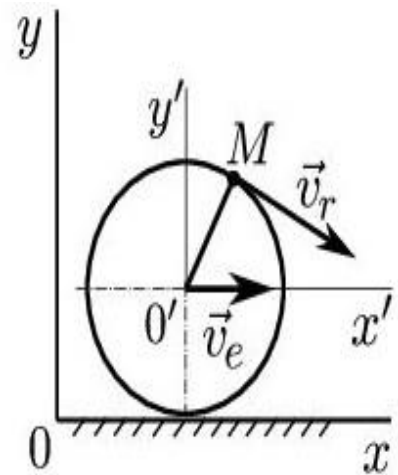
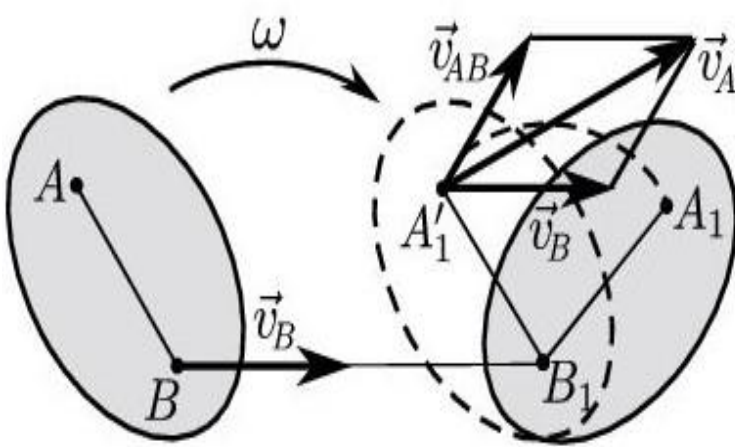


С.С. АВОТІН, М.Я. РОХМАНОВ

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА



Харків – 2019

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний аграрний університет
ім. В.В. Докучаєва

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Харків – 2019

УДК 531/534 (075.8)
А 18

Рекомендовано до видання вченою радою
ХНАУ ім. В.В. Докучаєва
(протокол № 13 від 22 серпня 2018 р.)

Автори: канд. фіз.-мат. наук, доцент С.С. Авотін
д-р фіз.-мат наук, професор М.Я. Рохманов

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, професор *А.І. Козарь* (ХНУРЕ);
канд. фіз.-мат. наук, доцент *Д.І. Масленніков*

Авотін С.С.

А18 Технічна механіка: навч. посіб. / С.С. Авотін, М.Я. Рохманов / Харків. нац.
аграр. ун-т. — Харків, 2019. — 98 с.

Посібник містить відомості за розділами технічної механіки: теоретична механіка і опір матеріалів. Складено згідно з навчальною програмою.

Призначено для здобувачів інженерних спеціальностей вищих аграрних навчальних закладів III і IV рівнів акредитації.

УДК 531/534(075.8)

© Авотін С.С., Рохманов М.Я., 2019
© Харківський національний аграрний
університет ім. В.В. Докучаєва, 2019

Навчальне видання

Авотін Станіслав Сергійович

Рохманов Микола Якович

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

За загальною редакцією
С.С. Авотіна

Редактор Л.І. Сібенкова
Коректор І.О. Бутильська
Комп'ютерний набір і верстка – С.С. Авотін

Підп. до друку 21.12.2018. Формат 60х84/16. Гарнітура Таймс. Друк офсетний.

Обсяг: 6,0 ум.-друк. арк.; 5,8 обл.- вид. арк. Тираж 300. Замовлення №

Виробник – редакційно-видавничий відділ Харківського національного аграрного університету ім. В.В. Докучаєва. 62483, Харківська обл., Харківський р-н, п/в «Докучаєвське-2», навчальне містечко, тел. 99-72-70.
E-mail: office@kнау.kharkov.ua

Виготовлювач – дільниця оперативного друку ХНАУ

Зміст

Вступ	5
1. Основні поняття та аксіоми статички	6
1.1. Сила, система сил	6
1.2. Рівновага абсолютно твердого тіла	7
1.3. Аксіоми статички та їх наслідки	8
1.4. Теорема про три непаралельні сили	10
2. В'язі та їх реакції	12
2.1. Невільне тверде тіло	12
2.2. Види в'язей та напрям їх реакцій	13
3. Система збіжних сил	16
3.1. Проекція сили на вісь і площину	16
3.2. Аналітичний спосіб задавання сили	17
3.3. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної	17
3.4. Умови рівноваги системи збіжних сил	18
3.5. Загальні умови розв'язання задач статички	19
4. Момент сили відносно точки і осі	20
4.1. Момент сили відносно точки	20
4.2. Момент сили відносно осі	22
4.3. Залежність між моментами відносно точки та відносно осі, яка проходить через цю точку	24
5. Пара сил	26
5.1. Пара сил. Момент пари сил	26
5.2. Властивості пар сил	27
6. Просторова система сил	29
6.1. Паралельне перенесення сил	29
6.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил	30
6.3. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил	30
6.4. Умови рівноваги довільної системи сил на площині	31
6.5. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил	32
7. Балкові системи	33
7.1. Балкові системи та їх види	33
7.2. Види навантажень балкових систем	33
7.3. Приклади розв'язання задач	38
8. Центр тяжіння	40
8.1. Центр тяжіння абсолютно твердого тіла	40
8.2. Центр тяжіння однорідних плоских тіл (фігур)	42
8.3. Приклад розв'язання задачі	43
9. Кінематика матеріальної точки	45

9.1. Кінематика поступального руху	45
9.2. Основні характеристики механічного руху	46
9.3. Повне прискорення під час криволінійного руху	47
9.4. Кінематика обертального руху	48
9.5. Складний рух точки і тіла	50
10. Поняття і аксіоми динаміки	52
10.1. Аксіоми динаміки	52
10.2. Поняття про тертя	53
10.3. Сили інерції	54
10.4. Принцип кінетостатики (Даламбера)	55
10.5. Робота і потужність. Коефіцієнт корисної дії (ККД)	55
11. Геометричні характеристики плоских перерізів	56
11.1. Статичний момент плоскої фігури (перерізу)	56
11.2. Осьові і полярні моменти інерції плоскої фігури	57
11.3. Моменти інерції прямокутного і колового перерізів	58
11.4. Моменти інерції плоских перерізів відносно зміщених осей	58
11. 5. Радіус та еліпс інерції плоских перерізів	59
12. Опір матеріалів	62
12.1. Механічні характеристики матеріалів	62
12.2. Допущення про властивості матеріалів	62
12.3. Дослідження механічних характеристик матеріалів	63
13. Деформування розтягом і стиском	69
13.1. Напруження та деформації при розтяганні й стисканні	69
13.2 Напруження в перерізах	70
13.3. Залежності між напруженнями і деформаціями	72
13.4. Умови міцності і жорсткості. Допустимі напруження	75
14. Деформування зсувом	78
14.1 Розрахунок на зріз при деформуванні зсувом	78
14.2. Закон Гука при чистому зсуві	79
14.3. Перевірка міцності при чистому зсуві	80
15. Деформування крученням	81
15.1. Напруження і деформації при крученні	81
15.2. Аналіз напруженого стану і руйнування при крученні	85
16. Деформування згином	86
16. 1. Напруження при плоскому згинанні прямого стрижня	86
16.2. Умови міцності при згинанні	90
Розрахунково-графічні роботи	92
Список рекомендованої літератури	98

Вступ

Технічна механіка в системі фахової підготовки інженерів напряму підготовки 205 «Лісове господарство» та 206 «Садово-паркове господарство» відповідно до діючої програми курсу технічної механіки відіграє важливу роль під час вивчення циклу професійно спрямованих дисциплін. Курс «Технічної механіки», на вивчення якого відводиться 120 годин, складається із трьох розділів «Теоретична механіка», «Опір матеріалів», «Деталі машин і механізмів».

Курс «Технічної механіки» знайомить майбутніх фахівців з: методами перетворення одних систем сил і пар сил в еквівалентні даним, та умовами і положеннями рівноваги довільних просторових (плоских) систем сил і пар сил; основними законами деформації твердого тіла та методами розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість. Вивчення «Технічної механіки» базується на знаннях, що отримані здобувачами під час вивчення курсів «Фізика», «Вища математика», «Нарисна геометрія та креслення».

У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувач **повинен знати**: основні гіпотези та припущення; види в'язей, що діють на невільне тверде тіло, та напрям їх реакцій; властивості пар сил та правила дій над ними; **вміти**: визначати моменти сил, що діють на невільне тверде тіло, відносно точок і осей; аналізувати умови рівноваги довільної системи сил; деформації, які розглядаються у курсі (розтягання, стискання, зсув, згинання, поперечне й поздовжнє кручення); визначати геометричні характеристики плоских перерізів брусів; виконувати розрахунки елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість при різних навантаженнях.

Технічна механіка – це частина механіки, в якій вивчається:

1) механічний рух матеріальних тіл (матеріальних точок, абсолютно твердих тіл) – «Теоретична механіка»; 2) розрахунок на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів і споруд –

«Опір матеріалів»; 3) теоретичні основи розрахунку та конструювання деталей і вузлів машин – «Деталі машин».

В основі технічної механіки лежить класична механіка. Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху, спокою та взаємодії тіл. Статика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчають методи перетворення одних систем сил у еквівалентні їм, а також умови рівноваги різних систем сил, які діють на абсолютно тверде тіло. До основних понять теоретичної механіки належать:

- 1) матеріальна точка – геометрична точка, яка має певну масу;
- 2) система матеріальних точок – сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємопов'язані між собою;

- 3) абсолютно тверде тіло – тіло, що складається з системи матеріальних точок, які неперервно заповнюють певну частину простору так, що відстань між будь-якими двома його точками залишається незмінною;

- 4) суцільне середовище – система матеріальних точок, що неперервно заповнюють частину простору, під час руху яких відстані між ними змінюються.

Ці поняття є ідеальними моделями матеріальних тіл з різним ступенем абстракції реальних фізичних властивостей.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКСІОМИ СТАТИКИ

1.1. Сила, система сил

Сила – міра взаємодії матеріальних тіл, у результаті якої тіла, що взаємодіють, надають одне одному прискорення або деформуються. Сила характеризується: 1) **напрямом**; 2) **числовим значенням** (модулем); 3) **точкою прикладання** – матеріальною частиною тіла, на яку діє сила.

Лінія дії сили – пряма, вздовж якої направлена сила. Силу можна задати через її проекції на осі прямокутної системи координат. Пряма, за якою направлений вектор сили, називається лінією однієї сили.

Сили поділяють на **зовнішні та внутрішні**. Зовнішні сили поділяють на **активні**, які викликають переміщення тіла, і **реактивні (реакції в'язей)**.

За характером дії на тіло зовнішні сили поділяють на **статичні і динамічні**. **Статичними** називають сили, при яких прискореннями тіла чи його частин можна знехтувати. **Динамічними** називають сили, при яких виникають значні прискорення тіла чи його частин і пов'язані з ними сили інерції.

За способом прикладання зовнішні сили поділяють на поверхневі і об'ємні. Всі навантаження, що існують в природі, розподілені за об'ємом чи по площі.

Система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ – сукупність сил, прикладених до тіла.

Система сил, лінії дії яких лежать в одній площині, називається **плоскою**.

Система сил, лінії дії яких лежать у різних площинах, називається **довільно розміщеною**, або **просторовою**.

Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається **збіжною**.

Еквівалентними називають такі дві системи сил, які, діючи окремо на вільне тверде тіло, однаково змінюють його кінематичні характеристики (швидкість, напрямок руху і т. ін.). $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$. Якщо система сил еквівалентна одній силі $\vec{R}$, тобто $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$, останню називають **рівнодійною цієї системи сил**. Не всяка система сил має рівнодійну.

1.2. Рівновага абсолютно твердого тіла

Абсолютно твердим тілом називається тіло, в якому відстань між двома його будь-якими точками зберігається постійною в процесі руху, тобто зберігає свою геометричну форму незмінною.

Зрівноважена система сил – система сил, яка **докладається до тіла, але не змінює його стану** $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$.

1.3. Аксиоми статички та їх наслідки

Аксиоми статички – **загальні закони**, яким підлягають сили, що діють на одне тіло або на взаємодіючі тіла.

Аксиома I: дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно врівноважуються тоді і лише тоді, коли вони рівні за величиною і діють уздовж однієї прямої у протилежних напрямках.

Аксиома II: прикладання і відкидання взаємно зрівноважених сил не порушує стану рівноваги. Наслідок – точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії її дії в яку завгодно точку тіла без порушення його рівноваги.

Аксиома III (про паралелограм сил): рівнодійна двох сил, що прикладені під деяким кутом, визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, які зображають дані сили (рис. 1.1).

Модуль рівнодійної визначається за теоремою косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha},$$

оскільки $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ (рис. 1.2).

Синуси кутів між рівнодійною і складовими силами можна знайти за теоремою синусів:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_1} = \frac{F_2}{\sin \alpha_2} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)}; \quad \frac{F_1}{\sin \alpha_1} = \frac{F_2}{\sin \alpha_2} = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

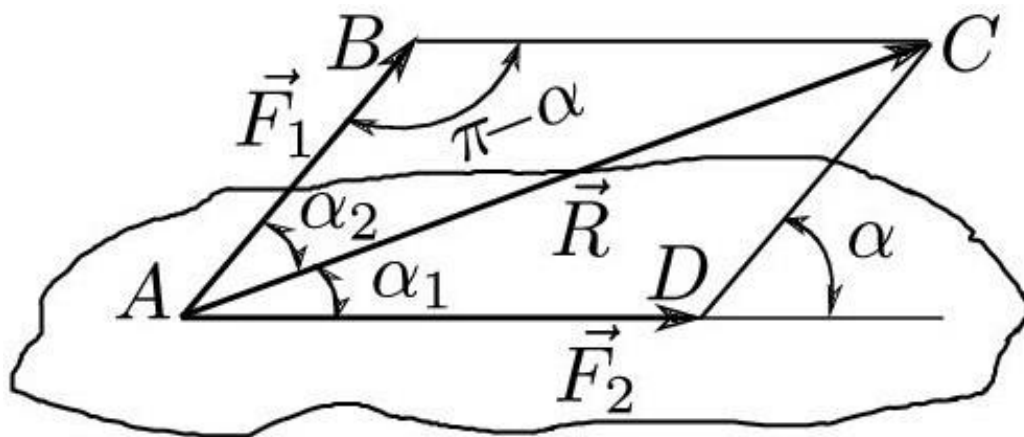


Рис. 1.1

З аксіоми паралелограма сил випливає правило **векторного додавання сил**, прикладених в одній точці твердого тіла (рис. 1.2). Для цього достатньо побудувати **силовий багатокутник**,

приєднуючи послідовно до першої сили $\vec{F}_1$ вектор, геометрично рівний вектору другої сили $\vec{F}_2$ і т. д. (рис. 1.3). Вектор, проведений з точки прикладання першої сили в останню вершину побудованого багатокутника, є рівнодієюю R , рівною $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$.

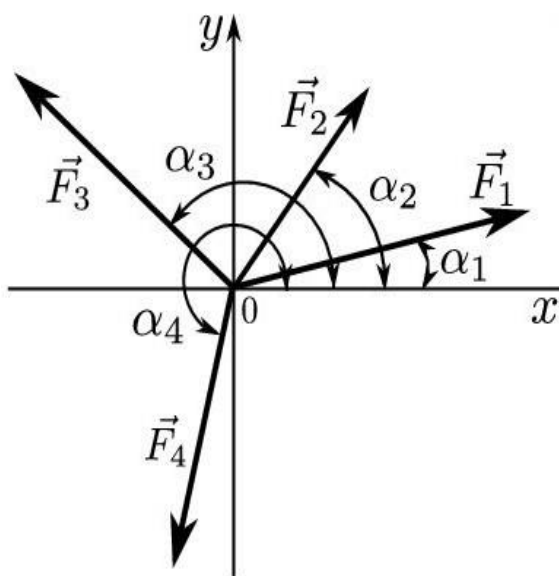


Рис. 1.2

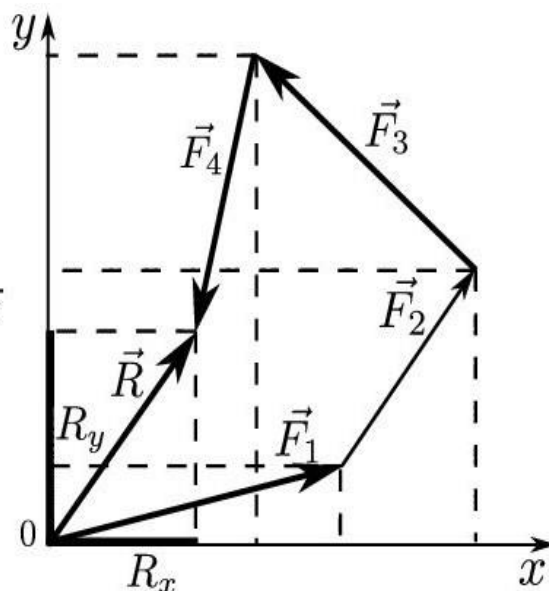


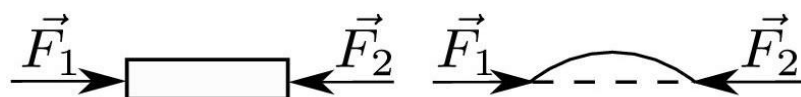
Рис. 1.3

Якщо остання вершина багатокутника сил збігається з першою, то багатокутник називається замкнутим. У цьому випадку рівнодійна дорівнює нулю: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$ а система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ є **зрівноваженою**.

