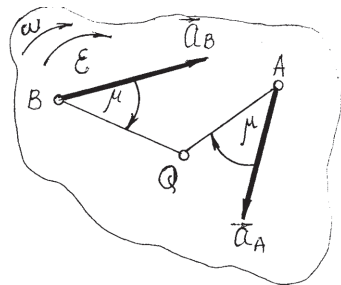


Рис. 3.45.

Розглянемо три основні випадки визначення положення миттєвого центра прискорень.

Випадок 1. З умови задачі відомі слідуючі величини:

1. Модуль і напрям вектора прискорення однієї з точок плоскої фігури.
2. Модуль кутової швидкості плоскої фігури.
3. Модуль і напрям кутового прискорення плоскої фігури.

Знайдемо положення м. ц. п. плоскої фігури якщо відомі прискорення $\vec{a}_A$ точки A, кутове прискорення ε і кутова швидкість ω .

В цьому випадку положення миттєвого центра прискорень можна знайти за формулами:

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}; \quad AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

В залежності від величини і напрямів ω і ε розглянемо три окремих варіанта цього випадку:

а) $\omega \neq 0, \varepsilon = 0$.

Кутове прискорення ε дорівнює нулю або при рівномірному обертанні плоскої фігури навколо полюса, або в той момент часу, коли кутове прискорення ε змінює свій знак. В цьому випадку формули (3.38), (3.43) будуть мати вигляд:

$$\mu = \operatorname{arctg} 0 = 0, \quad AQ = \frac{a_A}{\omega^2}.$$

Таким чином, м. ц. п. в даному випадку лежить на продовженні вектора $\vec{a}_A$ і вектори прискорень всіх точок плоскої фігури мають напрям до м. ц. п. Q (рис. 3.46, а).

б) $\omega = 0, \varepsilon \neq 0$.

Такий випадок руху плоскої фігури можливий, якщо кутова швидкість ω змінює свій знак. Для цього випадку положення миттєвого центра прискорень Q знаходиться з виразів:

$$\mu = \operatorname{arctg} \infty = 90^\circ, \quad AQ = \frac{a_A}{\varepsilon}.$$

Кут μ відкладається в напрямі кутового прискорення. Якщо при русі плоскої фігу-

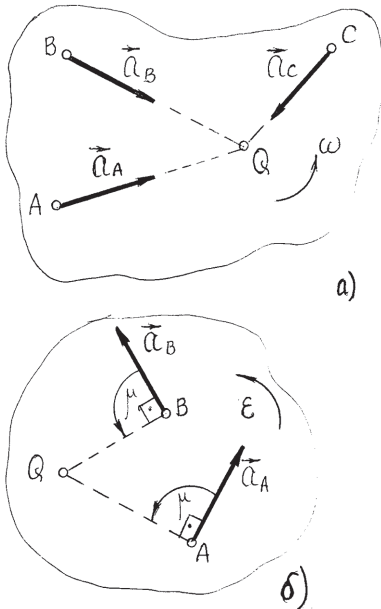


Рис. 3.46.

ри $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$ і відомі прискорення двох її точок, то м. ц. п. знайдеться на перетині перпендикулярів до відомих векторів прискорень (рис. 3.46.б).

в) $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$.

В цьому випадку прискорення всіх точок плоскої фігури при обертанні їх навколо полюса дорівнюють нулю, отже, прискорення кожної її точки дорівнює прискоренню полюса і миттєвий центр прискорень відсутній.

Випадок 2. З умови задачі відомі модулі і напрями прискорень двох точок плоскої фігури.

В даному випадку ні величина кута μ , ні напрям кутового прискорення плоскої фігури не відомі. Але і те, і друге можна знайти, якщо знайти прискорення однієї з точок плоскої фігури в її обертальному русі навколо другої точки як навколо полюса.

Нехай прискорення точок A і B плоскої фігури відомі (рис. 3.47).

Візьмемо за полюс точку A . Тоді прискорення точки B можна зв'язати з прискоренням точки A виразом $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$.

Побудуємо при точці B у відповідному масштабі паралелограм прискорень по заданій діагоналі $\vec{a}_B$ і одній з сторін $\vec{a}_A$. Друга сторона паралелограма визначить прискорення $\vec{a}_{BA}$ при обертанні точки B навколо точки A .

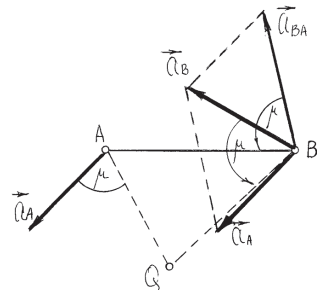


Рис. 3.47

Прискорення $\vec{a}_{BA}$ складає кут $\mu = \arctg \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ з відрізком AB , який з'єднує точку B з полюсом A . Кут μ відкладається в напрямі від вектора $\vec{a}_{BA}$ до відрізка AB . Це дає змогу знайти напрям кутового прискорення ε . Відкладемо під кутом μ від векторів прискорень точок A і B два промені і продовжимо їх до перетину в точці Q , яка і буде миттєвим центром прискорень.

Якщо прискорення двох точок A і B плоскої фігури паралельні, то спосіб знаходження миттєвого центра прискорень показаний на рис. 3.48.

В справедливості цієї побудови можна переко-

натися, порівнюючи пропорцію $\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}$ отриману з подібності трикутників (рис. 3.48) з аналогіч-

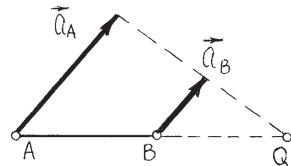


Рис. 3.48

ною пропорцією (3.44), яка характеризує властивість миттєвого центра прискорень.

Випадок 3. З умови задачі відома така точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю. Ця точка, якщо вона єдина, і буде миттєвим центром прискорень.

Для ілюстрації розглянемо прямолінійний рух колеса, швидкість V_Q центра Q якого постійна. $V_Q = \text{const}$ (рис. 3.49).

Це означає, що прискорення центра колеса дорівнює нулю: $a_Q = 0$.

Доведемо, що дійсно точка Q є миттєвим центром прискорень.

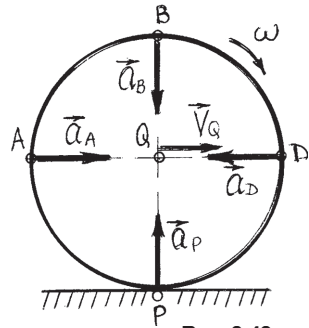


Рис. 3.49

Точка P – миттєвий центр швидкостей. Кутова швидкість колеса $\omega = \frac{V_Q}{QP}$.

Кутове прискорення колеса
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_Q}{QP} \right).$$

При русі колеса відстань QP не змінюється, т. б. $QP = \text{const}$.

Тоді
$$\varepsilon = \frac{1}{QP} \cdot \frac{dV_Q}{dt} = \frac{a_Q}{QP} = 0.$$

Маємо для колеса: $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$.

Такий рух плоскої фігури розглянуто (див. випадок 1 (а), рис. 3.45).

Таким чином, прискорення всіх точок колеса напрямлені до центра колеса, т. б. точка Q є миттєвим центром прискорень.

Примітка. Цей приклад наочно показує, що миттєвий центр прискорень і миттєвий центр швидкостей плоскої фігури не співпадають. Дійсно, миттєвим центром швидкостей колеса є точка P , прискорення якої $a_P = \omega^2 \cdot QP \neq 0$.

3.15. Методика розв'язування задач на знаходження прискорення точок при плоскому русі тіла

Задачі, які будуть розглянуті в цьому пункті, ми розв'яжемо як аналітичним способом без використання і з використанням миттєвого центра прискорень, так і графічним способом.

Розрахунки потрібно починати з тієї точки, швидкість і прискорення якої можна знайти з умови задачі. Потім цю точку прийняти за полюс. Крім цього потрібно заздалегідь знайти кутову швидкість плоскої фігури. Детально це питання розглядалось в пункті 3.10. Знаючи прискорення полюса і кутову швидкість плоскої фігури, можна приступати до знаходження прискорення іншої точки плоскої фігури. Подальший хід розв'язання задач розглянемо на конкретних прикладах.

Задача 3.24.

$$\angle AOB = \alpha = 30^\circ$$

$$OA = AB = 0,5 \text{ м}$$

$$V_B = 2 \text{ м/с}$$

$$a_B = 3 \text{ м/с}^2$$

$$\epsilon_{OA} = ?$$

Вказаному на рисунку 3.50(a) положенні кривошипно-шатунного механізму, коли кут $AOB = 30^\circ$, швидкість і прискорення точки B дорівнюють: $V_B = 2 \text{ м/с}$, $a_B = 3 \text{ м/с}^2$, знайти кутове прискорення кривошипа OA , якщо $OA = AB = 0,5 \text{ м}$.

Щоб знайти кутове прискорення ϵ_{OA} кривошипа OA , необхідно знати прискорення точки A . Знайдемо це прискорення. Шатун AB здійснює плоский рух. Візьмемо за полюс точку B , прискорення якої відоме. Тоді прискорення точки A шатуна, згідно (3.32), буде

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t. \quad (1)$$

Але точка A належить і кривошипу OA , який обертається навколо осі, що проходить через точку O перпендикулярно площині рисунка. В цьому русі прискорення точки A буде:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^t, \quad (2)$$

де $\vec{a}_{AO}^n$, $\vec{a}_{AO}^t$ – нормальне і дотичне прискорення точки A .

Підставимо вираз (2) у вираз (1):

$$\vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^t = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t. \quad (3)$$

Для шатуна AB точка P є миттєвим центром швидкостей.

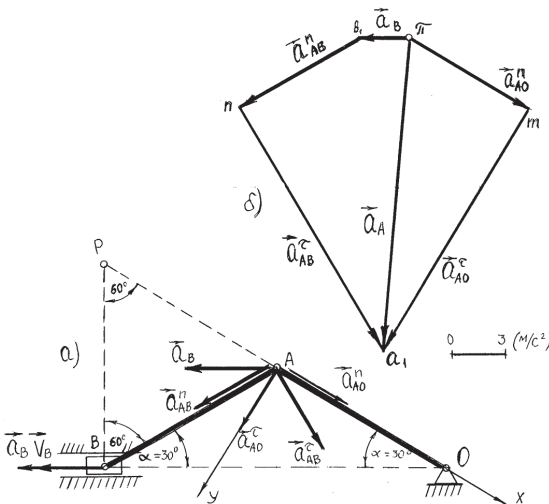


Рис. 3.50

Тому

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}; \quad V_A = V_B \frac{AP}{BP}.$$

З рис. 3.50(а) видно, що $\triangle APB$ рівносторонній. Тому $AP = BP = 0,5$ м. Це означає, що $V_A = V_B = 2$ м/с.

Кутова швидкість шатуна AB $\omega_{AB} = \frac{V_B}{BP} = 4$ (рад/с).

Кутова швидкість кривошипа OA $\omega_{OA} = \frac{V_A}{AO} = 4$ (рад/с).

Проаналізуємо вираз (3). Подібний аналіз, а саме виразу (3.42), нами був уже зроблений.

Прискорення $\vec{a}_{AO}^n$ відоме по модулю і по напрямку. Це прискорення напрямлене по AO до точки O .

$$a_{AO}^n = \omega_{AO}^2 \cdot OA = 4^2 \cdot 0,5 = 8 \text{ (м/с}^2\text{)}, \quad a_{AO}^n = 8 \text{ м/с}^2.$$

У виразі (3) прискорення $\vec{a}_{AO}^n$ підкреслимо двома рисками.

Дотичне прискорення $a_{AO}^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA$ по модулю не відоме, бо не відоме кутове прискорення ε_{AO} , хоча напрям відомий, $\vec{a}_{AO}^\tau \perp \vec{a}_{AO}^n$. В виразі (3) прискорення $\vec{a}_{AO}^\tau$ підкреслимо однією рисою.

Прискорення точки B відоме, тому підкреслимо його двома рисками.

Прискорення $\vec{a}_{AB}^n$ відоме по модулю і по напрямку. Це прискорення напрямлене від точки A до точки B по лінії AB . Модуль прискорення

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 4^2 \cdot 0,5 = 8 \text{ (м/с}^2\text{)}, \quad a_{AB}^n = 8 \text{ м/с}^2.$$

У виразі (3) прискорення $\vec{a}_{AB}^n$ підкреслимо двома рисками.

Залишилось прискорення a_{AB}^τ , яке напрямлене перпендикулярно до $\vec{a}_{AB}^n$. Модуль цього прискорення $a_{AB}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ не відомий, бо не відоме кутове прискорення ε_{AB} . Підкреслимо $\vec{a}_{AB}^\tau$ однією рисою.

На рис. 3.50(а) показані напрями всіх прискорень. Таким чином, у виразі (3) маємо два невідомі прискорення. Виберемо осі координат з початком в точці A . Спроєктуємо вираз (3) на осі координат XAY .

$$a_{AO}^n = -a_B \cos 30^0 - a_{AB}^n \cos 60^0 + a_{AB}^\tau \cos 30^0; \quad (4)$$

$$a_{AO}^\tau = a_B \sin 30^0 + a_{AB}^n \sin 60^0 + a_{AB}^\tau \sin 30^0. \quad (5)$$

$$\text{З виразу (4): } a_{AB}^\tau = \frac{a_{AO}^n + a_B \cos 30^0 + a_{AB}^n \cos 60^0}{\cos 30^0}, \quad a_{AB}^\tau = 16,8 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{З виразу (5): } a_{AO}^\tau = 16,8 \text{ м/с}^2.$$

Тоді кутове прискорення ε_{AO} кривошипа OA :

$$\varepsilon_{AO} = \frac{a_{AO}^\tau}{AO} = \frac{16,8}{0,5} = 33,6 \text{ (рад/с}^2\text{)}, \quad \varepsilon_{AO} = 33,6 \text{ рад/с}^2.$$

Задача розв'язана аналітичним способом. Цю саму задачу розв'яжемо графічно.

Для цього, вибравши певний масштаб для прискорень, розв'яжемо векторне рівняння (3) графічно – побудовою *плану прискорень* рис. (3.50(б)).

Приймемо довільну точку π за полюс і від цієї точки спочатку будемо відкладати вектори правої частини рівняння (3). З точки π проведемо вектор $\pi \vec{b}_1 = \vec{a}_B$, потім із точки b_1 проведемо вектор $b_1 \vec{n}$, паралельний і рівний вектору $\vec{a}_{AB}^n$ (т. б. напрямлений паралельно AB від A до B). З точки n проведемо пряму, паралельну $\vec{a}_{AB}^\tau$ (т. б. напрямлену перпендикулярно до AB). Довжина вектора $\vec{a}_{AB}^\tau$ нам невідома. Побудуємо вектори, що знаходяться в лівій частині рівняння (3). З точки π проведемо вектор $\pi \vec{m}$, паралельний і рівний $\vec{a}_{AO}^n$, а з точки m – пряму, паралельну $\vec{a}_{AO}^\tau$, до перетину з напрямом $\vec{a}_{AB}^\tau$. Отримана точка перетину a_1 і буде шуканою вершиною плану прискорень, т. б. $\vec{a}_A = \pi \vec{a}_1$.

Використовуючи масштаб, маємо: $a_A = 18,4 \text{ м/с}^2$, $a_{AO}^\tau = 16,6 \text{ м/с}^2$, $a_{AB}^\tau = 16,6 \text{ м/с}^2$.

Задача 3.25.

$$\omega_0 \quad \varphi = 60^\circ \quad \gamma = 90^\circ$$

$$AB = 6r, \quad BC = 3\sqrt{3}r$$

$$AD = BD, \quad BL = LC$$

$$V_C = ? \quad a_C = ?$$

$$a_B = ? \quad a_L = ?$$

Кривошип OA довжиною r паророзподільного механізму обертається рівномірно навколо осі O з кутовою швидкістю ω_0 . Знайти швидкість і прискорення повзуна C для положення, яке зображене на рис 3.51, якщо при цьому $\varphi = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$. Прийняти $AB = 6r$; $BC = 3\sqrt{3}r$. Крім цього, за допомогою миттєвого центра прискорень знайти прискорення точок D і L , які є серединами шатунів AB і BC .

З умови задачі ми можемо знайти швидкість і прискорення точки A :

$$V_A = \omega_0 r; \quad \vec{a}_A = \vec{a}_{A0}^n + \vec{a}_{A0}^\tau,$$

$$a_{A0}^n = \omega_0^2 r, \quad a_{A0}^\tau = \varepsilon_0 \cdot r = 0 \quad (\text{бо } \varepsilon_0 = 0).$$

$$\text{Маємо } a_A = \omega_0^2 r.$$

Вектор прискорення напрямлений по AO до точки O . Напрямок швидкості $\vec{V}_B$ повзуна B показаний на рисунку 3.51. Для шатуна AB миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці P_1 .

Тоді

$$V_B = V_A \frac{BP_1}{AP_1}.$$

З

$$\triangle AP_1B \quad AP_1 = \frac{1}{2} AB = 3r, \quad BP_1 = AB \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}r,$$

Тоді

$$V_B = \sqrt{3}\omega_0 r.$$

Кутова швидкість шатуна AB :

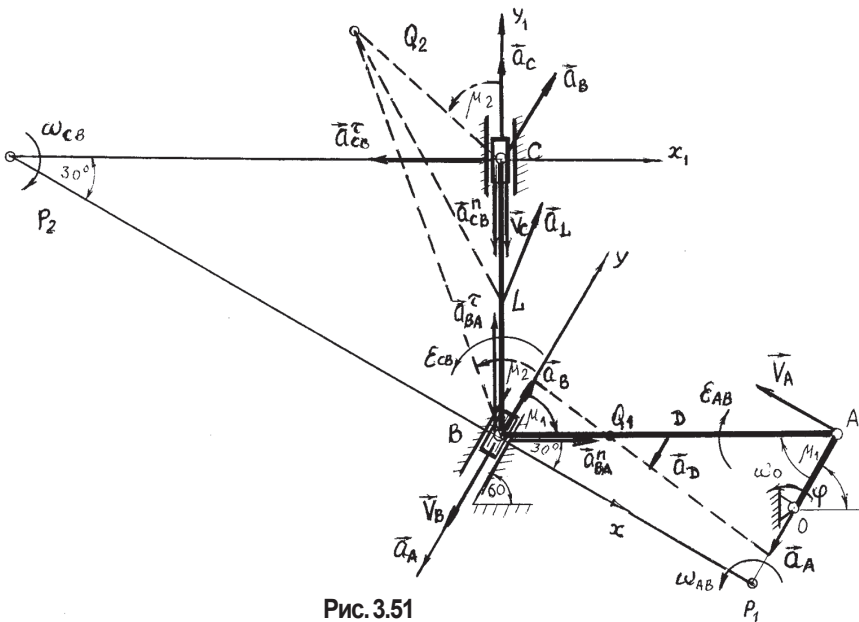


Рис. 3.51

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{\omega_0 r}{3r} = \frac{1}{3} \omega_0, \quad \omega_{AB} = \frac{\omega_0}{3}.$$

Знайдемо прискорення повзуна B . За полюс візьмемо точку A :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau, \quad (1)$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \frac{2}{3} \omega_0^2 r, \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB. \quad (2)$$

У виразі (2) кутове прискорення ε_{AB} не відоме.

Напрями прискорень в точці B показані на рисунку.

Спроектуємо вираз (1) на осі координат XY :

$$0 = +a_{BA}^n \cos 30^\circ - a_{BA}^\tau \cos 60^\circ, \quad (3)$$

$$a_B = -a_A + a_{BA}^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau \sin 60^\circ. \quad (4)$$

З рівняння (3):

$$a_{BA}^\tau = a_{BA}^n \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{2}{3} \omega_0^2 r \cdot \sqrt{3}; \quad a_{BA}^\tau = \frac{2\sqrt{3}}{3} \omega_0^2 r. \quad (5)$$

З рівняння (4):

$$a_B = \left(-1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \omega_0^2 r; \quad a_B = \frac{1}{3} \omega_0^2 r.$$

З виразу (2), використовуючи вираз (5), знайдемо кутове прискорення ε_{AB} шатуна AB :

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{9} \omega_0^2.$$

Напрямок кутового прискорення ε_{AB} визначається за напрямом прискорення $\vec{a}_{BA}^\tau$.

Знайдемо положення миттєвого центра прискорень Q_I шатуна AB :

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \frac{|\varepsilon_{AB}|}{\omega_{AB}^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{9} \omega_0^2}{\frac{\omega_0^2}{9}} = \sqrt{3}; \quad \mu_1 = 60^\circ.$$

Миттєвий центр прискорень знаходиться в точці перетину променів, які виходять з точок A і B під кутом μ_1 до векторів прискорень. В даному випадку ці

промені попали на шатун AB , т. б. м. ц. п. шатуна AB знаходиться на шатуні.
Відстань від м. ц. п. до точки A можна знайти з формули:

$$AQ_1 = \frac{a_A}{\sqrt{\epsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}} = 4,5r.$$

Прискорення точки D знайдемо з відношення

$$\frac{a_D}{a_A} = \frac{DQ_1}{AQ_1}.$$

$$a_D = a_A \frac{DQ_1}{AQ_1} = a_A \left(\frac{AQ_1 - AD}{AQ_1} \right) = a_A \left(1 - \frac{AD}{AQ_1} \right) = \frac{1}{3} a_A = \frac{1}{3} \omega_0^2 r.$$

$$a_D = \frac{1}{3} \omega_0^2 r.$$

Напрямок прискорення $\vec{a}_D$ показаний на рис. 3.51.

Знайдемо швидкість і прискорення точки C шатуна CB .

Для шатуна BC м. ц. ш. знаходиться в точці P_2 :

$$\frac{V_C}{V_B} = \frac{CP_2}{BP_2}; \quad V_C = V_B \frac{CP_2}{BP_2}; \quad \frac{CP_2}{BP_2} = \sin 60^\circ; \quad V_C = V_B \sin 60^\circ.$$

$$V_C = \frac{3}{2} \omega_0 r.$$

Кутова швидкість шатуна CB :

$$\omega_{CB} = \frac{V_B}{BP_2}; \quad BP_2 = 2BC = 6\sqrt{3}r; \quad \omega_{CB} = \frac{\sqrt{3}\omega_0 r}{6\sqrt{3}r}.$$

$$\omega_{CB} = \frac{1}{6} \omega.$$

Візьмемо точку B за полюс. Тоді прискорення точки C буде:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau. \quad (6)$$

$$a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = \frac{1}{36} \omega_0^2 \cdot 3\sqrt{3}r; \quad a_{CB}^n = \frac{\sqrt{3}}{12} \omega_0^2 r.$$

$$a_{CB}^r = \varepsilon_{CB} \cdot CB. \quad (7)$$

Напрями векторів прискорень показані на рис. 3.51.

Спроектуємо векторне рівняння (6) на осі координат $X_I C Y_I$:

$$0 = a_B \cos 60^\circ - a_{CB}^r; \quad (8)$$

$$a_C = a_B \sin 60^\circ - a_{CB}^n. \quad (9)$$

З виразу (8):

$$a_{CB}^r = a_B \cos 60^\circ = \frac{1}{6} \omega_0^2 r; \quad (10)$$

З виразу (9):

$$a_C = \frac{\sqrt{3}}{12} \omega_0^2 r.$$

З виразу (7), з урахуванням виразу (10), знайдемо кутове прискорення ε_{CB} шатуна CB :

$$\varepsilon_{CB} = \frac{a_{CB}^r}{CB}; \quad \varepsilon_{CB} = \frac{\sqrt{3}}{54} \omega_0^2.$$

Знайдемо прискорення точки L . Для цього потрібно знайти положення миттєвого центра прискорень Q_2 шатуна CB .

$$\mu_2 = \arctg \frac{|\varepsilon_{CB}|}{\omega_{CB}^2} = \arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad \mu_2 = 49^\circ.$$

Положення м. ц. п. Q_2 шатуна BC показано на рис. 3.51.

Прискорення точки L знайдеться з відношення:

$$\frac{a_L}{a_B} = \frac{LQ_2}{BQ_2}; \quad a_L = a_B \frac{LQ_2}{BQ_2}.$$

В зв'язку з тим, що рис. 3.51. побудований в масштабі, то відстані точок L і B до м. ц. п. можна знайти, вимірявши їх на рисунку:

$$a_L = \frac{1}{3} \omega_0^2 r \cdot 0,68 = 0,23 \omega_0^2 r; \quad a_L = 0,23 \omega_0^2 r.$$

Задача 3.26.

$$r_1 = 5 \text{ см}$$

$$r_2 = 15 \text{ см}$$

$$AB = 60 \text{ см}$$

$$AC = AB$$

$$\omega_1 = 0$$

$$\varepsilon_1 = 12 \text{ рад/с}^2$$

$$a_B = ? \quad a_C = ?$$

Зубчасте колесо 1 радіусом 5 см передає рух зубчастому колесу 2 радіусом 15 см, шатуну AB довжиною 60 см і повзуну B (рис. 3.52). Знайти прискорення повзуна B і кутове прискорення шатуна AB в той момент часу, коли $OA \perp OO_1$, якщо кутова швидкість колеса 1 в цей час дорівнює нулю, а його кутове прискорення дорівнює 12 рад/с^2 .

Між кутовими швидкостями коліс 1 і 2 існує співвідношення:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}; \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}. \quad (1)$$

Візьмемо похідну по часу від виразу (1):

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot \frac{r_1}{r_2},$$

де $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}$; $\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt}$ – кутові прискорення коліс 1 і 2.

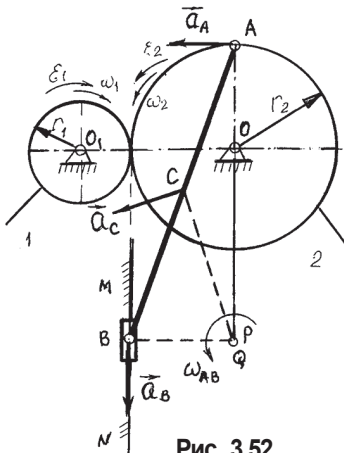


Рис. 3.52

$$\text{Маємо} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2}. \quad (2)$$

Співвідношення (2) між кутовими прискореннями коліс подібні співвідношенням (1) між кутовими швидкостями цих коліс.

Згідно умови задачі з виразів (1) і (2) маємо:

$$\omega_2 = 0, \quad \varepsilon_2 = 4 \text{ рад/с}^2.$$

Точка A обертається навколо осі, що проходить через точку O . Прискорення точки A

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^{\tau}.$$

$$\text{Прискорення} \quad a_{AO}^n = \omega_2^2 \cdot OA = 0$$

(тому що $\omega_2 = 0$).

$$\text{Прискорення} \quad a_{AO}^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot OA = 4 \cdot 15 = 60 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Це прискорення напрямлене перпендикулярно радіусу OA . Маємо:

$$a_A = a_{AO}^r = 60 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Швидкість точки A напрямлена перпендикулярно радіусу OA , а швидкість точки B – по ходу повзуна B . Миттєвий центр швидкостей шатуна AB знаходиться в точці P . Кутова швидкість шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{\omega_2 \cdot OA}{AP} = 0.$$

Знайдемо положення миттєвого центра прискорень шатуна AB :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon_{AB}|}{\omega_{AB}^2} = \infty, \text{ тобто } \mu = 90^\circ.$$

Прискорення точки B напрямлене по лінії MN .

Миттєвий центр прискорень шатуна знаходиться в точці перетину променів, які виходять з точок A і B під кутом $\mu = 90^\circ$ до векторів прискорень. Ці промені перетнулися в точці Q . Відстань від точки Q до м. ц. п.

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}} = \frac{a_A}{\varepsilon_{AB}}.$$

де ε_{AB} – кутове прискорення шатуна AB .

Звідси
$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_A}{AQ}.$$

$$\text{З } \triangle ABQ \quad AQ = \sqrt{AB^2 - BQ^2} = \sqrt{60^2 - 15^2} = 58,1 \text{ см.}$$

$$\text{Тоді} \quad \varepsilon_{AB} = \frac{60}{58,1} = 1,03 \text{ рад/с}^2.$$

Знайдемо прискорення точки B :

$$\frac{a_B}{a_A} = \frac{BQ}{AQ}; \quad a_B = a_A \frac{BQ}{AQ}; \quad a_B = 60 \frac{15}{58,1} = 15,5 \text{ см/с}^2.$$

$$a_B = 15,5 \text{ см/с}^2.$$

Аналогічно, прискорення точки C :

$$a_C = a_A \frac{CQ}{AQ}; \quad a_C = 60 \frac{30}{58,1} = 31 \text{ (см/с}^2\text{)}; \quad a_C = 31 \text{ см/с}^2.$$

Задача 3.27.

$$r_1 = 5 \text{ см}$$

$$r_2 = 30 \text{ см}$$

$$\omega_{OC} = 0,4 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_{OC} = 0,8 \text{ рад/с}^2$$

$$a_P = ? \quad PQ = ?$$

Зубчасте колесо 1 радіусом 5 см (рис. 3.53), яке має внутрішнє зачеплення з нерухомим колесом 2 радіусом 30 см, приводиться в рух кривошипом OC , кутове прискорення якого дорівнює $0,8 \text{ рад/с}^2$. Знайти прискорення миттєвого центра швидкостей P в момент часу, коли кутова швидкість кривошипа OC дорівнює $0,4 \text{ рад/с}$.

Згідно умови задачі, ми можемо знайти швидкість і прискорення точки C колеса 1:

$$V_C = \omega_{OC} \cdot OC = \omega_{OC} (r_2 - r_1).$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{CO}^n + \vec{a}_{CO}^t.$$

$$a_{CO}^n = \omega_{OC}^2 \cdot OC = 0,16 \cdot 25 = 4 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

$$a_{CO}^t = \varepsilon_{OC} \cdot OC = 0,8 \cdot 25 = 20 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Напрями цих прискорень показані на рис. 3.53.

Для колеса 1 миттєвим центром швидкостей є точка P – точка контакту колеса 1 з колесом 2.

Кутова швидкість колеса 1.

$$\omega_1 = \frac{V_C}{CP};$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_{OC} (r_2 - r_1)}{r_1}; \quad \omega_1 = \omega_{OC} \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \quad (1)$$

З виразу (1) маємо:

$$\omega_1 = 2 \text{ рад/с}$$

Візьмемо похідну по часу від виразу (1).

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_{OC}}{dt} \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right)$$

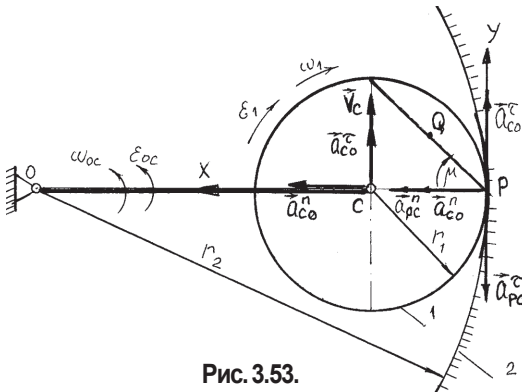


Рис. 3.53.

Тут $\frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon_1$, $\frac{d\omega_{OC}}{dt} = \varepsilon_{OC}$ – відповідно кутове прискорення колеса 1, кутове прискорення кривошипа OC .

$$\text{Маємо: } \varepsilon_1 = \varepsilon_{OC} \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right); \quad \varepsilon_1 = 4 \text{ рад/с}^2.$$

Щоб знайти прискорення точки P (м. ц. ш. колеса 1), візьмемо за полюс точку C , прискорення якої відоме:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{CO}^n + \vec{a}_{CO}^\tau + \vec{a}_{PC}^n + \vec{a}_{PC}^\tau. \quad (2)$$

$$\text{Нормальне прискорення } a_{PC}^n = \omega_1^2 \cdot CP = 2^2 \cdot 5 = 20 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Це прискорення напрямлене від точки P до точки C .

Дотичне прискорення $\vec{a}_{PC}^\tau$ напрямлене по кутовому прискоренню ε_1 перпендикулярно нормальному прискоренню $\vec{a}_{PC}^n$: і визначається за формулою

$$a_{PC}^\tau = \varepsilon_1 \cdot CP = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (см/с}^2\text{)}$$

Спроектуємо векторне рівняння (2) на осі координат XPY .

$$a_{PX} = a_{CO}^n + a_{PC}^n = 4 + 20 = 24 \text{ (см/с}^2\text{)}; \quad a_{PY} = 24 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

$$a_{PY} = a_{CO}^\tau - a_{PC}^\tau = 20 - 20 = 0; \quad a_{PY} = 0.$$

Повне прискорення точки P $a_P = 24 \text{ см/с}^2$.