Замкнутість силового багатокутника виражає умову рівноваги сил, прикладених в одній точці твердого тіла, в графічній формі. Правило паралелепіпеда сил: рівнодійна просторово системи трьох сил, які збігаються в одній точці, прикладена в тій самій точці і за модулем та напрямом дорівнює діагоналі паралелепіпеда, ребра якого відповідно паралельні заданим силам та рівні їм: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

Аксиома IV (про дію і протидію): сили, з якими два тіла взаємодіють між собою, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямом $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Дія і протидія прикладені до різних тіл, тому ці сили не утворюють систему взаємно зрівноважених сил.

Аксиома V (принцип отвердіння): *Рівновага тіла, яке знаходиться в рівновазі, не порушиться, коли, не змінюючи форми, розмірів, положення в просторі, воно перетвориться в абсолютно тверде тіло.* З принципу отвердіння випливає, що умови рівноваги, які є необхідними і достатніми для абсолютно твердого тіла, є необхідними, але недостатніми для відповідного тіла, що деформується. Наприклад, твердий брусок знаходиться в рівновазі під дією двох сил, рівних за модулем і направлених уздовж осі бруска одна до одної або одна від одної, в той час як нитка, що відповідає цьому бруску, знаходиться в рівновазі тільки під дією двох сил, рівних за модулем і направлених уздовж нитки одна від одної. Зрозуміло, що під дією сил, напрямлених одна до одної, нитка зімнеться.



Принцип отвердіння дозволяє перенести результати, викладені в статичі абсолютно твердого тіла, не тільки на дослідження рівноваги тіл, що деформуються (опір матеріалів), та цілих інженерних споруд (механіка будівництва), а й на рівновагу рідини (гідростатика).

1.4. Теорема про три непаралельні сили

Якщо під дією трьох сил тіло перебуває в рівновазі і лінії дії двох сил перетинаються, то всі сили лежать в одній площині і їх лінії дії перетинаються в одній точці.

Нехай задане тіло перебуває у рівновазі під дією трьох сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, прикладених у точках **A**, **B**, **C** (рис. 1.4), причому лінії дії сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ перетинаються в точці **O**. Згідно з наслідком аксіоми II сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ можна перенести в точку **O** (рис. 1.5), а за аксіомою III їх можна замінити однією рівнодієюною силою $\vec{R}$ (рис. 1.6).

Таким чином, ця система сил приведена до двох сил $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$. За умовами теореми тіло перебуває у рівновазі, отже, згідно з

аксіомою I, сили $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$ мають бути рівні за модулем, протилежно направлені і діяти вздовж однієї прямої.

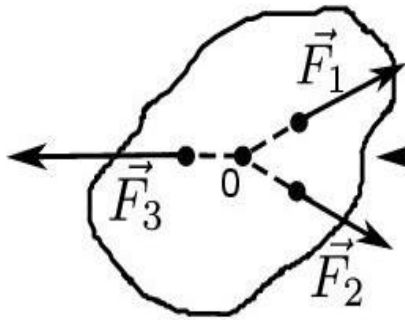


Рис. 1.4

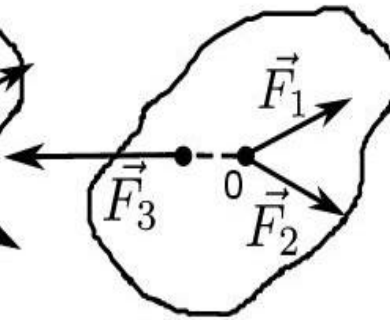


Рис. 1.5

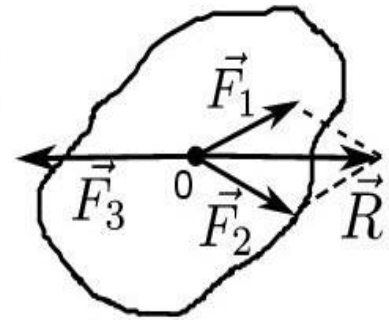


Рис. 1.6

Це означає, що лінія дії сили $\vec{F}_3$ повинна проходити через точку O . Ця теорема дозволяє знаходити напрям невідомої сили, якщо відомі напрями двох інших сил, під дією яких тіло перебуває в рівновазі. Наприклад, нехай балка AD вагою $\vec{P}$ (рис. 1.7) закріплена на нерухомому циліндричному шарнірі A та спирається в точці B на нерухому опору. Реакція $\vec{N}$ нерухомої опори направлена перпендикулярно до балки AD .

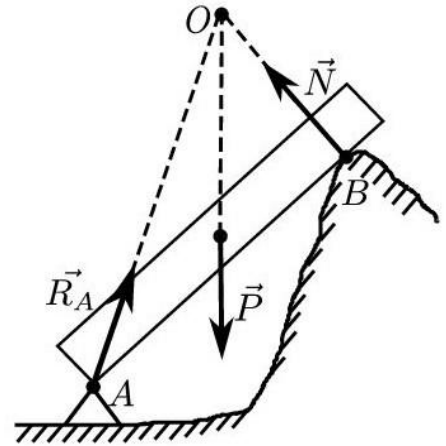


Рис. 1.7

Оскільки три сили $\vec{P}$, $\vec{N}$ і реакція шарніра $\vec{R}_A$ взаємно врівноважуються, то лінії дії цих сил повинні перетинатись в одній точці, тому лінія дії реакції $\vec{R}_A$ шарніра A проходить через точку перетину O ліній дії сил $\vec{P}$ і $\vec{N}$. Це означає, що реакція $\vec{R}_A$ направлена по прямій OA , що з'єднує точку O з нерухомою точкою A (з нерухомим шарніром, що розглядається як точка).

Заміну однієї сили системою сил, яка створює на тіло ту ж дію, називають розкладанням сил. У разі розкладання цієї сили на дві збіжні складові сили, прикладені у тій самій точці, необхідно знайти таку систему двох збіжних сил, для якої ця сила є рівнодією.

Контрольні запитання

1. Що таке сила? Чим характеризується сила?
2. Що називають системою сил?
3. Чим відрізняється плоска система сил від просторової?
4. Яка система сил називається збіжною?
5. Які системи сил називаються еквівалентними?
6. Яка сила називається рівнодією цієї системи сил?
7. Що таке абсолютно тверде тіло?
8. Яку систему сил називають зрівноваженою?
9. Сформулюйте принцип прикладання і відкидання взаємно зрівноважених сил.
10. За якою формулою визначають модуль рівнодії?
11. Як визначають рівнодію двох сил, напрямлених уздовж однієї прямої але в протилежні боки?
12. Як визначають геометричну різницю двох векторів?
13. Що таке силовий багатокутник?
14. Що виражає замкнутість силового багатокутника?
15. У чому полягає правило паралелепіпеда сил?
16. Сформулюйте закон рівності дії і протидії.
17. Сформулюйте теорему про три непаралельні сили.

2. В'ЯЗІ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ

2.1. Невільне тверде тіло

Вільним називається тіло, переміщення якого в просторі нічим не обмежено. Вільне тіло в просторі має можливість здійснювати **три лінійних переміщення** і **три кутові переміщення** (повороти відносно осей системи координат).

Вільне тіло знаходиться в стані спокою тоді, коли шість можливих переміщень дорівнюють нулю.

Невільним називається тіло, переміщення якого в просторі в будь-якому напрямі обмежено іншими тілами.

В'яззю (зв'язком) називається тіло, яке, торкаючись до даного тіла, обмежує його рух у будь-якому із напрямів. Невільне тіло в просторі буде мати можливість здійснювати стільки

переміщень, скільки дозволено в'язями, тобто *шість мінус кількість переміщень, обмежених в'язями.*

Реакцією в'язі називається сила або система сил, яка виражає механічну дію в'язі на тіло. Реакції в'язей за своєю суттю пасивні, оскільки виникають лише під дією активних сил і є силами зовнішніми. Числове значення пасивних сил залежить від прикладених активних сил.

Всі сили, що діють на *невільне тверде тіло*, поряд із розподілом на зовнішні та внутрішні, можна також поділити на *задані або активні сили і реакції в'язей.*

Аксіома VI (принцип звільнення твердих тіл від в'язей): *невільне тверде тіло можна розглядати як вільне, на яке, крім заданих сил, діють реакції в'язей, а не самі в'язі.*

Аксіома VII (принцип накладання нових в'язей): *рівновага абсолютно твердого тіла не порушиться при накладанні на нього нових в'язей.* Наприклад, якщо стіл, який стоїть на підлозі, перебуває в рівновазі, то ця рівновага не порушиться, якщо ніжки стола прикріпити до підлоги болтами.

2.2. Види в'язей та напрям їх реакцій

Статика розглядає переважно невідільні тіла, тобто тіла, які певним чином закріплені. Будь-яка в'язь обмежує одне або декілька переміщень однієї або групи точок тіла, що розглядається.

Реакція в'язі завжди направлена в сторону, протилежну неможливому руху. Таким чином, якщо відомо, переміщення яких точок тіла обмежені і в якому напрямку, то відомі і точки прикладання та напрями реактивних сил. Розглянемо, як направлені реакції деяких основних видів в'язей.

1. Вільне обпирання тіла об гладку опорну поверхню. Реакція $\vec{R}$ або $\vec{N}$ такої в'язі направлена вздовж нормалі до опорної поверхні в цій точці.

2. Опора на гладке ребро тіла або тіло. Тіло опирається на гладку поверхню, коли одна з поверхонь, що дотикаються, є точкою — реакція в'язі завжди направлена по нормалі до дотичної опорної поверхні в точці стикання з певним тілом.

3. Нерухомий плоский циліндричний шарнір (шарнірно-нерухома опора) дозволяє поворот навколо осі шарніра, але не здійснює лінійні переміщення. Реакцію в'язі $\vec{R}_A$ замінюють двома невідомими взаємно перпендикулярними складовими реакцій $\vec{R}_{Ax}$ і $\vec{R}_{Ay}$ (рис. 2.8).

4. Рухомий плоский циліндричний шарнір (каткова опора) дозволяє поворот навколо осі шарніра та лінійне переміщення на незначну відстань уздовж опорної поверхні. Реакція в'язі $\vec{R}_A$ проходить через центр шарніра перпендикулярно до опорної поверхні (рис. 2.9).

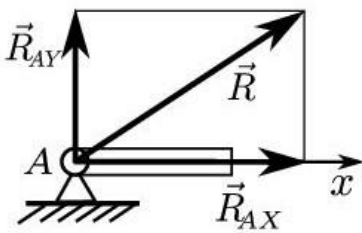


Рис. 2.8

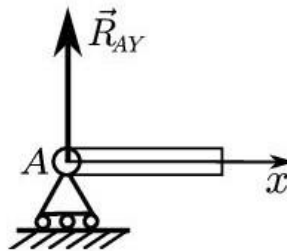


Рис. 2.9

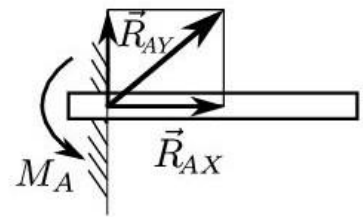


Рис. 2.10

5. Защемлення (жорстке закладання) – це спосіб закріплення балок у стінах будинків (рис. 2.10). Під час розв'язання задач таку в'язь замінюють двома невідомими складовими реакції $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ та реактивною парою сил з моментом $\vec{M}_p$.

6. Гнучка в'язь (нитка, мотузка, дріт, шнур, трос, ланцюг, канат). Реакція цієї в'язі прикладена в точці кріплення і направлена вздовж в'язі до точки підвішування (рис. 2.11).

7. Жорсткий стрижень (стрижнева опора), вагою якого нехтують, а кінці кріпляться з обох боків шарнірно (ідеальний стрижень). Якщо на стрижень не діє ніяка сила, крім в'язей в шарнірах, то реакція в'язі направлена вздовж прямої, яка проходить через центри шарнірів (рис. 2.12).

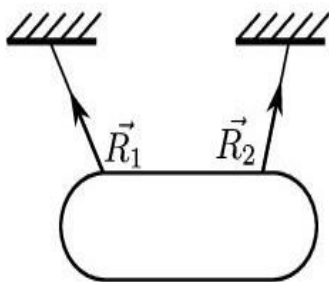


Рис. 2.11

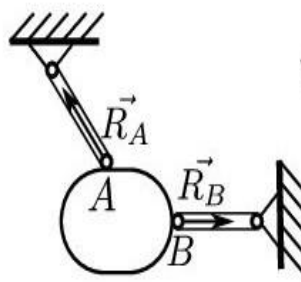


Рис. 2.12

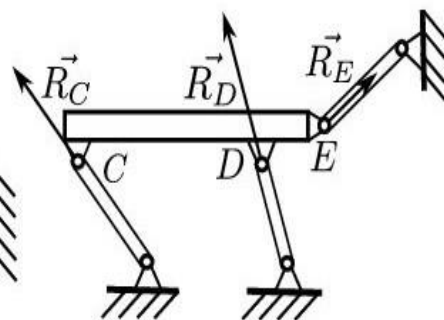


Рис. 2.13

Якщо стрижень розтягнений, то його реакція напрямлена в бік від тіла до стрижня: $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$, $\vec{R}_E$ (рис. 2.12). Якщо стрижень стиснений, то його реакція напрямлена в бік від стрижня до тіла: $\vec{R}_C$, $\vec{R}_D$ (рис. 2.13). У разі спроби переміщення тіла по шорсткій поверхні виникає в'язь з невідомим напрямом, тому її розкладають на дві складові: нормальну $\vec{N}$ і дотичну $\vec{R}_{тер}$ (сила тертя), тобто $\vec{R} = \vec{N} + \vec{R}_{тер}$. Модулі $\vec{N}$ і $\vec{R}_{тер}$ визначають із відповідних умов рівноваги тіла. В'язі без тертя називають *ідеальними*, а з тертям – *реальними*.

Слід зауважити, що ідеально гладких поверхонь не існує – це абстракція, яка використовується в тих випадках, коли силами можна нехтувати.

8. Сферичний шарнір, упорний підшипник, підп'ятник. Напрями реакцій таких в'язей проходять через центр в'язі. Так, для сферичного шарніра (або підп'ятника) лінія дії реакції повинна проходити через центр сфери, напрям може бути довільним. Розглядаючи рівновагу тіла, реакцію замінюють трьома невідомими складовими $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ і $\vec{R}_{Az}$ за напрямом трьох взаємно перпендикулярних осей. Модулі та їх напрями визначають з умов рівноваги відповідних систем сил. Так, у разі циліндричного шарніра (підшипника) реакція його розміщена в площині, перпендикулярній до його осі Oz . Невідомий вектор реакції в'язі в площині визначається двома складовими $\vec{R}_x$ і $\vec{R}_y$ по осях Ox і Oy , величини яких знаходять з умов рівноваги. В окремому випадку, коли можна знехтувати розмірами шарнірів і силами тертя, що виникають у них, шарніри називають ідеально точковими.

Контрольні запитання

1. Яке тіло називається вільним, невідільним? Які переміщення має можливість здійснювати вільне тіло в просторі?
2. Що називають в'яззю? Що називається реакцією в'язі?
3. Чим внутрішні сили відрізняються від зовнішніх?
4. Сформулюйте принцип звільнення твердих тіл від в'язей.
5. Куди направлена реакція такої в'язі, як гладка опорна поверхня?
6. Куди направлена реакція опори на гладке ребро тіла?

7. Як направлені реакції нерухомого і рухомого плоского циліндричного шарніра?
8. Куди направлена реакція гнучкої в'язі?
9. Куди направлена реакція такої в'язі, як жорстке закладання?
10. Чому зовнішні сили не врівноважуються реакціями в'язей?
11. Сформулюйте принцип накладання нових в'язей.

3. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

3.1. Проекція сили на вісь і площину

Аналітичний метод розв'язання задач статички побудований на понятті про проекцію сили на вісь. *Проекція сили на вісь* – алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямом сили і додатним напрямом осі. Якщо кут гострий – проекція додатна, якщо тупий – від'ємна: $F_x = F \cos \alpha$ (рис. 3.1):

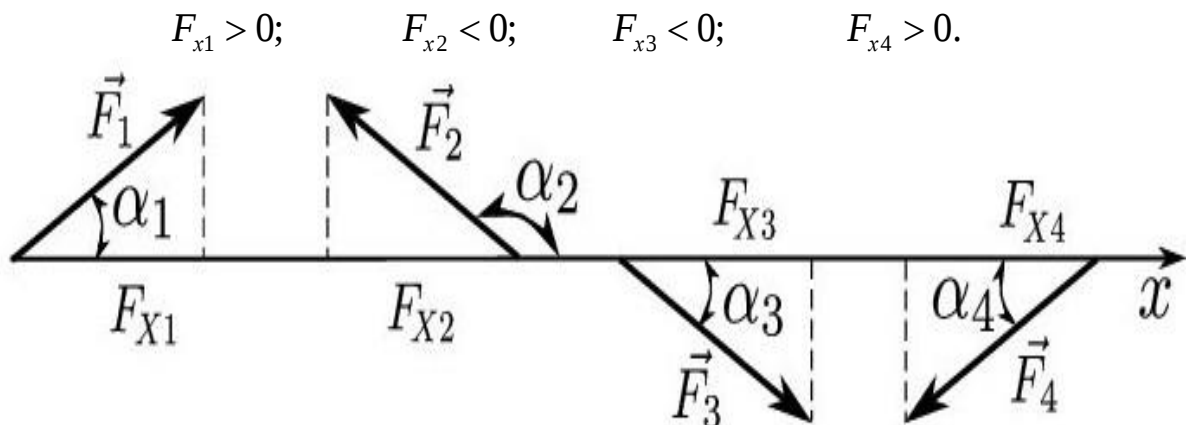


Рис. 3.1

Проекцією сили $\vec{F}$ на площину Oxy називається вектор $\vec{F}_{xy}$, що знаходиться між проекціями початку і кінця сили $\vec{F}$ на цю площину (рис. 3.2). За модулем $F_{xy} = F \cos \theta$, де θ – кут між напрямом сили $\vec{F}$ і її проекції F_{xy} . Для знаходження проекції сили на вісь, зручніше спочатку знайти її проекцію на площину, в якій ця вісь лежить, а потім знайдену проекцію на площину спроектувати на дану вісь. Наприклад, у випадку, показаному на рис. 3.3, отримаємо: $F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi$, $F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi$.

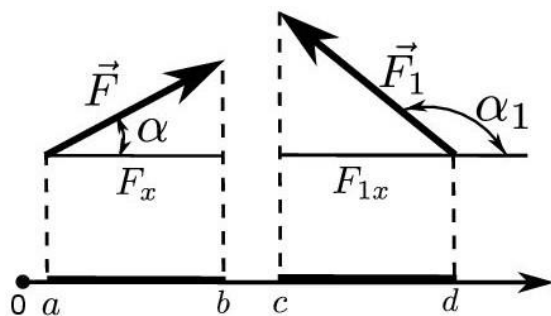


Рис. 3.2

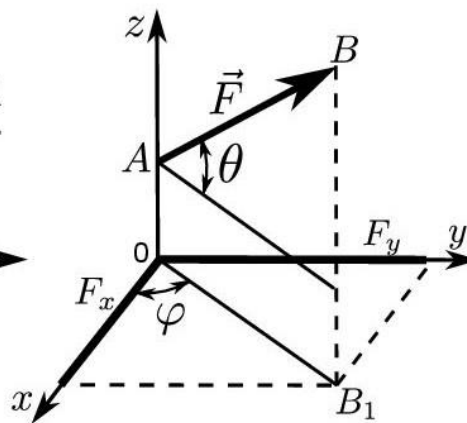


Рис. 3.3

3.2. Аналітичний спосіб задавання сили

Для аналітичного задавання сили необхідно вибрати систему координатних осей $Oxyz$. Вектор, який зображає силу $\vec{F}$, можна побудувати, якщо відомі модуль F цієї сили і кути α, β, γ , які сила складає з координатними осями. Точка A прикладення сили повинна бути задана окремо її координатами (x, y, z) . Для розв'язування задач зручніше задавати силу її проекціями F_x, F_y, F_z на координатні осі. Знаючи ці проекції, можна визначити модуль сили і косинуси кутів, які вона становить з координатними осями, за

формулами: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$; $\cos \alpha = \frac{F_x}{F}$; $\cos \beta = \frac{F_y}{F}$; $\cos \gamma = \frac{F_z}{F}$.

Якщо сила розміщена в одній площині, то її можна задати проекціями на дві осі.

3.3. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної

Система прикладених до абсолютно твердого тіла сил називається **збіжною**, якщо лінії дії усіх сил перетинаються в одній точці. Точка перетину сил називається **центром сил**. За аксіомою паралелограма сил рівнодійна $\vec{R}$ системи збіжних сил дорівнює векторній сумі цих сил: $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \dots + \vec{R}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$. Графічно

рівнодійна сила $\vec{R}$ визначається як сторона, що замикає силовий багатокутник (рис. 3.4). Для аналітичного визначення рівнодійної $\vec{R}$ вводять прямокутну систему координат $Oxyz$ з початком в точці O

перетину ліній дії заданих сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Користуючись теоремою, згідно з якою проекція векторної суми на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на ту ж саму вісь складових векторів, одержимо вирази для проекцій F_x , F_y , F_z рівнодійної $\vec{R}$ у вигляді:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Модуль рівнодійної $R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2},$

а напрям рівнодійної – такими **напрямними косинусами**:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Таким чином, **система збіжних сил може бути замінена рівнодійною силою, яка прикладена в точці перетину сил і дорівнює геометричній сумі сил, що діють на тіло.**

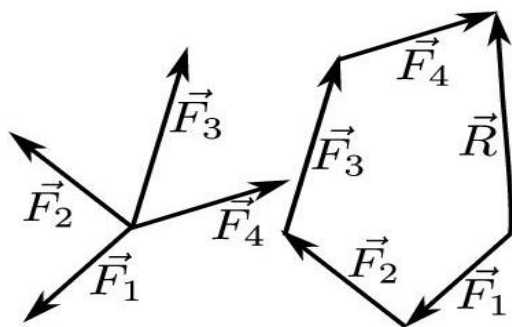


Рис. 3.4

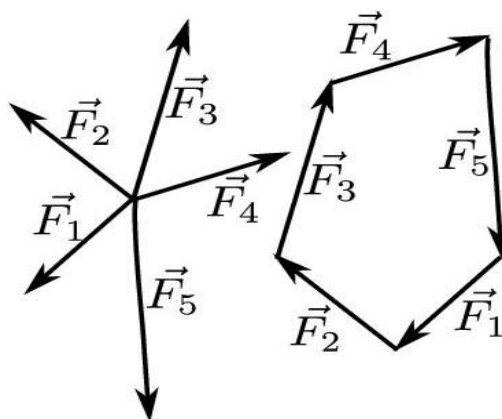


Рис. 3.5

3.4. Умови рівноваги системи збіжних сил

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулеві, тобто:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (3.1)$$

Необхідність умови (3.1) випливає з того, що система збіжних сил, прикладених до твердого тіла, еквівалентна одній силі – рівнодійній $\vec{R}$. Ураховуючи умову $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, що **багатокутник сил** $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ є **замкнутим** (рис.3.5), остання виражає умову рівноваги

системи збіжних сил у графічній формі. Умови рівноваги системи збіжних сил в проекціях на координатні осі:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0.$$

Ці умови називаються аналітичними умовами рівноваги системи збіжних сил.

Їх формують таким чином: **для рівноваги просторової збіжної системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю.**

Одержані вирази дають змогу відповісти на питання, чи буде тіло знаходитись в рівновазі під дією даної системи збіжних сил.

3.5. Загальні умови розв'язання задач статички

У більшості задач тіло знаходиться в рівновазі під дією заданої системи активних сил і в'язей, а реакції в'язей є невідомими. Для системи збіжних сил у загальному випадку можна записати **три скалярних рівняння рівноваги**, тобто **число невідомих параметрів реакцій в'язей повинно бути не більше трьох** (у плоскій системі збіжних сил – не більше двох). Якщо число рівнянь рівноваги дорівнює числу невідомих реакцій в'язей, то така задача **статично визначена**. Якщо число параметрів більше числа рівнянь рівноваги, то такі задачі називаються **статично невизначеними**. Під час розв'язання задач слід дотримуватися такої послідовності:

1. Виписавши вихідні дані, визначити об'єкт дослідження, тобто тіло (точку), рівновагу якого слід розглянути в даній задачі;
2. Зобразити (розставити) у вигляді векторів усі діючі на дане тіло (і тільки на це тіло) активні сили і реакції в'язей;
3. Звільнити від в'язей вибране тіло і замінити їх дію реакціями в'язей. Звільнене від в'язей тіло з прикладеною до нього системою активних сил і реакцій слід зображати окремо;
4. Розглянути рівновагу даного твердого тіла як вільного з урахуванням активних сил і реакцій в'язей;
5. Вибрати координатні осі та скласти рівняння, які б виражали умови рівноваги тіла. Визначити невідомі величини.

Рівняння рівноваги складаються при аналітичному методі розв'язування задач на рівновагу системи збіжних сил. Проте, якщо число збіжних сил, рівновага яких розглядається, дорівнює трьом, то

зручно застосувати геометричний метод розв'язування цих задач, тобто замість рівнянь рівноваги всіх діючих сил (активних і реакцій в'язей) будують силовий трикутник, який на основі повинен бути замкнутий. Починають побудову силового трикутника із відомої сили, а далі, за відомими елементами, знаходять невідомі величини. Коли кількість сил, що утворюють збіжну систему, перевищує три, умову рівноваги доцільніше застосовувати в аналітичній формі. При розв'язуванні задач на рівновагу збіжної плоскої системи сил аналітичним методом за початок координат звичайно вибирають точку, в якій збігається система сил.

Контрольні запитання

1. Що називається проекцією сили на площину?
2. За яких умов проекція сили на вісь є додатна, від'ємна або дорівнює нулю?
3. Запишіть формулу для визначення модуля сили $\vec{F}$ за її проекціями на координатні осі.
4. Запишіть формули для визначення напрямних косинусів кутів, які сила $\vec{F}$ складає з координатними осями.
5. Що називається центром системи збіжних сил?
6. Чому дорівнює проекція векторної суми на вісь?
7. Запишіть вирази для модуля рівнодійної R системи збіжних сил.
8. Запишіть вирази для визначення величини напрямних косинусів, які задають напрям рівнодійної R системи збіжних сил.
9. Запишіть рівняння рівноваги просторової системи збіжних сил.
10. Запишіть рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил.
11. Які задачі називаються статично визначеними?
12. У чому полягає графічний метод розв'язування статично визначених задач?

4. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ І ОСІ

4.1. Момент сили відносно точки

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з центра O в точку A прикладення сили, на вектор сили $\vec{F}$ (рис. 4.1):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.1)$$

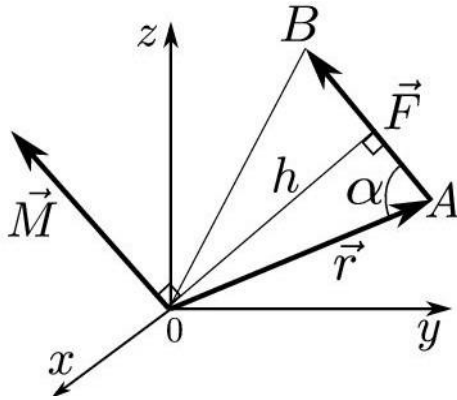


Рис. 4.1

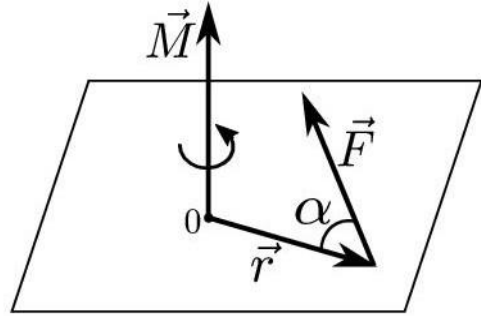


Рис. 4.2

Модуль моменту сили:

$$M_0 = r \cdot F \sin \angle(\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin \alpha; \quad [M_0] = [r] \cdot [F] = 1\text{м} \cdot 1\text{Н} = 1\text{Нм}. \quad (4.2)$$

Довжина перпендикуляра h , опущеного з точки 0 на лінію дії сили $\vec{F}$, називається **плечем сили $\vec{F}$ відносно центра 0**. Тоді модуль моменту сили (4.2) записується у вигляді:

$$|\vec{M}_0(\vec{F})| = F \cdot h = 2S_{\Delta OAB}, \quad (4.3)$$

де $h = r \sin(180 - \alpha) = r \sin \alpha$.

Модуль моменту сили відносно центра 0 **дорівнює добутку сили на плече та направлений перпендикулярно площині, що проходить через точку 0 і лінію дії сили, в той бік, звідки „обертання” тіла під дією сили відносно точки 0 було б видно проти руху стрілки годинника** (рис. 4.2). З рівнянь (4.1, 4.2) можна знайти проєкції вектора $\vec{M}_0(\vec{F})$ на осі. Векторний добуток $\vec{r} \times \vec{F}$ дорівнює:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = M_{0x} \vec{i} + M_{0y} \vec{j} + M_{0z} \vec{k} = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x),$$

де **моменти сили відносно координатних осей** на осі координат:

$$M_{0x} = yF_z - zF_y; \quad M_{0y} = zF_x - xF_z; \quad M_{0z} = xF_y - yF_x. \quad (4.4)$$

Модуль і напрям (напрямні косинуси) моменту сили відносно центра визначають таким чином:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}; \quad (4.5)$$

$$\cos \angle(\vec{M}_0, \vec{i}) = \frac{M_{0x}}{M_0}; \quad \cos \angle(\vec{M}_0, \vec{j}) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \quad \cos \angle(\vec{M}_0, \vec{k}) = \frac{M_{0z}}{M_0}. \quad (4.6)$$

З визначення моменту сили відносно точки випливає:

1) **якщо переміщувати точку прикладання сили вздовж лінії дії сили**, то момент сили відносно точки не зміниться;

2) **момент сили відносно точки дорівнює нулю**, якщо лінія дії сили проходить через цю точку, оскільки плече сили дорівнює нулю ($h = 0$);

3) **момент сили відносно точки** чисельно дорівнює подвійній площі трикутника OAB (рис. 4.1), тобто $M_0(\vec{F}) = 2S_{\triangle OAB}$;

4) **момент сили відносно точки є зв'язаним вектором**, оскільки момент сили відносно точки O $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ не дорівнює моменту сили відносно точки O_1 $\vec{M}_{01}(\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}$ (площа трикутника OAB не дорівнює площі трикутника O_1AB) (рис. 4.3);

5) **теорема Вариньона** (про момент рівнодійної системи збіжних сил): момент рівнодійної збіжної системи сил відносно довільного центра дорівнює векторній сумі моментів складових сил відносно того ж самого центра:

$$\vec{M}_0(\vec{R}) = \vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_0(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i). \quad (4.7)$$

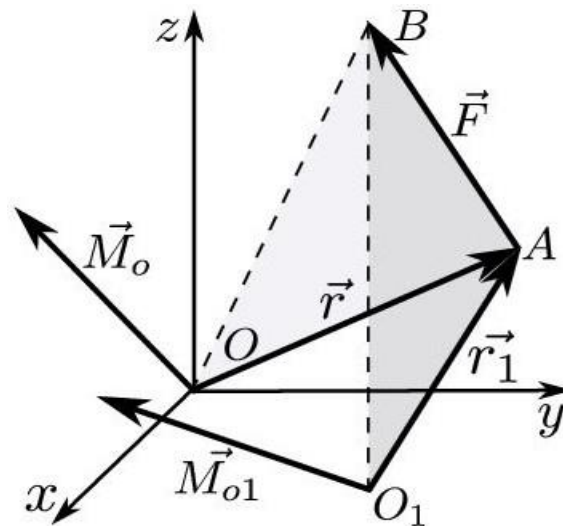


Рис. 4.3

Теорема узагальнюється на випадок будь-якої системи, що зводиться до рівнодійної. Якщо сили і точка O розміщені в одній площині, то їх моменти перпендикулярні до цієї площини і лежать на одній прямій.