Прискорення точки P напрямлене вздовж PC

Знайдемо положення миттєвого центра прискорень колеса 1.

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon_1|}{\omega_1^2} = \frac{4}{2^2} = 1; \quad \mu = 45^\circ.$$

Кут між прискоренням $\vec{a}_P$ і відрізком PQ дорівнює 45° .

Відстань м. ц. п. Q від точки P :

$$PQ = \frac{a_P}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^2}} = \frac{24}{\sqrt{4^2 + 2^4}} = 3\sqrt{2} \text{ (см)}; \quad PQ = 3\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Положення точки Q показано на рис. 3.53.

3.16. Задачі для самостійної роботи на знаходження прискорень точок при плоскому русі тіла

Задача 3.28.

Кривошип OA довжиною 40 см обертається навколо осі O з постійною кутовою швидкістю $\omega_{OA} = 2$ рад/с і приводить в рух шатун AB довжиною 80 см. Кінець B шатуна рухається по напрямній LD , яка складає з горизонтом кут $\alpha = 45^\circ$.

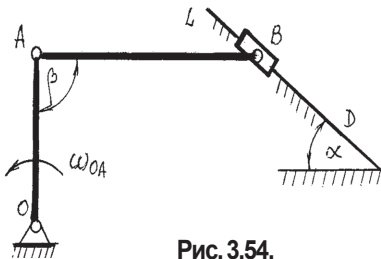


Рис. 3.54.

Знайти прискорення повзуна B і кутове прискорення шатуна AB в момент часу, коли кут $\beta = 90^\circ$ (рис. 3.54).

Відповідь: $a_B = 80\sqrt{2}$ см/с²;
 $\varepsilon = 3$ рад/с².

Задача 3.29.

Знайти швидкість і прискорення точки D повзуна механізму, зображеного на рис. 3.55. Кутова швидкість кривошипа O_1A постійна і дорівнює $\omega_{OA} = 1$ рад/с; $O_1A = O_2B$; $O_1A \parallel O_2B$; $\alpha = \beta = 60^\circ$; $DC = 5$ см.

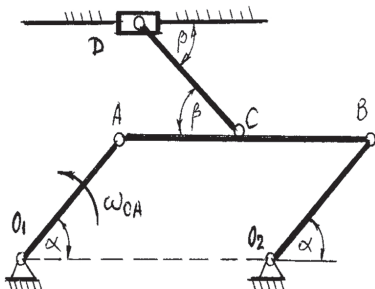


Рис. 3.55.

Відповідь: $V_D = 10\sqrt{3}$ см/с;
 $a_D = 50$ см/с².

Задача 3.30.

Дві паралельні рейки EL і NK рухаються в одну і ту ж сторону за законами $S_1 = 2t^2$ см; $S_2 = 3t^2$ (см). Між рейками знаходиться диск радіусом $r = 10$ см, який внаслідок руху рейок і тертя котиться по ним без ковзання (рис. 3.56). Знайти для моменту часу $t = 1$ с швидкість і прискорення центра C диска, кутову швидкість і кутове прискорення диска.

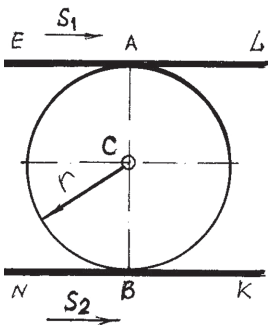


Рис. 3.56.

Відповідь: $V_C = 5$ см/с; $a_C = 5$ см/с²;
 $\omega = 0,1$ рад/с; $\varepsilon = 0,1$ рад/с².

Задача 3.31.

Котушка радіусом $R = 20$ см котиться без ковзання по горизонтальній площині. На середню циліндричну частину котушки радіусом $r = 10$ см намотана нитка, яка протягнута паралельно площині, перекинута через блок і несе на вільному кінці вантаж M , який опускається вниз зі швидкістю $V = 3t$ (м/с) (рис. 3.57). Знайти прискорення точки A котушки, розміщеної з точкою C на одній вертикалі, в момент часу $t = 1$ с.

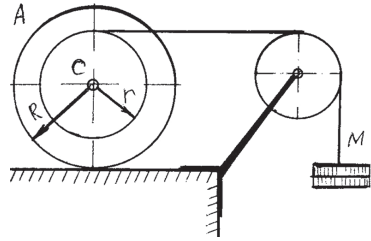


Рис. 3.57.

Відповідь: $a_A = 4\sqrt{26}$ м/с².

Задача 3.32.

В кривошипно-шатунному механізмі з круговою напрямною KL кривошип OA має в даний момент часу кутову швидкість ω_0 , кутове прискорення ε_0 і складає з горизонтом кут 60° . При цьому $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle O_1BA = 30^\circ$, де O_1 – центр кривини напрямляючої. Знайти в цей момент часу дотичне і нормальне прискорення повзуна B , якщо $OA = b$; $AB = 2b\sqrt{3}$; $O_1B = 2b$ (рис. 3.58).

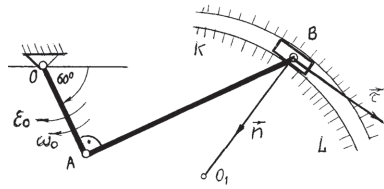


Рис. 3.58.

Відповідь:

$$a_B^n = 2b\omega_0^2; \quad a_B^\tau = b(-2\varepsilon_0 + \omega_0^2\sqrt{3}).$$

Задача 3.33.

Квадрат $ABCD$ зі стороною $b = 2$ см здійснює плоский рух. В даний момент часу прискорення його вершин A і B відповідно дорівнюють по модулю $a_A = 2$ см/с², $a_B = 4\sqrt{2}$ см/с² і напрямлені, як показано на рисунку 3.59. Знайти миттєву кутову

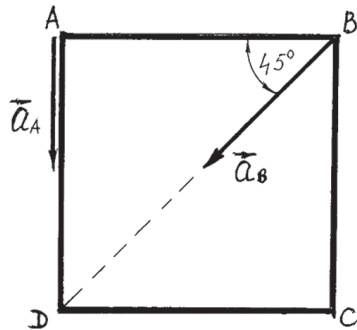


Рис. 3.59

швидкість і миттєве кутове прискорення квадрата, а також прискорення точки C .

Відповідь: $\omega_1 = \sqrt{2}$ рад/с; $\varepsilon = 1$ рад/с²; $a_C = 6$ см/с². Прискорення $\vec{a}_C$ напрямлене від точки C до точки D .

4. Сферичний рух твердого тіла

Рух твердого тіла, яке має одну нерухому точку, називається обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої точки.

Якщо тіло обертається навколо нерухомої точки, то всі точки тіла рухаються по поверхні сфер, спільний центр яких співпадає з нерухомою точкою O . В зв'язку з цим, *рух тіла навколо нерухомої точки, називається сферичним рухом твердого тіла.*

Прикладом сферичного руху тіла є рух дзиги.

4.1. Кути Ейлера. Рівняння руху твердого тіла навколо нерухомої точки

Вияснимо, скільки потрібно параметрів для визначення в просторі положення твердого тіла, яке має одну нерухому точку. Введемо дві системи координат: система координат $OX_1Y_1Z_1$ – нерухома система координат; рухома система координат $OXYZ$ зв'язана з рухомих тілом. Точка O – нерухома точка, навколо якої обертається тіло (рис. 4.1). Положення тіла в просторі буде повністю визначено, якщо буде відоме положення рухомих системи координат $OXYZ$.

З аналітичної геометрії відомо, що положення рухомих системи координат

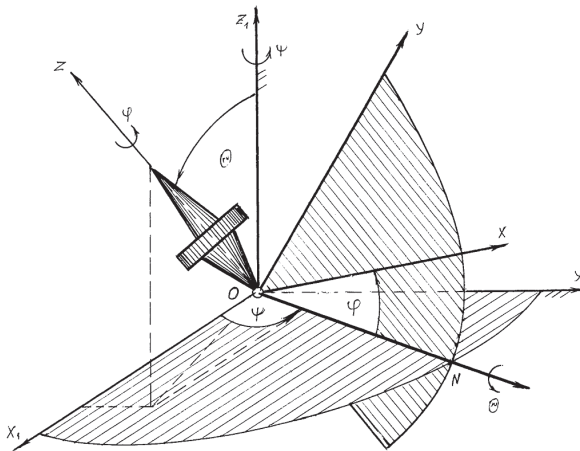


рис. 4.1.

відносно нерухомої можна визначити за допомогою дев'яти напрямних косинусів рухомих осей, тобто косинусами тих кутів, які кожна з рухомих осей утворює з нерухомими осями. Використання напрямних косинусів для визначення положення твердого тіла в просторі на практиці незручне, тому що потрібно задавати дев'ять напрямних косинусів. Але значно простіше і зручніше виз-

начати положення системи $OXYZ$ відносно осей $OX_1Y_1Z_1$ за допомогою трьох кутів. На практиці найбільше розповсюдження набув вибір трьох кутів, який запропонував Ейлер (рис. 4.1). Леонард Ейлер (1707–1783) – народився в м. Базелі (Швейцарія). Його наукова спадщина – понад 850 наукових праць – це дослідження з математики, механіки, теорії пружності, математичної фізики, оптики, теорії машин, гідромеханіки, астрономії. Ейлер довго жив і працював у Росії як академік Петербурзької Академії наук, де надрукував 473 наукових праці.

Через ON позначимо лінію перетину координатних площин OX_1Y_1 і OXY . Пряма ON називається *лінією вузлів*. Напрямок від O до N будемо вважати додатним. Кут між віссю OX_1 і лінією вузлів позначимо через ψ і будемо називати *кутом прецесії*. Цей кут лежить в площині OX_1Y_1 і відраховується від осі OX_1 проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку осі Z_1 .

Другим кутом Ейлера є кут між координатними площинами OX_1Y_1 і OXY . Його вимірюють кутом θ між осями OZ_1 і OZ . Кут θ називається *кутом нутації*. Кут нутації відраховується від осі OZ_1 проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку лінії вузлів ON .

Кут між лінією вузлів ON і віссю OX позначимо через φ . Кут φ називається *кутом власного обертання*. Кут φ лежить в площині OXY і відраховується від лінії вузлів проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку осі OZ .

Кути ψ , θ і φ називаються кутами Ейлера.

При русі тіла ці кути є функціями часу:

$$\psi = f_1(t), \quad \theta = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (4.1)$$

Рівняння (4.1) є рівняннями обертального руху твердого тіла навколо нерухомої точки. Якщо ці рівняння задані, то в довільний момент часу можна знайти положення твердого тіла відносно нерухомої системи координат $OX_1Y_1Z_1$.

Примітка: Крім кутів Ейлера в практиці використовують і кути Крилова. Олексій Миколайович Крилов (1863–1945) – видатний російський математик, механік і кораблебудівник, засновник теорії корабля; йому належать ряд видатних робіт по наближеним обчисленням, рівнянням математичної фізики, зовнішньої балістики і теорії пружності. Кути Ейлера знайшли використання в небесній механіці. Кути Крилова використовуються в технічних задачах – гіроскопії, динаміці рухомих об'єктів, роботів.

Положення корабля відносно його центра тяжіння C визначається *корабельними кутами*, які запропонував Крилов. Вісь CX системи координат $CXYZ$,

жорстко зв'язаної з кораблем, напрямляється від корми до носа, вісь CY – до лівого борту, а вісь CZ розміщена в діаметральній площині корабля. В положенні рівноваги корабля осі системи координат $CXYZ$ співпадають з осями незмінного напрямку системи координат $CX_1Y_1Z_1$. Кут ψ між віссю CX_1 і лінією CN , утвореною перетином площин XYZ і X_1CZ_1 називається *кутом диферента*, кут φ між лінією вузлів CN і віссю CX називається *кутом рискання*. Кут θ між віссю CZ і лінією CM перетину площин X_1CZ_1 і Y_1CZ називається *кутом нахилу*.

Стосовно авіації кути ψ , θ і φ називаються: ψ – кут рискання, θ – кут тангажа, φ – кут нахилу.

4.2. Теорема Ейлера-Даламбера про переміщення твердого тіла. Миттєва вісь обертання

Теорема Ейлера-Даламбера має наступне твердження:

Тіло, яке має одну нерухому точку, із одного положення в інше можна перевести одним поворотом навколо осі, що проходить через нерухому точку.

Перед тим як довести цю теорему, ми звернемося до плоского руху тіла. Вивчаючи плоский рух твердого тіла було встановлено, що існує така точка тіла (м. ц. ш.), навколо якої тіло робить миттєвий поворот. Існування такої точки доведено в пункті 3.6. Існування миттєвого центра обертання доведемо іншим шляхом. Нехай тіло виконує плоский рух. Візьмемо в тілі відрізок AB . Через деякий час руху тіла відрізок AB зайняв положення A_1B_1 (рис. 4.2).

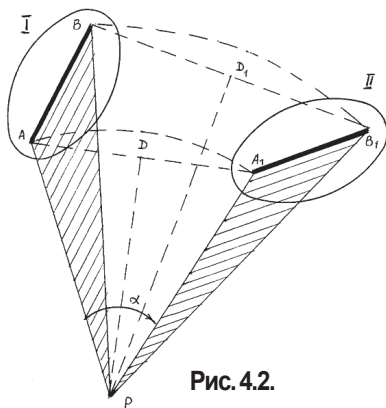


Рис. 4.2.

Доведемо наступну теорему:

Всякий не поступальний рух плоскої фігури із одного положення в друге можна здійснити за допомогою одного повороту на деякий кут навколо деякої визначеної точки.

З'єднаємо точку A з точкою A_1 . Через середину D відрізка AA_1 проведемо перпендикуляр. Аналогічно, через середину D_1 відрізка BB_1 також проведемо перпендикуляр. Ці два перпендикуляри перетинаються в точці P . Доведемо, що точка P є миттєвим центром обертання плоскої фігури. Розглянемо трикутники ABP і A_1B_1P . У цих трикутників сторони $AP=A_1P$, $BP=B_1P$ за властивістю серединного перпендикуляра, $AB=A_1B_1$. Ці трикутники мають по три рівні сторони, а тому вони рівні. Повернемо трикутник ABC

навколо точки P на кут α так, щоб сторона AP сумістилась зі стороною A_1P , тоді сторона BP суміститься зі стороною B_1P , а відрізок AB суміститься з відрізком A_1B_1 . Таким чином, існує така точка P навколо якої можна одним поворотом перевести плоску фігуру з одного положення в друге. Ця точка називається *миттєвим центром обертання*.

Повернемося тепер до доведення теореми Ейлера-Даламбера у випадку руху тіла навколо нерухомої точки. Як визначалось раніше, всі точки тіла рухаються по поверхням сфер, спільний центр яких співпадає з нерухомою точкою O .

Візьмемо в тілі дві точки A і B , які знаходяться на однаковій відстані R від нерухомої точки O . Проведемо через ці дві точки сферу з центром в точці O (рис. 4.3). Площина трикутника OAB перетинає сферу по колу великого круга. Лінія, яка з'єднує точки A і B є дугою круга радіуса R . Будемо вважати, що точки A і B лежать на поверхні рухомої сфери з радіусом R , яка рухається навколо нерухомої сфери з тим же радіусом. Дуга AB при русі тіла буде зміщуватись по нерухомій сферичній поверхні і через деякий час займе положення A_1B_1 ($AB = A_1B_1$) (рис. 4.4).

Доведемо, що із положення I , яке характеризується дугою AB , можна перейти в положення II , яке характеризується дугою A_1B_1 одним поворотом відносно деякої нерухомої осі. Одна точка цієї осі уже відома. Це точка O . Знайдемо положення другої точки осі. Для цього, як і в попередньому випадку, з'єднаємо точки A і A_1 , B і B_1 дугами великого круга, проведенними з нерухомої точки тіла. В середині дуг AA_1 , BB_1 точок D і D_1 проведемо сферичні перпендикуляри. Ці перпендикуляри лежать на поверхні сфери і перетинаються в точці P . Сферичні трикутники ABP і A_1B_1P рівні, бо мають по три рівні сторони $AP = A_1P$, $BP = B_1P$, $AB = A_1B_1$. Доведення цього аналогічне попередньому випадку. Якщо повернути заштрихований сферичний трикутник ABP навколо осі, яка проходить через точку P і нерухому точку O , то цей трикутник, перемістившись по нерухомій сфері співпаде з усіма точками сферичного трикутника A_1B_1P .

Вісь OP називають *віссю кінцевого обертання*. Положення осі OP залежить від початкового і кінцевого положення тіла. Якщо проміжок часу між початковим і кінцевим положеннями тіла

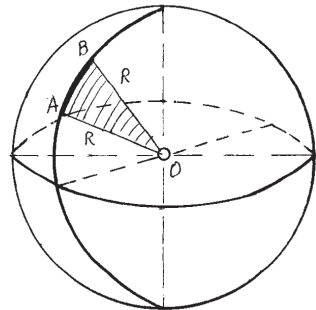


Рис. 4.3.

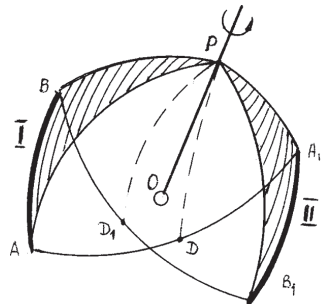


Рис. 4.4.

дуже малий ($t_2 - t_1 = \Delta t \rightarrow 0$), то вісь кінцевого обертання буде змінювати своє положення, прямуючи до свого граничного положення. Граничне положення осі кінцевого обертання при $\Delta t \rightarrow 0$ називається *миттєвою віссю обертання* для моменту часу t .

Таким чином, при русі тіла навколо нерухомої точки завжди можна знайти таку миттєву вісь обертання, навколо якої тіло в даний момент часу виконує обертальний рух.

4.3. Вектори кутової швидкості та кутового прискорення

Для прикладу розглянемо рух конуса по нерухомій горизонтальній площині. Вершина O конуса залишається нерухомою (рис. 4.5). Знайдемо положення миттєвої осі обертання.

Миттєва вісь обертання повинна проходити через нерухому точку O . Якщо конус по нерухомій площині рухається без ковзання, то швидкості точок конуса, які контактують з площиною, дорівнюють нулю. Це означає, що твірна OP є миттєвою віссю обертання, яка змінює свій напрям, обертаючись в площині навколо точки O . Конус навколо миттєвої осі OP обертається з деякою кутовою швидкістю. Встановимо напрям кутової швидкості. Поняття кутової швидкості як вектора було розглянуто в пункті 2.5, де зазначалось, що вектор кутової швидкості напрямляється по нерухомій осі обертання. В даному випадку вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ будемо напрямляти по миттєвій осі обертання в ту сторону, звідки обертання тіла навколо осі видно проти ходу годинникової стрілки (рис. 4.5). Як

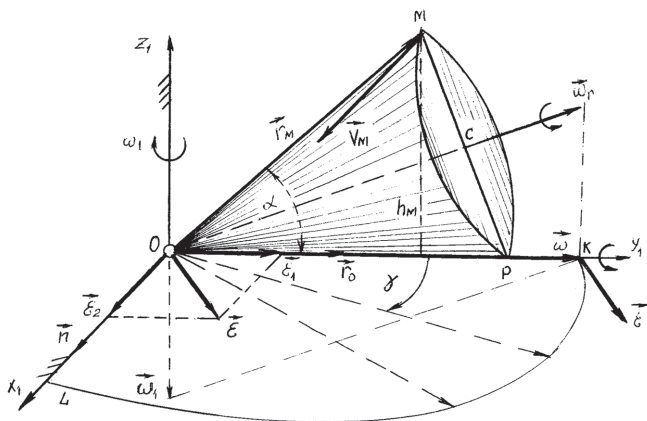


Рис. 4.5.

значалось раніше, миттєва вісь обертання в свою чергу обертається навколо точки O . Це означає, що вектор кутової швидкості тіла змінює свій напрям. Таким чином, при обертанні тіла навколо нерухомої точки, кутова швидкість тіла може змінюватись як по модулю, так і по напрямку, тому вона і носить назву – *миттєва кутова швидкість*.

При обертанні тіла навколо нерухомої осі кутове прискорення $\vec{\epsilon}$ визначалось як перша похідна від функції кутової швидкості (формула 2.4) і напрямлялось по осі обертання. Аналогічно будемо визначати кутове прискорення і у випадку руху тіла навколо нерухомої точки:

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (4.2)$$

У виразі (4.2) кутова швидкість і кутове прискорення є векторними величинами. Кінець вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ при русі конуса рухається по деякій траєкторії KL . Якщо вектор $\vec{\omega}$ вважати радіусом-вектором точки K , то по аналогії з формулою (1.10) модуля 3 ($\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$), можна вважати, що вектор кутового прискорення $\vec{\epsilon}$ напрямлений по дотичній до траєкторії руху точки K і є швидкістю, з якою кінець вектора переміщується вздовж кривої KL (рис. 4.5). Як бачимо, кутове прискорення $\vec{\epsilon}$ не напрямлене по миттєвій осі обертання. В подальшому вектор $\vec{\epsilon}$ будемо зображувати в нерухомій точці O тіла паралельно лінії, яка дотична до годографа вектора $\vec{\omega}$ в даний момент часу.

Зазначимо, що крива лінія KL кінця вектора $\vec{\omega}$ може мати різний вигляд, бо залежить від зміни кутової швидкості по величині і по напрямку.

Якщо позначити через $\vec{r}_0$ одиничний орт миттєвої осі обертання, то кутову швидкість можна записати у вигляді

$$\vec{\omega} = \omega \vec{r}_0, \quad \text{де } \omega - \text{модуль вектора } \vec{\omega}.$$

Скористаємось формулою (4.2):

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \vec{r}_0) = \frac{d\omega}{dt} \vec{r}_0 + \omega \frac{d\vec{r}_0}{dt}.$$

Позначимо
$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \vec{r}_0; \quad \vec{\epsilon}_2 = \omega \frac{d\vec{r}_0}{dt}. \quad (4.3)$$

Як було доведено раніше (див. модуль 3, формула 1.48), похідна від одиничного орта дає вектор, який перпендикулярний даному одиничному орту.

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} \vec{n}$$

де одиничний орт $\vec{n} \perp \vec{r}_0$, $\frac{d\gamma}{dt} = \omega_1$ – кутовою швидкістю обертання вектора $\vec{\omega}$ навколо осі, перпендикулярній вектору $\vec{\omega}$.

$$\text{Тоді} \quad \vec{\varepsilon}_2 = \omega_1 \omega \vec{n}. \quad (4.4).$$

Вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}_1$ напрямлений по миттєвій осі обертання і характеризує зміну вектора кутової швидкості по величині, а кутове прискорення $\vec{\varepsilon}_2$, характеризує зміну кутової швидкості тільки по напрямку.

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2. \quad (4.5)$$

Враховуючи те, що $\vec{\varepsilon}_1 \perp \vec{\varepsilon}_2$, маємо

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}. \quad (4.6)$$

Формулу (4.4) перепишемо у вигляді векторного добутку

$$\vec{\varepsilon}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}. \quad (4.7)$$

Примітка: 1. Вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ потрібно прикласти в нерухомій точці O .

2. Рух конуса (рис. 4.5) можна розглядати як обертальний рух навколо осі симетрії OC з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_r$ і разом з віссю OC навколо осі OZ_I з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$.

$$\text{Тоді} \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_1.$$

Більш детально ці питання будуть розглядатися в модулі 5.

4.4. Швидкість точок тіла, яке обертається навколо нерухомої точки

Звернемось до рис. 4.5. Тіло (конус) в даний момент часу обертається навколо миттєвої осі обертання OP . Швидкості всіх точок, які належать миттєвій осі обертання, дорівнюють нулю. Визначимо швидкість довільної точки M тіла. Для цього опустимо з точки M перпендикуляр на вісь OP . Тоді

$$V_M = \omega \cdot h_M = \omega \cdot OM \sin \alpha. \quad (4.8)$$

Швидкість $\vec{V}_M$ напрямлена перпендикулярно радіусу h_M , тобто паралельно осі OX_I .

При вивченні руху тіла навколо нерухомої осі була отримана формула Ейлера (2.19) (див. модуль 3). Запишемо формулу Ейлера для випадку руху тіла навколо нерухомої точки

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4.9)$$

Використовуючи формулу (4.9), визначимо швидкість точки M . Проведемо з точки O радіус-вектор $\vec{r}_M$. Тоді

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M.$$

$$\text{Модуль швидкості } V_M = \omega \cdot r_M \sin(\vec{\omega}, \vec{r}_M) = \omega \cdot OM \cdot \sin \alpha. \quad (4.10)$$

Порівнюючи вирази (4.8) і (4.10), встановлюємо, що при обертанні тіла навколо нерухомої точки, можна користуватись формулою (4.9) для визначення швидкості точки тіла як по величині, так і по напрямку.

Положення довільної точки M твердого тіла визначається радіус-вектором $\vec{r}$. Якщо x, y і z – координати точки M в рухомій системі координат $OXYZ$, а $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{k}$ – одиничні вектори осей цієї системи координат, то радіус-вектор можна записати у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

В аналогічному вигляді можна записати вектор кутової швидкості

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k},$$

де ω_x, ω_y і ω_z – проекції кутової швидкості на відповідні осі координат.

Розглянемо векторний добуток

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}.$$

Звідси встановлюємо формули для визначення проекцій вектора швидкості $\vec{V}$ точки M на рухомі координатні осі:

$$\begin{aligned} V_x &= \omega_y z - \omega_z y; \\ V_y &= \omega_z x - \omega_x z; \\ V_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Якщо проекції вектора $\vec{\omega}$ на нерухомі осі координат $OX_I Y_I Z_I$ позначити

через ω_{xI} , ω_{yI} і ω_{zI} , а проекції радіус-вектора $\vec{r}$ точки M на ті ж осі – через x_I , y_I і z_I , то ми отримаємо проекції швидкості довільної точки тіла на нерухомі координатні осі:

$$\begin{aligned} V_{xI} &= \omega_{yI} z_I - \omega_{zI} y_I; \\ V_{yI} &= \omega_{zI} x_I - \omega_{xI} z_I; \\ V_{zI} &= \omega_{xI} y_I - \omega_{yI} x_I. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Формули (4.11) і (4.12) називаються *формулами Ейлера*.

Якщо ми візьмемо точку, яка лежить в даний момент часу на миттєвій осі обертання, то радіус-вектор цієї точки і вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ тіла будуть напрямлені по одній прямій, а тому векторний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = 0. \quad (4.13)$$

Рівняння (4.13) представляє собою рівняння миттєвої осі обертання.

Проектуючи векторне рівняння (4.13) на рухомі координатні осі, отримаємо рівняння миттєвої осі обертання в рухомій системі координат

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (4.14)$$

Аналогічно рівнянням (4.14) ми отримаємо і рівняння миттєвої осі обертання в нерухомій системі координат

$$\frac{x_I}{\omega_{xI}} = \frac{y_I}{\omega_{yI}} = \frac{z_I}{\omega_{zI}}. \quad (4.15)$$

4.5. Зв'язок вектора миттєвої кутової швидкості з кутами Ейлера

Якщо задані кути Ейлера в функціях від часу, то проекції кутової швидкості $\vec{\omega}$ на рухомі координатні осі визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Проекції вектора $\vec{\omega}$ на нерухомі координатні осі визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}
\omega_{x1} &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \\
\omega_{y1} &= -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\
\omega_{z1} &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Рівняння (4.16) і (4.17) називаються *кінематичними рівняннями Ейлера*. Ознайомитись з доведенням цих формул можна в підручниках [7], [12], [15].

Модуль вектора $\vec{\omega}$ буде

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta}. \tag{4.18}$$

Проекції кутового прискорення визначаються за формулами:

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = \dot{\omega}_x; \quad \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt} = \dot{\omega}_y; \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z. \tag{4.19}$$

Диференціюючи формули (4.16) по часу, можна визначити проекції вектора миттєвого кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ через кути Ейлера.

Модуль вектора $\vec{\varepsilon}$ буде

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}. \tag{4.20}$$

4.6. Прискорення точок тіла при обертанні навколо нерухомої точки

Щоб знайти прискорення точки M тіла при його обертанні навколо нерухомої точки, необхідно продиференціювати по часу вираз (4.9):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right).$$

Маємо

$$\vec{a} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{V}).$$

Введемо позначення

$$\vec{a}^{ob.} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \tag{4.21}$$

$$\vec{a}^{d.oc.} = \vec{\omega} \times \vec{V}. \tag{4.22}$$

Тоді

$$\vec{a} = \vec{a}^{ob.} + \vec{a}^{d.oc.} \tag{4.23}$$

Прискорення $\vec{a}^{ob.}$ називається *обертальним прискоренням* точки M , а прискорення $\vec{a}^{d.oc.}$ – *доосьовим*.

Вектор обертального прискорення $\vec{a}^{об}$ (як видно з формули (4.21)) направлений перпендикулярно площині, яка проходить через миттєве кутове прискорення $\vec{\epsilon}$ тіла і радіус-вектор $\vec{r}$ точки M , в ту сторону звідки найкоротший поворот від $\vec{\epsilon}$ до $\vec{r}$ видно проти ходу стрілки годинника (рис. 4.6).

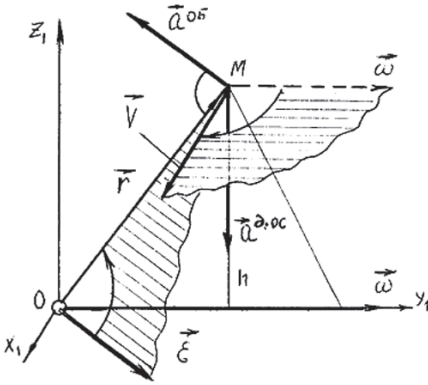


Рис. 4.6

Модуль обертального прискорення визначається за формулою:

$$a^{об} = \epsilon r \sin(\vec{\epsilon}, \vec{r}). \quad (4.24)$$

У випадку, коли $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2$ (див. формулу (4.5)), обертальне прискорення визначається за формулою

$$\vec{a}^{об} = (\vec{\epsilon}_1 \times \vec{r}) + (\vec{\epsilon}_2 \times \vec{r}). \quad (4.25)$$

Модуль доосьового прискорення

визначається за формулою:

$$a^{d.oc} = \omega V \sin 90^\circ = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h; \quad (4.26)$$

де h – відстань від точки M до миттєвої осі обертання.

Доосьове прискорення $\vec{a}^{d.oc}$ напрямлене до миттєвої осі обертання (див. формулу (4.22)).

Модуль прискорення $\vec{a}$ точки M визначається за формулою

$$a = \sqrt{(a^{об})^2 + (a^{d.oc})^2 + 2a^{об} \cdot a^{d.oc} \cos \beta}, \quad (4.27)$$

де β – кут між векторами прискорень $\vec{a}^{об}$ і $\vec{a}^{d.oc}$.

Спроектуємо вектор прискорення $\vec{a}$ точки M на осі рухомої системи координат.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь OX , використовуючи формулу (4.11), буде мати вигляд

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_y z - \omega_z y) = \frac{d\omega_y}{dt} z + \omega_y \frac{dz}{dt} - \frac{d\omega_z}{dt} y - \omega_z \frac{dy}{dt} = \epsilon_y z + \omega_y V_z - \epsilon_z y - \omega_z V_y.$$

Підставляючи замість V_z і V_y їх значення з формули (4.11), остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x U - x\omega^2, \\
 a_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y U - y\omega^2, \\
 a_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z U - z\omega^2,
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

де $U = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$.

Прискорення a_z і a_y отримані шляхом перестановки букв.

Аналогічним шляхом визначаються проекції прискорення $\vec{a}$ на координатні осі OX_i , OY_i і OZ_i нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned}
 a_{x1} &= \varepsilon_{y1} z_1 - \varepsilon_{z1} y_1 + \omega_{x1} U_1 - x_1 \omega^2, \\
 a_{y1} &= \varepsilon_{z1} x_1 - \varepsilon_{x1} z_1 + \omega_{y1} U_1 - y_1 \omega^2, \\
 a_{z1} &= \varepsilon_{x1} y_1 - \varepsilon_{y1} x_1 + \omega_{z1} U_1 - z_1 \omega^2,
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

де $U_1 = x_1 \omega_{x1} + y_1 \omega_{y1} + z_1 \omega_{z1}$.

4.7. Методичні рекомендації до розв'язування задач

$\psi = \pi \text{ рад}$	Задача 4.1.
$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ рад}$	Закон сферичного руху тіла заданий кутами Ейлера (t – в секундах, кути – в радіанах). Знайти модуль кутової швидкості тіла.
$\varphi = \pi t \text{ рад}$	Модуль кутової швидкості ω тіла визначимо за формулою
$\omega = ?$	(4.18):

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta} =$$

$$\sqrt{\pi^2 + \pi^2 + 2\pi\pi \cos \frac{\pi}{3}} = \pi\sqrt{3} = 5,44 \text{ (рад/с)};$$

$$\omega = 5,44 \text{ рад/с.}$$

Задача 4.2.

$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}t$	Рух твердого тіла навколо нерухомої точки заданий кутами Ейлера (t – в секундах, кути – в радіанах). Знайти модулі миттєвої кутової швидкості і миттєвого кутового прискорення.
$\theta = \frac{\pi}{3}; \varphi = \frac{\pi}{4}t$	
$\omega = ?, \varepsilon = ?$	

Проекції кутової швидкості на нерухомі координатні осі визначимо за формулами (4.17):

$$\omega_{x1} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi = \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}t \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \cos \frac{\pi}{4}t;$$

$$\omega_{y1} = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi = -\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}t \right) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{8} \sin \frac{\pi}{4}t;$$

$$\omega_{z1} = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8}.$$

Модуль кутової швидкості

$$\omega = \sqrt{\omega_{x1}^2 + \omega_{y1}^2 + \omega_{z1}^2} = \frac{\pi}{4} (rad/c). \quad \omega = \frac{\pi}{4} rad/c$$

Проекції кутового прискорення визначаються за формулами (4.19).

$$\varepsilon_{x1} = \dot{\omega}_{x1} = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{32} \sin \frac{\pi}{4}t;$$

$$\varepsilon_{y1} = \dot{\omega}_{y1} = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{32} \cos \frac{\pi}{4}t;$$

$$\varepsilon_{z1} = \dot{\omega}_{z1} = 0.$$

Модуль кутового прискорення визначається за формулою (4.20).

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{x1}^2 + \varepsilon_{y1}^2 + \varepsilon_{z1}^2} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{32} (rad/c^2).$$

Задача 4.3.

$$\varphi = 10t$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - 2t$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$x = 0; \quad y = 0$$

$$z = 8 \text{ см}$$

$$\varepsilon = ? \quad V = ?$$

$$a = ?$$

Обертальний рух твердого тіла заданий кутами Ейлера. Визначити кутове прискорення тіла, а також величину швидкості і прискорення точки $M(0,0,8)$, координати якої дані в сантиметрах в системі відліку, жорстко зв'язаної з тілом.

Використовуючи формули (4.16), визначимо проекції миттєвої кутової швидкості тіла $\vec{\omega}$ на рухомі осі $OXYZ$:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi = -2 \sin \frac{\pi}{3} \sin 10t = -\sqrt{3} \sin 10t;$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi = -2 \sin \frac{\pi}{3} \cos 10t = -\sqrt{3} \cos 10t;$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = 10 + (-2) \cos \frac{\pi}{2} = 9.$$

Модуль кутової швидкості

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 2\sqrt{21}(\text{рад/с}).$$

По формулам (4.19) знайдемо проекції кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ на рухомі осі координат.

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x = -10\sqrt{3} \cos 10t,$$

$$\varepsilon_y = \dot{\omega}_y = 10\sqrt{3} \sin 10t,$$

$$\varepsilon_z = 0.$$

Тоді модуль кутового прискорення.

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = 10\sqrt{3}(\text{рад/с}^2).$$

Використовуючи формулу (4.11), визначимо проекції швидкості точки M на координатні осі:

$$V_x = \omega_y z - \omega_z y = -8\sqrt{3} \cos 10t,$$

$$V_y = \omega_z x - \omega_x z = -8\sqrt{3} \sin 10t,$$

$$V_z = \omega_x y - \omega_y x = 0.$$

Таким чином, величина швидкості

$$V = 8\sqrt{3} \text{ см/с}.$$

Для визначення прискорення точки M скористаємося формулами (4.28). Але спочатку обчислимо вираз: $u = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z = 72$.

$$a_x = \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x u - x\omega^2 = 80\sqrt{3} \sin 10t - 72\sqrt{3} \sin 10t = 8\sqrt{3} \sin 10t;$$

$$a_y = \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y u - y\omega^2 = 80\sqrt{3} \cos 10t - 72\sqrt{3} \cos 10t = 8\sqrt{3} \cos 10t;$$

$$a_z = \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z u - z\omega^2 = 648 - 8(2\sqrt{21})^2 = -28.$$

Величина прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 16\sqrt{3} \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Задача 4.4.

$$\omega_{x_1} = 4 \text{ рад/с}$$

$$\omega_{y_1} = 6 \text{ рад/с}$$

$$\omega_{z_1} = 6 \text{ рад/с}$$

$$x_1 = 8 \text{ см}$$

$$y_1 = 4 \text{ см}$$

$$z_1 = 10 \text{ см}$$

$$V_M = ? \text{ м/с}$$

Тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої точки O , має проекції вектора кутової швидкості $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ на осі нерухомої системи координат. Знайти рівняння миттєвої осі і швидкість точки M , координати якої в даний момент часу $x_1 = 8 \text{ см}, y_1 = 4 \text{ см}, z_1 = 10 \text{ см}$, а також відстань цієї точки до миттєвої осі.

Рівняння миттєвої осі обертання в нерухомій системі координат визначаються за формулами (4.15):

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}.$$

В нашому випадку маємо

$$\frac{x_1}{4} = \frac{y_1}{6} = \frac{z_1}{6}. \quad (1)$$

Вираз (1) є рівнянням прямої лінії в канонічному вигляді. На рис. 4.7 побудовано миттєву вісь обертання (м. в. о.) і точку M , швидкість якої необхідно визначити.

За формулами (4.12) визначимо проекції швидкості на координатні осі:

$$V_{x_1} = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1 = 6 \cdot 10 - 6 \cdot 4 = 36;$$

$$V_{y_1} = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1 = 6 \cdot 8 - 4 \cdot 10 = 8;$$

$$V_{z_1} = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1 = 4 \cdot 4 - 6 \cdot 8 = -32.$$

Модуль швидкості $V_M = 48,8 \text{ см/с}$.

Точка M обертається навколо миттєвої осі обертання з кутовою швидкістю

$$\omega = \sqrt{\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2 + \omega_{z_1}^2} = 9,38 \text{ (рад/с)}.$$

Найкоротша відстань h точки M до миттєвої осі є радіусом обертання. Тому

$$h = \frac{V_M}{\omega} = 5,2 \text{ (см)}, \quad h = 5,2 \text{ см}.$$

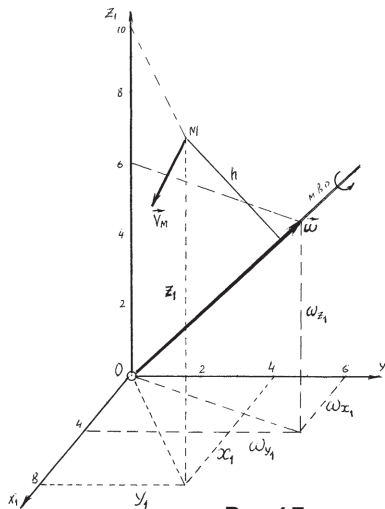


Рис. 4.7.

Задача 4.5.

$$r; \quad R = 2r$$

$$\omega_0 = 0$$

$$\varepsilon_0 = 2 \text{ рад/с}^2$$

$$t_1 = 1 \text{ с}$$

$$\omega_1 = ?, \quad \varepsilon_1 = ?$$

$$V_A = ?$$

Конічна шестерня 1 радіусом r , знаходиться в зачепленні з нерухомою шестернею 2, радіус якої R . Шестерня 1 зі стану спокою приводиться в рух кривошипом OC , який обертається з постійним кутовим прискоренням ε_0 (рад/с²) (рис. 4.8). Визначити в момент часу $t_1 = 1$ с кутову швидкість ω , кутове прискорення ε і швидкість точки A шестерні 1.

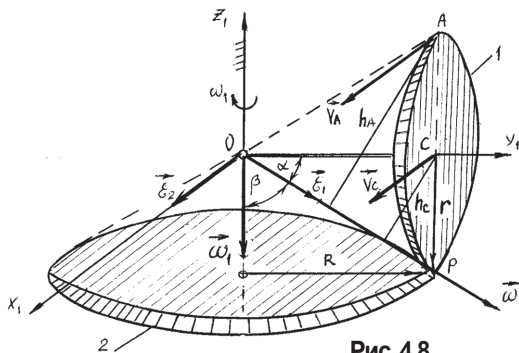


Рис. 4.8.

Шестерня 1 обертається навколо нерухокої точки O . Кривошип OC обертається навколо осі OZ_1 з кутовою швидкістю

$$\omega_{OC} = \omega_0 + \varepsilon_0 t$$

Швидкість точки C

$$V_C = \omega_{OC} \cdot OC,$$

де $OC = R = 2r$.

Тоді

$$V_C = 2r\epsilon_0 t. \quad (1)$$

Швидкість точки P , точки контакту шестернь, дорівнює нулю. Через дві нерухомі точки O і P проведемо вісь OP , яка є миттєвою віссю обертання при русі шестерні 1 навколо точки O . Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ напрямлений по осі OP . При русі шестерні 1 миттєва вісь обертання описує кіничну поверхню.

Примітка: Геометричне місце миттєвих осей обертання, побудованих у нерухомій системі координат, називається *нерухомим аксоїдом*.

Геометричне місце миттєвих осей обертання, побудованих у рухомій системі координат, називається *рухомим аксоїдом*.

Рухомий і нерухомий аксоїди є конуси з вершинами в нерухомій точці O , вони дотикаються один до одного вздовж загальної твірної OP , що є в даний момент часу віссю обертання твердого тіла. При русі твердого тіла рухомий аксоїд рухається без ковзання по поверхні нерухомого.

Якщо розглянути рух конуса по нерухомій горизонтальній поверхні (рис. 4.5), то нерухомим аксоїдом є горизонтальна площина, а рухомим аксоїдом є бокова поверхня конуса.

Розглядаючи рух точки C як обертальний рух навколо миттєвої осі обертання, згідно формули (4.8), маємо

$$V_C = \omega \cdot h_C = \omega \cdot OC \cdot \sin \alpha = 2r\omega \sin \alpha,$$

$$\text{де } \sin \alpha = \frac{r}{OP}; \quad OP = \sqrt{r^2 + R^2} = \sqrt{5}r; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тоді

$$V_C = \frac{2r}{\sqrt{5}} \omega. \quad (2)$$

Порівнюючи вирази (1) і (2), маємо

$$\omega = \sqrt{5}\epsilon_0 t = 2\sqrt{5}t. \quad (3)$$

При $t_1 = 1\text{с}$ $\omega = 2\sqrt{5}$ рад/с.

Швидкість точки A :

$$V_A = \omega \cdot h_A,$$

де h_A – радіус обертання точки A навколо миттєвої осі

$$h_A = 2h_C = 2 \cdot OC \cdot \sin \alpha = \frac{4r}{\sqrt{5}}.$$

Маємо $V_A = 2\sqrt{5} \cdot \frac{4r}{\sqrt{5}} = 8r$,

Для визначення кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ використаємо формулу (4.5)

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2.$$

Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}_1$ напрямлене по вектору кутової швидкості $\vec{\omega}$.

Використовуючи вираз (3), знайдемо кутове прискорення ε_i :

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega} = 2\sqrt{5} \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Для визначення прискорення $\vec{\varepsilon}_2$ скористаємось формулою (4.7):

$$\vec{\varepsilon}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}, \quad (4)$$

де вектор $\vec{\omega}_1$ є кутова швидкість обертання вектора $\vec{\omega}$ навколо осі OZ_1 .

$$\omega_1 = \omega_{OC} = \varepsilon_0 t.$$

Вектор $\vec{\omega}_1$ напрямлений по осі OZ_1 вниз.

Вектор $\vec{\varepsilon}_2$, згідно формули (4), напрямлений перпендикулярно векторам

$\vec{\omega}$ і $\vec{\omega}_1$ до нас. Модуль векторного добутку (4) $\varepsilon_2 = \omega_1 \omega \sin \beta$,

$$\text{де } \sin \beta = \frac{R}{OP} = \frac{2r}{\sqrt{5}r} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 t \cdot 2\sqrt{5}t \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 4\varepsilon_0 t^2.$$

При $t_1 = 1 \text{ с}$

$$\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0 = 8 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Остаточно маємо

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} = 9,16 \text{ (рад/с}^2\text{)};$$

Задача 4.6.

Круговий конус 1 з радіусом основи r котиться без ковзання по нерухомому

$$r = 35 \text{ см}$$

$$\alpha = \beta = 60^\circ$$

$$V_C = 200 \text{ см/с}$$

конусу 2 так, що його вершина O залишається нерухомою (рис. 4.9). Центр C основи рухається з постійною швидкістю V_C . Визначити швидкість і прискорення точок A і B конуса, якщо кути при вершинах обох конусів однакові.

$$V_A = ? \quad V_B = ?$$

$$a_A = ? \quad a_B = ?$$

Рухомий конус 1 котиться по нерухомому конусу 2. Лінія OA є миттєвою віссю обертання. Швидкість точки A , яка лежить на миттєвій осі, дорівнює нулю.

$$V_A = 0.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_2$ напрямлений перпендикулярно до площини ΔOAC і паралельно вектору $\vec{V}_C$.

Враховуючи те, що $\varepsilon_1 = 0$, повне кутове прискорення

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_2, \quad \varepsilon = 12,6 \text{ рад/с}^2.$$

Для визначення прискорення точки B скористаємося формулами (4.23)–(4.27):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{ob.} + \vec{a}_B^{\partial.oc}.$$

Доосьове прискорення точки B напрямлене по миттєвому радіусу обертання h_B цієї точки, а модуль прискорення (згідно формули (4.26)):

$$a_B^{\partial.oc} = \omega^2 h_B = (6,6)^2 \cdot 60,6 = 2640 \text{ (см/с}^2\text{)} = 26,4 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок обертального прискорення визначається за формулою (4.21):

$$\vec{a}_B^{ob.} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_B.$$

Вектор обертального прискорення перпендикулярний векторам $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{r}_B$.

Напрямок прискорення $\vec{a}_B^{ob.}$ показаний на рис. 4.9.

Модуль прискорення визначається за формулою (4.24):

$$a_B^{ob.} = \varepsilon \cdot r_B \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}_B) = \varepsilon \cdot r_B \sin 90^\circ = \varepsilon \cdot r_B = \varepsilon \cdot OB = 12,6 \cdot 70 = 8,82 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Знайдемо повне прискорення точки B . Прискорення $a_B^{\partial.oc}$ і $a_B^{ob.}$ знаходяться в одній площині і між ними кут $\gamma = 120^\circ$. Використовуючи формулу (4.27), маємо

$$\vec{a}_B = \sqrt{(a_B^{ob.})^2 + (a_B^{\partial.oc})^2 + 2a_B^{ob.} \cdot a_B^{\partial.oc} \cos \gamma} = 23,3 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Визначимо повне прискорення точки A :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{ob.} + \vec{a}_A^{\partial.oc}.$$

Згідно формули (4.22) $\vec{a}_A^{\partial.oc} = \vec{\omega} \times \vec{V}_A$.

Але точка A належить миттєвій осі обертання, тому її швидкість $V_A = 0$. Отже, доосьове прискорення точки A дорівнює нулю $a_A^{\partial.oc} = 0$.

Обертове прискорення визначається за формулою: $\vec{a}_A^{об.} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A$.

Обертове прискорення напрямлене перпендикулярно площині, в якій знаходяться вектора $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{r}_A$ (рис. 4.9). $\vec{a}_A^{об.} \perp OA$.

Обертове прискорення

$$a_A^{об.} = \varepsilon \cdot r_A \sin 90^\circ = \varepsilon \cdot r_B = \varepsilon \cdot OA = 12,6 \cdot 70 = 882 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Враховуючи те, що доосьове прискорення точка A дорівнює нулю, маємо

$$a_A = a_A^{об.} = 8,82 \text{ м/с}^2.$$

Примітка. Прискорення точок A і B можна легко знайти і аналітично, використавши формули (4.29) і врахувавши, що в даний момент часу маємо:

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0, & \omega_y &= \frac{1}{2}\omega, & \omega_z &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega; \\ \varepsilon_x &= \varepsilon = 12,6, & \varepsilon_y &= 0, & \varepsilon_z &= 0; \\ x_A &= 0, & y_A &= \frac{1}{2}OA, & z_A &= -\frac{\sqrt{3}}{2}OA; \\ x_B &= 0, & y_B &= OB, & z_B &= 0. \end{aligned}$$

Читачеві надаємо можливість перевірити значення прискорень точок A і B .

4.8. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 4.7.

При сферичному русі тіла його кутова швидкість

$\vec{\omega} = \pi \sin \pi t \cdot \vec{i} + \pi \cos \pi t \cdot \vec{j} + \pi \cdot \vec{k}$ (рад/с). Визначити проекцію кутового прискорення на вісь OX в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: $\varepsilon_x = -9,87$ рад/с².

Задача 4.8.

В момент часу $t = 2$ с знайти значення кутового прискорення тіла, якщо при сферичному русі тіла його кутова швидкість

$$\vec{\omega} = 2 \sin^2 t \cdot \vec{i} + \sin 2t \cdot \vec{j} + 5\vec{k} \text{ (рад/с)}.$$

Відповідь: $\varepsilon = 2$ рад/с².

Задача 4.9.

Обертальний рух тіла навколо нерухомої точки задано кутами Ейлера: $\varphi = 4t$, $\psi = -2t$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, (t – в секундах, кути – в радіанах). Визначити кутове прискорення тіла, а також величину швидкості і прискорення точки $M(0,0,6)$, координати якої дані в сантиметрах в системі відліку, жорстко зв'язаної з тілом.

$$\text{Відповідь: } \varepsilon = 4\sqrt{3} \text{ рад/с}^2; \quad V = 6\sqrt{3} \text{ см/с}; \quad a = 20,78 \text{ см/с}^2.$$

Задача 4.10.

При коченні конуса по нерухомій горизонтальній площині вектор миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ обертається навколо вертикальної осі OZ з кутовою швидкістю ω_1 . Визначити модуль кутового прискорення ε , якщо $\omega = 4$ рад/с, $\omega_1 = 2$ рад/с.

$$\text{Відповідь: } \varepsilon = 8 \text{ рад/с}^2.$$

Задача 4.11.

Використовуючи умову задачі 4.6 (рис. 4.9), знайти прискорення точки C .

$$\text{Відповідь: } a_C = 7,62 \text{ м/с}^2.$$

Задача 4.12.

Круглий конус з твірною $l = 0,4$ м котиться без ковзання по нерухомій горизонтальній площині. Вершина O конуса залишається нерухомою, а центр S його основи рухається навколо вертикальної осі з постійною швидкістю $V_C = 2$ м/с. Знайти прискорення кінців A і B основи конуса, якщо в даний момент часу точка A знаходиться на лінії дотику конуса з площиною. Кут $AOB = \alpha = 90^\circ$ (див. рис. 4.5, $\alpha = 90^\circ$).

$$\text{Відповідь: } a_A = 40 \text{ м/с}^2; \quad a_B = 40\sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

5. Загальний випадок руху вільного твердого тіла

5.1. Рівняння руху вільного твердого тіла

Нехай тверде тіло в просторі може виконувати довільне переміщення. З таким загальним випадком руху тіла ми зустрічаємось при русі, наприклад, артилерійського снаряда, кинутого каменя і тому подібного.

Виберемо в точці O нерухому систему координат $Oxyz$. В твердому тілі за полюс візьмемо точку A . З точкою A зв'яжемо рухому систему координат $Ax_1y_1z_1$. Система координат $Ax_1y_1z_1$ виконує поступальний рух і її осі залишаються паралельними осям нерухомої системи $Oxyz$. Положення рухомої системи відносно нерухомої визначається положенням її початку, полюса A , тобто трьома координатами: X_A, Y_A, Z_A (рис. 5.1). Відносно рухомої системи $Ax_1y_1z_1$ тіло здійснює сферичний рух (в цій системі координат точка A нерухома) і її відносне положення визначається трьома кутами Ейлера (рис. 4.1). На рис. 5.1 кути Ейлера не показані, щоб не затемнювати рисунок.

Таким чином, шість рівностей

$$\begin{aligned} X_A &= f_1(t), \quad Y_A = f_2(t), \quad Z_A = f_3(t), \\ \psi &= f_4(t), \quad \theta = f_5(t), \quad \varphi = f_6(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

визначають положення полюса A і положення тіла відносно нерухомої системи координат в кожний момент часу.

Рівняння (5.1) є кінематичними рівняннями руху вільного твердого тіла в загальному випадку його руху.

Розглянемо частинні випадки руху тіла.

1. Якщо в процесі руху кути ψ, θ і φ не змінюються, то тіло буде здійснювати поступальний рух у відповідності з трьома першими рівняннями системи (5.1).

2. Якщо полюс A тіла залишається нерухомим, то тіло здійснює обертальний рух навколо нерухомої точки A згідно трьома останніми рівняннями системи (5.1).

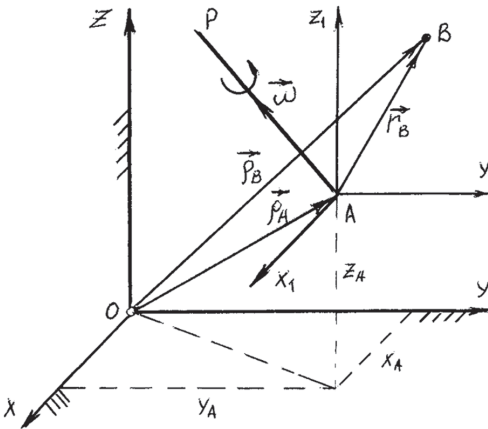


Рис. 5.1.

5.2. Визначення швидкостей і прискорень точок вільного твердого тіла

Використаємо векторний спосіб для визначення швидкості точки. Проведемо радіуси вектори $\vec{\rho}_B$, $\vec{\rho}_A$ і $\vec{r}_B$ (рис. 5.1).

Тоді $\vec{\rho}_B = \vec{\rho}_A + \vec{r}_B$.

Швидкість довільної точки B дорівнює похідній по часу від її радіус-вектора $\vec{\rho}_B$.

$$\frac{d\vec{\rho}_B}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_B}{dt}.$$

Вираз $\frac{d\vec{\rho}_B}{dt} = \vec{V}_B$ є швидкість точки B , а $\frac{d\vec{\rho}_A}{dt} = \vec{V}_A$ – швидкість точки A .

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \frac{d\vec{r}_B}{dt}.$$

Вектор $\frac{d\vec{r}_B}{dt}$ характеризує швидкість точки B відносно рухомої системи координат $Ax_1y_1z_1$, в якій тіло має одну закріплену точку. Згідно формули (4.9).

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_B.$$

Таким чином

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + (\vec{\omega} \times \vec{r}_B). \quad (5.2)$$

Тут $\vec{\omega}$ – кутова швидкість обертання тіла відносно полюса.

Швидкість довільної точки вільного твердого тіла дорівнює геометричній сумі швидкості довільно вибраного полюса і швидкості цієї точки при обертанні тіла відносно полюса.

Визначимо прискорення точок вільного твердого тіла. Продиференціюємо по часу вираз (5.2):

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_B \right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_B}{dt} \right).$$

Враховуючи, що $\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \vec{a}_B$, $\frac{d\vec{V}_A}{dt} = \vec{a}_A$, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_B$, маємо

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_B) + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_B)). \quad (5.3)$$

У виразі (5.3) два останніх члена дають прискорення точки B в її русі навколо полюса.

Прискорення точки вільного твердого тіла дорівнює геометричній сумі прискорення полюса і прискорення цієї точки при її русі навколо полюса.

6. Збірник завдань для розрахунково-графічної роботи № 5 “Кінематичний аналіз плоского механізму”

6.1. Варіанти завдань РГР № 5

Стержень 1 обертається з заданою постійною кутовою швидкістю ω_1 . Для заданого положення механізму необхідно:

1. Знайти швидкості точок A, B, C, D за допомогою миттєвих центрів швидкостей (м. ц. ш.) і плану швидкостей;
2. Знайти кутові швидкості стержнів 2, 3, 4 за допомогою м. ц. ш. і плану швидкостей;
3. Знайти прискорення точок A, B аналітичним способом і за допомогою плану прискорень;
4. Знайти кутове прискорення стержня 2.

Необхідні дані приведені в таблицях 6.1–6.4, а відповідні схеми на рисунках 6.1 і 6.2.

Стержні з опорами O_1 і O_2 , повзуном і між собою з'єднані шарнірно. Положення механізму визначається кутами $\varphi, \alpha, \beta, \psi, \gamma$. Значення цих кутів приведені в таблицях для кожного варіанта. Дугові стрілки на рисунках показують, як повинні відкладатись кути при побудові механізму.

Побудову механізму треба починати з стержня 1 і побудови кутів φ і α . Механізм повинен бути побудований у вибраному масштабі. Це дозволить знаходити відстані до м. ц. ш. простим їх заміром на рисунку.

Кутова швидкість ω_1 стержня 1 в усіх варіантах напрямлена проти ходу годинникової стрілки.

Таблиця 6.1.

Варіант	Схема	Геометричні розміри					Кути між стержнями				Кутова швидкість	
		l_1	l_2	l_3	l_4	АС	φ	α	γ	β	ψ	ω_1
		м	м	м	м	м	град.	град.	град.	град.	град.	Рад/с
1	1	0,2	0,9	0,4	0,8	0,3	30	120	80	100	60	4
2	1	0,2	0,8	0,5	0,6	0,4	60	120	70	110	60	6
3	1	0,3	1,2	0,5	0,5	0,6	75	110	90	120	50	8
4	1	0,4	1,4	1,2	0,8	0,8	90	80	100	100	40	10
5	1	0,25	1,0	0,5	0,7	0,5	120	60	60	90	45	7
6	1	0,35	1,1	0,6	0,7	0,6	45	90	120	75	60	10
7	2	0,4	1,2	1,2	0,5	0,6	0	90	45	30	60	12
8	2	0,4	1,0	0,8	0,4	0,3	30	120	45	60	60	5
9	2	0,3	1,2	0,9	0,4	0,5	45	120	60	30	30	14
10	2	0,2	0,8	0,8	0,2	0,4	60	150	45	60	45	10
11	2	0,2	0,7	0,8	0,3	0,3	90	150	60	45	75	8
12	2	0,25	1,0	0,8	0,4	0,5	90	210	60	75	60	6
13	3	0,6	1,6	0,4	0,8	0,4	30	60	90	100	60	4
14	3	0,6	1,7	0,5	0,6	0,3	45	60	120	60	45	6
15	3	0,5	1,2	0,5	0,6	0,2	60	75	90	60	30	8
16	3	0,4	1,2	0,6	0,8	0,2	90	60	60	150	60	10
17	3	0,4	1,2	0,4	0,6	0,2	120	75	60	120	30	12
18	3	0,5	1,6	0,8	0,6	0,2	120	90	45	60	40	6
19	4	0,2	0,8	0,8	—	0,4	0	30	45	60	45	12
20	4	0,2	0,7	0,7	—	0,3	30	60	45	30	30	14
21	4	0,2	0,6	0,6	—	0,3	60	30	50	30	45	16
22	4	0,3	0,8	0,7	—	0,4	75	30	45	30	60	10
23	4	0,3	0,8	0,6	—	0,5	90	60	30	45	20	8
24	4	0,25	0,8	0,6	—	0,4	45	45	60	75	60	12
25	5	0,3	1,2	1,0	0,4	0,5	0	145	95	30	45	16
26	5	0,3	1,3	0,8	0,4	0,6	30	75	120	45	30	15
27	5	0,25	1,0	0,7	0,4	0,5	45	60	150	60	50	17
28	5	0,4	1,3	0,9	0,3	0,6	60	75	150	45	45	18
29	5	0,4	1,25	1,0	0,4	0,7	75	80	120	60	30	10
30	5	0,3	1,4	1,2	0,4	0,8	90	60	140	80	30	8

Таблиця 6.2.

Варіант	Схема	Геометричні розміри					Кути між стержнями					Кутова швидкість
		l_1	l_2	l_3	l_4	АС	φ	α	γ	β	ψ	
		м	м	м	м	м	град.	град.	град.	град.	град.	
31	6	0,3	0,8	0,4	0,9	0,4	0	80	45	30	60	12
32	6	0,3	0,9	0,4	0,8	0,4	30	90	30	60	120	10
33	6	0,2	0,8	0,3	0,6	0,6	45	30	60	120	75	8
34	6	0,4	1,2	0,4	1,2	0,6	60	45	75	45	80	14
35	6	0,4	1,4	0,5	1,2	0,5	75	60	30	90	90	16
36	6	0,35	1,2	0,6	1,3	0,4	90	45	60	80	120	15
37	7	0,5	1,5	1,1	0,6	0,8	0	130	90	45	30	10
38	7	0,45	1,5	1,0	0,5	0,7	30	120	75	60	65	8
39	7	0,3	1,2	0,8	0,4	0,6	45	90	60	40	60	12
40	7	0,35	1,2	0,9	0,5	0,6	60	100	75	45	90	6
41	7	0,25	0,9	0,8	0,4	0,4	75	120	60	50	30	4
42	7	0,2	0,8	0,6	0,3	0,4	90	150	90	30	80	9
43	8	0,4	1,4	1,2	0,6	0,6	120	30	90	150	60	2
44	8	0,4	1,2	1,2	0,5	0,5	90	30	120	120	60	4
45	8	0,3	0,9	0,9	0,4	0,4	75	100	120	90	45	6
46	8	0,3	0,9	0,8	0,5	0,6	60	120	60	120	45	8
47	8	0,25	0,7	0,6	0,4	0,3	45	120	75	90	60	10
48	8	0,25	0,6	0,6	0,3	0,3	30	150	60	135	45	12
49	9	0,3	1,2	1,0	0,6	0,6	0	120	90	100	45	6
50	9	0,3	1,0	0,8	0,5	0,5	30	90	120	90	60	8
51	9	0,4	1,2	1,2	0,6	0,5	45	120	80	110	60	10
52	9	0,35	0,9	1,2	0,6	0,4	60	100	60	75	50	4
53	9	0,25	0,8	1,0	0,6	0,4	75	60	120	90	40	6
54	9	0,2	0,7	0,9	0,6	$\frac{0,3}{5}$	90	60	120	120	45	8
55	10	0,4	1,4	1,3	0,6	0,7	0	60	120	45	45	6
56	10	0,3	1,2	1,1	0,5	0,6	30	75	100	60	50	5
57	10	0,35	1,2	1,2	0,6	0,5	45	60	120	45	75	8
58	10	0,25	1,0	1,0	0,5	0,5	60	80	90	75	30	4
59	10	0,2	0,8	0,8	0,4	0,4	75	120	60	90	30	5
60	10	0,2	0,7	0,6	0,6	0,3	90	110	40	60	45	10

Таблиця 6.3.