4.2. Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називається проекція на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки $M_{0z}(\vec{F})$, яка знаходиться на осі (рис. 4.5):

$$M_{0z}(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \gamma. \quad (4.8)$$

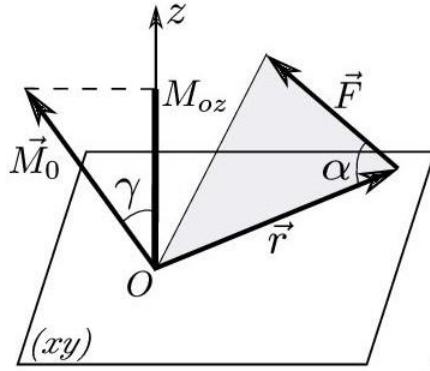


Рис. 4.4

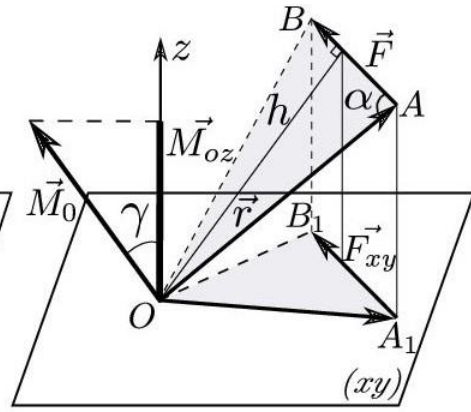


Рис. 4.5

Момент сили $\vec{F}$ відносно осі z – аналог сили в еквіваленті другого закону Ньютона ($\vec{F} = m\vec{a}$) для обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі: $\vec{M}_{0z}(\vec{F}) = J_z \vec{\varepsilon}$. З визначення випливає, що момент сили відносно координатних осей визначається за формулами (4.12, 4.14). З цих формул можна зробити висновок, що **момент сили відносно осі не залежить від вибору точки на осі**. У разі розв'язування конкретних задач моменти сил відносно осей зручно визначати в такій послідовності:

1) **провести** через будь-яку точку O на осі z площину xy , перпендикулярну до осі z (рис. 4.5);

2) **спроектувати** силу $\vec{F}$ на площину – вектор $\vec{F}_{xy}$, початок і кінець якого збігається з проекціями початку і кінця вектора сили $\vec{F}$ ($O\vec{A} = \vec{r}, O\vec{A}_1 = \vec{r}_1$);

3) **визначити** момент проекції $\vec{F}_{xy}$ сили $\vec{F}$ на цю площину відносно точки O :

$$M_{0z}(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h_1, \quad M_{0z}(\vec{F}) = 2S_{\triangle OA_1B_1}. \quad (4.9)$$

При цьому будуть виконані умови:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad (4.10)$$

$$\vec{F}_{xy} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}; \quad \vec{r}' = x\vec{i} + y\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}. \quad (4.11)$$

Використовуючи формули (4.4) – (4.6), визначимо моменти сили $\vec{F}$ відносно осей Z, X, Y :

$$\vec{M}_{0z}(\vec{F}) = \vec{M}_0(\vec{F}_{xy}) = \vec{r} \times \vec{F}_{xy} = (xF_y - yF_x)\vec{k}; \quad (4.12)$$

$$\vec{M}_{0x}(\vec{F}) = \vec{M}_0(\vec{F}_{yz}) = \vec{r} \times \vec{F}_{yz} = (xF_z - yF_y)\vec{k}; \quad (4.13)$$

$$\vec{M}_{0y}(\vec{F}) = \vec{M}_0(\vec{F}_{zx}) = \vec{r} \times \vec{F}_{zx} = (xF_x - yF_z)\vec{k}; \quad (4.14)$$

Момент сили відносно осі вважається додатним, якщо при погляді з додатного кінця осі сила намагається обернути тіло відносно осі проти руху стрілки годинника, в іншому випадку момент вважається від'ємним. Якщо момент додатний, то він зображається відрізком, направленим вгору по осі z від точки O , а якщо він від'ємний – то вниз. **Момент сили відносно осі дорівнює нулю в двох випадках:**

- 1) **лінія дії сили паралельна осі або збігається з нею**, тобто проекція сили на площину, яка перпендикулярна осі, дорівнює нулю ($\vec{F}_{xy} = 0$);
- 2) **лінія дії сили перетинає вісь**, тобто плече проекції сили на площину, яка перпендикулярна осі, дорівнює нулю ($h = 0$). Отже, **момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині.** Порівнявши одержані формули (4.12) і (4.14) з виразом для моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O (4.8), можна записати:

$$M_{0x}(\vec{F})\vec{i} = \vec{M}_x(\vec{F}); \quad M_{0y}(\vec{F})\vec{j} = \vec{M}_y(\vec{F}); \quad M_{0z}(\vec{F})\vec{k} = \vec{M}_z(\vec{F}), \quad (4.15)$$

тобто момент сили відносно точки є сумою моментів цієї сили відносно трьох взаємно перпендикулярних осей, проведених через цю точку.

4.3. Залежність між моментами відносно точки та відносно осі, яка проходить через цю точку

Нехай задані сила $\vec{F}$ і точка O , яка лежить на осі z (рис. 4.7).

Момент сили $\vec{M}_0(\vec{F})$ відносно точки O , що взята на перетині осі z з перпендикулярною площиною Π , направлений перпендикулярно площині трикутника OAB .

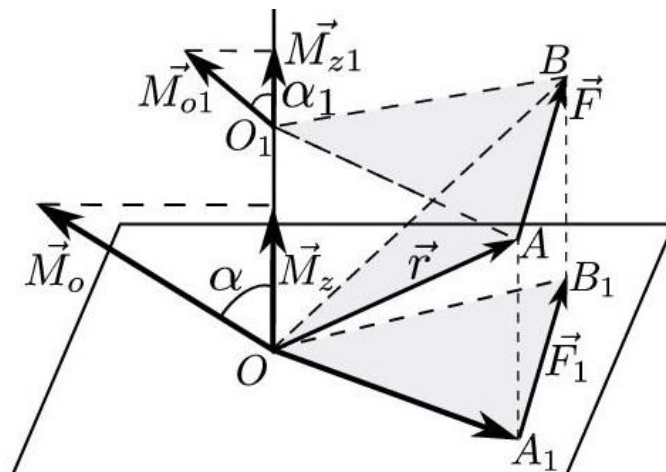


Рис. 4.7

Його модуль $M_0(\vec{F}) = 2S_{\triangle OAB}$. Для будь-якої іншої точки O_1 на осі z : $M_{01}(\vec{F}) = 2S_{\triangle O_1AB}$, причому векторний момент $\vec{M}_{01}(\vec{F})$ направлений перпендикулярно площині трикутника O_1AB .

M

o

m

e

n

t

c

u

Звідси маємо: $M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \alpha = M_{0z}(\vec{F})$.

Аналогічно, $S_{\triangle OA_1B_1} = S_{\triangle O_1AB} \cos \alpha$, де α — кут між вектором

E

M

B

E

$$\cos \alpha = \pm 1; \text{ і } M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}).$$

Контрольні запитання

1. Що називається моментом сили $\vec{F}$ відносно точки центра?
2. Запишіть формулу для визначення модуля моменту сили відносно точки та поясніть його розмірність.
3. Що називається плечем сили відносно центра?
4. Чому дорівнює момент сили відносно точки?
7. Запишіть аналітичні вирази проекцій на координатні осі моменту сили $\vec{F}$ відносно центра O .
8. Запишіть формулу для визначення модуля моменту сили $\vec{F}$ через значення його проекцій на координатні осі.
9. Запишіть формули для знаходження напрямних косинусів моменту сили $\vec{F}$ через значення його проекцій на координатні осі.
10. Чому момент сили відносно центру не зміниться, якщо переміщувати точку прикладання сили вздовж лінії дії сили?
11. За яких умов момент сили відносно точки дорівнює нулю?

$M_{01}(\vec{F})$

12. Чому момент сили відносно точки дорівнює подвійній площі трикутника, який утворює вектор сили та її радіус-вектор?
13. Поясніть, чому момент сили відносно точки є зв'язаним вектором.
14. Сформулюйте та доведіть теорему Варіньона.
15. За яких умов момент рівнодійної системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно центра?
16. Що називається моментом сили відносно осі?
17. Поясніть, чому момент сили відносно даної осі не зміниться при переміщенні точки прикладання даної сили вздовж лінії її дії.
19. За яким правилом визначається знак (додатний або від'ємний) моменту сили відносно осі?
20. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю (сила не може обертати тіло навколо осі)?
21. Чому момент сили відносно точки є сумою моментів цієї сили відносно трьох взаємно перпендикулярних осей, проведених через цю точку?
22. Яка залежність існує між моментами сили відносно точки та відносно осі, що проходить через цю точку?

5. ПАРА СИЛ

5.1. Пара сил. Момент пари сил

Дві паралельні сили, рівні за модулем, але протилежно направлені являють собою невірноважену систему, яка не може бути замінена однією силою. **Парою сил**, прикладеною до твердого тіла, називається система двох рівних за величиною паралельних між собою сил $(\vec{F}; \vec{F}')$, які направлені в протилежні боки уздовж незбіжних ліній дії (рис. 5.1, 5.2). Момент пари сил чисельно дорівнює добутку модуля сили на відстань між лініями дії сил.

Плечем пари називається найкоротша відстань a між лініями дії сил пари. Площина (N) , в якій розміщені сили пари, називається площиною дії пари або площиною пари. Пара сил не має рівнодійної, оскільки лінії дії цих сил не проходять через одну точку. З аксіоми 1 випливає, що система сил пари не знаходиться в рівновазі. Установлено, що пара сил, які діють на тверде тіло, намагається надати йому обертання. Дійсно, **момент пари дорівнює сумі моментів двох сил**: $\vec{M}_0(\vec{F}; \vec{F}') = \vec{M}_0(\vec{F}) + \vec{M}_0(\vec{F}')$.

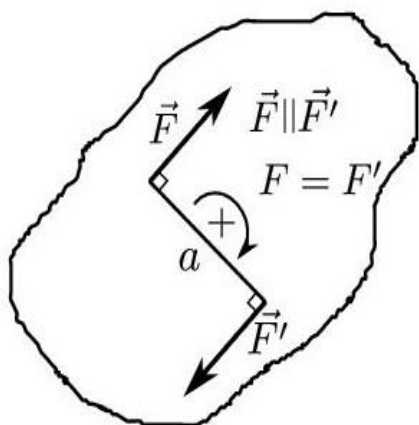


Рис. 5.1

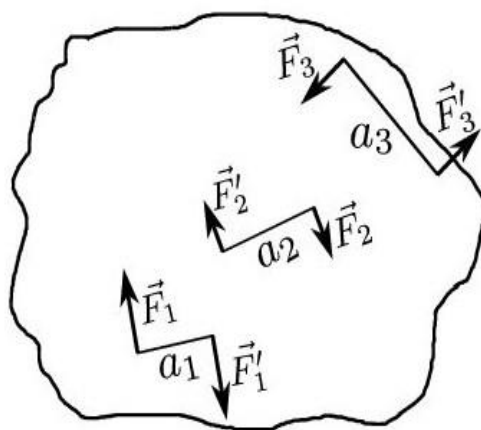


Рис. 5.2

Модуль моменту пари сил дорівнює добутку сили на відстань між лініями дії сил: $M_0(\vec{F}; \vec{F}') = F \cdot a$. Момент пари направлений перпендикулярно до площини пари. Момент вважають позитивним, якщо він розвертає тіло за стрілкою годинника. За одиницю виміру модуля моменту пари сил, як і моменту сили відносно центра, прийнятий ньютон на метр (Нм).

5.2. Властивості пар сил

1. Не змінюючи дії пари на абсолютно тверде тіло, її можна переносити і довільно повертати в площині дії, змінюючи величину сили, яка входить в цю пару і довжину плеча так, щоб момент пари залишався незмінним.
2. Пару сил можна переносити в будь-яку площину, паралельну площині дії цієї пари.
3. Довільно розміщену в просторі систему пар сил можна замінити однією рівнодіючою парою, момент якої дорівнює векторній сумі моментів складових пар:

$$\vec{M}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + \vec{M}(\vec{F}_n, \vec{F}_n'). \quad (5.1)$$

4. Для рівноваги пар необхідно і достатньо, щоб векторна сума моментів пар системи дорівнювала нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{m}_i = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + \vec{M}(\vec{F}_n, \vec{F}_n') = 0. \quad (5.2)$$

У проекціях на три взаємно перпендикулярні осі:

$$\sum_{i=1}^n m_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_{iz} = 0. \quad (5.3)$$

Якщо система пар сил розміщена в одній площині, то модуль результуючої пари буде дорівнювати алгебраїчній сумі модулів моментів пар сил, що утворюють цю систему:

$$M(\vec{R}, \vec{R}') = M(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + M(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + M(\vec{F}_n, \vec{F}_n'). \quad (5.4)$$

Таким чином, для рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині (або в паралельних площинах), необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій моментів цих пар сил на вісь, яка перпендикулярна цій площині (площинам), дорівнювали нулю.

Зауважимо, що механічна дія (вплив) у статиці абсолютно твердого тіла характеризується трьома типами векторів:

- 1) силою – ковзним вектором;
- 2) моментом сили відносно точки – прикладеним, або зв'язаним вектором;
- 3) моментом пари сил – вільним вектором.

Момент пари є повною характеристикою механічної дії пари сил на абсолютно тверде тіло, а дії над парами сил можна замінити еквівалентними векторними операціями над їх моментами. При цьому, оскільки оберտальна дія пари сил залежить тільки від її моменту, то для задання пари іноді достатньо вказувати лише числове значення її моменту.

Контрольні запитання

1. Що називається парою сил, прикладеною до твердого тіла?
2. Що називається площиною дії пари сил, плечем пари сил?
3. Поясніть, чому система сил пари не знаходиться в рівновазі?
4. Що намагається зробити з тілом прикладена до нього пара сил?
5. Що називається моментом пари сил $M_0(\vec{F}; \vec{F}')$?
6. Запишіть формулу вектора моменту пари сил.
7. Запишіть формулу для визначення модуля моменту пари сил.
8. В яких одиницях вимірюється модуль моменту пари сил?
9. Чому момент пари сил є вільним вектором?
10. Чому момент пари сил є повною характеристикою механічної дії пари на тверде тіло?
11. Чому дії над парами сил можна замінити еквівалентними операціями над їх моментами?
12. Сформулюйте правило складання пар сил.
13. Як визначається модуль результуючої пари системи пар сил, що розміщені в одній площині або в паралельних площинах?

14. Запишіть рівняннями рівноваги системи пар сил.
15. Сформулюйте основні властивості пар сил.
16. Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.
17. Що називається приєднаною парою сил?

6. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

6.1. Паралельне перенесення сил

Лема: не змінюючи статичного стану твердого тіла, прикладену до цього тіла силу можна перенести у будь-яку його точку, паралельно самій собі, прикладаючи при цьому пару, момент якої дорівнює моменту цієї сили відносно нової точки прикладення.

Нехай в точці А прикладена сила $\vec{F}$ (рис. 6.1). Прикладемо тепер у точці В тіла систему двох сил $\vec{F}'$ і $\vec{F}''$, еквівалентну нулю, причому $|\vec{F}'| = |\vec{F}''| = |\vec{F}|$ (рис. 6.2). Виникає система, яка складається з сили $\vec{F}'$ і пари сил $(F, \vec{F}'')$ з моментом m . Одержану таким чином пару сил (рис. 6.3) називають приєднаною парою сил.