Варіант	Схема	Геометричні розміри					Кути між стержнями					Кутова швидкість
		l_1	l_2	l_3	l_4	АС	φ	α	γ	β	ψ	
		м	м	м	м	м	град.	град.	град.	град.	град.	
61	11	0,4	1,2	1,4	—	0,7	0	120	45	60	30	6
62	11	0,35	1,1	1,3	—	0,6	30	115	35	45	30	5
63	11	0,3	0,9	1,1	—	0,4	45	90	60	40	60	4
64	11	0,25	0,8	1,0	—	0,4	60	120	45	75	45	8
65	11	0,2	0,6	0,8	—	0,3	75	120	60	30	60	9
66	11	0,3	1,0	1,2	—	0,5	90	80	75	30	45	10
67	12	0,2	1,0	0,8	0,4	0,5	0	30	95	45	30	12
68	12	0,25	0,8	0,7	0,5	0,4	30	30	120	60	30	14
69	12	0,3	1,0	0,8	0,6	0,5	45	120	90	30	45	9
70	12	0,35	1,2	1,0	0,5	0,6	60	90	120	30	30	10
71	12	0,40	1,4	1,0	0,6	0,7	75	45	90	60	45	12
72	12	0,4	1,4	1,2	0,5	0,6	90	60	120	40	45	14
73	13	0,2	1,0	0,8	0,4	0,6	0	60	70	60	135	6
74	13	0,25	1,0	0,8	0,3	0,5	30	70	60	60	150	8
75	13	0,3	1,2	0,8	0,4	0,6	45	90	30	60	100	9
76	13	0,35	1,2	0,9	0,5	0,6	60	45	60	90	60	12
77	13	0,3	1,2	0,8	0,6	0,5	75	60	30	60	135	6
78	13	0,4	1,2	0,9	0,4	0,6	90	120	30	45	120	4
79	14	0,5	1,5	1,6	—	0,6	0	80	60	45	120	2
80	14	0,5	1,6	1,5	—	0,8	30	60	45	30	130	4
81	14	0,4	1,4	1,2	—	0,7	45	120	30	60	150	6
82	14	0,35	1,2	1,0	—	0,6	60	100	45	30	120	8
83	14	0,3	1,0	0,8	—	0,4	75	90	60	45	110	10
84	14	0,25	0,9	0,8	—	0,4	90	60	30	75	135	9
85	15	0,3	1,2	0,4	1,6	0,4	0	60	80	70	45	12
86	15	0,3	1,2	0,5	1,6	0,5	30	100	45	60	30	10
87	15	0,25	1,1	0,4	1,5	0,4	45	60	45	90	60	12
88	15	0,2	0,8	0,3	1,2	0,4	60	90	45	75	40	9
89	15	0,2	0,7	0,4	1,0	0,3	75	60	30	30	45	8
90	15	0,2	0,7	0,4	0,8	0,5	90	150	60	45	30	7

Таблиця 6.4.

Варіант	Схема	Геометричні розміри					Кути між стержнями					Кутова швидкість
		l_1	l_2	l_3	l_4	АС	φ	α	γ	β	ψ	ω_1
		м	м	м	м	м	град.	град.	град.	град.	град.	Рад. /с
91	16	0,4	1,2	0,6	0,8	0,5	0	60	45	80	120	6
92	16	0,35	1,1	0,5	0,7	0,6	30	120	60	45	110	8
93	16	0,3	1,0	0,6	0,6	0,5	45	60	45	75	120	10
94	16	0,25	0,8	0,5	0,7	0,4	60	90	30	80	100	12
95	16	0,2	0,7	0,6	0,6	0,3	75	60	30	90	60	9
96	16	0,2	0,6	0,6	0,8	0,4	90	150	60	30	45	5
97	17	0,25	1,0	0,8	0,4	0,6	0	80	120	90	60	6
98	17	0,3	1,1	0,8	0,5	0,5	30	110	90	120	45	8
99	17	0,35	1,2	0,9	0,4	0,6	45	75	60	120	60	7
100	17	0,4	1,2	0,8	0,5	0,6	60	60	110	120	45	6
101	17	0,45	1,3	0,9	0,6	0,6	75	90	120	100	45	5
102	17	0,2	0,8	0,6	0,4	0,4	90	120	45	150	60	9
103	18	0,2	0,8	0,8	0,4	0,6	0	120	45	45	60	12
104	18	0,25	0,9	0,8	0,5	0,4	30	100	60	45	45	10
105	18	0,3	1,0	0,9	0,6	0,5	45	80	75	60	120	9
106	18	0,35	1,2	0,9	0,7	0,6	60	90	45	120	120	8
107	18	0,4	1,3	1,0	0,8	0,5	75	60	45	150	135	6
108	18	0,45	1,4	1,2	1,0	0,7	90	60	75	30	150	4
109	19	0,4	1,3	1,2	1,0	0,6	0	30	45	120	45	6
110	19	0,35	1,2	1,2	0,8	0,6	30	45	30	90	60	8
111	19	0,3	1,1	1,1	0,9	0,6	45	60	110	135	75	7
112	19	0,25	1,0	0,9	0,8	0,5	60	30	45	150	30	6
113	19	0,2	0,8	0,7	0,6	0,4	75	60	30	90	45	5
114	19	0,2	0,6	0,6	0,5	0,3	90	30	45	120	75	4
115	20	0,25	0,8	0,7	0,6	0,4	0	45	60	110	30	12
116	20	0,3	0,9	0,8	0,8	0,6	30	75	30	150	45	10
117	20	0,35	1,0	1,2	1,0	0,6	45	60	150	75	30	10
118	20	0,4	1,2	1,2	1,2	0,6	60	30	90	120	75	5
119	20	0,35	1,1	1,4	0,9	0,5	75	60	120	90	60	4
120	20	0,3	1,2	1,4	0,8	0,6	90	45	60	90	75	4

Рис. 6.1.

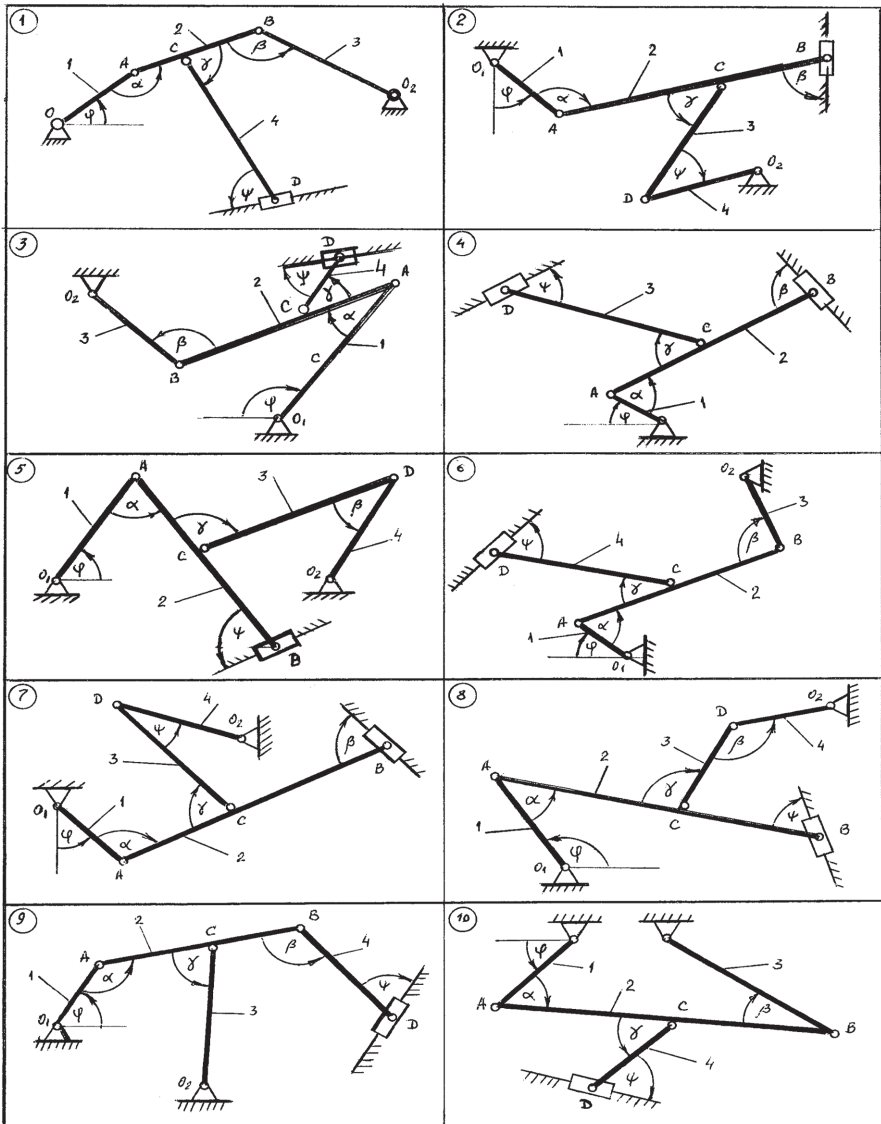
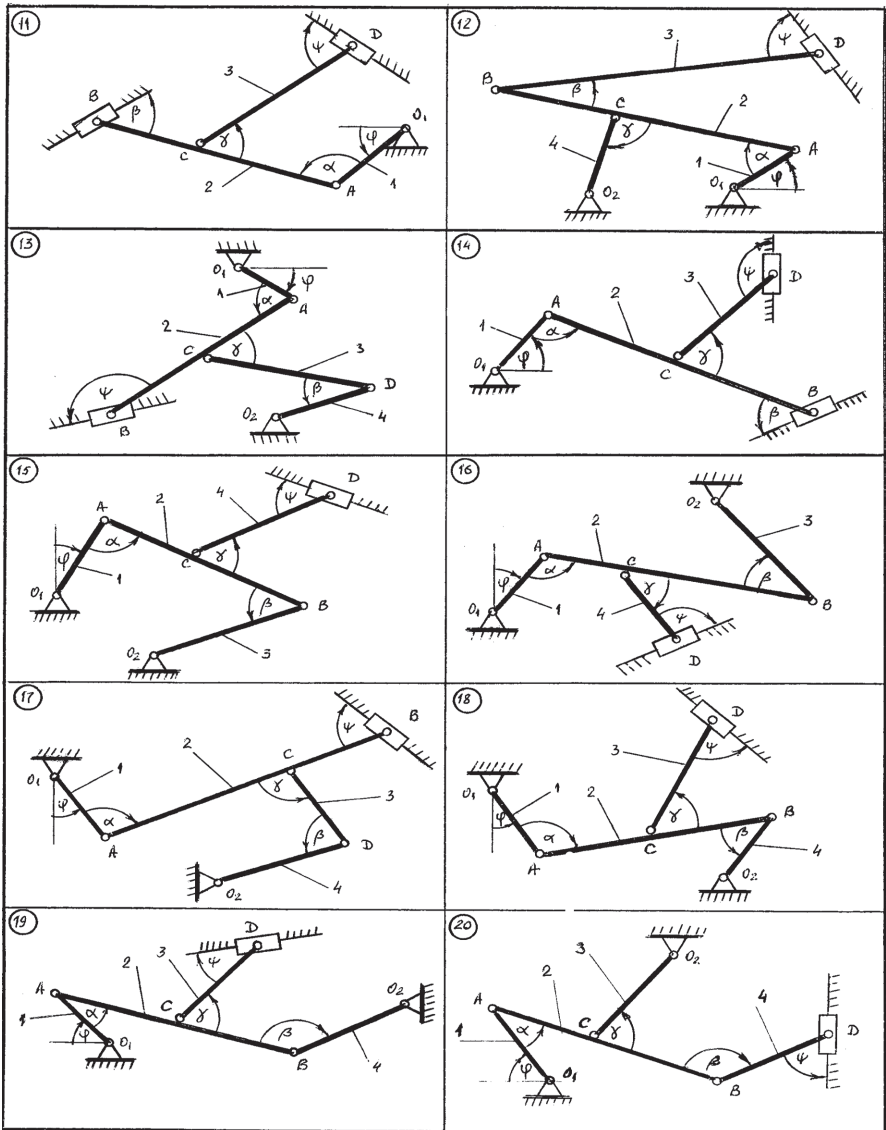


Рис. 6.2.



6.2. Вказівки до виконання РГР № 5

Використовуючи відомості, які приведені в розділі 3, проведемо кінематичний аналіз багатоланкового механізму, який наведений на рисунку 6.3.

Геометричні розміри: $O_1A = l_1 = 0,4 \text{ м}$, $AB = l_2 = 1,0 \text{ м}$, $BO_2 = l_3 = 0,7 \text{ м}$, $CD = l_4 = 0,6 \text{ м}$, $AC = 0,6 \cdot l_2 = 0,6 \text{ м}$. Кути: $\varphi = 150^\circ$, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, $\tau = 50^\circ$.

Кривошип O_1A обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega_1 = 5 \text{ рад/с}$.

1. Знайдемо швидкості точок A, B, C, D механізму за допомогою миттєвого центра швидкостей і плану швидкостей.

1.1. Знайдемо швидкість точок за допомогою миттєвого центра швидкостей.

Кривошип O_1A виконує обертальний рух. Тому швидкість точки A

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ (м/с)}; \quad V_A = 2 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_A \perp O_1A.$$

Точка B належить як шатуну AB , так і кривошипу O_2B . Кривошип виконує обертальний рух навколо центра O_2 . Тому швидкість точки B $\vec{V}_B \perp O_2B$. Провівши з точок A і B перпендикуляри до швидкостей $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$, знайдемо положення м. ц. ш. P_1 ланки AB . По напрямку вектора $\vec{V}_A$ знаходимо напрям швидкості $\vec{V}_B$ точки B (рис. 6.3).

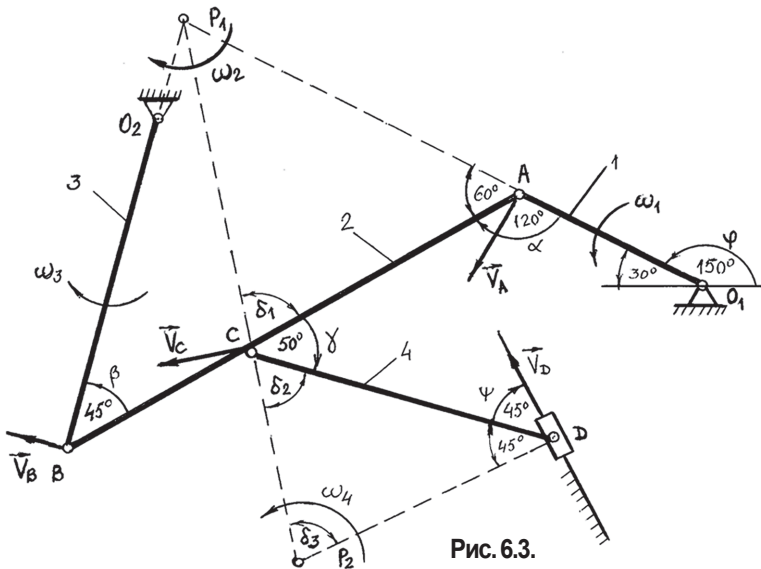


Рис. 6.3.

Складемо відношення $\frac{V_B}{V_A} = \frac{BP_1}{AP_1}; V_B = V_A \frac{BP_1}{AP_1}.$

Знайдемо відношення $\frac{BP_1}{AP_1}.$ Кут $\angle BAP_1 = 60^\circ.$

Тоді по теоремі синусів $\frac{BP_1}{\sin 60^\circ} = \frac{AP_1}{\sin 45^\circ}; \frac{BP_1}{AP_1} = 1,22.$

Маємо: $V_B = 2 \cdot 1,22 = 2,44 \text{ (м/с)}; V_B = 2,44 \text{ м/с.}$

Знайдемо швидкість точки C , яка належить ланці AB .

Швидкість $\vec{V}_C$ перпендикулярна відрізу CP_1 , який з'єднує точки C і P_1 , і напрямлена в сторону повороту ланки AB . Модуль швидкості V_C знайдемо з пропорції

$$\frac{V_C}{V_A} = \frac{CP_1}{AP_1}; V_C = V_A \frac{CP_1}{AP_1}.$$

Щоб знайти швидкість V_C точки C , необхідно знайти відстані CP_1 і AP_1 точок C і A до м. ц. ш P_1 . Якщо при знаходженні цих відстаней виникають певні труднощі, то доцільно механізм побудувати в певному масштабі з точною побудовою заданих кутів. Це дозволить невідомі відстані точок до миттєвого центра швидкостей заміряти безпосередньо з рисунка. Хоч наш механізм і побудований в масштабі, ми ж всі необхідні відстані знайдемо аналітичним шляхом.

$$\angle AP_1B = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ.$$

з $\triangle ABP_1$ по теоремі синусів $\frac{AP_1}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 75^\circ}; AP_1 AB \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = 0,74 \text{ (м).}$

З $\triangle CP_1A$ по теоремі косинусів

$$CP_1 = \sqrt{AC^2 + AP_1^2 - 2 \cdot AC \cdot AP_1 \cos 60^\circ} = 0,68 \text{ (м).}$$

Тоді $V_C = 2 \cdot \frac{0,68}{0,74} = 1,84 \text{ (м/с)}; V_C = 1,84 \text{ м/с.}$

Знайдемо швидкість точки D . Точка належить повзуну, який виконує поступальний рух. Тому швидкість точки D напрямлена по напрямним лініям повзуна. Миттєвий центр швидкостей P_2 ланки 4 знаходиться на перетині перпендикулярів, проведених з точок C і D до напрямів швидкостей.

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{DP_2}{CP_2}; \quad V_D = V_C \frac{DP_2}{CP_2}.$$

Знайдемо відношення $\frac{DP_2}{CP_2}$. Спочатку знайдемо значення кута δ_1 .

$$\text{З } \triangle ACP_1 \quad \frac{AP_1}{\sin \delta_1} = \frac{CP_1}{\sin 60^\circ}; \quad \sin \delta_1 = \frac{AP_1}{CP_1} = \sin 60^\circ = 0,94; \quad \delta_1 = 70^\circ.$$

Тоді кут $\delta_2 = 180^\circ - (\delta_1 - 50^\circ) = 60^\circ; \quad \delta_2 = 60^\circ$.

$$\text{З } \triangle CDP_2 \quad \frac{DP_2}{\sin \delta_2} = \frac{CP_2}{\sin 45^\circ}; \quad \frac{DP_2}{CP_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin 45^\circ} = 1,22$$

Тоді $V_D = 1,84 \cdot 1,22 = 2,24$ (м/с); $V_D = 2,24$ м/с.

Кут $\delta_3 = 180^\circ - (\delta_2 - 45^\circ) = 75^\circ; \quad \delta_3 = 75^\circ$.

$$\frac{CP_2}{\sin 45^\circ} = \frac{CD}{\sin \delta_3}; \quad CP_2 = CD \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = 0,44(\text{м}); \quad CP_2 = 0,44 \text{ м}.$$

1.2 *Знайдемо швидкості точок A, B, C, D за допомогою плану швидкостей (рис. 6.4).*

План швидкостей і його побудова розглянуті в пунктах 3.8, 3.9.

Знайдемо швидкість точки B. Візьмемо за полюс точку A, швидкість якої відома:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (1)$$

де $\vec{V}_{BA}$ – швидкість точки B при її обертанні навколо точки A.

$$V_{BA} = \omega_2 \cdot AB, \quad \vec{V}_{BA} \perp AB. \quad (2)$$

Розв'яжемо векторне рівняння (1) графічно, вибравши попередньо полюс O і масштаб плану швидкостей. З полюса O проводимо вектор $o\vec{a}$, який відповідає вектору швидкості $\vec{V}_A$ точки A (рис. 6.4). З кінця вектора $o\vec{a}$ проводимо пряму, паралельну вектору швидкості $\vec{V}_{BA}$ (т. б. перпендикулярну AB), а з початку вектора $o\vec{a}$ – пряму паралельну $\vec{V}_B$. Перетин цих прямих дає точку b.

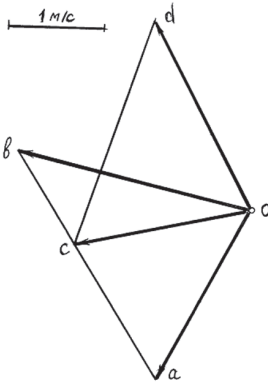


Рис. 6.4.

$$ob = \vec{V}_B, \quad ab = \vec{V}_{BA}$$

З плану швидкостей маємо: $V_B = 2,5 \text{ м/с}$, $V_{BA} = 2,8 \text{ м/с}$.

Знайдемо швидкість точки C . Точка C розміщена на ланці AB і знаходиться на відстані $AC = 0,6AB$. На плані швидкостей точка C буде знаходитись на відстані $ac = 0,6 ab$. З'єднаємо точку O з точкою C і отримаємо вектор $oc = \vec{V}_C$.

З плану швидкостей $V_C = 1,86 \text{ м/с}$.

Знайдемо швидкість точки D . Ланка CD виконує плоский рух. Візьмемо за полюс точку C .

$$\text{Тоді } \vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{DC}, \quad (3)$$

де $\vec{V}_{DC}$ – швидкість точки D при її обертанні навколо точки C .

$$V_{DC} \perp CD, \quad V_{DC} = \omega_4 \cdot DC. \quad (4)$$

Розв'яжемо векторне рівняння (3) графічно. На плані швидкостей швидкість $\vec{V}_C = oc$ вже є. Тому з кінця вектора oc проводимо пряму, паралельну вектору швидкості $\vec{V}_{DC}$ (т. б. перпендикулярну CD), а з початку вектора oc – пряму, паралельну $\vec{V}_D$. Перетин цих прямих дає точку d .

$$od = \vec{V}_D; \quad cd = \vec{V}_{DC}.$$

З плану швидкостей маємо: $V_D = 2,2 \text{ м/с}$, $V_{DC} = 2,4 \text{ м/с}$.

Значення швидкостей точок, які отримані за допомогою м. ц. ш. і за допомогою плану швидкостей, близькі.

2. Знайдемо кутові швидкості стержнів 2, 3, 4 за допомогою м. ц. ш. і плану швидкостей

2.1 Значення кутових швидкостей стержнів, знайдених за допомогою м. ц. ш.

Для стержня 2 м. ц. ш. знаходиться в точці P_1 :

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{2}{0,74} = 2,7 \text{ (рад/с)}; \quad \omega_2 = 2,7 \text{ рад/с.}$$

Стержень 3 обертається навколо точки O_2 :

$$\omega_3 = \frac{V_B}{l_3} = \frac{2,44}{0,7} = 3,5 \text{ (рад/с)}; \quad \omega_3 = 3,5 \text{ рад/с.}$$

Для стержня 4 м. ц. ш. знаходиться в точці P_2 :

$$\omega_4 = \frac{V_C}{CP_2} = \frac{1,84}{0,44} = 4,18 \text{ (рад/с)}; \quad \omega_4 = 4,18 \text{ рад/с.}$$

2.2. Значення кутових швидкостей стержнів, знайдених за допомогою плану швидкостей.

Для стержня 2, використовуючи формулу (2), маємо:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{2,8}{1} = 2,8 \text{ (рад/с)}; \quad \omega_2 = 2,8 \text{ рад/с.}$$

Для стержня 3: $\omega_3 = \frac{V_B}{l_3} = \frac{2,5}{0,7} = 3,56 \text{ (рад/с)}; \quad \omega_3 = 3,56 \text{ рад/с.}$

Для стержня 4, використовуючи формулу (4), маємо

$$\omega_4 = \frac{V_{DC}}{DC} = \frac{2,4}{0,6} = 4,0 \text{ (рад/с)};$$

3. Знайдемо прискорення точок A і B аналітичним способом і за допомогою плану прискорень.

3.1. Знайдемо прискорення точок A і B аналітичним шляхом.

Згідно умови задачі, ми можемо знайти прискорення точки A . Точка A належить кривошипу O_1A , який рівномірно обертається навколо точки O_1 , ($\varepsilon_1 = 0$):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau.$$

Чисельно $a_A^n = \omega_1^2 \cdot Q_1A = 5^2 \cdot 0,4 = 10 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot Q_1A = 0$

Повне прискорення точки A чисельно дорівнює нормальному прискоренню точки A і напрямлене вздовж кривошипа O_1A до точки O_1 .

$$a_A = 10 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок прискорення точки A показаний на рисунку 6.5.

Знайдемо прискорення $\vec{a}_B$ точки B . Точка B належить стержню 2. Точка A одночасно належить кривошипу 1 і стержню 2. Стержень 2 здійснює плоский рух. Візьмемо за полюс точку A , прискорення якої відоме:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (5)$$

Точка B належить і стержню BO_2 , який може обертатись навколо осі, що проходить через точку O_2 . Тому

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau. \quad (6)$$

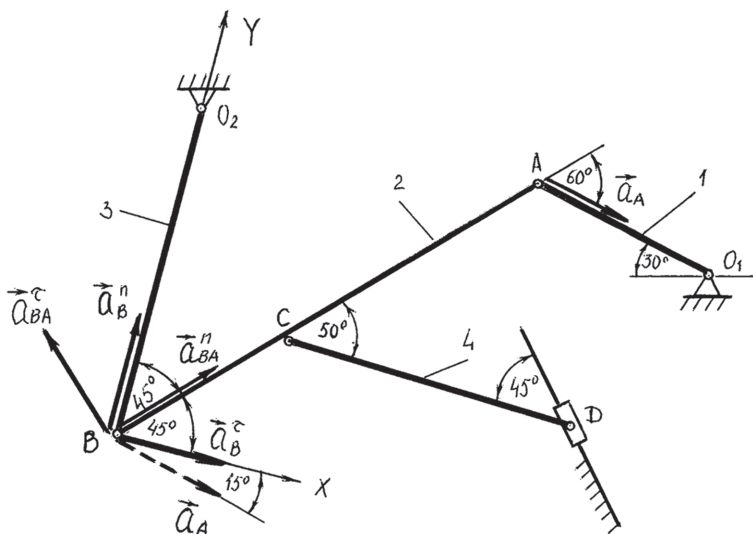


Рис. 6.5

Підставимо вираз (6) у вираз (5).

$$\underline{\underline{\vec{a}_B^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_B^\tau}} = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BA}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BA}^\tau}}. \quad (7)$$

$$a_B^n = \omega_3^2 \cdot BO_2 = 3,5^2 \cdot 0,7 = 8,6 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_B^\tau = \varepsilon_3 \cdot BO_2.$$

Прискорення $\vec{a}_B^n$ напрямлене по стержню BO_2 до точки O_2 .

Прискорення $\vec{a}_B^n \perp \vec{a}_B^\tau$. Модуль прискорення $\vec{a}_B^\tau$ невідомий, тому що невідоме значення кутового прискорення ε_3 .

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 2,7^2 \cdot 1 = 7,3 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot AB.$$

Прискорення $\vec{a}_{BA}^n$ напрямлене по стержню AB до точки A .

Прискорення $\vec{a}_{BA}^n \perp \vec{a}_{BA}^\tau$. Модуль прискорення $\vec{a}_{BA}^\tau$ невідомий, тому що невідоме значення кутового прискорення ε_2 . Напрями всіх прискорень показані на рис. 6.5.

У векторному рівнянні (7) однією рисою підкреслені невідомі величини, а двома рисками – відомі. Спочатку векторне рівняння (7) розв'яжемо аналітичним способом.

Введемо систему координат з початком в точці B . Спроектуємо векторне рівняння (7) на осі координат $ХВУ$:

$$a_B^{\tau} = a_A \cos 15^\circ + a_{BA}^n \cos 45^\circ - a_{BA}^{\tau} \sin 45^\circ; \quad (8)$$

$$a_B^n = -a_A \sin 15^\circ + a_{BA}^n \sin 45^\circ + a_{BA}^{\tau} \cos 45^\circ. \quad (9)$$

З виразу (9) $a_{BA}^{\tau} = 8,52 \text{ м/с}^2$. З виразу (8) $a_B^{\tau} = 8,8 \text{ м/с}^2$.

Повне прискорення точки B $a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^{\tau})^2}$; $a_B = 12,3 \text{ м/с}^2$.

Знаючи прискорення $\vec{a}_{BA}^{\tau}$, можемо знайти кутове прискорення ε_2 ланки 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB}; \quad \varepsilon_2 = 8,52 \text{ рад/с}^2.$$

3.2. Знайдемо прискорення точок A, B, C за допомогою плану прискорень

Виберемо полюс π і масштаб плану прискорень (рис. 6.6).

Відкладемо спочатку відомі вектори правої частини рівняння (7):

з полюса π відкладемо вектор $\vec{a}_A$, а з точки a – вектор $\vec{a}_{BA}^n$, з точки b'

– вектор $\vec{a}_{BA}^{\tau}$, довжина якого невідома. Звернемося тепер до лівої частини рівняння (7): з полюса π відкла-

демо вектор $\vec{a}_B^n$, а з точки b'' – век-

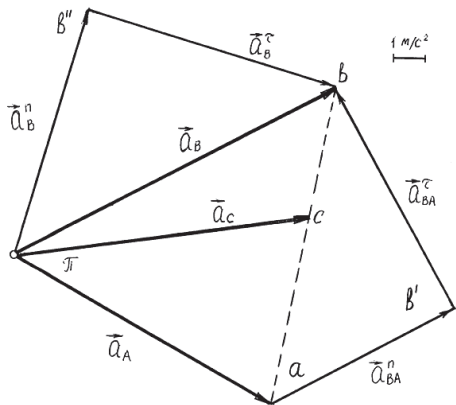


Рис. 6.6

тор $\vec{a}_B^{\tau}$. Точка перетину напрямів векторів $\vec{a}_B^{\tau}$ і $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ дає точку b . Відрізок πb визначає модуль прискорення точки B . Вектор прискорення точки B напрямлений від точки π до точки b .

Безпосередні заміри відрізків з плану прискорень, з урахуванням масштабу, дають слідуючі значення модулів прискорень:

$$a_B = 12,2 \text{ м/с}^2; \quad a_{BA}^{\tau} = 8,5 \text{ м/с}^2, \quad a_B^{\tau} = 8,7 \text{ м/с}^2.$$

Знайдемо прискорення точки C .

Точка C знаходиться на відстані $AC = 0,6AB$. Це дозволяє знайти прискорення точки C з плану прискорень, якщо на відрізьку ab відкласти точку c , яка задовольняє умові $ac = 0,6 ab$. З'єднаємо точку π з точкою c . Цим самим ми отримали напрям і модуль прискорення точки C . $a_C = 10 \text{ м/с}^2$.

7. Запитання для самоперевірки і до захисту розрахунково-графічної роботи

1. Який рух твердого тіла називається поступальним?
2. В чому полягає теорема про рух точок твердого тіла, яке здійснює поступальний рух?
3. Який рух тіла називається обертальним навколо нерухомої осі?
4. Як записується кінематичне рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі?
5. Що характеризує кутова швидкість і кутове прискорення при обертанні тіла навколо нерухомої осі?
6. Який напрям мають кутова швидкість і кутове прискорення при обертальному русі тіла навколо нерухомої осі?
7. Який обертальний рух тіла називається рівномірним, який рівнозмінним?
8. Яка залежність між кутовою швидкістю обертального руху тіла і лінійною швидкістю якої-небудь точки цього тіла?
9. За якими формулами визначається нормальне і дотичне прискорення точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі?
10. Записати векторні формули для знаходження швидкості і прискорення точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.
11. Для чого служать передаточні механізми?
12. За якою формулою визначається передаточне відношення коліс, у яких осі обертання нерухомі?
13. Який рух тіла називається плоским?

14. На які два рухи можна розкласти плоский рух твердого тіла?
15. Як записуються кінематичні рівняння плоского руху твердого тіла?
16. Як визначається швидкість довільної точки тіла при його плоскому русі?
17. Які властивості швидкостей точок плоскої фігури, які лежать на одній прямій?
18. Що називається миттєвим центром швидкостей точок тіла при його плоскому русі?
19. Як можна знайти положення миттєвого центра швидкостей точок тіла при його плоскому русі?
20. Чи може миттєвий центр швидкостей бути в нескінченності?
21. Яким чином визначається кутова швидкість тіла при його плоскому русі, якщо відоме положення миттєвого центра швидкостей?
22. Як визначити швидкість будь якої точки тіла при його плоскому русі, якщо відомо положення миттєвого центра швидкостей і швидкість однієї з точок тіла?
23. Що називається планом швидкостей?
24. Який редуктор називається планетарним?
25. В чому суть метода миттєвих осей обертання при визначенні передаточного числа редуктора?
26. В чому суть метода миттєвої зупинки при визначенні передаточного числа редуктора?
27. Як визначити прискорення довільної точки тіла при його плоскому русі?
28. Що називається миттєвим центром прискорень?
29. Яким чином визначається положення миттєвого центра прискорень при плоскому русі тіла?
30. В чому суть плану прискорень?
31. Який рух твердого тіла називається сферичним?
32. В чому полягає теорема про переміщення твердого тіла, яке має одну нерухому точку?
33. Що таке кути Ейлера?
34. Як записуються кінематичні рівняння руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?