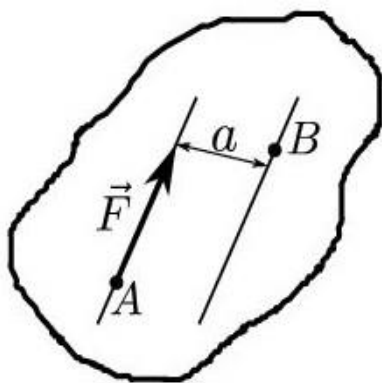


Рис. 6.1

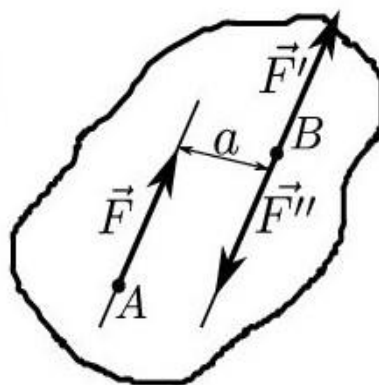


Рис. 6. 2

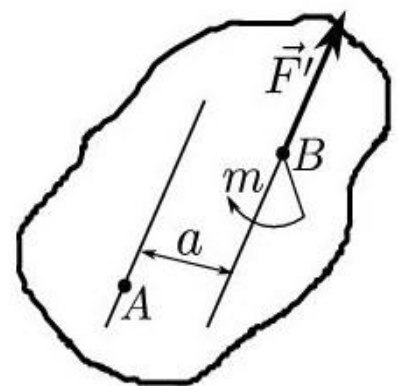


Рис. 6.3

Теорема Пуансо: довільну систему сил, що діють на тверде тіло, можна замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, прикладеної в довільно вибраній точці тіла (центрі зведення) і рівної головному вектору цієї системи сил, та однієї пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно вибраного центра зведення.

Якщо лінії дії довільної системи сил не пересікаються в одній точці, то усі сили системи можна перенести в одну довільно вибрану точку – точку зведення. При переносі сили в точку, що не лежить на

лінії її дії, за теоремою Пуансо добавляють приєднану пару сил m (рис. 6.3), а пучок сил у точці зведення замінюють головним вектором системи. Пари сил, що з'явилися, замінюють головним моментом системи.

6.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Теорема. Для того, щоб довільна просторова система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ перебувала у рівновазі, необхідно і достатньо, щоб головний вектор $\vec{F}_0$ і головний момент $\vec{M}_0$ системи відносно довільного центра зведення дорівнювали нулю. Умови рівноваги:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad (6.1)$$

$$\vec{M}_0 = M_0(\vec{F}_1) + M_0(\vec{F}_2) + \dots + M_0(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.2)$$

Умови рівноваги довільної просторової системи сил у проекціях:

$$F_{0x} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_{ix}(\vec{F}_i) = 0; \quad (6.3)$$

$$F_{0y} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_{iy}(\vec{F}_i) = 0; \quad (6.4)$$

$$F_{0z} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_{iz}(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.5)$$

6.3. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Нехай всі сили системи $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, що діє на тверде тіло, паралельні між собою, а вісь Z паралельна цим силам. Тоді умови рівноваги мають вигляд:

$$F_{0z} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad (6.6)$$

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_{ix}(\vec{F}_i) = 0; \quad (6.7)$$

$$M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_{iy}(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.8)$$

6.4. Умови рівноваги довільної системи сил на площині

6.4.1. Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекції всіх сил на координатні осі, що лежать в площині дії цих сил, дорівнювали нулю та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювала нулю:

$$F_{0x} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_{iz}(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.9)$$

$$F_{0y} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad (6.10)$$

6.4.2. Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно будь-яких трьох точок площини, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0. \quad (6.11)$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = M_B(\vec{F}_1) + M_B(\vec{F}_2) + \dots + M_B(\vec{F}_n) = 0; \quad (6.12)$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2) + \dots + M_C(\vec{F}_n) = 0. \quad (6.13)$$

6.4.3. Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил щоб дорівнювали нулю алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно двох будь-яких точок, що лежать в цій площині, а також алгебраїчна сума проекцій всіх сил на вісь U , що не перпендикулярна до прямої, яка проходить через ці дві вибрані точки:

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0. \quad (6.14)$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = M_B(\vec{F}_1) + M_B(\vec{F}_2) + \dots + M_B(\vec{F}_n) = 0; \quad (6.15)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iU} = F_{1U} + F_{2U} + \dots + F_{nU} = \sum_{i=1}^n F_{iU} = 0. \quad (6.16)$$

6.5. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на вісь, що лежить в площині дії цих сил і паралельна їм, дорівнювала нулю та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювала нулю:

$$F_{0y} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad (6.17)$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0. \quad (6.18)$$

Контрольні запитання

1. Запишіть умови рівноваги довільної просторової системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ у векторній формі.
2. Сформулюйте умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі.
3. Запишіть рівняння рівноваги просторової системи паралельних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$.
4. Запишіть рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ через суми проекцій всіх сил на координатні осі, що лежать в площині дії цих сил.
5. Запишіть рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил через суми моментів всіх сил відносно будь-яких трьох точок площини, що не лежать на одній прямій.
6. Запишіть рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ через суму проекцій всіх сил на вісь, що лежить в площині дії цих сил і паралельна їм, та суму моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини.
7. Сформулюйте умови рівноваги довільної просторової системи пар сил $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$ у векторній формі.
8. Сформулюйте умову та запишіть рівняння рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині, в паралельних площинах.

7. БАЛКОВІ СИСТЕМИ

7.1. Балкові системи та їх види

Балкою називається деталь, яка зроблена з прямого бруса з опорами у двох (чи більше) точках і несе прямоосьове навантаження. Балкові системи застосовують у машинах і спорудах. **Види кріплення балок та напрями реакцій в'язей:**

- 1) балка має дві опори – шарнірно-нерухому і шарнірно-рухому або має три непаралельні шарнірно прикріплені стрижні (рис. 7.1);
- 2) балка спирається на три гладенькі поверхні, одна з яких має упор (рис. 7.2);
- 3) балка жорстко закріплюється в стіні або затискується спеціальним пристроєм (рис. 7.3).

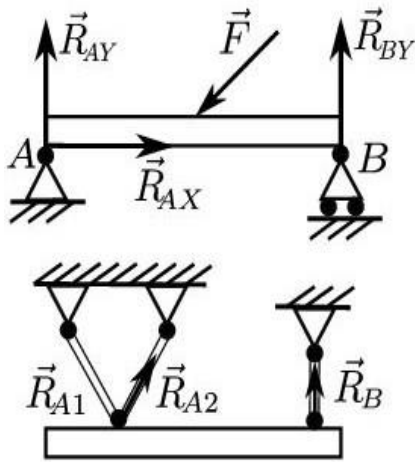


Рис. 7.1

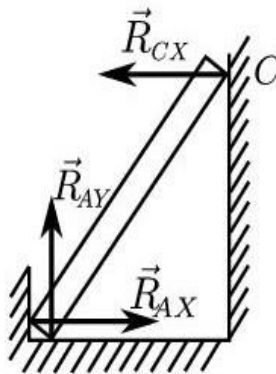


Рис. 7.2

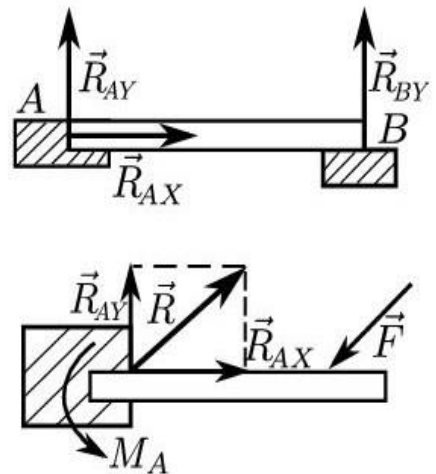


Рис. 7.3

7.2. Види навантажень балкових систем

Навантаженнями називають зовнішні сили, які діють на елементи конструкцій чи деталі машин і споруд під час їх експлуатації.

За часом дії навантаження бувають:

- 1) **постійні**, які діють завжди;
- 2) **тимчасові**, що діють протягом обмеженого періоду часу.

Змінне навантаження – навантаження, яке змінюється з часом. **Залежно від характеру прикладання сил у часі розрізняють:**

- 1) **статичні навантаження**, які відносно повільно й плавно зростають від нуля до свого граничного значення, а далі

залишаються незначно змінними. Прискорення елементів конструкції і сили інерції відсутні або настільки малі, що ними можна знехтувати;

2) **динамічні навантаження** – навантаження, яке змінює свою величину за малий час. При цьому виникають сили інерції та значні прискорення, якими не можна нехтувати. Динамічні навантаження поділяють на:

а) **миттєво прикладені**, які зростають від нуля до свого граничного значення за дуже малий проміжок часу (частки секунди);

б) **ударні навантаження**, для яких характерне те, що в мить їх прикладання тіло, яке спричинює навантаження, має певну кінетичну енергію;

в) **повторно-змінні навантаження**, які безперервно й періодично змінюються в часі. Вони, як правило, пов'язані з рухами деталей, що циклічно змінюються.

За характером прикладання навантаження поділяють на:

1) **зосереджені** (рис. 7.4) – такі зовнішні сили, що передаються на елемент конструкції через нескінченно малі площадки (прикладені до тіла в певній точці);

2) **розподілені** (рис. 7.5 – 7.9) – такі зовнішні сили, що діють на одиницю об'єму, площі або довжини конструкції. Навантаження можуть бути: рівномірно розподіленими за довжиною, площею або об'ємом.

Навантаження характеризуються **інтенсивністю** – силою, що припадає на одиницю об'єму ($\vec{\gamma}$), площі поверхні ($\vec{p}$) чи довжини лінії ($\vec{q}$) відповідно. Будь-яке реальне навантаження прикладене до певної ділянки тіла. В основному трапляються **паралельні і збіжні розподілені навантаження**.

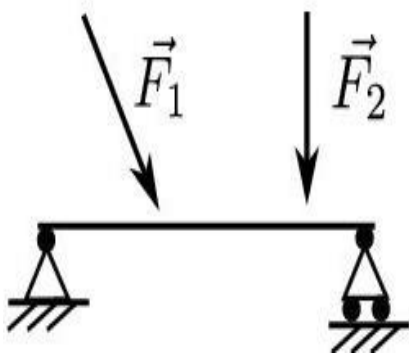


Рис. 7.4

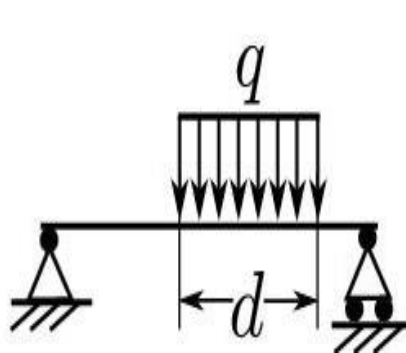


Рис. 7.5

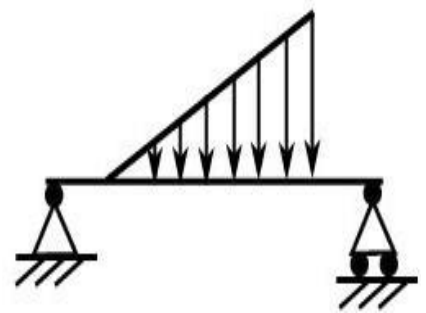


Рис. 7.6

Паралельне навантаження, що прикладене під прямим кутом до елемента споруди або деталі машини, може бути перетворене на зосереджене:

$$\text{а) за довжиною } Q = q \cdot \ell, [q] = H/m; \quad (7.1)$$

$$\text{б) за площею } P = pS, [p] = H/m^2; \quad (7.2)$$

$$\text{в) за об'ємом } G = \gamma V, [\gamma] = H/m^3. \quad (7.3)$$

Поверхневі сили можуть бути неперервно розподілені по всій поверхні тіла або її частині. Навантаження, що припадає на одиницю площі $p = P/S$ називається інтенсивністю поверхневого навантаження (рис. 7.8). Її виражають у паскалях (Па) або кратних одиницях (кПа, МПа, ГПа).

Розподілене по поверхні навантаження зводять до головної площини (рис. 7.8), унаслідок чого створюється **навантаження, розподілене по лінії**. Інтенсивністю такого навантаження $q = p\ell$ називають навантаження, що припадає на одиницю довжини лінії ($Q = q\ell = p\ell\ell$). Характер зміни лінійно розподіленого навантаження зображують у **вигляді епюри (графіка)** залежності q від ℓ . У разі рівномірно розподіленого навантаження по довжині (рис. 7.5-7.8) епюра q прямокутна. При дії гідростатичного тиску епюра навантаження q трикутна (рис. 7.9).

Рівнодійна розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі його епюри і прикладена в центрі її тяжіння.

Перетворення **нерівномірно розподіленого навантаження** на зосереджене має більш складний алгоритм. Розглянемо паралельні сили, які розподілені перпендикулярно по відрізку AB прямої довжиною ℓ з інтенсивністю q , що змінюється за лінійним законом (трикутником) (рис. 7.7). Найбільша інтенсивність сили становить q_m . Замінімо розподілені сили зосередженими. Для цього відрізок AB розіб'ємо на елементарні відрізки довжиною Δx_i .

На кожен такий відрізок діє сила $q_i \Delta x_i$, яку при достатньо малих розмірах відрізка Δx_i можна вважати зосередженою силою. Для того, щоб замінити одержану таким чином систему зосереджених паралельних сил однією рівнодіючою силою R , необхідно провести їх додавання.

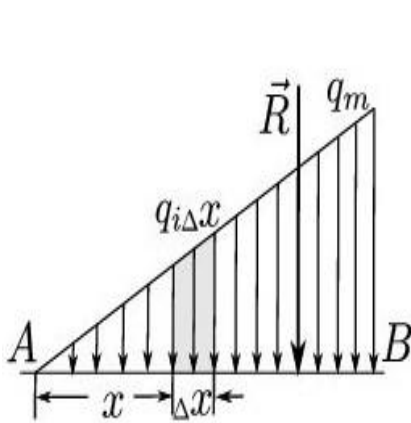


Рис. 7.7

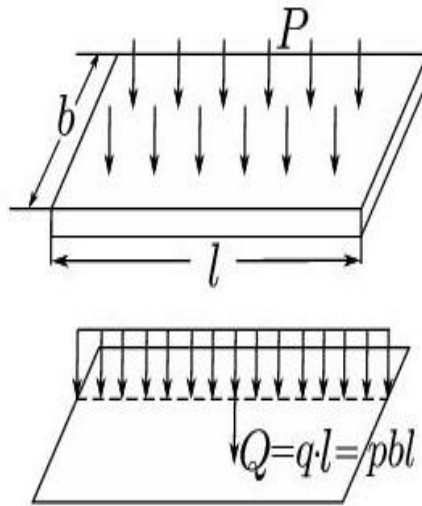


Рис. 7.8

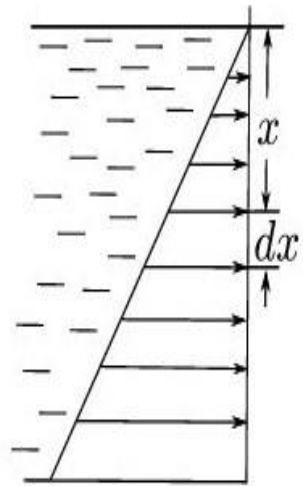


Рис. 7.9

Найпростіше це можна зробити шляхом інтегрування:

$$R = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n q_i \Delta x_i = \int_0^{\ell} q dx. \quad (7.4)$$

Якщо x відраховувати від точки A , то з подібності трикутників

маємо:
$$\frac{q}{x} = \frac{q_m}{\ell}, \quad q = \frac{q_m}{\ell} x. \quad (7.5)$$

Підставляючи замість q під інтеграл його значення, одержимо:

$$R = \int_0^{\ell} \frac{q_m}{\ell} x dx = \frac{q_m}{\ell} \frac{\ell^2}{2} = \frac{q_m \ell}{2}. \quad (7.6)$$

Точка C прикладання рівнодіючої сили R збігається з центром тяжіння площі трикутника, що знаходиться в точці перетину медіан, яка розташована від основи трикутника на відстані $2/3$ від його вершини A , тобто $AC = \ell \cdot 2/3$.