35. Що називається миттєвою віссю обертання твердого тіла, яке має нерухому точку?
36. Яким чином напрямлений вектор миттєвої кутової швидкості і миттєвого кутового прискорення?
37. Як напрямлений вектор кутового прискорення і за якою формулою обчислюється, якщо тіло рухається навколо нерухомої точки з постійною по модулю кутовою швидкістю?
38. Як виражаються проекції на координатні осі швидкості довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
39. Як визначити прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
40. За якою формулою визначається швидкість довільної точки вільного твердого тіла?
41. За якою формулою визначається прискорення довільної точки вільного твердого тіла?

МОДУЛЬ 5.

КІНЕМАТИКА СКЛАДНОГО РУХУ ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

1. Кінематика складного руху точки

1.1. Основні поняття

Рух точки M називається складним, якщо вона одночасно бере участь в декількох рухах.

Наприклад, людина на човні хоче потрапити з пункту A в пункт B на другому березі річки (рис 1.1). Спрямовуючи човен перпендикулярно берегам річки людина в кінцевому підсумку не попадає в пункт B , а попадає в пункт C . Пояснюється це наступним чином. Човен одночасно бере участь в двох

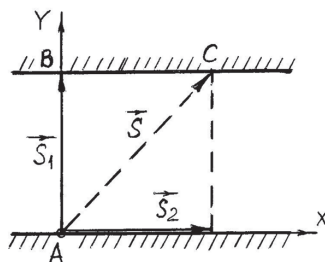


Рис. 1.1

рухах: в першому русі він переміщується відносно води і в другому русі незалежно від волі людини човен переміщується разом з водою по течії річки. Таким чином, рух човна є складним.

Зробимо слідуюче узагальнення. Нехай тіло T рухається відносно нерухомої системи координат $X_I Y_I Z_I$, а по тілу T рухається точка M . Рух точки M є складним. На тілі T виберемо систему координат XYZ , яка жорстко зав'язана з цим тілом і разом з ним переміщується. Систему координат XYZ назвемо рухомою системою координат (рис. 1.2).

Введемо слідуючі позначення:

1. Рух точки M відносно нерухомого тіла, на якому вибрана нерухома система координат $X_I Y_I Z_I$, будемо називати *абсолютним рухом*. При цьому русі точка M має абсолютну швидкість $\vec{V}_a$ і абсолютне прискорення $\vec{a}_a$.

2. Рух точки M відносно рухомої системи координат XYZ (т. б. відносно рухомого тіла T) будемо називати *відносним рухом*. При цьому русі точка M має відносну швидкість $\vec{V}_r$ і відносне прискорення $\vec{a}_r$.

3. Рух тіла T разом з системою координат $OXYZ$ відносно нерухомої системи координат $O_I X_I Y_I Z_I$ є для точки M *переносним рухом*, а швидкість і прискорен-

ня тієї точки тіла T , де в даний момент часу знаходиться точка M , називається переносною швидкістю $\vec{V}_e$ і переносним прискоренням $\vec{a}_e$.

Якщо звернутись до нашого прикладу з човном, то рух човна відносно, наприклад, точки A , розміщеної на нерухомому березі (там і початок нерухомої системи координат $X_1 Y_1 Z_1$) буде абсолютним рухом. Рух човна відносно води буде відносним рухом, а рух частинок води відносно берега – переносним рухом.

Основною задачею кінематики складного руху точки є встановлення залежності між швидкостями і прискореннями в двох системах координат: нерухомої і рухомої.

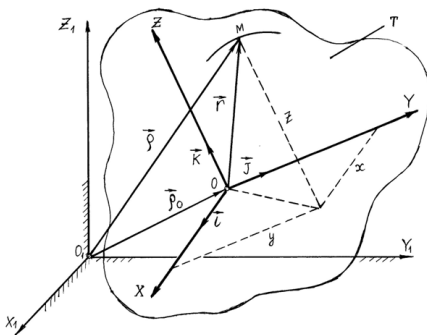


Рис. 1.2

1.2. Рівняння руху точки

Нехай точка M одночасно здійснює рух відносно нерухомої і рухомої системи координат. Як видно з рисунку 1.2, рівняння руху точки M в векторній формі можна записати слідуючим чином:

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}, \quad (1.1)$$

де $\vec{\rho}$ – радіус – вектор, який описує рух точки M відносно нерухомої системи координат, тобто характеризує абсолютний рух точки, $\vec{r}$ – радіус – вектор,

який описує рух точки M відносно рухомої системи координат, т. б. характеризує відносний рух точки; $\vec{\rho}_0$ – радіус – вектор, який описує рух точки O (початок рухомої системи координат) відносно нерухомої системи координат.

Радіус – вектор точки M можна представити в слідуючому вигляді:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.2)$$

де x, y, z – координати точки M в рухомій системі координат $OXYZ$; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні орти рухомої системи координат (див. рис. 1.2).

При русі точки M її координати x, y, z змінюються, т. б. вони є функціями часу:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (1.3)$$

Рівняння (1.3) є рівняннями відносного руху точки M .

Поставимо таке запитання: одиничні орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ є функціями часу, чи ні?

Одиничні орти, як вектори, характеризуються модулем вектора і його напрямом. Так як ці вектори одиничні, то їх модуль дорівнює 1. Що стосується напрямів ортів, то вони залежать від виду руху рухомої системи координат.

Якщо тіло T і зв'язана з ним система координат рухається поступально, то орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ не змінюють свого напрямку, т. б. є постійними величинами. Отже, в випадку поступального руху

$$\vec{i} = \text{const}; \quad \vec{j} = \text{const}; \quad \vec{k} = \text{const}. \quad (1.4)$$

Якщо тіло T здійснює обертальний рух навколо точки O , то рухома система координат також обертається і напрями одиничних ортів змінюються.

Таким чином, в загальному випадку, одиничні орти є функціями часу:

$$\vec{i} = \vec{i}(t), \quad \vec{j} = \vec{j}(t), \quad \vec{k} = \vec{k}(t). \quad (1.5)$$

Початок O рухомої системи координат може переміщатися відносно нерухомої системи координат, тому

$$\vec{\rho}_0 = \vec{\rho}_0(t). \quad (1.6)$$

Рівняння (1.4)–(1.6) характеризують переносний рух рухомої системи координат.

З урахуванням (1.2) рівняння руху точки M можна записати у вигляді

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.7)$$

1.3. Теорема про додавання швидкостей

Теорема. При складному русі точки її абсолютна швидкість $\vec{V}_a$ дорівнює геометричній сумі відносної швидкості $\vec{V}_r$ і переносної швидкості $\vec{V}_e$.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \quad (1.8)$$

Доведення. Нехай точка M здійснює складний рух (див. рис. 1.1, 1.2).

Візьмемо похідну по часу від виразу (1.7), врахувавши при цьому залежності (1.3), (1.5) і (1.6).

$$\underbrace{\frac{d\vec{\rho}}{dt}}_{\vec{V}_a} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{\rho}_0}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \right)}_{\vec{V}_e} + \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right)}_{\vec{V}_r} \quad (1.9)$$

Так як $\vec{\rho}$ характеризує абсолютний рух точки M , то $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V}_a$ є абсолютною швидкістю точки M . Перший доданок, виділений дужками в правій частині

тині, враховує рух рухомої системи координат відносно нерухомої, т. б. є переносною швидкістю $\vec{V}_e$. Другий доданок, виділений дужками, враховує рух точки M відносно рухомої системи координат, т. б. є відносною швидкістю $\vec{V}_r$, записаною в проекціях на осі рухомої системи координат.

Звідси маємо, що $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$. Теорема доведена

$$\vec{V}_e = \vec{V}_0 + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}, \quad (1.10)$$

$$\vec{V}_r = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}, \quad (1.11)$$

де $\vec{V}_0 = \frac{d\vec{\rho}_0}{dt}$ – швидкість точки O – початку рухомої системи координат відносно

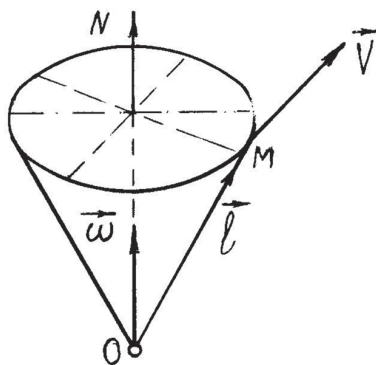


Рис. 1.3.

нерухомої.

Розглянемо окремо вираз (1.10) для переносної швидкості $\vec{V}_e$. У виразі (1.10) зустрічаються похідні по часу від одиничних ортів. Встановимо, чому дорівнюють похідні по часу від одиничних ортів. Ці похідні залежать від виду руху тіла T і пов'язані з ним системи координат:

1. Нехай тіло T здійснює поступальний рух. Тоді одиничні орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ є постійними величинами (див. (1.4)), а їх похідні по часу дорівнюють нулю. З врахуванням цього, вираз (1.10) набуде вигляду:

$$\vec{V}_e = \vec{V}_0$$

Таким чином, при поступальному русі рухомої системи координат переносна швидкість точки M дорівнює швидкості точки O – початку рухомої системи координат.

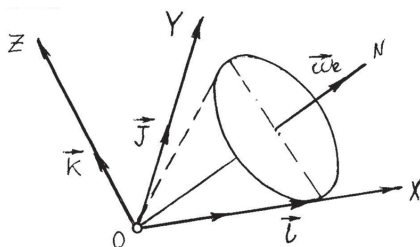


Рис. 1.4.

2. Нехай точка O нерухома ($\vec{V}_o = 0$), система координат XYZ відносно неї здійснює обертальний рух. При обертанні рухомої системи координат одиничні орти є функціями часу (див.(1.5)). Абстрактно розглянемо деяке тіло B , яке обертається відносно осі ON з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Знайдемо швидкість довільної точки M цього тіла.

Проведемо з точки O – радіус – вектор $\vec{l} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 1.3). Як відомо, при векторному способі визначення руху точки її швидкість знаходиться з формули

$$\vec{V} = \frac{d\vec{l}}{dt} \quad (\text{а}).$$

З другої сторони, при обертанні тіла відносно осі швидкість точки

визначається за формулою Ейлера: $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{l}$ (б). Порівнюючи вирази (а) і (б), маємо

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{l}. \quad (1.12)$$

Рухома система координат $OXYZ$, яка закріплена тільки в одній точці O , обертається навколо осі ON (миттєвої осі обертання) з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$ (рис. 1.4). Тоді, по аналогії з виразом (1.12), можна записати:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}, \quad (1.13)$$

де $\vec{\omega}_e$ – кутова швидкість переносного руху.

Підставивши вираз (1.13) в (1.10), маємо:

$$\vec{V}_e = x(\vec{\omega}_e \times \vec{i}) + y(\vec{\omega}_e \times \vec{j}) + z(\vec{\omega}_e \times \vec{k}) = \vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

Використовуючи вираз (1.2), отримаємо

$$\vec{V}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}. \quad (1.14)$$

Таким чином, якщо переносний рух є обертальним, то переносна швидкість точки M знаходиться за формулою Ейлера (1.14).

3. В загальному випадку, якщо точка O рухається зі швидкістю $\vec{V}_o$, а рухома система координат обертається навколо точки O , то переносна швидкість точки M знаходиться з формули:

$$\vec{V}_e = \vec{V}_o + (\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r). \quad (1.15)$$

Формула (1.8) виражає правило паралелограма швидкостей. Відносна і переносна швидкості можуть бути напрямлені під різними кутами одна до одної.

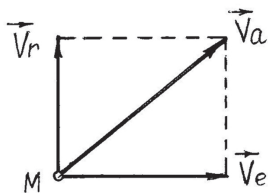


Рис. 1.5.

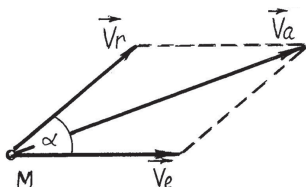


Рис. 1.6.



Рис. 1.7.



Рис. 1.8.

Знайдемо модуль абсолютної швидкості точки M при різних випадках руху.

1. Нехай $\vec{V}_r \perp \vec{V}_e$ (рис. 1.5).

$$\text{Тоді } V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}. \quad (1.16)$$

2. Нехай $\vec{V}_r \perp \vec{V}_e$ (рис. 1.6).

$$\text{Тоді } V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos \alpha}. \quad (1.17)$$

3. Нехай $\vec{V}_r$ і $\vec{V}_e$ напрямлені по одній прямій в одну сторону (рис. 1.7).

$$\text{Тоді } V_a = V_r + V_e. \quad (1.18)$$

4. Нехай $\vec{V}_r$ і $\vec{V}_e$ напрямлені по одній прямій в різні сторони (рис. 1.8).

$$\text{Тоді } V_a = V_r - V_e. \quad (1.18)$$

Абсолютна швидкість $\vec{V}_a$ буде напрямлена в сторону більшої швидкості.

1.4. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса)

Гюстав Гаспар Коріоліс (1792–1843) – французький математик та механік, член Паризької академії наук.

Щоб знайти абсолютне прискорення точки M , т. б. її прискорення по відношенню до нерухомої системи координат, візьмемо похідну по часу від абсолютної швидкості (1.9):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} = & \left(\frac{d^2 \vec{\rho}_0}{dt^2} + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} \right) + \\ & + \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} \right) + 2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

де $\frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} = \vec{a}_a$ – абсолютне прискорення точки M .

Використовуючи міркування, які приведені в пункті 1.3, встановлюємо, що перший доданок, виділений круглими дужками, є переносним прискоренням, а

другий доданок – відносним прискоренням точки:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \vec{\rho}_0}{dt^2} + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2}. \quad (1.21)$$

$$\vec{a}_r = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}. \quad (1.22)$$

Третій доданок одночасно враховує рух точки M відносно рухомої системи координат і обертання рухомої системи координат відносно полюса O . Цей вираз називається коріолісовим прискоренням:

$$\vec{a}_c = 2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right). \quad (1.23)$$

Більш простий вираз для коріолісового прискорення буде виведено в подальшому.

Використовуючи позначення, які прийняті в виразах (1.21) – (1.23), і підставляючи їх в (1.20), отримаємо

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \quad (1.24)$$

Вираз (1.24) є математичним записом теореми Коріоліса:

При складному русі точки її абсолютне прискорення дорівнює геометричній сумі відносного, переносного і коріолісового прискорень.

Вернемося до виразу (1.21) для переносного прискорення $\vec{a}_e$.

Вираз $\frac{d^2 \vec{\rho}_0}{dt^2} = \vec{a}_o$ є прискоренням точки O рухомої системи координат.

Розглянемо, чому дорівнює вираз $\frac{d^2 \vec{i}}{dt^2}$ і йому аналогічні. Для цього скористаємось виразом (1.13):

$$\frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_e \times \vec{i}) = \left(\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{i} \right) + \left(\vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{i}}{dt} \right).$$

Остаточно можна записати:

$$\frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} = (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{i}) + [\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{i})];$$

$$\frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} = (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{j}) + [\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{j})]; \quad (1.25)$$

$$\frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} = (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{k}) + [\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{k})],$$

де $\vec{\varepsilon}_e$ – кутове прискорення рухомої системи координат (тіла T) при обертанні її навколо центра O .

Підставивши вираз (1.25) у вираз (1.21), маємо:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_o \left[\vec{\varepsilon}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \right] + \left[\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})) \right].$$

Використовуючи вирази (1.2) і (1.14), отримаємо:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_o + (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}) + [\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r})].$$

Перший доданок, виділений дужками, є дотичним прискоренням $\vec{a}_e^\tau$ точки M , а другий доданок – нормальним прискоренням $\vec{a}_e^n$ при переносному обертальному русі тіла T :

$$\vec{a}_e^\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \quad (1.26)$$

$$\vec{a}_e^n = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}). \quad (1.27)$$

Тоді остаточно для переносного прискорення $\vec{a}_e$ в загальному випадку руху рухомої системи координат (тіла T) можна записати:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_o + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n. \quad (1.28)$$

Розглянемо окремі випадки руху рухомої системи координат (тіла T):

1. У випадку поступального руху тіла T $\omega_e = \varepsilon_e = 0$. Тоді, як видно з формул (1.26) – (1.28), $\vec{a}_e^\tau = \vec{a}_e^n = 0$, а переносне прискорення $\vec{a}_e = \vec{a}_o$.

2. Якщо початок O рухомої системи координат не рухається, а система координат (тіла T) обертається навколо точки O , то $a_o = 0$, $a_e^\tau \neq 0$, $a_e^n \neq 0$. Переносне прискорення $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n$.

Виведемо більш просту формулу коріолісового прискорення. Підставимо вираз (1.13) у вираз (1.23):

$$\vec{a}_e = 2\vec{\omega}_e \times \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right).$$

Використовуючи вираз (1.11), остаточно будемо мати:

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r). \quad (1.29)$$

Коріолісове прискорення дорівнює подвоєному векторному добутку кутової швидкості переносного руху на відносну лінійну швидкість точки.

Числове значення коріолісового прискорення знаходиться як модуль векторного добутку (1.29):

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r). \quad (1.30)$$

Напрямок коріолісового прискорення знаходиться або по правилу векторного добутку (по (1.29)), або по правилу Жуковського.

Микола Єгорович Жуковський (1847–1921) – видатний російський вчений, засновник сучасної гідро і аеродинаміки. Він є також автором багатьох праць з теоретичної механіки. Винайшов формулу для визначення підйомної сили крила літака.

Правило Жуковського:

Щоб знайти напрям коріолісового прискорення, необхідно (рис. 1.9):

1. Провести площину, перпендикулярну вектору кутової швидкості $\vec{\omega}_e$.
2. Спроектувати відносну швидкість $\vec{V}_r$ на цю площину.
3. Повернути проекцію швидкості на кут 90° в сторону обертання тіла T .

Це буде напрямом коріолісового прискорення.

Вияснимо, в яких випадках руху точки M і рухомої системи координат (тіла T) коріолісове прискорення буде відсутнє, т. б. дорівнювати нулю.

1. Нехай точка M переміщується по тілу T , а тіло T (рухома система координат) здійснює поступальний рух. Це означає, що відносна швидкість $V_r \neq 0$, а переносна кутова швидкість $\omega_e = 0$. Тоді, виходячи з (1.30), маємо, що $a_c = 0$.

2. Нехай тіло T здійснює обертальний рух ($\omega_e \neq 0$), а точка M відносно тіла T не переміщується ($V_r = 0$). Тоді з виразу (1.30) випливає, що коріолісове прискорення $a_c = 0$.

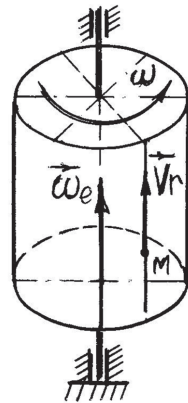
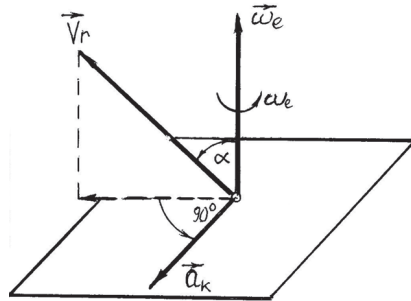


Рис.1.10.

3. Нехай тіло T обертається ($\omega_e \neq 0$), точка M переміщується по тілу T ($V_r \neq 0$), але напрям відносної швидкості $\vec{V}_r$ паралельний осі обертання тіла T (рис. 1.10). Тоді кут між векторами $\vec{\omega}_e$ і $\vec{V}_r$ складає або 0° , або 180° . Синус цих кутів дорівнює нулю і коріолісове прискорення (згідно (1.30)) $a_c = 0$.

В усіх інших випадках руху точки M і тіла T коріолісове прискорення буде існувати.

1.5. Методичні вказівки до розв'язування задач по кінематиці складного руху точки

Основні етапи розв'язування задач полягають в наступному:

1. Вияснити, по поверхні якого тіла T рухається точка M . Рух точки M по тілу T буде відносним рухом. Вияснити характер руху точки M .

2. Встановити, відносно яких тіл рухається тіло T . Цей рух буде переносним. З цим тілом зв'язати рухому систему координат $OXYZ$. Вияснити характер переносного руху (поступальний рух чи обертальний).

3. Абсолютний рух точки M – це рух її відносно нерухомого тіла, визначеного в п. 2. Нерухома система координат зв'язана з цим тілом.

4. Для визначення відносної швидкості V_r і відносного прискорення a_r доцільно умовно зупинити рух тіла T і знайти $\vec{V}_r$ і $\vec{a}_r$. Показати на рисунку їх напрям.

5. Для визначення переносної швидкості V_e і переносного прискорення a_e доцільно умовно зупинити рух точки M по тілу T . Знайти переносну швидкість V_e і переносне прискорення a_e точки тіла T , що співпадає з точкою M , і показати на рисунку їх напрям.

6. Визначити коріолісове прискорення і показати на рисунку його напрям.

7. Спроекувати векторні вирази (1.8) і (1.24) на вибрані координатні осі, і з отриманих систем рівнянь знайти невідомі швидкості і прискорення. Для визначення швидкості можливо також скористатись формулою (1.16) або (1.17).

Задача 1.1.

$BC = S = 120 \text{ м}$ $t_1 = 10 \text{ хв.} = 600 \text{ с}$ $t_2 = 12,5 \text{ хв.} = 750 \text{ с}$ $l = ? \quad V_r = ? \quad V_e = ?$	Човен вийшов з точки A і, тримаючи курс перпендикулярно берегам, досяг протилежного берега річки через 10 хв. після початку руху, причому течією його знесло в точку C на 120 м нижче точки B (рис. 1.11, а). Щоб потрапити з точки A в точку B, човну потрібно держати курс під деяким кутом до прямої AB проти течії. В цьому випадку човен досягне протилежного берега через 12,5 хв (рис. 1.11, б). Знайти ширину l річки, відносну швидкість V_r човна і швидкість V_e течії річки.
---	--

Рух човна є складним рухом. Рух човна відносно течії є відносним рухом, а рух човна разом з течією – переносним рухом. Рух човна відносно нерухомих берегів річки – це абсолютний рух.

Переносна швидкість (швидкість течії) буде

$$V_e = \frac{S}{t_1}. \quad (1)$$

Розглянемо кожний з двох випадків руху. З рис. 1.11(а) видно, що

$$AC = \sqrt{S^2 + l^2}. \quad (2)$$

В першому випадку (рис. 1.11,а) абсолютна швидкість буде

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}. \quad (3)$$

З цією швидкістю було пройдено відстань AC за час $t_1=600$ с

$$AC = V_a \cdot t_1. \quad (4)$$

Підставимо вирази (1), (2) і (3) в (4)

$$\sqrt{S^2 + l^2} = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} \cdot t_1;$$

$$\sqrt{S^2 + l^2} = t_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{S}{t_1}\right)^2 + V_r^2}; \quad S^2 + l^2 = \left(\frac{S^2}{t_1^2} + V_r^2\right) \cdot t_1^2.$$

Звідси маємо

$$l = V_r \cdot t_1. \quad (5)$$

В другому випадку руху (рис. 1.11,б) абсолютна швидкість буде

$$V_a = \sqrt{V_r^2 - V_e^2}.$$

З цією швидкістю пройдено відстань l за час $t_2=750$ с

$$l = V_a \cdot t_2 = t_2 \cdot \sqrt{V_r^2 - V_e^2} = t_2 \cdot \sqrt{V_r^2 - \frac{S^2}{t_1^2}}.$$

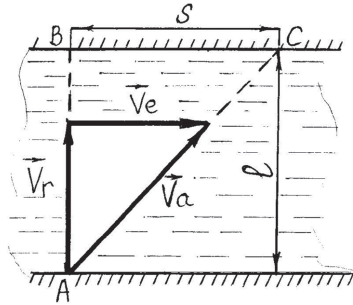


Рис. 1.11(а)

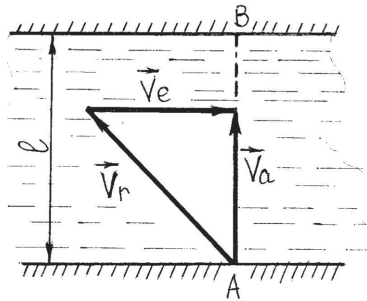


Рис. 1.11(б)

$$l^2 = V_r^2 t_2^2 - S^2 \frac{t_2^2}{t_1^2}. \quad (6)$$

Розв'яжемо сумісно рівняння (5) і (6).

Маємо:

$$V_r = \frac{S}{t_1} \sqrt{\frac{t_2^2}{t_2^2 - t_1^2}}; \quad l = S \sqrt{\frac{t_2^2}{t_2^2 - t_1^2}}.$$

Після підстановки числових даних, маємо:

$$V_e = 0,2 \text{ м/с}; \quad V_r = 0,33 \text{ м/с}; \quad l = 200 \text{ м}.$$

Задача 1.2.

α На похилу площину клина, яка складає з горизонтом кут α , опирається стержень CB , який може зміщуватись тільки по вертикалі завдяки напрямному пристрою A . З якою швидкістю піднімається стержень CB , якщо клин рухається з постійною швидкістю U (рис. 1.12).

$V_a = ?$ Коліщатко C знаходиться на рухомому тілі T (на похилій площині), яке рухається зі швидкістю $\vec{U}$. Центр C коліщатка виконує складний рух. Разом з клином центр C рухається горизонтально вліво зі швидкістю $\vec{U}$.

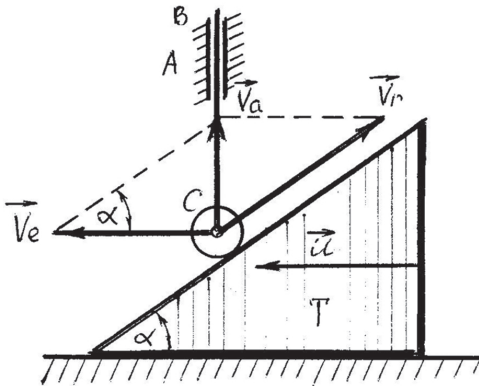


Рис. 1.12.

Це є переносний рух і переносна швидкість $V_e = U$. Центр C коліщатка рухається вздовж похилої площини вгору. Це відносний рух коліщатка зі швидкістю V_r . Результуючий рух коліщатка (абсолютний рух) напрямлений вертикально вгору з абсолютною швидкістю V_a .

Скористаємось формулою (1.8):

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

З рис. 1.12 видно:

$$V_a = V_e \cdot \operatorname{tg} \alpha = U \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Задача 1.3.

$$\begin{aligned} \varphi &= 45^\circ \\ \omega &= 55 \text{ рад/с} \\ OA &= 0,3 \text{ м} \end{aligned}$$

$$V_a = ?$$

Знайти швидкість точки B ламаної ланки DCB і швидкість повзуна A відносно ламаної при куту $\varphi = 45^\circ$, якщо кривошип OA довжиною $= 0,3$ м обертається з постійною кутовою швидкістю 5 рад/с . (рис. 1.13).

Рух повзуна A є складним рухом. Повзун A рухається вздовж DC ламаної ланки ABC , яка в свою чергу рухається по горизонтальним напрямним $L-L$. Рух ланки DCB є переносним рухом. Цей рух в даному випадку є поступальним рухом і переносна швидкість $\vec{V}_e$ точки A така ж сама, як і швидкість точки B . $\vec{V}_e = \vec{V}_B$. Рух повзуна A по DC є відносним рухом з відносною швидкістю $\vec{V}_r$. Абсолютний рух повзуна A – це його обертальний рух навколо точки O . Абсолютна швидкість $\vec{V}_a$ напрямлена перпендикулярно радіусу обертання OA . Модуль швидкості $V_a = \omega \cdot OA = 5 \cdot 0,3 = 1,5 \text{ (м/с)}$; $V_a = 1,5 \text{ м/с}$. На рисунку 1.13 побудовані вектори швидкостей.

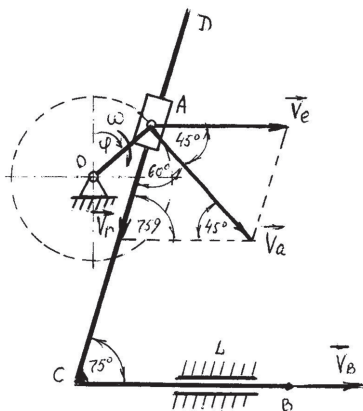


Рис. 1.13.

Для знаходження швидкостей V_a і V_r використаємо теорему синусів:

$$\frac{V_r}{\sin 45^\circ} = \frac{V_a}{\sin 75^\circ}; \quad \frac{V_e}{\sin 60^\circ} = \frac{V_a}{\sin 75^\circ}.$$

$$\text{Звідси: } V_r = 1,1 \text{ м/с}; \quad V_e = V_B = 1,34 \text{ м/с}.$$

Задача 1.4.

$$\begin{aligned} \varphi_e &= 0,25t^2 \\ OM &= S_r = 0,1t^2 \\ t_1 &= 2 \text{ с} \\ V_a &= ? \end{aligned}$$

Прямолінійна трубка обертається в площині навколо нерухомого центра O по закону $\varphi_e = 0,25t^2$, де φ – в рад, t – в с. В середині трубки рухається кулька M по закону $OM = S_r = 0,1t^2$, де S – в м, t – в с (рис. 1.14). Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення кульки M в момент часу $t_1 = 2 \text{ с}$.

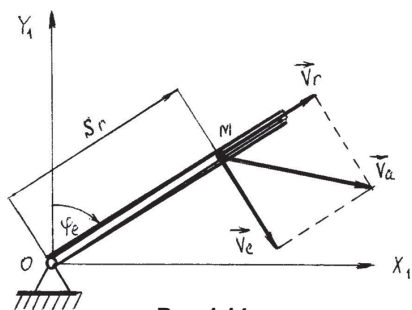


Рис. 1.14.

Рух кульки M є складним. Кулька M рухається вздовж трубки, яка в свою чергу також рухається, обертаючись навколо центра O . Рух кульки M по трубці є відносним рухом, причому закон відносного руху точки відомий $S_r = 0,1 t^2$ (м). Обертальний рух трубки – це переносний рух, закон руху якого відомий $\varphi_e = 0,25 t^2$. Абсолютний рух точки M –

це рух точки відносно нерухомої системи координат з початком в точці O .

Абсолютна швидкість і абсолютне прискорення точки M знаходяться з формул:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e; \quad (1)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (2)$$

де $\vec{a}_r$, $\vec{a}_e$ і $\vec{a}_c$ – відносне, переносне і коріолісове прискорення точки M .

Побудуємо положення трубки і точки M в момент часу $t_1 = 2$ с.

При $t_1 = 2$ с $\varphi_e = 1 \text{ рад} \approx 57,3^\circ$, $OM = 0,4$ м.

Знайдемо відносну швидкість точки M :

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = 0,2t.$$

При $t_1 = 2$ с Модуль відносної швидкості $V_r = 0,4$ м/с.

Відносна швидкість $\vec{V}_r$ напрямлена по трубці від точки O .

Переносна швидкість $V_e = \omega_e \cdot OM$,

де $\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 0,5t$ (рад/с) – переносна кутова швидкість (кутова швидкість трубки).

При $t_1 = 2$ с, $\omega_e = 1,0$ (рад/с); $V_e = 1 \cdot 0,4 = 0,4$ (м/с).

Переносна швидкість $\vec{V}_e$ напрямлена перпендикулярно радіусу обертання OM .

На рис. 1.14 побудовані вектори відносної, переносної і абсолютної швидкостей точки M .

$$\vec{V}_r \perp \vec{V}_e.$$

Абсолютна швидкість точки M :

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,4^2} = 0,56 \text{ (м/с)};$$

$$V_a = 0,56 \text{ м/с.}$$

Знайдемо абсолютне прискорення точки M .