Точку прикладання рівнодіючої можна також визначити, обрахувавши момент елементарних зосереджених сил $(\vec{q}_i \Delta x_i)$, наприклад, відносно точки A , та застосувавши потім теорему Варіньона про момент рівнодіючої сили:

$$R \cdot AC = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i q_i \Delta x_i = \int_0^{\ell} q x dx = \int_0^{\ell} \frac{q_m}{\ell} x^2 dx = \frac{q_m}{\ell} \frac{\ell^3}{3} = \frac{q_m \ell^2}{3}. \quad (7.7)$$

Відстань до точки прикладання рівнодіючої сили R :

$$AC = \frac{q_m \ell^2}{3} \frac{1}{R} = \frac{q_m \ell^2}{3} \frac{2}{q_m \ell} = \frac{2}{3} \ell. \quad (7.8)$$

Жорстке защемлення

Опора не допускає переміщень і поворотів. Защемлення замінюють складовими сили і парою моментів R_{Ax} , R_{Ay} і M_R . Для визначення цих невідомих використовують рівняння:

$$\sum_0^n F_{ix} = 0; \quad \sum_0^n F_{iy} = 0; \quad \sum_0^n m_{iA} = 0.$$

Для контролю правильного розв'язання використовують додаткове рівняння моментів відносно будь-якої точки на балці: $\sum_0^n m_{iB} = 0$.

Шарнірно-рухома опора

Опора дозволяє поворот навколо шарніра і переміщення вздовж опорної поверхні. Реакція направлена перпендикулярно опорній поверхні.

Шарнірно-нерухома опора

Опора дозволяє поворот навколо шарніра і може бути замінена двома складовими сили вздовж осей координат.

Балка на двох шарнірних опорах

1. Невідомі три сили (реакції), тому зручно використати рівняння у другій формі: $\sum_0^n m_{iA} = 0$; $\sum_0^n m_{iB} = 0$; $\sum_0^n F_{ix} = 0$. Для контролю правильного розв'язання використовують додаткове рівняння: $\sum_0^n F_{iy} = 0$.

2. Якщо три сили не лежать на одній прямій, то зручно використовувати систему рівнянь у третій формі:

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_C(\vec{F}_i) = 0.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається балкою?
2. Які види кріплень балок вам відомі?
3. Які сили називають навантаженнями?
4. На які види поділяють навантаження за характером дії?
5. Які навантаження називають зосередженими?
6. Чим розподілені навантаження відрізняються від зосереджених?

7. На які види поділяють розподілені навантаження?
8. На які види поділяють навантаження за часом дії?
9. Як рівномірно розподілене паралельне навантаження, що прикладене під прямим кутом, може бути перетворене на зосереджене за довжиною?
9. Чи може рівномірно розподілене паралельне навантаження, прикладене під прямим кутом, бути перетворене на зосереджене за площею та об'ємом?
10. Чому дорівнює і де прикладена рівнодійна паралельних сил, розподілених по відрітку прямої з інтенсивністю, що змінюється за лінійним законом?

7.3. Приклади розв'язання задач

Задача 1 (жорстке защемлення). Плоска одноопорна (защемлена) балка навантажена зосередженими силами ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$) і парою сил m . Визначити величини реакцій защемлення (Рис. 7.10). Дані: $F_1 = 20\text{кН}$; $F_2 = 8\text{кН}$; $m = 12\text{кНм}$; $a = 0,3\text{м}$.

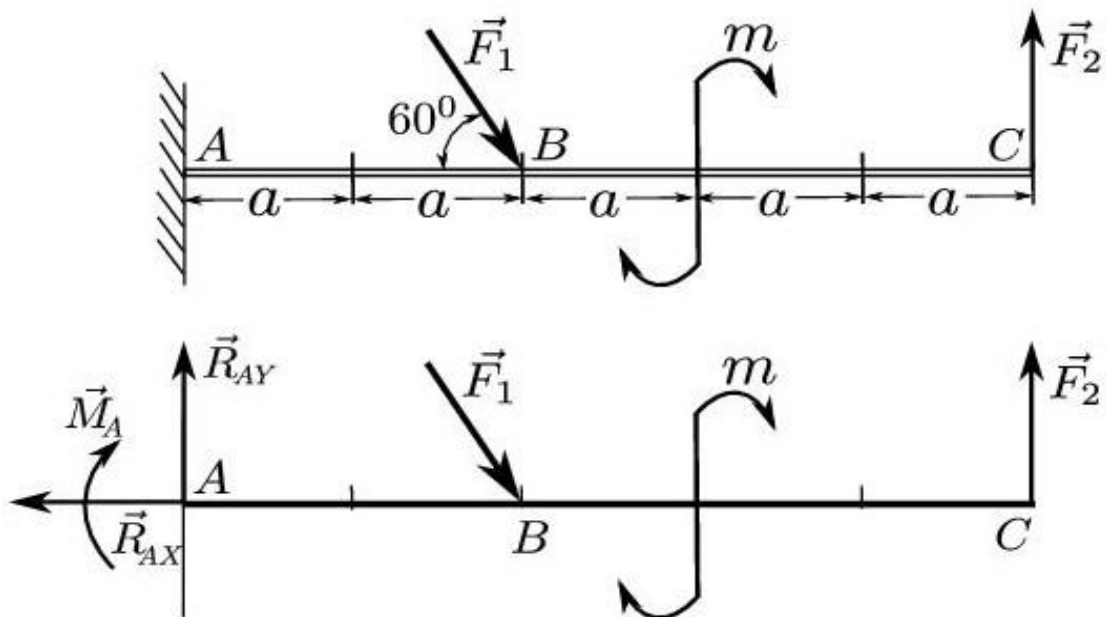


Рис. 7.10

Розв'язання

Защемлення (в'язь) замінюємо складовими сили R_{Ax}, R_{Ay} і моментом пари M_R . Для визначення цих невідомих запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_0^n F_{ix} = F_1 \cos 60^\circ - R_{Ax} = 0; \quad \sum_0^n F_{iy} = F_2 - F_1 \sin 60^\circ + R_{Ay} = 0;$$

$$F_1 \sin 60^\circ \cdot 2a + m - F_2 \cdot 5a - M_A = 0.$$

Знайдемо невідомі величини:

$$R_{Ax} = F_1 \cos 60^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН}.$$

$$R_{Ay} = F_1 \sin 60^\circ - F_2 = 20 \cdot 0,866 - 8 = 9,32 \text{ кН}.$$

$$M_A = F_1 \sin 60^\circ \cdot 2a + m - F_2 \cdot 5a = 20 \cdot 0,866 \cdot 0,6 + 12 - 8 \cdot 1,5 = 10,392 \text{ кНм}.$$

Перевірка розв'язання:

$$\sum_0^n m_{iB} = R_{Ay} \cdot 2a + m - F_2 \cdot 3a - M_A = 9,32 \cdot 0,6 + 12 - 8 \cdot 0,9 - 10,392 = 0.$$

Задача 2. Двохопорна балка із шарнірними опорами A і B навантажена зосередженою силою $\vec{F}$, розподіленим навантаженням і парою сил (рис. 7.11). Визначити величини реакцій в шарнірних опорах балки.

Дані: $F = 100 \text{ кН}$; $q = 4 \text{ кН/м}$; $m = 25 \text{ кНм}$; $a = 0,6 \text{ м}$.

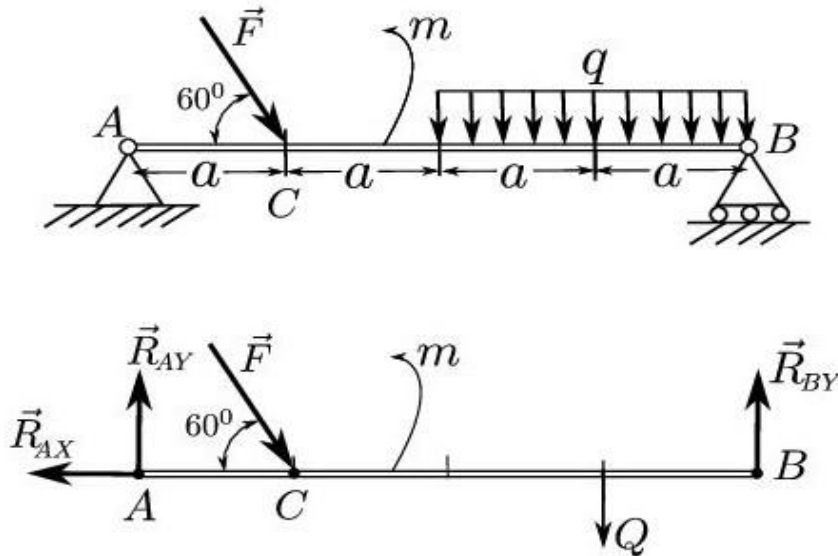


Рис. 7.11

Розв'язання

В'язі заміняємо складовими силами R_{Ax} , R_{Ay} і R_{By} . Для визначення цих реакцій запишемо рівняння рівноваги у другій формі:

$$\sum_0^n m_{iA} = F \sin 60^\circ \cdot a - m + Q \cdot 3a - R_{By} \cdot 4a = 0;$$

$$\sum_0^n m_{iC} = R_{Ay} \cdot a - m + Q \cdot 2a - R_{By} \cdot 3a = 0;$$

$$\sum_0^n F_{ix} = F_1 \cos 60^\circ - R_{Ax} = 0.$$

Знайдемо невідомі величини:

$$\sum_0^n m_{iA} = 100 \cdot 0,866 \cdot 0,6 - 25 + 4,8 \cdot 3 \cdot 0,6 - R_{By} \cdot 4 \cdot 0,6 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{86,6 \cdot 0,6 - 25 + 4,8 \cdot 1,8}{4 \cdot 0,6} = 14,833 \text{ кН};$$

$$\sum_0^n m_{iC} = R_{Ay} \cdot 0,6 - 25 + 4 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 0,6 - R_{By} \cdot 0,6 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{m - Q \cdot 2a + R_{By} \cdot 3a}{a} = \frac{25 - 4,8 \cdot 1,2 + 14,833 \cdot 1,8}{0,6} = 76,566 \text{ кН}.$$

Перевірка розв'язання:

$$\sum_0^n F_{iy} = R_{Ay} - F \sin 60^\circ - Q + R_{By} = 76,566 - 86,6 - 4,8 + 14,833 = 0.$$

8. ЦЕНТР ТЯЖІННЯ

8.1. Центр тяжіння абсолютно твердого тіла

Сила тяжіння – рівнодіюча сил тяжіння всіх частин тіла до Землі. Сили тяжіння, що прикладені до частинок тіла, утворюють систему сил, лінії дії яких сходяться у центрі Землі. Розмірами тіла можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, тому з великим ступенем точності можна вважати, що сили тяжіння, які діють на окремі частини тіла, утворюють систему паралельних сил.

Зрозуміло, що в задачах небесної механіки, про рух штучних супутників Землі, про рух кораблів, літаків, ракет тощо сили тяжіння розглядаються як центральні сили.

Розглянемо абсолютно тверде тіло, що складається з окремих частин, на які діють сили тяжіння $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$, прикладені в різних точках (рис. 8.1).

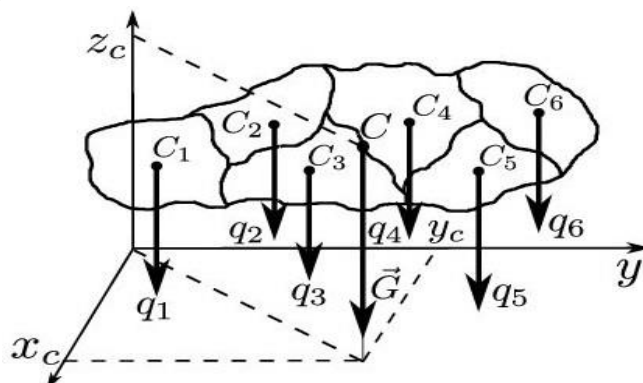


Рис. 8.1

Ці сили можна вважати паралельними між собою.

Рівнодіюча $\vec{G}$ цієї системи паралельних сил тяжіння $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n)$ дорівнює їх сумі $\vec{G} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \dots + \vec{q}_n$ і є силою тяжіння, що діє на все абсолютно тверде тіло, а центр цієї системи паралельних сил, в якому прикладена сила $\vec{G}$, називається **центром тяжіння тіла** C з координатами (x_C, y_C, z_C) . У твердому тілі центр тяжіння займає певне положення, що не залежить від розміщення тіла в просторі.

Для визначення точки прикладання сили тяжіння (рівнодійної паралельних сил) використаємо теорему Варіньона про момент рівнодіючої.

Розглянемо тіло, яке складене з деяких частин у просторовій системі координат (рис. 8.1). Сили тяжіння частин q_i прикладені в центрах тяжіння (ЦТ) цих частин. Координати частин (x_i, y_i, z_i) . Координати центра тяжіння твердого тіла, як центра паралельних сил:

$$M_x \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) = Gy_C = \sum_{i=1}^n q_i y_i; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n q_i y_i}{G}; \quad (8.1)$$

$$M_y \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) = Gx_C = \sum_{i=1}^n q_i x_i; \quad x_C = \frac{\sum_{i=1}^n q_i x_i}{G}; \quad (8.2)$$

$$M_z \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) = Gz_C = \sum_{i=1}^n q_i z_i; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n q_i z_i}{G}. \quad (8.3)$$

Визначимо положення центра тяжіння однорідного тіла об'ємом V і масою m , що має постійну питому густину $\rho = \text{const}$. Сила тяжіння, що діє на все однорідне тіло, визначається формулою: $G = mg = \rho Vg = \gamma V$, де $\gamma = \rho g$ – питома сила тяжіння (сила тяжіння, яка діє на одиницю об'єму однорідного тіла).

У однорідному тілі сила тяжіння пропорційна його об'єму:

$$G = \gamma V; \quad (8.4)$$

Силу тяжіння, що діє на окрему частину однорідного тіла масою $m_i = \rho V_i$ з координатами її центра $C_i(x_i, y_i, z_i)$, визначаємо за формулою:

$$q_i = m_i g = \rho V_i g = \gamma V_i, \quad (8.5)$$

де V_i – об’єм даної частини однорідного тіла. Тоді з формул (8.2), (8.3) одержимо:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma V_i x_i}{\gamma V} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{V}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_i}{V}, \quad (8.6)$$

де V_i – об’єм елемента тіла; V – об’єм всього тіла.

8.2. Центр тяжіння однорідних плоских тіл (фігур)

Однорідне тіло що має форму тонкої пластинки, можна розглядати як матеріальну плоску фігуру. Положення центра тяжіння C плоскої фігури визначаємо двома координатами. Для плоских тіл можна записати: $V = A \cdot h$, де A – площа фігури;

h – товщина. Розіб’ємо пластинку на скінченне число окремих фігур з площею A_i та координатами центра тяжіння (x_i, y_i) . Сила тяжіння, що діє на будь-яку окрему фігуру номер i визначається формулою: $G_i = \gamma V_i = \gamma A_i h$.

Після підстановки отримаємо формули для координат центра тяжіння:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i h \cdot x_i}{Ah} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{A}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i h \cdot y_i}{Ah} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{A}; \quad z_C = \frac{h}{2}, \quad (8.7)$$

де A_i – площа частини перерізу; x_i, y_i, z_i – координати ЦТ частин перерізу;

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i - \text{статичний момент площини } S_y;$$

$$\sum_{i=1}^n A_i y_i - \text{статичний момент площини } S_x.$$

Координати центра тяжіння плоскої фігури:

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A}. \quad (8.8)$$

Осі, що проходять крізь центр тяжіння, називаються центральними. Статичний момент відносно центральної осі дорівнює нулю.

Розташування центра тяжіння простих геометричних фігур можна розрахувати за відомими формулами (рис. 8.2). Для розв'язання задач використовують такі методи:

- 1) **симетрії**: центр тяжіння симетричних фігур знаходиться на осі симетрії;
- 2) **розділення**: складні перерізи поділяють на декілька простих частин, положення ЦТ яких легко визначити;
- 3) **від'ємних площин**: полості (отвори) розглядають як перерізи з від'ємною площиною.

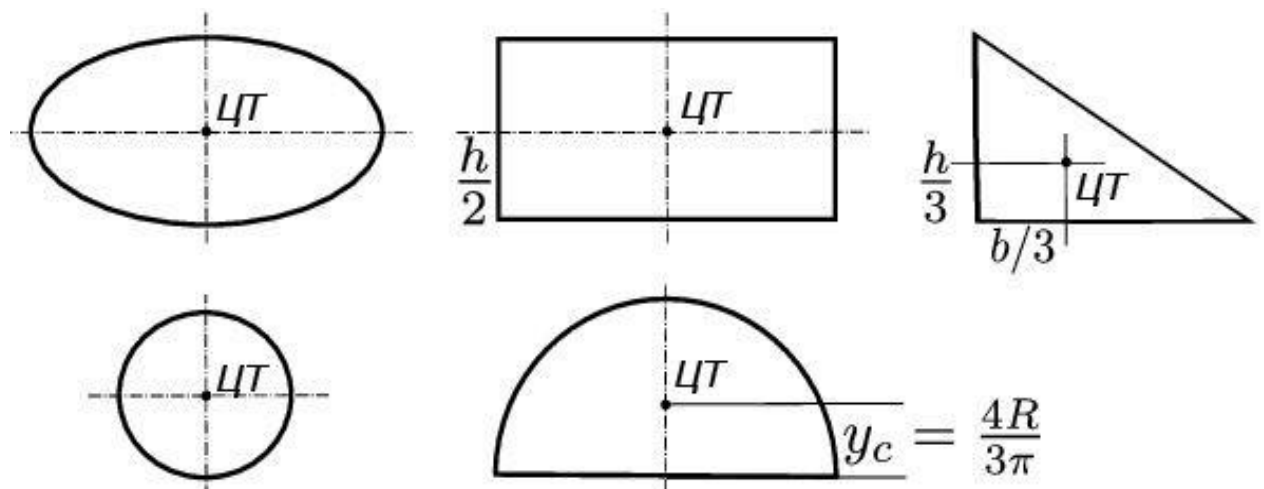


Рис. 8.2

8.3. Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Визначити положення центра тяжіння плоскої фігури зображеної на рис. 8.3:

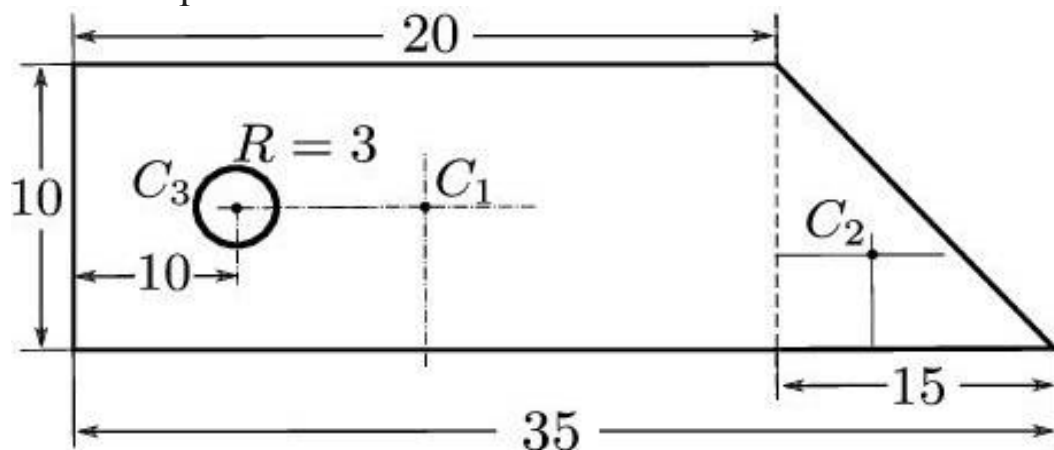


Рис. 8.3

Розв'язання

Розіб'ємо фігуру на три частини: прямокутник, трикутник, круг.
Знайдемо площі цих фігур:

1 – *прямокутник*, $A_1 = 10 \cdot 20 = 200 \text{ см}^2$;

2 – *трикутник*, $A_2 = 0,5 \cdot 10 \cdot 15 = 75 \text{ см}^2$;

3 – *круг*, $A_3 = \pi R^2 = 3,14 \cdot 3^2 = 28,3 \text{ см}^2$;

Знайдемо координати центрів тяжіння фігур:

ЦТ фігури 1: $x_1 = 10 \text{ см}$; $y_1 = 5 \text{ см}$.

ЦТ фігури 2: $x_2 = 20 + 1/3 \cdot 15 = 25 \text{ см}$; $y_2 = 1/3 \cdot 10 = 3,3 \text{ см}$;

ЦТ фігури 3: $x_3 = 10 \text{ см}$; $y_3 = 5 \text{ см}$.

Знайдемо координати центра тяжіння фігури:

$$x_c = \frac{200 \cdot 10 + 75 \cdot 25 - 28,3 \cdot 10}{200 + 75 - 28,3} = 14,5 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{200 \cdot 5 + 75 \cdot 3,3 - 28,3 \cdot 5}{200 + 75 - 28,3} = 4,48 \text{ см}.$$

Контрольні запитання

1. Запишіть формули для координат центра паралельних сил.
2. Що називається центром тяжіння твердого тіла?
3. Запишіть формули для координат центра тяжіння твердого тіла.
4. Запишіть формули для координат центра тяжіння тіла, що складається зі скінченного числа окремих однорідних частин, які мають різні питомі густини.
5. Запишіть формули для координат центра тяжіння неоднорідного абсолютно твердого тіла.
6. Запишіть формули для координат центра тяжіння площі однорідної пластини, яка розбита на скінченне число окремих фігур.
7. Запишіть формули для координат центра тяжіння площі неоднорідної пластини.
8. У чому полягає спосіб від'ємних площ при визначенні координат центра тяжіння плоскої фігури?
9. У чому полягає такий спосіб від'ємних об'ємів?
10. Запишіть та поясніть формули для координат центра тяжіння куска однорідного тонкого дроту постійного перерізу.
11. Поясніть, у чому полягає метод симетрії при визначенні координат центра тяжіння однорідного абсолютно твердого тіла.

9. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

9.1. Кінематика поступального руху

Кінематика розглядає рух як переміщення в просторі. Причини руху не розглядаються.

Матеріальна точка – макроскопічне тіло, розмірами і формою якого можна знехтувати в умовах задачі.

Траєкторія – сукупність точок простору, які послідовно проходить матеріальна точка, що рухається. Форма траєкторії залежить від вибору системи відліку.

Існують три способи опису механічного руху:

1. Функціональний (основне рівняння руху – залежність шляху від часу): $S = S(t)$.

2. Координатний (основне рівняння руху – залежності координат від часу):

$$\begin{cases} r_x = x(t); \\ r_y = y(t); \\ r_z = z(t). \end{cases}$$

Оскільки декартові координати точки чисельно збігаються з проекціями вектора на осі координат, то має місце розкладання:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти) уздовж додатних напрямів осей ОХ, ОУ, ОZ (рис.1.3) відповідно. Довжина кожного з ортів дорівнює $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

3. Векторний (основне рівняння руху – залежність радіуса-вектора від часу): $\vec{r} = \vec{r}(t)$,

де $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$, де $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$;

за модулем $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$;

$$\cos \alpha = \frac{r_x}{r}; \quad \cos \beta = \frac{r_y}{r};$$

$$\cos \gamma = \frac{r_z}{r};$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

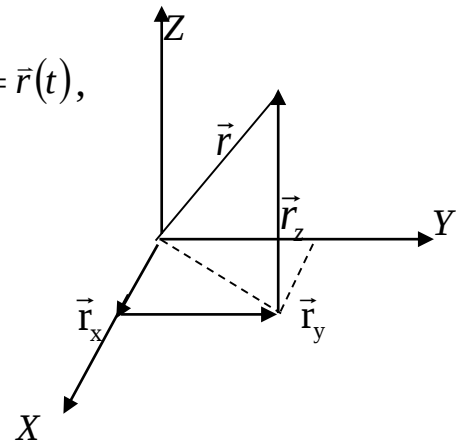


Рис. 9.1

9.2. Основні характеристики механічного руху

Шлях – довжина ділянки траєкторії. Шлях S , що пройдений точкою з її початкового положення, є скалярною функцією часу: $S = S(t)$. Шлях є сумою довжин усіх ділянок траєкторії, тому вона не може бути негативною величиною.

Переміщення – це спрямований відрізок прямої, що з'єднує початкове і кінцеве положення тіла $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Очевидно (рис. 9.2, 9.3), що за модулем переміщення менше або дорівнює довжині шляху $\Delta r \leq \Delta S$.

Рух матеріальних об'єктів характеризується швидкістю.

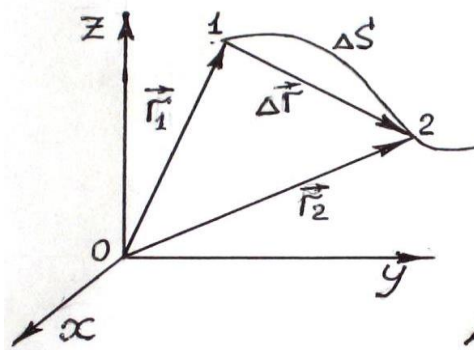


Рис. 9.2

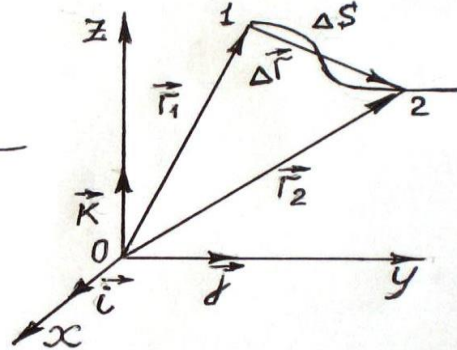


Рис. 9.3

Швидкість – векторна величина, що характеризує переміщення за одиницю часу.

Середньою шляховою швидкістю нерівномірного руху точки на шляху S називається фізична величина, що дорівнює відношенню загального шляху до часу руху:

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t}. \quad (9.1)$$

Миттєва швидкість (за модулем) дорівнює границі, до якої прямує відношення шляху ΔS до часу, якщо час прямує до нуля:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (9.2)$$

Тобто миттєва швидкість точки дорівнює першій похідній від шляху за часом. У разі такого визначення ми матимемо лише абсолютну величину швидкості, у той час як *швидкість* – це величина, що характеризується ще й напрямом.

Миттєва швидкість (як векторна величина) дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектора цієї точки $\vec{r}$:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (9.3)$$

Вектор швидкості $\vec{v}$ завжди спрямований за дотичною до траєкторії і може бути представлений у вигляді:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z, \quad (9.4)$$

де $\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z$ – проекції швидкості на осі координат. Вони дорівнюють:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (9.5)$$

Модуль вектора швидкості:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (9.6)$$

Зміна швидкості характеризується прискоренням.

Прискорення – це векторна фізична величина, що дорівнює зміні швидкості за одиницю часу, тобто прискорення – це перша похідна від швидкості за часом:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (9.7)$$

9.3. Повне прискорення під час криволінійного руху

Під час руху тіла швидкість може змінюватися як за модулем dv_τ , так і за напрямом $d\vec{v}_n$ (рис. 9.8). Зміна швидкості за напрямом за одиницю часу характеризується нормальним (доцентровим) прискоренням $\alpha_n = v^2 / R$, зміна швидкості за модулем – тангенціальним (дотичним) прискоренням $a_\tau = dv/dt$.

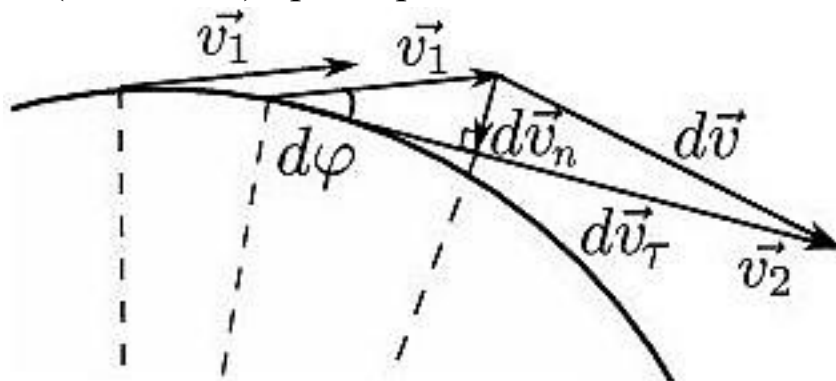


Рис. 9.8

Вектор повного прискорення дорівнює сумі нормального і тангенціального прискорення:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \quad (9.8)$$

Модуль повного прискорення дорівнює кореню квадратному із суми квадратів нормального і тангенціального прискорення:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left\langle \frac{v^2}{R} \right\rangle^2 + \left\langle \frac{dv}{dt} \right\rangle^2}. \quad (9.9)$$

Напрям векторів зміни повної $d\vec{v}$, нормальної $d\vec{v}_n$ і тангенціальної швидкостей $d\vec{v}_\tau$ показано на рис. 9.8.

Найпростіші рухи твердого тіла

Будь-який складний рух складається із найпростіших. Розрізняють два простих типи рухів – *поступальний і обертальний*. При поступальному русі траєкторії усіх точок твердого тіла ідентичні в будь-який момент часу, тобто швидкості і прискорення однакові для всіх точок твердого тіла.

За формою траєкторії розрізняють прямолінійний та криволінійний рухи. Найбільш простим криволінійним рухом є обертальний. ***Обертальним*** називають такий рух, при якому всі точки тіла описують кола з центрами, що розміщені на одній прямій, яка називається віссю обертання.

9.4. Кінематика обертального руху

Шлях і лінійна швидкість не можуть бути основними кінематичними характеристиками, тому що вони лежать на різній відстані від осі обертання (рис. 9.10). Положення точки можна визначити завдяки відліку кута φ , який утворюють радіус точки і початковий радіус. Таким чином, ***кінематичне рівняння обертального руху – це залежність кута обертання від часу:***

$\varphi = \varphi(t)$. Кутове переміщення $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Кутове переміщення за дуже малий час $dt \rightarrow d\varphi$.

Вектор кутового переміщення $d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{n}$ за модулем дорівнює куту елементарного оберту $d\varphi$ і спрямований по осі обертання (рис. 9.11). Напрям вектора кутового переміщення визначається за правилом буравчика (правило гвинта).

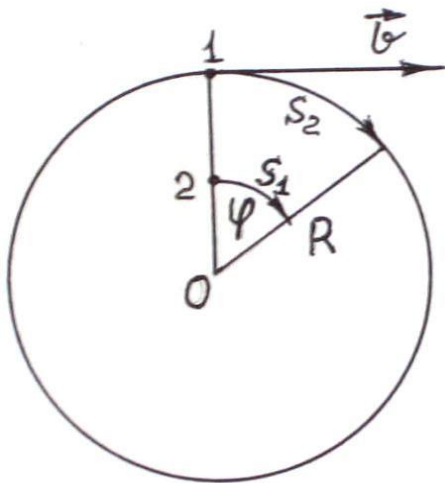


Рис. 9.10

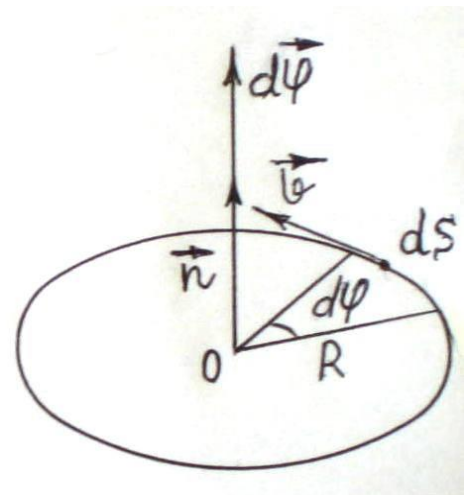


Рис. 9.11

Середня кутова швидкість $\langle \vec{\omega} \rangle$ – фізична величина, що дорівнює кутовому переміщенню $\Delta \varphi$ за одиницю часу (вимірюється в рад/с):

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (9.10)$$

Миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}$ – це похідна від переміщення за часом:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (9.11)$$

Миттєва кутова швидкість ($\vec{\omega}$) – вектор, що спрямований по осі обертання. Напрямок кутової швидкості визначається за правилом буравчика.

Середнє кутове прискорення $\langle \vec{\varepsilon} \rangle$ дорівнює зміні швидкості за одиницю часу (вимірюється в рад/с²):

$$\langle \vec{\varepsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}. \quad (9.12)$$

Миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ – це похідна від кутової швидкості за часом:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (9.13)$$

Період обертання T – час повного оберту на кут 2π рад.

Частота обертання $\nu = \frac{1}{T}$ – число обертів за одиницю часу.