Почнемо з відносного прискорення. Як зазначалось раніше, відносний рух – це рух точки M вздовж трубки. Тому:

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} = 0,2 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_r = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

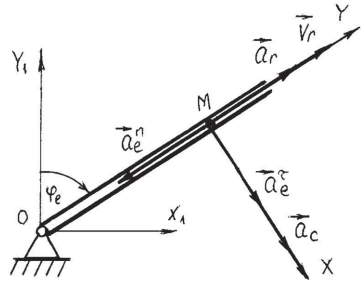


Рис. 1.15

Відносне прискорення $\vec{a}_r$ напрямлене по трубці від точки O (рис. 1.15).

Переносний рух – це обертальний рух точки M разом з трубкою навколо осі, що проходить через точку O . Так як в переносному русі точка M рухається по криволінійній траєкторії (по колу), то переносне прискорення $\vec{a}_e$ складається з дотичного і нормального прискорень:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n. \quad (3)$$

Дотичне переносне прискорення точки M $a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM$, де

$$\varepsilon_e = \ddot{\phi}_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 0,5 \text{ (рад/с}^2\text{)} - \text{переносне кутове прискорення трубки.}$$

$$\text{Маємо} \quad a_e^\tau = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_e^\tau = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Дотичне переносне прискорення $\vec{a}_e^\tau$ напрямлене перпендикулярно радіусу обертання OM .

Нормальне переносне прискорення точки M напрямлене від точки M до центра обертання O і чисельно знаходиться з формули:

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM.$$

$$\text{При } t_1 = 2 \text{ с, } \omega_e = 1 \text{ рад/с, } OM = 0,4 \text{ м.}$$

$$a_e^n = 0,4 \text{ м/с}^2.$$

Знайдемо коріолісове прискорення $\vec{a}_c$ (див. формулу 1.29):

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r). \quad (4)$$

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ напрямлений по осі обертання трубки, яка проходить через точку O . Це означає, що вектор напрямлений перпендикулярно площині рисунка від нас:

$$\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r.$$

З формули (4) по правилу векторного добутку встановлюємо, що вектор коріолісового прискорення $\vec{a}_c$ напрямлений перпендикулярно трубі.

Напрями прискорень $\vec{a}_r$, $\vec{a}_e^r, \vec{a}_e^n$ і $\vec{a}_c$ показані на рис. 1.15.

Чисельно значення коріолісового прискорення:

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\hat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ = 2\omega_e V_r.$$

При $t_1 = 2\text{ с}$ $a_c = 2 \cdot 1 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ (м/с}^2\text{)}$; $a_c = 0,8 \text{ м/с}^2$.

Знайдемо модуль абсолютного прискорення a_a точки M .

Вираз (3) підставимо у вираз (2):

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_c. \quad (5)$$

Проведемо декартову систему координат XY з початком у точці M і спроектуємо вираз (5) на ці осі:

$$a_{ax} = a_e^r + a_c = 0,2 + 0,8 = 1 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

$$a_{ay} = a_r - a_e^n = 0,2 - 0,4 = -0,2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Повне абсолютне прискорення:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{1^2 + (-0,2)^2} = 1,02 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$a_a = 1,02 \text{ м/с}^2.$$

Задача 1.5.

$$R = 1,2 \text{ м}$$

$$\omega = 2 \text{ рад/с}$$

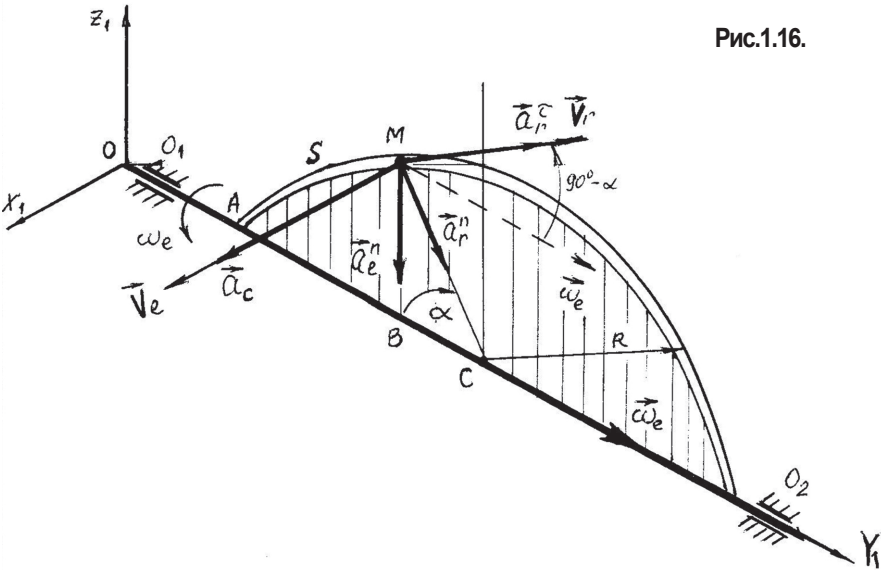
$$S = 3,2 \pi t^3 \text{ м}$$

$$t_1 = 0,5 \text{ с}$$

$$V_a = ?$$

Трубка, яка має форму круглого півкільця радіусом 1,2 м, рівномірно обертається навколо горизонтальної осі O_1O_2 з кутовою швидкістю 2 рад/с. Вісь O_1O_2 проходить через діаметр півкільця. Кулька M , яка знаходиться в трубі, рухається відносно трубки по закону $AM = 3,2 \pi t^3$ (м) (рис. 1.16). Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент часу $t_1 = 0,5 \text{ с}$.

Рис.1.16.



Нехай в даний момент часу півкільце розміщене в площині Y_1OZ_1 .
Знайдемо положення точки M на півкільці в момент часу $t_1 = 0,5$ с.

$$AM = S = 3,2\pi \cdot (0,5)^3 = 0,4\pi \text{ (м)}.$$

Дуговій координаті відповідає центральний кут α , який можна знайти з формули:

$$\alpha = \frac{S}{R}; \quad \alpha = \frac{0,4\pi}{1,2} = \frac{\pi}{3} \text{ рад} = 60^\circ; \quad \alpha = 60^\circ.$$

Рух точки M по півкільцю є відносним рухом. Рівняння цього руху:

$$S_r = 3,2\pi t^3 \text{ (м)}.$$

Обертальний рівномірний рух півкільця разом з точкою M відносно осі обертання O_1O_2 є переносним рухом.

Рух точки M відносно нерухомої системи координат $X_1Y_1Z_1$ є абсолютним рухом.

Абсолютна швидкість і абсолютне прискорення точки M знаходяться з формул:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \quad (1)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad (2)$$

Знайдемо абсолютну швидкість кульки M .

Вектор відносної швидкості кульки перпендикулярний радіусу обертання CM , знаходиться в площині Y_1OZ_1 і обчислюється за формулою:

$$V_r = \frac{ds}{dt} = 9,6\pi t^2 \text{ (м/с)}.$$

$$\text{При } t_1 = 0,5 \text{ с; } V_r = 7,54 \text{ м/с}.$$

В переносному русі радіусом обертання точки $M \in MB = CM \sin \alpha$. Вектор переносної швидкості перпендикулярний радіусу MB (т. б. перпендикулярний площі півкільця) і обчислюється за формулою:

$$V_e = \omega_e MB.$$

$$\text{При } t_1 = 0,5 \text{ с; } MB = R \sin \alpha = 1,2 \sin 60^\circ = 1,04 \text{ м}$$

$$V_e = 2 \cdot 1,04 = 2,08 \text{ (м/с)};$$

В зв'язку з тим, що $\vec{V}_e \perp \vec{V}_r$, маємо:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{7,54^2 + 2,08^2} = 7,82 \text{ (м/с)};$$

Знайдемо абсолютне прискорення точки M .

Відносним рухом точки $M \in$ рух по колу з радіусом R . Розкладемо повне відносне прискорення $\vec{a}_r$ на відносне дотичне прискорення $\vec{a}_r^\tau$ і відносне нормальне прискорення $\vec{a}_r^n$.

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n. \quad (3)$$

Вектор відносного дотичного прискорення перпендикулярний радіусу CM , лежить в площині півкільця і знаходиться за формулою:

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = 19,2\pi t \text{ (м/с)}.$$

Вектор відносного нормального прискорення напрямлений по радіусу MC до центра обертання C і обчислюється за формулою:

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R}.$$

$$\text{При } t_1 = 0,5 \text{ с } a_r^\tau = 30,16 \text{ м/с}, \quad a_r^n = 47,38 \text{ м/с}.$$

В переносному русі точка M обертається навколо осі O_1O_2 . Вектор пере-

носного прискорення $\vec{a}_e$ точки M також можна розкласти на переносне дотичне прискорення $\vec{a}_e^\tau$ і переносне нормальне прискорення $\vec{a}_e^n$:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n. \quad (4)$$

Переносне нормальне прискорення $\vec{a}_e^n$ напрямлене по радіусу обертання MB до точки B і знаходиться за формулою:

$$a_e^n = \omega_e^2 MB.$$

При $t_1=0,5$ с $a_e^n = 2^2 \cdot 1,04 = 4,16$ (м/с²).

Переносне дотичне прискорення $a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot MB$. Але в даному випадку $\varepsilon_e = 0$ тому, що $\omega_e = \text{const} = 2$ рад/с. Це означає, що $\underline{a_e^\tau = 0}$.

Знайдемо коріолісове прискорення:

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r). \quad (5)$$

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ напрямлений по осі O_1O_2 до точки O_2 . З векторного добутку (5) встановлюємо, що вектор прискорення $\vec{a}_c$ напрямлений паралельно осі OX_1 , т. б. перпендикулярний площині півкільця.

Чисельне значення прискорення Коріоліса:

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e \hat{\vec{V}}_r) = 2\omega_e V_r \sin(90^\circ - \alpha)$$

При $t_1=0,5$ с $a_c = 2 \cdot 2 \cdot 7,54 \cdot 0,5 = 15,08$ (м/с²);

Напрями всіх векторів показані на рис. 1.16.

Нарешті можна приступити до визначення абсолютного прискорення точки M . Підставимо вирази (3),(4) у вираз (2):

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^n + \vec{a}_c \quad (6)$$

Спроектуємо векторний вираз (6) на осі координат $X_1Y_1Z_1$.

$$a_{a_x} = a_c = 15,08$$

$$a_{a_y} = a_r^n \cos \alpha + a_r^\tau \sin \alpha = 47,38 \cdot 0,5 + 30,16 \cdot 0,866 = 49,81.$$

$$a_{a_z} = -a_r^n \sin \alpha + a_r^\tau \cos \alpha - a_e^n = -47,38 \cdot 0,866 + 30,16 \cdot 0,5 - 4,16 = -30,11$$

Повне прискорення:

$$a_a = \sqrt{a_{a_x}^2 + a_{a_y}^2 + a_{a_z}^2}; \quad a_a = 60,12 \text{ м/с}^2.$$

Задача 1.6.

$$R = 0,4 \text{ м}$$

$$\omega_e = 2t \text{ рад/с}$$

$$OM = S_r = 0,6 \sin \frac{\pi}{6} t \text{ м}$$

$$t_1 = 1 \text{ с}$$

$$\vec{V}_a = ?$$

$$\vec{a}_a = ?$$

Диск T радіусом $R = 0,6 \text{ м}$ обертається з кутовою швидкістю $\omega_e = 2t \text{ рад/с}$ відносно осі, яка перпендикулярна площині диска і проходить через точку O_1 , що лежить на його ободі. По каналу AB , розміщеному по діаметру диска, рухається точка M по закону $OM = 0,6 \sin \frac{\pi}{6} t \text{ (м)}$ (рис. 1.17). Знайти величину і напрям абсолютної швидкості і абсолютного прискорення точки M в момент часу $t_1 = 1 \text{ с}$.

Точка M рухається по диску T , а диск обертається навколо осі O_1X_1 . Таким чином, рух точки M по диску буде відносним рухом по закону $S_r = 0,6 \sin \frac{\pi}{6} t$, а

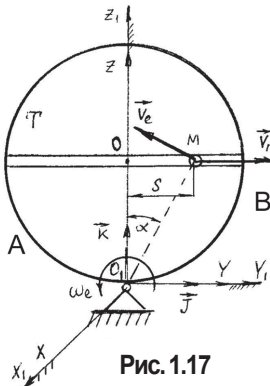


Рис. 1.17

1. Знайдемо абсолютну швидкість точки M .

Заздалегідь знайдемо положення точки M в момент часу $t_1 = 1 \text{ с}$ і покажемо це на рисунку 1.17:

$$OM = 0,6 \sin \left(\frac{\pi}{6} \cdot 1 \right) = 0,3 \text{ (м)}.$$

Абсолютна швидкість і абсолютне прискорення точки M :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \quad (1)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \quad (2)$$

$$\text{Відносна швидкість } V_r = \frac{dS_r}{dt} = 0,1\pi \cos \frac{\pi}{6} t.$$

При $t_1 = 1\text{ с}$ $V_r = 0,27\text{ м/с}$. Відносна швидкість напрямлена по каналу AB від точки O .

Переносна швидкість точки диска, де в цей час перебуває точка M , знаходиться за формулою:

$$V_e = \omega_e \cdot O_1M,$$

$$\text{де } O_1M = \sqrt{(OO_1)^2 + (OM)^2} \quad \text{і} \quad \text{при } t_1 = 1\text{ с}$$

$$O_1M = \sqrt{(0,4)^2 + (0,3)^2} = 0,5\text{ (м)};$$

$$\text{Тоді при } t_1 = 1\text{ с} \quad V_e = 2 \cdot 0,5 = 1\text{ (м/с)};$$

Переносна швидкість $\vec{V}_e$ напрямлена перпендикулярно радіусу обертання O_1M (рис. 1.17).

Для визначення абсолютної швидкості $\vec{V}_a$ зручно вираз (1) спроектувати на осі O_1Y і O_1Z :

$$V_{ay} = V_r - V_e \cos \alpha; \quad V_{az} = V_e \sin \alpha,$$

$$\text{де } \cos \alpha = \frac{OO_1}{O_1M} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8; \quad \sin \alpha = \frac{OM}{O_1M} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6.$$

$$\text{Тоді } V_{ay} = -0,53; \quad V_{az} = 0,6; \quad V_a = \sqrt{(V_{ay})^2 + (V_{az})^2} = 0,8\text{ (м/с)};$$

$$V_a = 0,8\text{ м/с}.$$

Напрямок абсолютної швидкості можна знайти за напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{V}_a, \vec{i}) = -\frac{0,53}{0,8} = -0,66; \quad \cos(\vec{V}_a, \vec{k}) = \frac{0,6}{0,8} = 0,75.$$

1. Знайдемо абсолютне прискорення точки M .

Так як диск T (рухома система координат) виконує обертальний рух відносно точки O_1 , то переносне прискорення буде:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau. \quad (3)$$

З урахуванням виразу (3) вираз (2) перепишемо:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_c. \quad (4)$$

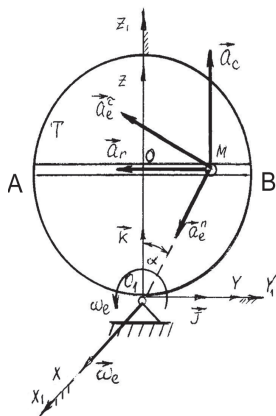


Рис. 1.18

шукати прискорення точки диска, в якій знаходиться точка M , при обертанні диска відносно осі O_1X_1 . При цьому кутове прискорення диска, нормальне і дотичне переносне прискорення точки будуть мати такі значення:

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 2 \text{ (рад/с}^2\text{)}; \quad \varepsilon_e = 2 \text{ рад/с}^2;$$

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot O_1M = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_e^n = 2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot O_1M = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_e^\tau = 1 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення $\vec{a}_e^n$ напрямлене по радіусу обертання O_1M до точки O_1 , а дотичне прискорення $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярне вектору $\vec{a}_e^n$ (рис. 1.18).

Знайдемо значення коріолісового прискорення a_c в момент часу $t_1 = 1$ с. Згідно виразу (1.30):

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r). \quad (5)$$

Кут між вектором кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ і відносною швидкістю $\vec{V}_r$ в даному випадку складає 90° . Тоді з виразу (5) випливає:

$$a_c = 2 \cdot 2 \cdot 0,27 \cdot 1 = 1,08 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_c = 1,08 \text{ м/с}^2.$$

Використовуючи правило Жуковського, встановлюємо, що вектор коріолісового прискорення $\vec{a}_c$ лежить в площині диска і напрямлений паралельно осі O_1Z_1 вгору.

Для визначення абсолютного прискорення a_a спроектуємо вираз (4) на осі O_1Y_1 і O_1Z_1 :

Знайдемо відносне прискорення $\vec{a}_r$. Для цього умовно зупинимо обертальний рух диска. В цьому випадку точка M виконує коливальний рух відносно точки O :

$$a_r = \frac{d^2 S_r}{dt^2} = \frac{dV_r}{dt} = -0,1 \frac{\pi^2}{6} \sin \frac{\pi}{6} t.$$

При $t_1 = 1$ с $a_r = -0,08$ м/с². Знак “-” показує, що відносне прискорення напрямлене в протилежну сторону відносній швидкості $\vec{V}_r$ (рис. 1.18).

Знайдемо переносне нормальне $\vec{a}_e^n$ і дотичне $\vec{a}_e^\tau$ прискорення. Для цього умовно зупинимо рух точки M по диску і в момент часу $t_1 = 1$ с будемо

$$a_{ay} = -a_r - a_e^n \sin \alpha - a_e^r \cos \alpha = -0,08 - 2 \cdot 0,6 - 1 \cdot 0,8 = -2,08.$$

$$a_{az} = -a_e^n \cos \alpha + a_e^r \sin \alpha + a_c = -2 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,6 + 1,08 = 0,08.$$

Тоді повне абсолютне прискорення:

$$a_a = \sqrt{(a_{ay})^2 + (a_{az})^2}; \quad a_a \approx 2,08 \text{ м/с}^2.$$

Знайдемо напрям абсолютного прискорення:

$$\cos(\vec{a}_a, \vec{j}) = -\frac{2,08}{2,08} \approx -1; \quad \cos(\vec{a}_a, \vec{k}) = \frac{0,08}{2,08} \approx 0,03.$$

Як видно з отриманої числової інформації, вектор абсолютного прискорення $\vec{a}_a$ напрямлений майже паралельно осі O_1Y до точки O .

1.6. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1.7.

Механізм складається з кривошипа OA і куліси O_1B , які обертаються навколо паралельних осей O і O_1 (рис. 1.19). Кривошип обертається по закону $\varphi = 2t$ (t – в секундах); $OO_1 = OA = 0,3\text{ м}$. Знайти при $\varphi = 60^\circ$ відносну швидкість точки A кінця кривошипа по відношенню до куліси і кутову швидкість куліси.

Відповідь: $V_r = 0,3 \text{ м/с}$; $\omega_{O_1B} = 1 \text{ рад/с}$.

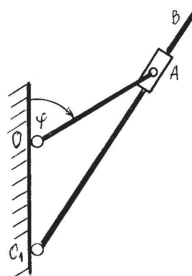


Рис. 1.19

Задача 1.8.

Кривошип O_1M кривошипно-кулісного механізму обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 2 \text{ рад/с}$ навколо горизонтальної осі O_1Z . Знайти швидкість і прискорення каменя M і куліси ABD в положенні механізму, коли кривошип складає з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$, якщо $O_1M = 0,1\text{ м}$ (рис. 1.20.)

Відповідь: $V_e = 0,1 \text{ м/с}$; $V_r = 0,1\sqrt{3} \text{ м/с}$;

$$a_e = 0,2\sqrt{3} \text{ м/с}^2; \quad a_r = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

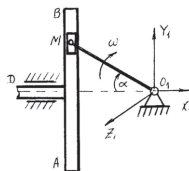


Рис. 1.20.

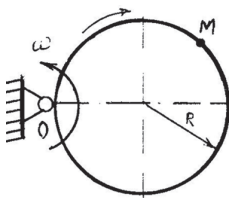


Рис. 1.21.

Задача 1.9.

Кільце радіусом R м обертається навколо точки O в площині рисунка проти ходу годинникової стрілки з постійною кутовою швидкістю $\omega = \pi$ рад/с. По кільцю рухається маленьке кільце M згідно рівнянню $S = \pi R t^2$ м, де $S = \text{дуга } OM$ (рис. 1.21). Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент часу $t_1 = 1$ с.

Відповідь: $V_a = 0$; $a_a = 2\pi R\sqrt{1+\pi^2}$ м/с².

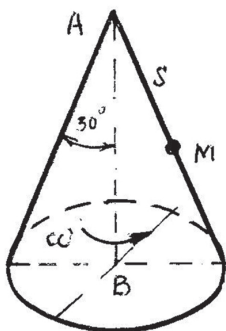


Рис. 1.22.

Задача 1.10.

Точка M , виходячи з вершини конуса A , рухається вздовж твірної по закону $AM = S = t^2$ (м). Конус обертається навколо своєї осі AB згідно рівнянню $\varphi = t + \frac{t^2}{2}$ (рис. 1.22). Знайти абсолютні швидкість і прискорення точки M через 2 с після початку руху.

Відповідь: $V_a = 7,21$ м/с; $a_a = 22,09$ м/с².

Задача 1.11.

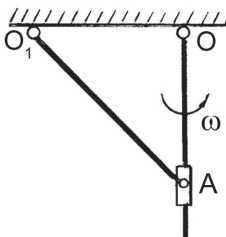


Рис. 1.23.

Повзун A в кулісному механізмі може переміщатись вздовж рухомої куліси OA . Для випадку, коли куліса займає вертикальне положення, знайти відносну швидкість V_r і відносне прискорення повзуна A , якщо куліса обертається з постійною кутовою швидкістю ω відносно осі, що проходить через точку O перпендикулярно площині рисунка. $O_1O = OA = r$ (рис. 1.23).

Відповідь: $V_r = \omega r$; швидкість $\vec{V}_r$ напрямлена по кулісі OA до точки O ; $a_r = \omega^2 r$. Прискорення $\vec{a}_r$ напрямлене по кулісі OA від точки O .

Задача 1.12.

Рівнобедрений прямокутний трикутник ABC зі стану спокою починає обертатись навколо катета AB рівноприскорено з кутовим прискоренням $\epsilon = 0,5 \text{ рад/с}^2$. По гіпотенузі трикутника рухається точка M від вершини B по закону $S = BM = 20 t \text{ см}$ (рис. 1.24). Знайти абсолютне прискорення точки M в момент часу $t = 2 \text{ с}$.

Відповідь: $a_a = 51 \text{ см/с}^2$.

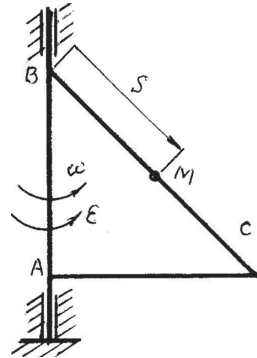


рис. 1.24

2. Кінематика складного руху твердого тіла

2.1. Переносний рух середовища, абсолютний і відносний рух твердого тіла

В розділі 1 ми розглядали складний рух точки. В цьому розділі будемо розглядати складний рух твердого тіла, яке не можна розглядати як матеріальну точку.

Рух твердого тіла називається складним, якщо воно одночасно бере участь в декількох рухах.

Звернемось до рис. 1.2, де замість рухомої точки M в нас рухоме тіло D . Нехай тіло T рухається відносно нерухомої системи координат $X_1 Y_1 Z_1$, а по тілу T рухається тіло D . Рух тіла D є складним. На тілі T виберемо систему координат XYZ , яка жорстко зв'язана з цим тілом. Система координат XYZ – рухома система координат.

Рух тіла D відносно рухомої системи координат XYZ називається *відносним рухом*, а рух тіла T (рухомої системи координат) відносно нерухомої системи координат є *переносним рухом*. Рух тіла D відносно нерухомої системи координат $X_1 Y_1 Z_1$ є *абсолютним рухом*.

2.2. Додавання двох миттєвих поступальних рухів тіла

Теорема 2.1. *Якщо тіло одночасно бере участь в декількох поступальних рухах, то результуючий рух тіла буде поступальним.*

Нехай тіло D рухається поступально зі швидкістю $\vec{V}_r$ відносно системи координат XYZ (тіла T), а тіло T в свою чергу рухається поступально зі швидкістю $\vec{V}_e$ відносно нерухомої системи координат $X_1Y_1Z_1$. Знайдемо абсолютну швидкість точок тіла.

По теоремі складання швидкостей швидкість довільної точки тіла в кожний момент часу дорівнює геометричній сумі швидкостей $\vec{V}_r$ і $\vec{V}_e$. В нашому випадку відносний і переносний рухи є поступальними, швидкості всіх точок тіла в відносному русі визначаються вектором $\vec{V}_r$, а в переносному русі – вектором $\vec{V}_e$, тому абсолютні швидкості всіх точок тіла будуть рівні між собою і виражені рівністю

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \quad (2.1)$$

Отже, результуючий рух буде поступальним.

2.3. Додавання двох миттєвих обертань навколо осей, що перетинаються

Теорема 2.2. *Якщо тіло одночасно бере участь в двох обертаннях навколо осей, що перетинаються то результуючий (абсолютний) рух тіла в даний момент часу є обертальним рухом навколо осі, яка проходить через точку перетину осей відносного і переносного обертань. Миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}_a$ складного руху тіла дорівнює векторній сумі миттєвих кутових швидкостей відносного $\vec{\omega}_r$ і переносного $\vec{\omega}_e$ обертань:*

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e. \quad (2.2)$$

Нехай колесо D обертається навколо осі OA , а вісь OA обертається навколо осі OB . Осі OA і OB перетинаються в точці O (рис. 2.1). Обертальний рух колеса D відносно осі OA є відносним рухом з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_r$, а обертальний рух осі OA відносно осі OB – переносним рухом з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$. Знайдемо абсолютну швидкість $\vec{\omega}_a$ колеса D . Спочатку знайдемо положення миттєвої осі абсолютного обертання тіла D . Миттєва вісь обертання – це лінія, лінійні швидкості точок якої в даний момент часу дорівнюють нулю. Одна точка цієї лінії вже відома. Це точка O . Знайдемо ще одну точку.

Проведемо дві площини Π і Π_1 . Через вектори $\vec{\omega}_r$ і $\vec{\omega}_e$ проведемо площину Π , а площину $\Pi_1 \perp \Pi$. Побудуємо паралелограм на векторах $\vec{\omega}_r$ і $\vec{\omega}_e$, і проведемо діагональ OC (рис. 2.2). Знайдемо абсолютну швидкість $\vec{V}_C^a$ точки C :

$$\vec{V}_C^a = \vec{V}_C^r + \vec{V}_C^e,$$

(2.3)

де $\vec{V}_C^r$ і $\vec{V}_C^e$ – відповідно відносна і переносна швидкості точки C .

$$V_C^r = \omega_r \cdot h_r = S_{OACB}, \quad (2.4)$$

де h_r – радіус обертання точки C в її відносному русі, S_{OACB} – площа паралелограма $OACB$. Швидкість $\vec{V}_C^r$ напрямлена перпендикулярно площині Π від нас.

$$\vec{V}_C^r \perp \Pi.$$

Переносна швидкість

$$\vec{V}_C^e = \omega_e \cdot h_e = S_{OACB}, \quad (2.4, a)$$

де h_e – радіус обертання точки C в її переносному русі. Швидкість $\vec{V}_C^e$ напрямлена перпендикулярно площині Π до нас.

$$\vec{V}_C^e \perp \Pi.$$

З виразів (2.4) і (2.4,а) видно, що переносна і відносна швидкості по модулю однакові, а напрями цих швидкостей протилежні.

Це означає, що абсолютна швидкість точки C $\vec{V}_C^a$, яка знаходиться з формули (2.3), дорівнює нулю:

$$\vec{V}_C^a = \vec{V}_C^r - \vec{V}_C^e = 0.$$

Якщо через точки O і C провести лінію, то ця лінія буде миттєвою віссю обертання (м. в. о.).

Миттєва вісь обертання проходить по діагоналі паралелограма, побудованого на векторах кутових швидкостей при відносному і переносному обертаннях твердого тіла.

Відносно м. в. о. тіло виконує обертальний рух в абсолютному русі. Знайдемо абсолютну кутову швидкість тіла $\vec{\omega}_a$. Візьмемо на колесі D довільну точку M . Абсолютна швидкість точки M :

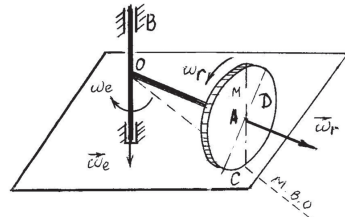


Рис.2.1

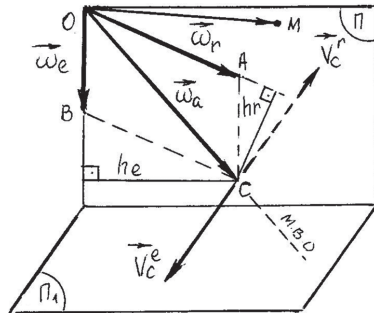


Рис.2.2

$$\vec{V}_M^a = \vec{V}_M^r + \vec{V}_M^e, \quad (2.5)$$

де $\vec{V}_M^r$ і $\vec{V}_M^e$ – відповідно відносна і переносна швидкості точки M .

Використовуючи формулу Ейлера, запишемо

$$\vec{V}_M^a = \vec{\omega}_a \times \overline{OM}, \quad \vec{V}_M^r = \vec{\omega}_r \times \overline{OM}, \quad \vec{V}_M^e = \vec{\omega}_e \times \overline{OM}. \quad (2.6)$$

Підставимо вирази (2.6) у вираз (2.5).

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e. \quad (2.7)$$

При обертанні твердого тіла навколо осей, які перетинаються, абсолютна кутова швидкість тіла дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей відносного і переносного обертань.

2.4. Додавання двох миттєвих обертань навколо паралельних осей

Нехай тверде тіло D обертається навколо осі AX , а сама вісь обертається навколо паралельній їй осі OX_1 (рис. 2.3). Тіло D бере участь у двох рухах. Обертальний рух тіла D навколо осі AX є відносним рухом з відносною кутовою швидкістю $\vec{\omega}_r$, а обертальний рух осі AX навколо осі OX_1 є переносним рухом з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$. Знайдемо абсолютну кутову швидкість $\vec{\omega}_a$ тіла D .

Розглянемо два випадки руху, а саме, коли обертання відбувається в одному напрямі і коли в протилежних напрямках.

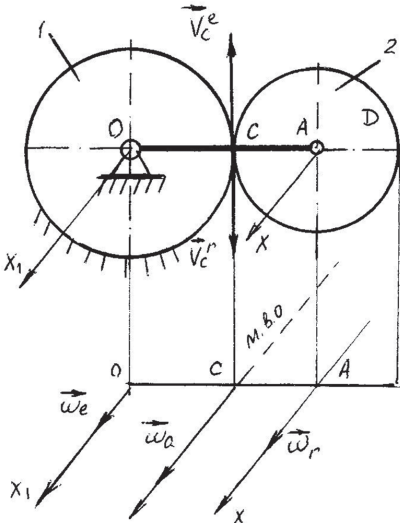


Рис. 2.3

2.4.1. Обертання в одному напрямі

Розглянемо систему двох коліс. Колесо 1 нерухоме, а колесо 2 обертається з відносною кутовою швидкістю $\vec{\omega}_r$ відносно осі AX , а вісь AX обертається в тому ж напрямі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$ навколо осі OX_1 . Знайдемо абсолютну кутову швидкість колеса 2 (рис. 2.3).

Розглянемо довільну точку C , яка знаходиться на осі OA . Її абсолютна швидкість

$$\vec{V}_C^a = \vec{V}_C^r + \vec{V}_C^e,$$

де $\vec{V}_C^r$ і $\vec{V}_C^e$ – відповідно відносна і переносна швидкості точки C .

$$V_C^r = \omega_r \cdot AC, \quad V_C^e = \omega_e \cdot OC.$$

Напрями цих швидкостей показані на рис. 2.3. Ці швидкості напрямлені по одній прямій в протилежні сторони. Тому абсолютна швидкість $\vec{V}_C^a$ буде

$$V_C^a = V_C^r - V_C^e = \omega_r \cdot AC - \omega_e \cdot OC.$$

Це означає, що на осі OA можна знайти таку точку C , абсолютна швидкість якої дорівнює нулю, т. б.

$$\omega_r \cdot AC - \omega_e \cdot OC = 0.$$

Звідси
$$\frac{OC}{AC} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (2.8)$$

Через точку C , положення якої знаходиться з виразу (2.8), проходить миттєва вісь абсолютного обертання колеса 2.

Миттєва вісь абсолютного обертання поділяє відстань між осями коліс 1 і 2 у відношенні, обернено пропорційному величинам миттєвих кутових швидкостей відносного і переносного обертань.

Вектор абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}_a$ напрямлений по м. в. о.

Знайдемо значення абсолютної кутової швидкості ω_a колеса 2.

Абсолютна швидкість точки A

$$\vec{V}_A^a = \vec{V}_A^r + \vec{V}_A^e.$$

Точка A лежить на осі обертання AX , тому $V_A^r = 0$. Маємо $V_A^a = V_A^e$,

$$V_A^a = \omega_a \cdot AC, \quad V_A^e = \omega_e \cdot OA,$$

де AC – відстань точки A до м. в. о.

$$\omega_a \cdot AC = \omega_e \cdot OA;$$

Звідси
$$\omega_a = \omega_e \cdot \frac{OA}{AC}; \quad OA = OC + AC.$$

Тоді
$$\omega_a = \omega_e \cdot \frac{OC + AC}{AC} = \omega_e \cdot \frac{OC}{AC} + \omega_e.$$

Використаємо вираз (2.8):

$$\omega_a = \omega_e \cdot \frac{\omega_r}{\omega_e} + \omega_e.$$

Остаточно

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e. \quad (2.9)$$

При обертанні твердого тіла навколо паралельних осей (обертання в одному напрямі) абсолютна миттєва кутова швидкість дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих кутових швидкостей відносного і переносного обертань.

Вектор абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}_a$ паралельний кутовим швидкостям $\vec{\omega}_r$ і $\vec{\omega}_e$ і напрямлений в ту ж сторону.

2.4.2. Обертання в протилежних напрямках

Для ілюстрації цього руху розглянемо внутрішнє кочення по нерухомій шестерні 1 другої шестерні, яку приводить в рух кривошип. Колесо 1 нерухоме, колесо 2 виконує складний рух (рис. 2.4).

Знайдемо абсолютну швидкість точки C , яка знаходиться на прямій, що проходить через точки O і A :

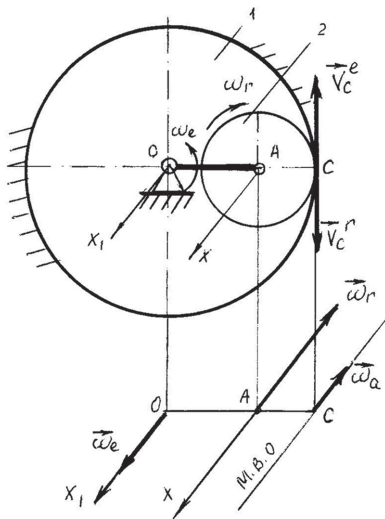


Рис. 2.4

$$\vec{V}_C^a = \vec{V}_C^r + \vec{V}_C^e;$$

Знайдемо відносну і переносну швидкість точки C :

$$V_C^r = \omega_r \cdot AC;$$

$$V_C^e = \omega_e \cdot OC.$$

Напрями цих швидкостей показані на рис. 2.4. Ці швидкості напрямлені по одній прямій в протилежні сторони, тому абсолютна швидкість точки C

$$V_C^a = V_C^r - V_C^e = \omega_r \cdot AC - \omega_e \cdot OC.$$

Міняючи положення точки C , можна знайти таке місце, де її абсолютна швидкість дорівнює нулю:

$$V_C^a = 0; \quad \omega_r \cdot AC - \omega_e \cdot OC = 0.$$

$$\text{Звідси} \quad \frac{OC}{AC} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (2.10)$$

Через точку C , положення якої знаходиться з виразу (2.10), проходить миттєва вісь обертання колеса 2.

Знайдемо значення абсолютної кутової швидкості ω_a колеса 2.

Абсолютна швидкість точки A

$$\vec{V}_A^a = \vec{V}_A^r + \vec{V}_A^e,$$

Але відносна швидкість точки A $V_A^r = 0$. Тому $V_A^a = V_A^e$.

$$V_A^a = \omega_a \cdot AC, \quad V_A^e = \omega_e \cdot OA,$$

де AC – відстань точки A до м. в. о.

$$\omega_a \cdot AC = \omega_e \cdot OA; \quad \omega_a = \omega_e \cdot \frac{OA}{AC}; \quad OA = OC - AC.$$

$$\text{Тоді} \quad \omega_a = \omega_e \cdot \frac{OC - AC}{AC} = \omega_e \cdot \frac{OC}{AC} - \omega_e.$$

Використовуючи вираз (2.10), маємо

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r - \vec{\omega}_e. \quad (2.11)$$

При складанні двох антипаралельних обертань, результирующим рухом тіла є обертання навколо миттєвої осі, паралельної даним осям AH і OX_1 . М. в. о. ділить відстань між осями зовнішнім чином на частини, обернено пропорційні кутовим швидкостям ω_r і ω_e .

Кутова швидкість ω_a результирующего руху дорівнює різниці кутових швидкостей і напрямлена в сторону більшої кутової швидкості.

Примітка. Як видно з рис. 2.3 і 2.4 миттєва вісь обертання проходить через точку контакту рухомого колеса 2 з нерухомим колесом 1.

2.4.3. Пара обертань

Розглянемо випадок коли два миттєві обертання рівні за величиною, але протилежні за напрямом і не відбуваються навколо однієї осі. Сукупність двох таких миттєвих обертань називається *парою миттєвих обертань*.

Для прикладу візьмемо рух педалі велосипеда (рис. 2.5). Рух педалі утворюється внаслідок протилежних обертань навколо паралельних осей: власної осі педалі, що проходить через точку A , і осі ведучої шестерні.

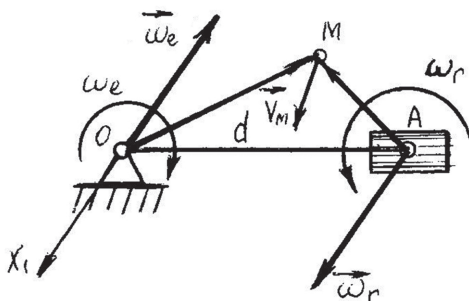


Рис. 2.5

Покажемо, що у випадку пари обертань ($\vec{\omega}_r = -\vec{\omega}_e$, а по величині $\omega_r = \omega_e$), результуючий рух тіла буде поступальним. Візьмемо в площині Π довільну точку M . Абсолютна швидкість точки M може бути представлена геометричною сумою двох швидкостей:

$$\vec{V}_M^a = \vec{V}_M^r + \vec{V}_M^e,$$

де, використовуючи формулу Ейлера, $\vec{V}_M^r = \vec{\omega}_r \times \overline{AM}$ – швидкість точки M при її обертанні навколо точки A , а $\vec{V}_M^e = \vec{\omega}_e \times \overline{OM}$ – швидкість точки M при її обертанні навколо точки O .

Тоді
$$\vec{V}_M^a = (\vec{\omega}_r \times \overline{AM}) + (\vec{\omega}_e \times \overline{OM}).$$

Враховуючи те, що $\vec{\omega}_r = -\vec{\omega}_e$, маємо

$$\vec{V}_M^a = (-\vec{\omega}_e \times \overline{AM}) + (\vec{\omega}_e \times \overline{OM}) = \vec{\omega}_e \times (\overline{OM} - \overline{AM}) = \vec{\omega}_e \times \overline{OA}.$$

Як видно з цього виразу, швидкість точки M не залежить від її положення в тілі.

$$\vec{V}_M^a = \vec{\omega}_e \times \overline{OA}. \quad (2.12)$$

З цієї формули видно: якщо тіло бере участь в парі обертання, то результуючий рух тіла буде поступальним. Дійсно, рух педалі велосипеда є поступальним рухом.

З формули (2.12) можна знайти величину швидкості поступального руху тіла:

$$V = \omega_e \cdot d,$$

де d – найкоротша відстань між осями обертання.

2.5. Вказівки до розв'язування задач на складний рух твердого тіла

В цьому розділі ми розв'яжемо задачі на обертання тіл навколо паралельних осей і осей, які перетинаються. В обох зазначених випадках будемо знаходити абсолютну, переносну і відносну кутові швидкості тіл, а також абсолютну, переносну і відносну швидкості і прискорення точок, які належать цим тілам.

По ходу розв'язування задач будуть надаватись методичні рекомендації і буде проводитись обговорення результатів розрахунків.

Задача 2.1.

ω_0	Кривошип 4 з'єднує осі O і A зубчастих коліс 1 і 2, які між собою знаходяться в зовнішньому зачепленні. Колесо 1 нерухоме, а кривошип обертається навколо осі, що проходить через точку O , з постійною кутовою швидкістю ω_0 . Колесо 2 в свою чергу знаходиться в внутрішньому зачепленні з колесом 3 (рис. 2.6). Знайти абсолютні кутові швидкості коліс 2 і 3, і кутову швидкість колеса 2 відносно осі A . В розрахунках прийняти: $r_1 = 6$ см, $r_2 = 12$ с.
$r_1 = 6$ см	
$r_2 = 12$ см	
$\omega_2 = ?$	
$\omega_3 = ?$	
$\omega_t = ?$	

Цю задачу розв'яжемо двома способами, один із яких розглядався раніше в модулі 4.

Перший спосіб. Кривошип 4, колесо 3 виконують чисто обертальний рух навколо осі, що проходить через точку O , а колесо 2 виконує плоский рух. Швидкість точки A

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = (r_1 + r_2)\omega_0.$$

Точка P – точка контакту колеса 2 з нерухомим колесом 1 є миттєвим центром швидкостей. Тоді абсолютна швидкість ω_2 колеса 2

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{(r_1 + r_2)\omega_0}{r_2} = 1,5\omega_0; \quad \omega_2 = 1,5\omega_0.$$

Знайдемо кутову швидкість ω_3 колеса 3.

Швидкість точки B , яка належить одночасно колесам 2 і 3,

$$V_B = 2V_A = 2(r_1 + r_2)\omega_0.$$

Центром обертання колеса 3 є точка O . Тому

$$\omega_3 = \frac{V_B}{OB} = \frac{2(r_1 + r_2)\omega_0}{r_1 + 2r_2} = 1,2\omega_0; \quad \omega_3 = 1,2\omega_0.$$

Колесо 2 має складний рух: воно обертається з відносною кутовою швидкістю ω_r навколо осі, що проходить через точку A , і, разом з віссю A , обер-

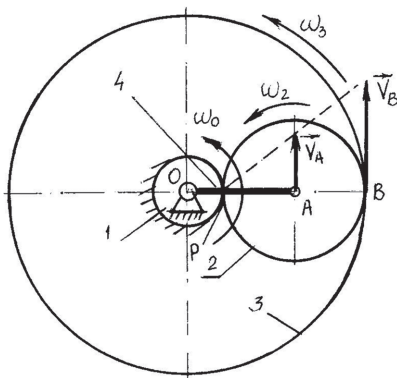


Рис. 2.6

тається з переносною кутовою швидкістю $\omega_e = \omega_0$ навколо осі, що проходить через точку O . Ці обертання проходять навколо паралельних осей в одному напрямі, тому

$$\omega_2 = \omega_r + \omega_e.$$

Звідси

$$\omega_r = \omega_2 - \omega_e = 1,5\omega_0 - \omega_0 = 0,5\omega_0; \quad \omega_r = 0,5\omega_0.$$

Другий спосіб. Скористаємось методом Вілліса. Суть цього методу детально розглядалась в модулі 4.

Складемо таблицю кутових швидкостей до і після миттєвої зупинки обертання кривошипа 4.

	кривошип	колесо 1	колесо 2	колесо 3
до зупинки	ω_0	0	ω_2	ω_3
після зупинки	0	$-\omega_0$	$\omega_2 - \omega_0$	$\omega_3 - \omega_0$

Ми отримали систему коліс з нерухомими осями обертання, причому колесо 1 обертається з кутовою швидкістю $-\omega_0$.

Складемо відношення між кутовими швидкостями коліс:

$$\frac{-\omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{r_2}{r_1} \quad (\text{а}); \quad \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = \frac{r_3}{r_2} \quad (\text{б}).$$

Перемножимо вираз (а) на вираз (б).

$$\frac{-\omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = -\frac{r_3}{r_1}.$$

Звідси

$$\omega_3 = \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right)\omega_0.$$

Враховуючи те, що $r_3 = r_1 + 2r_2 = 30$ см, маємо $\omega_3 = 1,2\omega_0$.

З виразу (а) знайдемо абсолютну кутову швидкість ω_2 колеса 2

$$\omega_2 = 1,5\omega_0.$$

Кривошип, колеса 2 і 3 обертаються в одну сторону.

Примітка 1: Якщо планетарний або диференціальний механізм складається з двох коліс і кривошипа (води́ла), то не обов'язково кожний раз складати таблицю, бо між абсолютними кутовими швидкостями ω_1 і ω_2

коліс 1 і 2, і кутовою швидкістю ω_0 кривошипа (води́ла) існує слідуюча залежність (формула Віллїса):

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}, \quad (2.13)$$

де r_1 і r_2 – радіуси колїс 1 і 2; z_1 і z_2 – числа зубцїв колїс 1 і 2.

Знак “+” відноситься до внутрішнього зачеплення колїс, при якому колеса обертаються в одному напрямї, а знак “–” – до зовнішнього зачеплення колїс, при якому колеса обертаються в протилежних напрямках.

Примїтка 2: В формулі Віллїса (2.13) ω_1 і ω_2 – це абсолютні кутовї швидкостї колїс 1 і 2, а $(\omega_1 - \omega_0)$ і $(\omega_2 - \omega_0)$ – це відносні кутовї швидкостї цих колїс.

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0; \quad \omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0. \quad (2.14)$$

Якщо механїзм складається з трьох і бїльше колїс, то формулу Віллїса потрібно використовувати окремо до кожної пари зачеплених мїж собою колїс.

В данїй задачї розглядався механїзм з трьома колесами і формула Віллїса використовувалась двїчі.

Задача 2.2.

$\omega_0;$ ω_1	Використовуючи умову задачї 2.1, знайти абсолютні кутовї швидкостї колїс 2 і 3, і відносну кутову швидкїсть ω_r колеса 2, якщо колесо 1 обертається з кутовою швидкїстю ω_1 , а кривошип OA з кутовою швидкїстю ω_0 . Напрями цих обертань співпадають (рис. 2.7).
$r_1 = 6$ см	
$r_2 = 12$ см	
$\omega_2 = ?$	
$\omega_3 = ?$	
$\omega_r = ?$	

Примїтка. Механїзм, який представлений на рис. 2.6, називається планетарним редуктором, а на рис. 2.7 – диференціальним редуктором.

Планетарним редуктором називається редуктор, у якого одне колесо 1 нерухоме, а останні колеса приводяться в рух кривошипом, вісь обертання якого співпадає з віссю нерухомого колеса; осї всіх останніх колїс знаходяться на кривошипї.

Диференціальним редуктором називається редуктор, у якого і колесо 1 обертається навколо тої осї, що і кривошип.

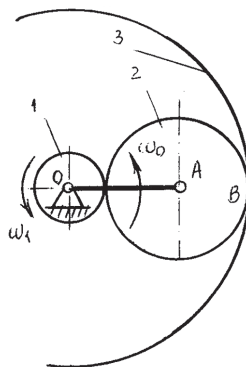


Рис. 2.7

Для розв'язання цієї задачі використаємо формулу Віллліса. Напишемо формулу Віллліса для пари коліс 1–2:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{r_2}{r_1} = -2. \quad (\text{а}).$$

Аналогічно для пари коліс 2–3:

$$\frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = +\frac{r_3}{r_2} = \frac{5}{2}. \quad (\text{б}).$$

З виразу (а)
$$\omega_2 = \frac{1}{2}(3\omega_0 - \omega_1).$$

З виразу (б)
$$\omega_3 = \frac{1}{5}(6\omega_0 - \omega_1).$$

Відносна кутова швидкість колеса 2.

$$\omega_r = \omega_2 - \omega_0 = \frac{3}{2}\omega_0 - \frac{1}{2}\omega_1 - \omega_0 = 0,5(\omega_0 - \omega_1).$$

$$\omega_r = 0,5(\omega_0 - \omega_1).$$

Задача 2.3.

ω_1	В планетарному редукторі ведучий вал I жорстко зв'язаний з колесом 1. Колеса 2 і 2' знаходяться в зачепленні з колесом 1. Вісі колес 2 і 2' насаджені на водило H, яке жорстко зв'язане з валом II. Колесо 3 нерухоме (рис. 2.8). Знайти кутову швидкість вала II, абсолютну і відносну кутові швидкості колеса 2, якщо кутова швидкість вала I дорівнює ω_1 . Радіуси коліс відповідно дорівнюють $r_1 = 20$ см, $r_2 = 20$ см, $r_3 = 60$ см.
$r_1 = 20$ см	
$r_2 = 20$ см	
$r_3 = 60$ см	
$\omega_{II} = ?$	
$\omega_2 = ?$	
$\omega_r = ?$	

Обертаючись, колесо 1 приводить в рух колеса, які рухаються по колу навколо нерухомого колеса 3. Осі A і A' коліс 2 і 2' рухаються по колу навколо вісі обертання I і приводять в обертальний рух водило H, яке обертається навколо вісі II з кутовою швидкістю ω_H , причому $\omega_H = \omega_{II}$. Колеса 2 і 2' виконують складний рух навколо паралельних осей.

Використаємо формулу Віллліса.

Для пари коліс 1 і 2, які знаходяться в зовнішньому зачепленні

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{r_2}{r_1}. \quad (1)$$

Для пари коліс 2 і 3, які знаходяться в внутрішньому зачепленні

$$\frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = + \frac{r_3}{r_2}. \quad (2)$$

Перемножимо рівності (1) і (2) і враховуючи, що $\omega_3 = 0$ (колесо нерухоме), маємо

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = - \frac{r_3}{r_1}.$$

Звідси $\omega_H = \frac{1}{4} \omega_1, \quad \omega_{II} = \omega_H = \frac{1}{4} \omega_1.$

З виразу (1) $\omega_2 = - \frac{1}{2} \omega_1.$

Відносна кутова швидкість колеса 2:

$$\omega_r = \omega_2 - \omega_H = -\frac{1}{2} \omega_1 - \frac{1}{4} \omega_1 = -\frac{3}{4} \omega_1; \quad \omega_r = -\frac{3}{4} \omega_1.$$

Проаналізуємо результати підрахунків.

Вал II обертається в тому ж напрямі, що і вал I, а це означає, що вантаж піднімається. Колесо 2 обертається в протилежному напрямі до колеса 1.

Задача 2.4.

$\omega_H; \quad \omega_4$	В диференціальному епіциклічному механізмі колесо 6 нерухоме, водило OA має кутову швидкість ω_H , а колесо 4 – кутову швидкість ω_4 і обертається в тому напрямі, що і водило (рис. 2.9). Знайти кутову швидкість колеса 5, якщо $r_1 = 4$ см, $r_2 = 12$ см, $r_3 = 4$ см, $r_4 = 8$ см.
$r_1 = 4$ см; $r_2 = 12$ см	
$r_3 = 4$ см; $r_4 = 8$ см	
$\omega_5 = ?$	

Використаємо формулу Віллеса для пари коліс 1, 6:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_6 - \omega_H} = - \frac{r_6}{r_1}. \quad (1)$$

Враховуючи те, що колесо 6 нерухоме ($\omega_6 = 0$) і $r_6 = r_2 + 2r_1 = 20$ см, з виразу (1) маємо:

$$\omega_1 = -4 \omega_H.$$

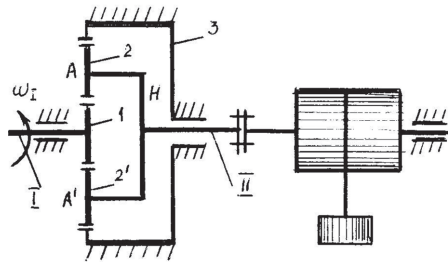


Рис. 2.8

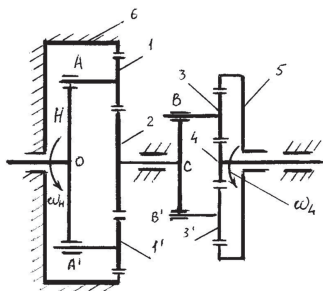


Рис. 2.9

Запишемо формулу Вілліса для пари коліс 1, 2:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{r_2}{r_1} = -3. \quad (2)$$

Звідси $\omega_2 = \frac{8}{3} \omega_H$.

Стержень BB' обертається з кутовою швидкістю ω_2 колеса 2 завдяки тому, що він жорстко зв'язаний з цим колесом. Для системи коліс 3, 4, 5 стержень BB' є водилом.

Запишемо формулу Вілліса для пари коліс 3, 4:

$$\frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_4 - \omega_2} = -\frac{r_4}{r_3} = -2. \quad (3)$$

З виразу (3) знаходимо

$$\omega_3 = 8\omega_H - 2\omega_4.$$

Розглянемо пару коліс 3 і 5.

$$\frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_5 - \omega_2} = +\frac{r_5}{r_3}.$$

Враховуючи те, що $r_5 = r_4 + 2r_3 = 16$ см, маємо $\omega_5 = \frac{8\omega_H - \omega_4}{2}.$

Проаналізуємо результат: 1) якщо $\omega_4 = 8\omega_H$, то колесо 5 буде нерухомим; 2) якщо $\omega_4 < 8\omega_H$, то колесо 5 буде мати той же напрям обертання, що і водило OA і колесо 4.

Задача 2.5.

$\omega_{кр} = 4$ рад/с
 $r_1 = 0,1$ м
 $r_2 = 0,2$ м
 $AB = 0,3$ м
 $\alpha = 120^\circ$

$\omega_2 = ?$
 $V_A = ?$
 $a_A = ?$

Стержень AB жорстко зв'язаний з колесом 2, яке приводиться в рух кривошипом OB . Кривошип OB обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega_{кр} = 4$ рад/с. Радіуси коліс 1 і 2 відповідно $r_1 = 0,1$ м, $r_2 = 0,2$ м, точка A знаходиться від центра B колеса 2 на відстані $AB = 30$ см (рис. 2.10). Знайти кутову швидкість колеса 2, лінійну швидкість і прискорення точки A в момент часу, коли між кривошипом і стержнем AB кут $\alpha = 120^\circ$.

Швидкість і прискорення точки A знайдемо двома способами.

Перший спосіб. Колесо 2 і жорстко зв'язаний з ним стержень AB здійснюють плоский рух. Враховуючи, що точка A належить тілу, яке виконує плос-

кий рух, знайдемо її швидкість і прискорення.

Другий спосіб. Точка A здійснює складний рух. Тому в цьому випадку можна використати теорему про складання швидкостей і теорему Коріоліса.

Перший спосіб. Знайдемо швидкість точки B

$$V_B = \omega_{кр} \cdot OB = \omega_{кр} (r_1 + r_2).$$

Для колеса 2 точка P є миттєвим центром швидкостей (м. ц. ш.). Кутова швидкість колеса 2

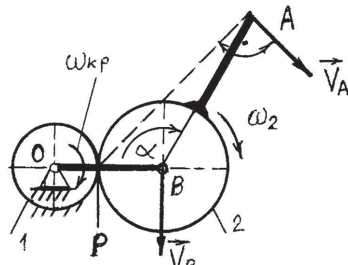


Рис. 2.10

$$\omega_2 = \frac{V_B}{BP} = \left(\frac{r_1 + r_2}{r_2} \right) \omega_{кр}. \quad (1)$$

Враховуючи числові дані, маємо $\omega_2 = 6$ рад/с.

Швидкість точки A перпендикулярна AP і чисельно знаходиться з формули:

$$V_A = \omega_2 \cdot AP,$$

де $AP = \sqrt{BP^2 + AB^2 - 2BP \cdot AB \cos 120^\circ} = 0,435$ (м).

Тоді $V_A = 2,61$ м/с.

Знайдемо прискорення точки A . Але для цього попередньо треба знайти прискорення точки B . Точка B рухається по колу, радіус якого OB .

Прискорення точки B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau,$$

де $\vec{a}_B^n$, $\vec{a}_B^\tau$ – відповідно нормальне і дотичне прискорення точки B

$$a_B^n = \omega_{кр}^2 \cdot OB = 4^2 \cdot 0,3 = 4,8 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення $\vec{a}_B^n$ напрямлене від точки B до точки O .

Дотичне прискорення $a_B^\tau = \varepsilon_{кр} \cdot OB$.

Враховуючи те, що кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю, то $\varepsilon_{кр} = 0$, тому $a_B^\tau = 0$.

Таким чином, нормальне прискорення $\vec{a}_B^n$ є повним прискоренням точки B :

$$a_B = a_B^n = 4,8 \text{ м/с}^2.$$

Візьмемо за полюс точку B . Тоді прискорення точки A

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^\tau.$$

Нормальне прискорення точки A при її обертанні навколо точки B

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

Але $\omega_{AB} = \omega_2$. Тоді, враховуючи числові дані, маємо

$$a_{AB}^n = 10,8 \text{ м/с}^2.$$

Вектор прискорення $\vec{a}_{AB}^n$ напрямлений від точки A до точки B (рис. 2.11)

Дотичне прискорення точки A при її обертанні навколо точки B

$$a_{AB}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Але $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 0$, бо $\omega_2 = \text{const}$ (див. формулу 1).

Таким чином, прискорення точки A

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^n. \quad (2)$$

Знайдемо модуль і напрям прискорення точки A .

Спроектуємо вираз (2) на координатні осі (рис. 2.11):

$$a_{Ax} = a_B + a_{AB}^n \sin 30^\circ = 4,8 + 10,8 \cdot 0,5 = 10,2 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{Ay} = a_{AB}^n \cos 30^\circ = 10,8 \cdot 0,866 = 9,35 \text{ м/с}^2.$$

Модуль прискорення точки A і його напрям знайдемо з формул:

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = 13,8 \text{ м/с}^2; \quad a_A = 13,8 \text{ м/с}^2.$$

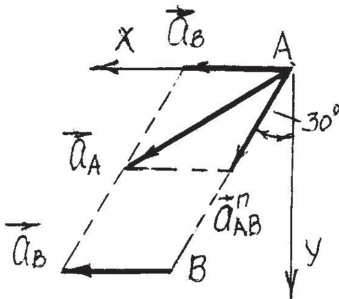


Рис. 2.11

$$\cos \gamma = \frac{a_{Ax}}{a_A} = \frac{10,2}{13,8} = 0,737; \quad \gamma = 42,5^\circ.$$

Другий спосіб. Колесо 2 здійснює складний рух. Обертальний рух колеса разом з кривошипом OB навколо центра O є переносним рухом з постійною кутовою швидкістю $\omega_e = \omega_{кр}$. Обертальний рух колеса 2 навколо центра B є відносним рухом з невідомою відносною кутовою швидкістю ω_r . Обертан-

ня проходить навколо паралельних осей в одну сторону.

Абсолютна кутова швидкість колеса 2

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r. \quad (3)$$

Абсолютна кутова швидкість колеса 2 знайдена за допомогою м. ц. ш. (див. формулу 1)

$$\omega_a = \omega_2 = 6 \text{ рад/с.}$$

З виразу (3) відносна кутова швидкість колеса 2

$$\omega_r = \omega_a - \omega_e = 6 - 4 = 2 \text{ рад/с}; \quad \omega_r = 2 \text{ рад/с.}$$

Знаючи переносну і відносну кутові швидкості, можемо знайти абсолютну швидкість точки A:

$$\vec{V}_A^a = \vec{V}_A^e + \vec{V}_A^r, \quad (4)$$

де $\vec{V}_A^e$ і $\vec{V}_A^r$ – відповідно переносна і відносна швидкості точки A.

Переносна швидкість

$$V_A^e = \omega_e \cdot OA,$$

де

$$OA = \sqrt{OB^2 + AB^2 - 2OB \cdot AB \cos 120^\circ} = 0,52 \text{ м};$$

Тоді

$$V_A^e = 4 \cdot 0,52 = 2,08 \text{ м/с};$$

Переносна швидкість напрямлена перпендикулярно OA (рис. 2.12).

Відносна швидкість перпендикулярна AB і чисельно знаходиться з формули

$$V_A^r = \omega_r \cdot AB = 2 \cdot 0,3 = 0,6 \text{ м/с};$$

$$V_A^r = 0,6 \text{ м/с}.$$

Знайдемо модуль і напрям абсолютної швидкості точки A. Для цього спроектуємо вираз (4) на координатні осі.

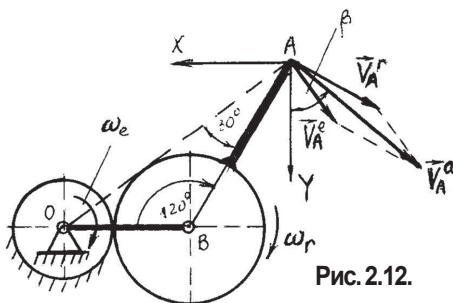


Рис. 2.12.

$$V_{Ax}^a = -V_A^e \cos 60^\circ - V_A^r \cos 30^\circ = -1,56 \text{ м/с}.$$

$$V_{Ay}^a = V_A^e \sin 60^\circ + V_A^r \sin 30^\circ = 2,1 \text{ м/с}.$$

Модуль абсолютної швидкості точки A і її напрям знайдемо з формул

$$V_A^a = \sqrt{(V_{Ax}^a)^2 + (V_{Ay}^a)^2} = 2,61 \text{ м/с}, V_A^a = 2,61 \text{ м/с}.$$

$$\cos \beta = \frac{V_{Ay}^a}{V_A^a} = \frac{2,1}{2,61} = 0,806; \quad \beta = 36,4^\circ.$$

Перейдемо до знаходження абсолютного прискорення точки A .
Згідно теореми Коріоліса

$$\vec{a}_A^a = \vec{a}_A^e + \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^c, \quad (5)$$

де $\vec{a}_A^e$, $\vec{a}_A^r$, $\vec{a}_A^c$ – відповідно переносне, відносне і коріолісове прискорення точки A .

Враховуючи те, що в переносному і відносному русі колесо 2 рухається з постійними кутовими швидкостями ω_e і ω_r , маємо:

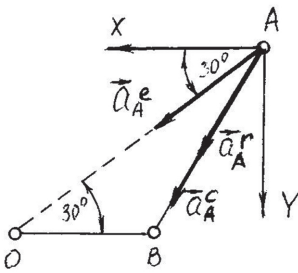


Рис. 2.13.

$$a_A^e = \omega_e^2 \cdot OA = 4^2 \cdot 0,52 = 8,32 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^r = \omega_r^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 0,3 = 1,2 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення $\vec{a}_A^e$ напрямлене по AO до центра O , а прискорення $\vec{a}_A^r$ – по AB до центра B (рис. 2.13).

Коріолісове прискорення точки A знаходиться за формулою:

$$\vec{a}_A^c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_A^r). \quad (6)$$

Модуль коріолісового прискорення

$$a_A^c = 2\omega_e \cdot V_A^r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_A^r). \quad (7)$$

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ перпендикулярний площині рисунка і напрямлений від нас, а вектор відносної швидкості $\vec{V}_A^r$ лежить в площині рисунка, тому $\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_A^r$. Тоді вираз (7) можемо переписати

$$a_A^c = 2\omega_e \cdot V_A^r \sin 90^\circ = 2 \cdot 4 \cdot 0,6 = 4,8 \text{ м/с}^2; \quad a_A^c = 4,8 \text{ м/с}^2.$$

Згідно правила векторного добутку (6), вектор коріолісового прискорення напрямлений по AB до центра B (рис. 2.13).

Спроектуємо вираз (5) на координатні осі:

$$a_{Ax}^a = a_A^e \cos 30^\circ + a_A^r \cos 60^\circ + a_A^c \cos 60^\circ = 10,2 \text{ м/с}^2; \text{ и}$$

$$a_{A_r}^a = a_A^e \sin 30^\circ + a_A^r \sin 60^\circ + a_A^c \sin 60^\circ = 9,3 \text{ м/с}^2.$$

Модуль і напрям прискорення точки A обчислюють за формулою:

$$a_A^a = \sqrt{a_{A_x}^2 + a_{A_y}^2} = 13,8 \text{ м/с}^2; \quad a_A^a = 13,8 \text{ м/с}^2.$$

$$\cos(\vec{a}_A^a, \vec{i}) = \frac{a_{A_x}^a}{a_A^a} = \frac{10,2}{13,8} = 0,739; \quad \gamma = 42,5^\circ.$$

Примітка. Цю задачу ми розв'язали двома способами. Перший спосіб в даному випадку швидше приводить до цілі, ніж другий. Але другий спосіб є загальним способом і його можна використовувати там, де перший спосіб зовсім не придатний. Це наочно буде показано в задачі 2.7.

Задача 2.6.

$$\omega_l = \omega_e = 3 \text{ рад/с}$$

$$\omega_2 = \omega_r = 4 \text{ рад/с}$$

$$\omega_\alpha = ? \quad \varepsilon_\alpha = ?$$

Диск обертається навколо вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю $\omega_1 = 3 \text{ рад/с}$ і навколо горизонтальної осі з постійною кутовою швидкістю $\omega_2 = 4 \text{ рад/с}$ (рис. 2.14). Знайти абсолютну кутову швидкість

і абсолютне кутове прискорення диска.

Диск одночасно обертається навколо двох осей, які перетинаються в точці O .

Обертання диска відносно осі OY є відносним рухом з відносною кутовою швидкістю $\omega_2 = \omega_r$. Вектор відносної кутової швидкості напрямлений по осі OY .

Обертання диска відносно осі OZ є переносним рухом з переносною кутовою швидкістю $\omega_1 = \omega_e$. Вектор переносної кутової швидкості напрямлений по осі OZ . Напрями цих швидкостей показані на рис. 2.14.

Вектор абсолютної кутової швидкості напрямлений по діагоналі паралелограма, побудованого на векторах кутових швидкостей $\vec{\omega}_r$ і $\vec{\omega}_e$:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e.$$

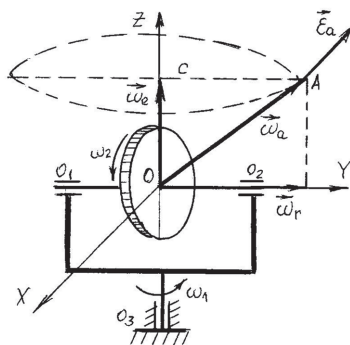


Рис. 2.14.

Так як $\vec{\omega}_r \perp \vec{\omega}_e$, то $\omega_a = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2} = 5 \text{ рад/с}$;

Як і всякий вектор, вектор абсолютної кутової швидкості характеризується величиною (модулем) і напрямом. Модуль абсолютної кутової швидкості є величиною постійною, бо постійними є модулі кутових швидкостей ω_r і ω_e . Але напрям абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}_a$ змінюється разом з обертанням диска навколо осі OZ , т. б. вектор $\vec{\omega}_a$ обертається навколо осі OZ . Точка A (кінець вектора $\vec{\omega}_a$) рухається по колу в площині, перпендикулярній осі OZ , з швидкістю

$$V_A = \omega_e \cdot \omega_r, \quad (2.15)$$

де ω_e – кутова швидкість, з якою обертається вектор $\vec{\omega}_a$;
 $\omega_r = AC$ – радіус обертання точки A .

З другої сторони, коло, яке описує точка A , є годографом радіус-вектора $\vec{\omega}_a$, а швидкість кінця вектора $\vec{\omega}_a$ є кутовим прискоренням:

$$\vec{\varepsilon}_a = \frac{d \vec{\omega}_a}{dt}, \quad (2.16)$$

Модуль кутового прискорення ε_a дорівнює швидкості V_A . З урахуванням виразу (2.15), можна записати:

$$\varepsilon_a = \omega_e \cdot \omega_r. \quad (2.17)$$

Вираз (2.17) можна записати у вигляді векторного добутку, з якого можна знайти модуль і напрям абсолютного кутового прискорення:

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r. \quad (2.18)$$

Напрямок абсолютного прискорення $\vec{\varepsilon}_a$ знаходиться по правилу векторного добутку (див. рис. 2.14). Модуль вектора $\vec{\varepsilon}_a$ знаходиться за формулою:

$$\varepsilon_a = \omega_e \omega_r \sin(\hat{\vec{\omega}_e}, \vec{\omega}_r) \quad (2.19)$$

В нашому випадку $\vec{\omega}_r \perp \vec{\omega}_e$ і з виразу (2.19) ми отримаємо вираз (2.17).

Примітка. Формула (2.18) справедлива не тільки для перпендикулярних осей обертання, а і для осей, які перетинаються під довільним кутом α .

З формули (2.17) знаходимо модуль абсолютного кутового прискорення

$$\varepsilon_a = 3 \cdot 4 = 12 \text{ (рад/с}^2\text{)};$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_a$ напрямлений паралельно осі OX від нас.

Задача 2.7.

$$\varphi = 2\pi \text{ рад}$$

$$t = 4 \text{ с}$$

$$OC = 1 \text{ м}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\omega_e = ? \quad \omega_r = ?$$

$$\omega_a = ? \quad \varepsilon_a = ?$$

$$V_A = ? \quad V_B = ?$$

$$V_C = ? \quad a_A = ?$$

$$a_B = ? \quad a_C = ?$$

Для подрібнення мінеральних добрив використовуються диски, які котяться по горизонтальній площині (рис. 2.15). Власна вісь обертання OC диска робить один оберт за 4 с. $OC = 1 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$. Знайти переносну, відносну і абсолютну швидкості диска, абсолютне кутове прискорення ε_a , а також швидкості і прискорення точок A , B і C диска, які розміщені на одній вертикалі.

Диск бере участь в двох обертаннях: навколо власної осі OC з відносною кутовою швидкістю $\vec{\omega}_r$ і навколо вертикальної осі O_1O_2 з переносною кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$. Ці осі

обертання перетинаються в точці O і складають між собою прямий кут.

Згідно умови задачі можемо знайти переносну кутову швидкість ω_e :

$$\omega_e = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ (рад/с);}$$

Вектор переносної кутової швидкості направлений по осі обертання O_1O_2 вертикально вниз. Вектор відносної кутової швидкості $\vec{\omega}_r$ направлений по OC від точки O .

Точка A – це точка контакту диска з нерухомою горизонтальною площиною, тому швидкість точки A дорівнює нулю.

$$V_A = 0.$$

Швидкості точок O і A дорівнюють нулю. Це означає, що миттєва вісь обертання (м. в. о.) диска проходить через точки O і A . Вектор абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}_a$ направлений по м. в. о. З другої сторони, вектор $\vec{\omega}_a$ є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах кутових швидкостей $\vec{\omega}_r$ і $\vec{\omega}_e$ (рис. 2.15).

Знайдемо абсолютну і відносну кутові швидкості. З рис. 2.15 видно, що

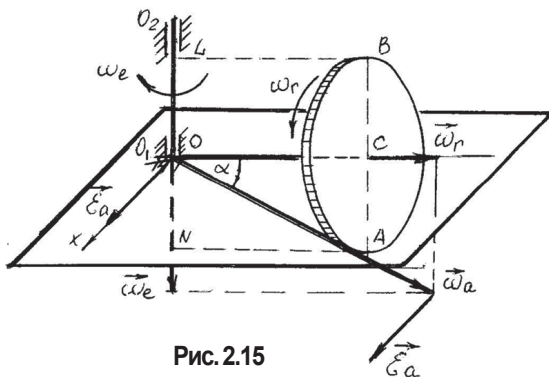


Рис. 2.15

$$\omega_a = \frac{\omega_e}{\sin \alpha} = \pi \text{ (рад/с}^2\text{);} \quad \omega_a = \pi \text{ рад/с}^2;$$

$$\omega_r = \omega_a \cos \alpha = \frac{\pi \sqrt{3}}{2} \text{ (рад/с}^2\text{);} \quad \omega_r = \frac{\pi \sqrt{3}}{2} \text{ рад/с}^2$$

Знайдемо абсолютне кутове прискорення $\vec{\mathcal{E}}_a$ диска .

Прийоми знаходження кутового прискорення розглядалися в задачі 2.6.

Використаємо формули (2.18) і (2.19), з яких знайдемо напрям і модуль абсолютного кутового прискорення:

$$\mathcal{E}_a = \omega_e \omega_r \sin 90^\circ = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{4} \text{ (рад/с}^2\text{);}$$

Вектор $\vec{\mathcal{E}}_a$ напрямлений паралельно осі OX до нас.

Знайдемо швидкості точок A, B, C диска, які лежать на одній вертикалі.

Як відмічалось раніше, швидкість точки A дорівнює нулю, тому що вона лежить на м. в. о.

Абсолютна швидкість точки C

$$\vec{V}_C^a = \vec{V}_C^r + \vec{V}_C^e,$$

де $\vec{V}_C^r$ і $\vec{V}_C^e$ – відповідно відносна і переносна швидкості точки C .

$$\text{Але} \quad V_C^r = 0. \quad \text{Тоді} \quad V_C^a = V_C^e = \omega_e \cdot OC = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} \text{ (м/с);}$$

$$V_C^a = \frac{\pi}{2} \text{ м/с.}$$

Знайдемо абсолютну швидкість точки B :

$$\vec{V}_B^a = \vec{V}_B^r + \vec{V}_B^e,$$

де $\vec{V}_B^r$ і $\vec{V}_B^e$ – відповідно відносна і переносна швидкості точки B .

$$V_B^r = \omega_r \cdot BC, \quad \text{де } BC = AC = OC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (м).}$$

$$\text{Тоді} \quad V_B^r = \frac{\pi \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ (м/с).}$$

Вектор швидкості $\vec{V}_B^r \perp BC$, паралельний осі CX .

Переносна швидкість точки B

$$V_B^e = \omega_e \cdot BL, \quad BL = OC = 1 \text{ м.}$$

$$\text{Маємо } V_B^e = \frac{\pi}{2} \text{ м/с.}$$

Переносна швидкість $\vec{V}_B^e$, як і швидкість $\vec{V}_B^r$, напрямлена паралельно осі CX до нас (рис. 2. 16). Швидкості $\vec{V}_B^r$ і $\vec{V}_B^e$ напрямлені по одній прямій в одну сторону, тому абсолютна швидкість точки B буде:

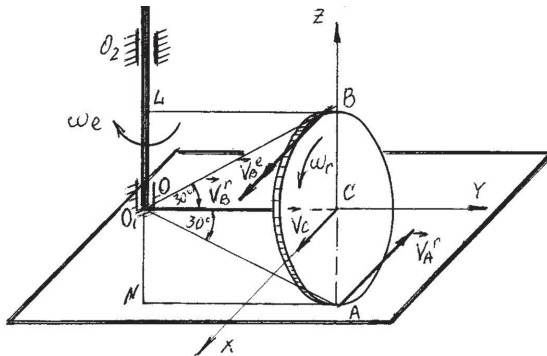


Рис. 2.16

$$V_B^a = V_B^r + V_B^e = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ (м/с);}$$

Знайдемо абсолютні прискорення точок C , A , B диска. Для цього використаємо теорему Коріоліса.

Точка C приймає участь тільки в переносному русі. Тому абсолютне прискорення точки C буде:

$$\vec{a}_C^a = \vec{a}_{C_e}^n + \vec{a}_{C_e}^t + \vec{a}_C^c, \quad (1)$$

де $\vec{a}_{C_e}^n$ і $\vec{a}_{C_e}^t$ – відповідно нормальне і дотичне переносне прискорення точки C ; $\vec{a}_C^c$ – коріолісове прискорення точки C .

$$a_{C_e}^n = \omega_e^2 \cdot OC = \frac{\pi^2}{4} \text{ рад}^2 / c^2; \quad a_{C_e}^r = \varepsilon_e \cdot OC = 0; \quad \text{тому що } \varepsilon_e = 0. \text{ Приско-}$$

рення $\vec{a}_{C_e}^n$ напрямлене по радіусу обертання від точки C до точки O (рис. 2.17).

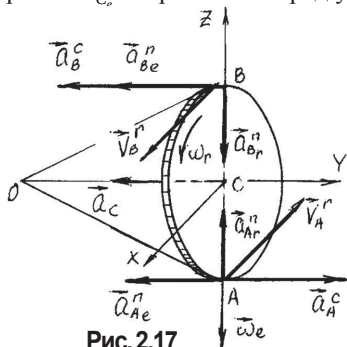


Рис. 2.17

Прискорення Коріоліса точки C

$$\vec{a}_C^C = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_C^r),$$

де $\vec{V}_C^r = 0$ – відносна швидкість точки C .

$$\text{Маємо } a_C^C = 0.$$

Таким чином, з виразу (1) маємо:

$$a_C^a = a_{C_e}^n = \frac{\pi^2}{4} \text{ м} / c^2.$$

Знайдемо прискорення точки A :

$$\vec{a}_A^a = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^r + \vec{a}_{A_e}^n + \vec{a}_{A_e}^r + \vec{a}_A^C. \quad (2)$$

Відносні прискорення точки A :

$a_{A_r}^n = \omega_r^2 \cdot AC$, $a_{A_r}^r = \varepsilon_r \cdot AC$, де $\varepsilon_r = 0$, тому що диск навколо осі OC обертається з постійною швидкістю.

Маємо

$$a_{A_r}^n = \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{4} (\text{м} / c^2).$$

Вектор $\vec{a}_{A_r}^n$ напрямлений по радіусу AC до точки C (рис. 2.17).

Переносне прискорення $a_{A_e}^r = \varepsilon_r \cdot AN = 0$; ($\varepsilon_e = 0$).

Переносне прискорення $a_{A_e}^n = \omega_e^2 \cdot AN$, де $AN = OC = BL = 1 \text{ м}$.

Маємо

$$a_{A_e}^n = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot 1 = \frac{\pi^2}{4} (\text{м} / c^2).$$

Переносне прискорення $\vec{a}_{A_e}^n$ напрямлене по радіусу обертання AN до точки N (рис 2.17).

Знайдемо коріолісове прискорення точки A :

$$\vec{a}_A^C = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_A^r), \quad (3)$$

де $\vec{V}_A^r$ – відносна швидкість точки A при обертанні диска навколо осі OC .

Чисельно відносні швидкості точок A і B однакові, але напрямки їх протилежні. Кутова швидкість $\vec{\omega}_e$ переносного руху диска перпендикулярна відносній швидкості точки A :

$$\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_A^r.$$

Обчислимо коріолісове прискорення, точки A :

$$a_A^C = 2\omega_e \cdot V_A^r \sin 90^\circ = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}; \quad a_A^C = \frac{\pi^2}{2} (\text{м/с}^2).$$

З векторного добутку (3) знаходимо напрям коріолісового прискорення точки A . Це прискорення напрямлене паралельно осі CY .

Знайдемо модуль і напрям абсолютного прискорення точки A . Для цього вираз (2) спроектуємо на координатні осі:

$$a_{A_y}^a = -a_{A_y}^n + a_A^C = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$a_{A_z}^a = a_{A_z}^n = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Повне абсолютне прискорення точки A

$$a_A^a = \sqrt{a_{A_y}^2 + a_{A_z}^2} = \frac{\pi^2}{2} (\text{м/с}^2); \quad a_A^a = \frac{\pi^2}{2} \text{ м/с}^2.$$

Напрямок абсолютного прискорення точки A знайдемо за напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{a}_A^a, \vec{j}) = \frac{a_{A_y}^a}{a_A^a} = 0,5; \quad \cos(\vec{a}_A^a, \vec{k}) = \frac{a_{A_z}^a}{a_A^a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

З обчислень видно, що абсолютне прискорення точки A перпендикулярне лінії OA .

$$\vec{a}_A^a \perp OA.$$

Знайдемо абсолютне прискорення точки B .

$$\vec{a}_B^a = \vec{a}_{B_r}^n + \vec{a}_{B_r}^\tau + \vec{a}_{B_e}^n + \vec{a}_{B_e}^\tau + \vec{a}_B^C. \quad (4)$$

Як для точки A , так і для точки B $\vec{a}_{B_r}^\tau = 0$, $\vec{a}_{B_e}^\tau = 0$.

Відносне нормальне прискорення точки B напрямлене по радіусу BC до точки C і чисельно знаходиться з формули:

$$a_{B_r}^n = \omega_r^2 \cdot BC = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{4} (m/c^2).$$

Коріолісове прискорення точки B знаходиться з формули:

$$\vec{a}_B^C = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_B^r). \quad (5)$$

З векторного добутку (5) встановлюємо, що коріолісове прискорення точки B напрямлене по лінії BL до точки L .

Модуль коріолісового прискорення:

$$a_B^C = 2\omega_e \cdot V_B^r \sin 90^\circ = \frac{\pi^2}{2} (m/c^2).$$

Спроекуємо вираз (4) на координатні осі:

$$a_{B_y}^a = -a_{B_e}^n - a_B^C = -\frac{3\pi^2}{4},$$

$$a_{B_z}^a = -a_{B_r}^n = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Абсолютне прискорення точки B буде:

$$a_B^a = \sqrt{(a_{B_y}^a)^2 + (a_{B_z}^a)^2} = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{2} (m/c^2); \quad a_B^a = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{2} m/c^2.$$

Напрямок абсолютного прискорення точки B знайдемо за напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{a}_B^a, \vec{j}) = \frac{a_{B_y}^a}{a_B^a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos(\vec{a}_B^a, \vec{k}) = \frac{a_{B_z}^a}{a_B^a} = -\frac{1}{2}.$$

З обчислень видно, що абсолютне прискорення точки B складає з віссю CY кут в 150° , а з віссю CZ – кут в 120° , т. б. це прискорення напрямлене від точки B до точки O по лінії BO .

2.6. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 2.8.

Кривошип 4 з'єднує осі O і A зубчастих коліс 1 і 2, які між собою знаходяться в зовнішньому зачепленні. Колесо 3 нерухоме, а кривошип обертається навколо осі, що проходить через точку O , з постійною кутовою швидкістю ω_0 . Колесо 2 в свою чергу знаходиться в внутрішньому зачепленні з колесом 3 (рис. 2. 18). Знайти абсолютні кутові швидкості коліс 1 і 2, і кутову швидкість ω_2 колеса 2 відносно осі A . В розрахунках прийняти: $r_1 = 6$ см, $r_2 = 12$ см.

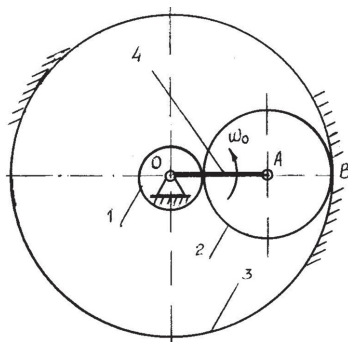


Рис. 2.18

Відповідь: $\omega_1 = 6 \omega_0$, $\omega_2 = -1,5 \omega_0$,
 $\omega_2 = -2,5 \omega_0$.

Знак мінус показує, що напрям обертання колеса 2 в абсолютному і відносному русі протилежний руху кривошипа OA .

Задача 2.9.

Шестерня 1 обертається з кутовою швидкістю ω_1 навколо осі, що проходить через точку O , на якій закріплена нерухома шестерня 4. На цій же осі O вільно насаджений кривошип OA , на пальці A якого закріплена вісь двох жорстко зв'язаних між собою шестерень 2 і 3, які знаходяться в зачепленні з шестернями 1 і 4 (рис. 2. 19). Знайти кутову швидкість ω_{OA} кривошипа, абсолютну, переносну і відносну кутові швидкості шестерень 2–3. В розрахунках прийняти $r_1 = 12$ см, $r_2 = 6$ см, $r_3 = 12$ см.

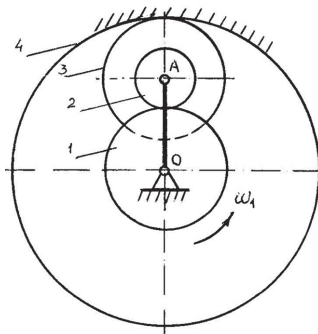


Рис. 2.19

Відповідь:

$\omega_{OA} = 4/9 \omega_1$; $\omega_2 = \omega_3 = -2/3 \omega_1$;
 $\omega_e = \omega_{OA} = 4/9 \omega_1$; $\omega_r = -10/9 \omega_1$.

Знак мінус показує, що напрям обертання шестерень 2–3 протилежний напрямку обертання шестерні 1.

Задача 2.10.

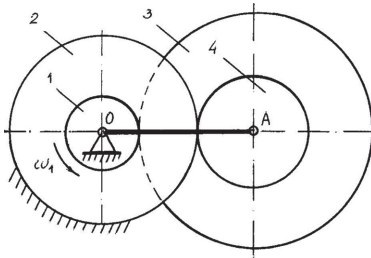


Рис. 2.20

Шестерня 1 обертається з кутовою швидкістю ω_1 навколо осі O нерухомої шестерні 2. На тій же осі вільно насаджений кривошип OA , на кінці A якого закріплена вісь двох шестерень 3 і 4 жорстко зв'язаних між собою (рис. 2.20). Знайти кутову швидкість кривошипа і абсолютну, переносну і відносну кутові швидкості шестерень 3–4, якщо шестерні 1–3 і 2–4 знаходяться в зачепленні. Радіуси коліс відповідно рівні: $r_1 = 4$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 12$ см, $r_4 = 6$ см.

Відповідь: $\omega_{OA} = 0,25\omega_1$; $\omega_3 = \omega_4 = 2/3\omega_1$; $\omega_e = \omega_{OA}$; $\omega_r = 5/12\omega_1$.

Задача 2.11.

В механізмі задачі 2.10 прийняти, що шестерня 1 – нерухома, а шестерня 2 обертається навколо осі O з кутовою швидкістю ω_2 . Знайти кутову швидкість кривошипа і абсолютну, переносну і відносну кутові швидкості шестерень 3–4 при тих же радіусах коліс.

Відповідь: $\omega_{OA} = 5/4\omega_2$; $\omega_3 = \omega_4 = 5/3\omega_2$; $\omega_e = \omega_{OA}$; $\omega_r = 5/12\omega_2$.

Задача 2.12.

В механізмі задачі 2.10 шестерні 1 і 2 мають загальну вісь O , але між собою не зв'язані і отримують обертання від різних двигунів в одному напрямі з кутовими швидкостями $\omega_1 = 10$ рад/с і $\omega_2 = 5$ рад/с. Знайти кутову швидкість кривошипа і абсолютну, переносну і відносну кутові швидкості шестерень 3–4 при тих же радіусах коліс.

Відповідь: $\omega_3 = \omega_4 = 1,67$ рад/с; $\omega_{OA} = 3,75$ рад/с; $\omega_e = 3,75$ рад/с; $\omega_r = 2,08$ рад/с.

Задача 2.13.

В механізмі задачі 2.10 шестерні 1 і 2 мають загальну вісь O , але між собою не зв'язані і отримують обертання від різних двигунів в протилежних напрямках з кутовими швидкостями $\omega_1 = 10$ рад/с і $\omega_2 = 5$ рад/с. Знайти кутову швидкість кривошипа і абсолютну, переносну і відносну кутові швидкості шестерень 3–4 при тих же радіусах коліс.

Відповідь: $\omega_3 = \omega_4 = 15$ рад/с;
 $\omega_{04} = 8,75$ рад/с; $\omega_e = 8,75$ рад/с;
 $\omega_r = 6,25$ рад/с.

Задача 2.14.

Знайти передаточне число $i = \omega_I / \omega_{II}$ планетарного редуктора, кінематична схема якого показана на рис. 2.21. Радіуси відповідних коліс $r_1 = 16r$, $r_2 = 32r$, $r_3 = 16r$, $r_4 = 64r$.

Відповідь: $i = 9$.

Задача 2.15.

Знайти передаточне число $i = \omega_I / \omega_{II}$ планетарного редуктора, кінематична схема якого показана на рис. 2.22. Радіуси відповідних коліс $r_1 = 140r$, $r_2 = 28r$, $r_3 = 24r$, $r_4 = 136r$.

Відповідь: $i = 8,5$.

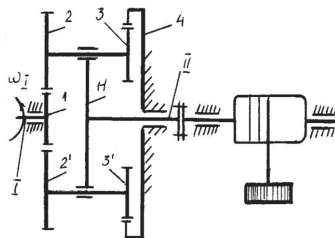


Рис. 2.21

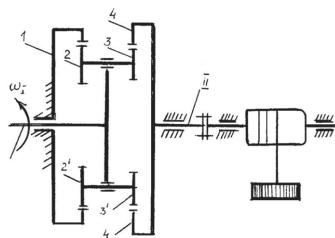


Рис. 2.22

Задача 2.16.

Механізм складається з зубчастих коліс 1 і 2, 2' і 3 і водила H (рис. 2.23). Знайти кутову швидкість ω_H водила в залежності від кутових швидкостей ω_1 і ω_3 коліс 1 і 3, якщо радіуси коліс $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см, $r'_2 = 5$ см, $r_3 = 25$ см. Колеса 1 і 3 соосні, колеса 2 і 2' насаджені на спільну вісь.

Відповідь: $\omega_H = \frac{5\omega_3 - 2\omega_1}{3}$.

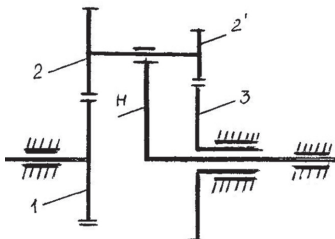


Рис. 2.23

Задача 2.17.

Механізм, який зображений на рис. 2.24, складається з конічних коліс 1, 2, 3 і водила H . Радіуси коліс 1 і 3 рівні між собою. Водило H і колесо 3 обертаються навколо однієї осі. Знайти кут повороту φ_H водила в залежності від кутів φ_1 і φ_3 повороту зубчастих коліс 1 і 3, якщо колесо 2 має з колесом 1 зовнішнє зачеплення, а з колесом 3 — внутрішнє.

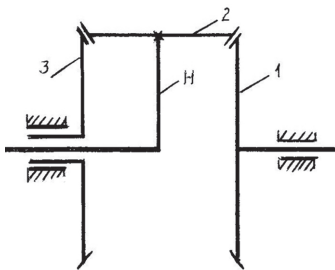


Рис. 2.24

Відповідь: $\varphi_n = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}$.

Задача 2.18.

Використовуючи умову задачі 2.5, знайти швидкість і прискорення точки A в момент часу, коли між кривошипом OB і стержнем AB кут $\alpha = 90^\circ$.

Відповідь: $V_A = 2,16$ м/с; $a_A = 11,8$ м/с².

Задача 2.19.

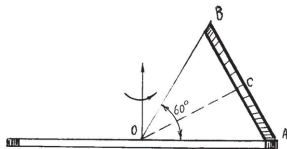


Рис. 2.25

Конічна зубчаста шестерня (бігунка) оббігає горизонтально розміщену нерухому опорну шестерню 150 раз за хвилину. Радіус опорної шестерні $OA = 0,2$ м, а кут при вершині конуса бігунки 60° (рис. 2.25). Знайти переносну, відносну і абсолютну кутові швидкості бігунки, а також швидкості і прискорення точок A , C , B бігунки.

Відповідь: $\omega_e = 5\pi$ рад/с; $\omega_z = 10\pi$ рад/с;

$\omega_a = 5\pi\sqrt{3}$ рад/с; $V_A = 0$; $V_C = 2,36$ м/с; $V_B = 4,71$ м/с;
 $a_C = 37$ м/с²; $a_A = 85,5$ м/с²; $a_B = 113$ м/с².

Задача 2.20.

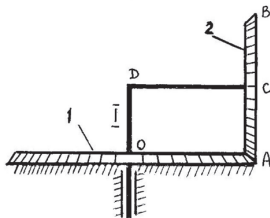


Рис. 2.26

Вал I, який обертається навколо вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю $\omega = 3$ рад/с, приводить в рух конічну шестерню радіуса $r_2 = 6$ см, яка знаходиться в зачепленні з нерухомою шестернею 1 радіуса $r_1 = 8$ см (рис. 2.26). Знайти швидкості і прискорення точок A , B , C вертикального діаметра шестерні 2.

Відповідь: $V_C = 24$ см/с; $V_B = 48$ см/с; $V_A = 0$.

$a_C = 72$ см/с²; $a_A = 120$ см/с²; $a_B = 236,4$ см/с².

3. Запитання для самоперевірки

1. Який рух точки називається складним?
2. Який рух точки називається абсолютним?
3. Який рух точки називається переносним?
4. Який рух точки називається відносним?
5. В чому полягає теорема про додавання швидкостей?
6. Як визначити відносну і переносну швидкості точки в складному русі?
7. Як визначити прискорення точки у тому випадку, коли переносний рух є поступальним?
8. Як визначити прискорення точки у тому випадку, коли переносний рух є обертальним?
9. В чому полягає теорема про прискорення точки у тому випадку, коли переносний рух є довірльним?
10. За якою формулою обчислюється прискорення Коріоліса?
11. Як визначити напрям прискорення Коріоліса?
12. В яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?
13. Який рух твердого тіла називається складним?
14. За якою формулою визначається абсолютна кутова швидкість тіла, якщо воно обертається навколо осей, що перетинаються?
15. Як обчислюється абсолютна кутова швидкість тіла, яке обертається навколо паралельних осей?
16. Що таке пара обертань?
17. В чому суть метода миттєвої зупинки (метод Віллліса)?

ЛІТЕРАТУРА

1. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1984. – Т.1. – 504 с.
2. Бондаренко А. А., Дубінін О.О., Переяславцев О. М. Теоретична механіка. Ч.1: Статика. Кінематика. – К.: Знання, 2004. – 599 с.
3. Березова О. А. и др. Теоретическая механика. Сборник задач. – К.: Вища школа, 1980. – 400 с.
4. Бражниченко Н. А. и др. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1974. – 520 с.
5. Бугасенко Г. О., Курс теоретичної механіки. – К.: “Радянська школа”, 1959. – 360 с.
6. Будник Ф. Г., Зингерман Ю. М., Селенский Е. И. Сборник задач по теоретической механике – М.: Высшая школа, 1987. – 176 с.
7. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1979. – Т.1. – 270 с.
8. Воронков И. М. Курс теоретической механики. – М.: ФМ., 1962. – 596 с.
9. Добронравов В. В., Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1983. – 575 с.
10. Кільчевський М.О., Курс теоретичної механіки. . – Том перший. . – К.: Вища школа. 1972. – 376 с.
11. Меццержский И. В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
12. Павловский М. А., Путията Т. В. Теоретическая механика. – К.: Вища школа, 1985. – 328 с.
13. Рустамов С. И., Турбин Б. И. Теоретическая механика. . – К.: Вища школа, 1992. – 495 с.
14. Савин Г. Н., Кильчевский Н. А., Путията Т. В. Курс теоретической механики. К.: Гос. Изд. Техн. Литературы УССР, 1957. – 558 с.
15. Сахарный Н. Ф. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1964. – 844 с.
16. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А. А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1985. – 366 с.
17. Сборник коротких задач по теоретической механике / Под ред. О. Э. Кепе. – М.: Высшая школа, 1989. – 366 с.
18. Старжинский В. М. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
19. Турбин Б. И., Рустамов С. И. Сборник задач по теоретической механике. – К.: Вища школа, 1978. – 157 с.
20. Файн А. М. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1978. – 187 с.
21. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Ч.1 – М.: Высшая школа, 1984. – 343 с.

Навчальний посібник

С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко, В. В. Іщенко

ПРАКТИКУМ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНИКИ

навчальний посібник у двох частинах

Частина I

Статика. Кінематика

Для студентів вищих навчальних закладів

Редактор *Л. В. Кузьмич*

Коректор *Ж. С. Швець*

Комп'ютерна верстка *А. М. Райфурак*

Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців,
виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 103 від 30.06.2000 р.

Підписано до друку 18.09.06. Гарнітура Times
Формат 60×84/16 Папір офсетний. Друк офсетний.
Ум. друк.арк. 22,32. Обл.-вид. арк. 24. Наклад 2000 прим.

ПП "Нова Книга"
21100, м. Вінниця, вул. Квятека, 20
тел. (0432) 52-34-82, 52-34-81
e-mail: newbook1@vinnitsa.com
www.novaknyha.com.ua