Зв'язок між лінійними і кутовими параметрами

Шлях точки по дузі кола $\Delta S = R\Delta\varphi$, де $\Delta\varphi$ кут у радіанах, тоді

$$v = \lim \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = \omega R. \quad (9.14)$$

З формули (9.14) випливає, що лінійна швидкість зростає зі збільшенням радіуса. Із урахуванням $\vec{\omega} \perp \vec{R}$ і $\sin(\omega \wedge R) = 1$ швидкість обертального руху дорівнює:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (9.15)$$

Лінійна швидкість дорівнює векторному добутку кутової швидкості на радіус-вектор точки.

9.5. Складний рух точки і тіла

Складним називають рух, який можна розкласти на декілька простих – поступальних і обертальних. При складному русі одночасно розглядається рух відносно двох систем відліку, одна з яких (основна) приймається за нерухому, а інша рухається відносно першої. Введемо такі визначення.

Відносний рух – це рух точки відносно рухомої системи відліку (до осей $Ox_1y_1z_1$).

Відносна траєкторія – це траєкторія, що описується точкою у відносному русі. Кінематичні характеристики цього руху називають відповідно відносною швидкістю v_r і відносним прискоренням a_r .

Переносний рух – це рух рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ і незмінно зв'язаних з нею точок простору відносно нерухомої системи координат $Oxyz$.

Приклад. Людина іде по салону літака. Її рух по салону відносно літака – це відносний рух. Рух людини відносно землі – абсолютний рух. Рух літака, в якому перебуває людина – переносний рух.

Абсолютний, або складний – це рух точки M відносно нерухомої системи координат $Oxyz$. Траєкторія цього руху називається абсолютною. Кінематичні характеристики цього руху

називають відповідно абсолютною швидкістю (v_a) й абсолютним прискоренням (a_a). Задачами кінематики складного руху є:

- 1) Визначення параметрів абсолютного руху точки за відомими параметрами відносного і переносного рухів;
- 2) Визначення параметрів відносного і переносного рухів за відомими параметрами абсолютного руху.

Розглянемо складний рух на прикладі плоскопаралельного руху тіла (рис. 9.12) і колеса (рис. 9.13) по дорозі.

Плоскопаралельним називається рух твердого тіла, за яким всі точки тіла рухаються паралельно нерухомій у даній системі відліку площині. Плоскопаралельний рух вивчають методом розкладання складного руху на поступальний та обертальний і методом миттєвих центрів швидкостей. У методі розкладання для визначення швидкості будь-якої точки твердого тіла використовують теорему про складання швидкостей (рис. 9.12).

Теорема про додавання швидкостей при складному русі:

При складному русі точки абсолютна швидкість у кожен момент часу дорівнює геометричній сумі переносної (v_r) і відносної (v_e) швидкостей (рис. 9.13):

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos \alpha}. \quad (9.16)$$

Аналогічно визначають і прискорення будь-якої точки (a_e).

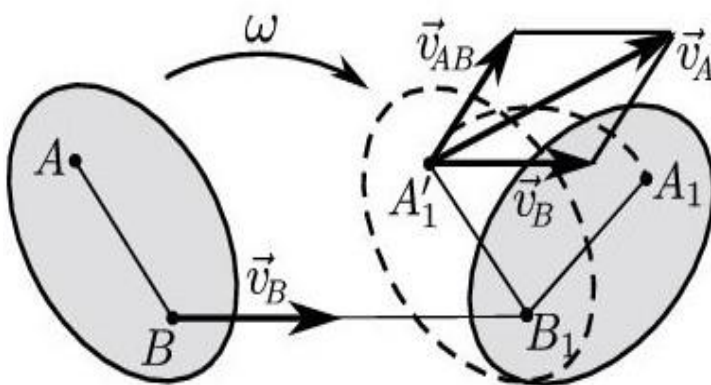


Рис. 9.12

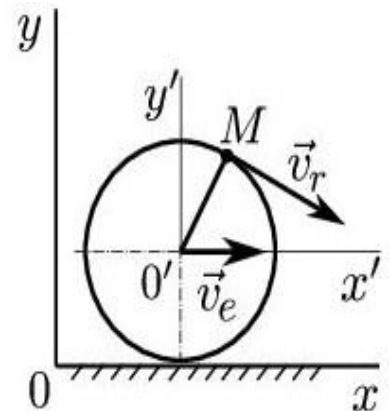


Рис. 9.13

Розглянемо складний рух тіла, що рухається відносно рухомої системи координат, яка у свою чергу рухається відносно основної, нерухомої системи координат (рис. 9.12). Точка A поступально

рухається сумісно з точкою B , а потім повертається навколо точки B з кутовою швидкістю ω . Тоді абсолютна швидкість точки A :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AB} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (9.17)$$

де $r = AB$.

Контрольні запитання

1. Що таке матеріальна точка, абсолютно тверде тіло?
2. Які засоби опису руху ви знаєте?
3. Що таке шлях, переміщення? Яка різниця між ними?
4. Що таке середня шляхова швидкість?
5. Що таке миттєва швидкість? Запишіть формулу.
6. Що таке прискорення? Запишіть формули середнього, миттєвого прискорення.
7. Що таке кутове переміщення, кутова швидкість? Як напрямлений вектор кутової швидкості?
8. Що таке кутове прискорення? Як напрямлений вектор кутового прискорення?
9. Які існують зв'язки між поступальними і обертальними характеристиками руху?
10. Що таке нормальне, тангенціальне та повне прискорення? Як вони напрямлені? Запишіть формули.
11. Що таке відносний рух?
12. Що таке переносний рух?
13. Що таке абсолютна швидкість точки? Запишіть формулу.

10. ПОНЯТТЯ І АКСІОМИ ДИНАМІКИ

10.1. Аксиоми динаміки

Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому встановлюється зв'язок між рухом тіл і діючими на них силами. У динаміці розв'язують два типи задач: визначають параметри руху за заданими силами або визначають сили, що діють на тіло, за заданими кінематичними параметрами.

Динаміку поділяють на динаміку точки і динаміку твердого тіла. Закони класичної механіки прийнято розглядати як аксіоми.

• **Перша аксіома (принцип інерції):** *Ізольована матеріальна точка знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямиолінійного руху, доки прикладені сили не виведуть її з цього*

стану. Властивість тіл зберігати цей стан руху називають **інертністю**. Мірою інертності є маса. Маса є адитивною величиною, тобто маса тіла дорівнює масі усіх її частинок. У міжнародній системі одиниць СІ одиниця маси – кілограм (1кг) є основною одиницею вимірювань.

• **Друга аксіома** (другий закон Ньютона) – основний закон динаміки: прискорення матеріальної точки прямо пропорційне силі, що її викликає, і збігається з нею за напрямом:

$$F = ma = m \frac{d^2S}{dt^2}; \text{ де } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}. \quad (10.1)$$

З формули (10.1) випливає, що чим більше маса тіла, тим повільніше воно змінює свою швидкість. Фізична величина, що характеризує інертність тіла, називається масою цього тіла.

• **Третя аксіома** (третій закон Ньютона): матеріальні тіла взаємодіють з силами, рівними за модулем і протилежними за напрямом:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}; \vec{F}_{12} = m_1 a_1; \vec{F}_{21} = m_2 a_2. \quad (10.2)$$

Ці сили завжди прикладені до різних тіл.

• **Четверта аксіома** (закон незалежності дії сил): кожна сила системи сил діє так, як би вона діяла одна. Прискорення, яке передається точці системою сил, дорівнює геометричній сумі прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2. \quad (10.3)$$

10.2. Поняття про тертя

Тертя – опір, що виникає при переміщенні одного тіла по поверхні другого і перешкоджає їхньому відносному переміщенню. Розрізняють зовнішнє, внутрішнє і в'язке тертя. В'язке тертя виникає під час руху тіл в рідині та газі. Сила в'язкого тертя прямо пропорційна швидкості руху тіла. Причина зовнішнього тертя – механічне зачеплення виступів взаємодіючих тіл, а також взаємодія між атомами дотичних тіл. Види зовнішнього тертя: спокою, ковзання, кочення. Сила зовнішнього тертя завжди спрямована у бік, протилежний напрямку руху тіла. Сила зовнішнього тертя прямо пропорційна силі нормального тиску R :

$$F_{\text{тер}} = fR, \quad (10.4)$$

де f – коефіцієнт тертя.

Розрізняють три види зовнішнього тертя: **тертя спокою, тертя ковзання, тертя кочення**. Для цих видів тертя існує таке співвідношення між коефіцієнтами тертя: $f_{сп} > f_{ков}$.

Коефіцієнт тертя залежить від матеріалу деталей, швидкості переміщення.

Тертя кочення пов'язано із взаємною деформацією колеса і ґрунту (рис. 10.1):

$$F_{пyx} r = Rk; \quad R = G; \quad F_{пyx} \geq k \frac{G}{r}, \quad (10.5)$$

де k – максимальне значення плеча (половина колії), приймається за коефіцієнт тертя кочення, см.

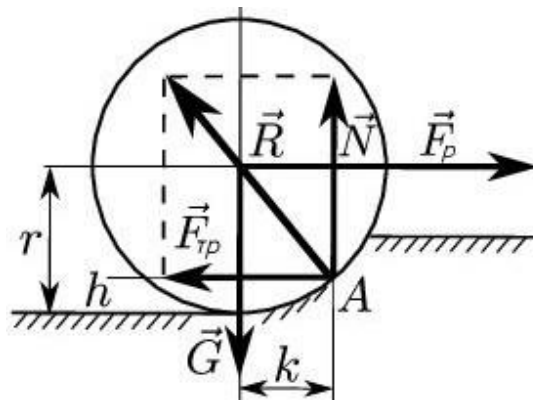


Рис. 10.1

Коефіцієнт тертя кочення визначається експериментально (сталь-сталь $k \approx 0,005\text{см}$, гумова шина на шосе $k \approx 0,24\text{см}$).

10.3. Сили інерції

Інертність – властивість тіл зберігати стан руху незмінним. Сила інерції виникає під час розгону або гальмування тіла і направлена у зворотний бік від прискорення. Сила інерції прикладена до в'язей і дорівнює: $F_{ин} = -ma$. При криволінійному русі виникають нормальна і тангенціальна сили інерції :

$$F_{ин}^n = m \frac{v^2}{R}; \quad F_{ин}^{\tau} = ma_{\tau} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{rd\omega}{dt} = mr\varepsilon. \quad (10.5)$$

10.4. Принцип кінетостатики (Даламбера)

Матеріальна точка, рух якої обмежений в'язями, називається невільним. Невільні матеріальні точки рухаються під дією активних сил і обмежуючих рух реакцій в'язей. Невільні матеріальні точки звільняють від в'язей і замінюють їх дію реакціями.

Даламбер запропонував умовно прикладати силу інерції до тіла, а не до в'язей. Тоді система сил стає зрівноваженою і її можна прирівняти до нуля.

Принцип Даламбера: Матеріальна точка під дією активних сил, реакцій в'язей і умовно прикладеної сили інерції знаходиться в рівновазі, і сума цих сил дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i + \vec{F}_{in} = 0. \quad (10.6)$$

Порядок розв'язання задач за принципом Даламбера:

- 1) скласти розрахункову схему; 2) вибрати систему координат;
- 3) виявити напрям і величину прискорення; 4) умовно прикласти силу інерції; 5) скласти систему рівнянь рівноваги;
- 6) визначити невідомі величини.

10.5. Робота і потужність. Коефіцієнт корисної дії (ККД)

Для характеристики швидкості виконання роботи введено поняття «потужність» як роботи, що виконується за одиницю часу:

$$P = \frac{A}{t}. \quad (10.7)$$

Розмірність потужності: $[P] = \frac{Дж}{с} = Вт$. Потужність під час поступального руху:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{FS \cos \alpha}{t} = Fv \cos \alpha. \quad (10.8)$$

Коефіцієнт корисної дії дорівнює відношенню корисної роботи до витраченої:

$$\eta = \frac{A_k}{A}. \quad (10.9)$$

Теорема про зміну імпульсу: Зміна імпульсу ($\Delta m\vec{v}$) дорівнює імпульсу сили ($\vec{F}t$):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}; \quad m d\vec{v} = \vec{F} dt; \quad \int_{v_0}^v m d\vec{v} = \int_0^t \vec{F} dt; \quad m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F}t. \quad (10.10)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії: Зміна кінетичної енергії на деякому шляху дорівнює роботі всіх сил на тому ж шляху:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^t \vec{F} d\vec{r}. \quad (10.11)$$

Контрольні запитання

1. Що таке інертність? Яка фізична величина є мірою інертності тіла?
2. Що таке сила? В яких одиницях вона вимірюється?
3. Сформулюйте закони Ньютона. Запишіть формули.
4. Що таке робота сили?
5. Що таке потужність? Запишіть формулу.
6. Що таке енергія? Які види механічної енергії ви знаєте?
7. Сформулюйте і запишіть формулу теореми про зміну імпульсу.
8. Запишіть формулу теореми про зміну кінетичної енергії.
9. Сформулюйте принцип Даламбера.

11. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Під час розтягнення, стиску, зсуву деталь чинить опір деформації всім перерізом однаково. Геометричною характеристикою перерізу є площа. Під час кручення, згину переріз чинить опір деформації всім перерізом неоднаково, тому при розрахунках напружки з'являються інші геометричні характеристики, які впливають на опір перерізу деформування.

11.1. Статичний момент плоскої фігури (перерізу)

Розглянемо переріз довільної форми площею A . Виділимо в ньому елементарну площину dA і задамо систему координат (рис. 11.1).

Статичні моменти елементарної площини dA :

відносно осі x : $dS_x = y dA$; відносно осі y : $dS_y = x dA$.

Статичні моменти елементарної площини dA :

відносно осі x : $dS_x = y dA$; відносно осі y : $dS_y = x dA$.

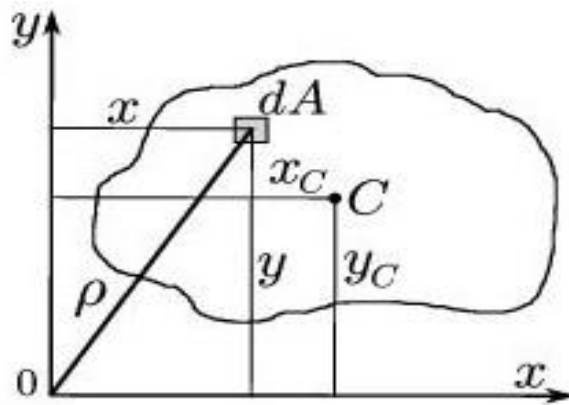


Рис. 11.1

Підсумування за площею дасть статичні моменти площини A :

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA.$$

Статичні моменти кожної половини площини рівні і мають різний знак, тому для симетричного перерізу статичний момент відносно осі симетрії дорівнює нулю. Одиниця вимірювання статичного моменту – $[м^3]$. Якщо x_C , y_C – координати центра тяжіння C фігури, то статичні моменти:

$$S_x = \int_A y_C dA = A \cdot y_C. \quad S_y = \int_A x_C dA = A \cdot x_C. \quad (11.1)$$

Координати центра тяжіння C плоского перерізу:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (11.2)$$

11.2. Осьові і полярні моменти інерції плоскої фігури

Осьовим моментом інерції перерізу відносно осі, що лежить в цій площині, називається сума добутків елементарних площин на квадрат їх відстаней до цієї осі.

Для будь-якого перерізу площею A з елементарною площиною dA осьові моменти інерції відносно осей x і y (рис. 11.1):

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A x^2 dA. \quad (11.3)$$

Полярний момент інерції відносно точки O :

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA, \quad \text{де } \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (11.4)$$

Полярний момент інерції дорівнює сумі:

$$J_{\rho} = \int_A (y^2 + x^2) dA = J_x + J_y. \quad (11.5)$$

Розмірність моменту інерції $[J_x] = \mathcal{M}^4$.

11.3. Моменти інерції прямокутного і колового перерізів

Осьові моменти інерції прямокутного перерізу (рис.11.2):

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3h}{12}, \quad (11.6)$$

де b – ширина перерізу; h – висота перерізу, для квадрата $b = h$.

Осьові і полярні моменти інерції колового перерізу (рис.11.3):

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}; \quad J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (11.7)$$

Осьові і полярні моменти інерції кільцевого перерізу (рис.11.4):

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4); \quad J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4), \quad (11.8)$$

де D, d – діаметри перерізів; $c = d/D$.

Осьові і полярні моменти інерції трубного перерізу (рис.11.5):

$$J_x = J_y = \pi R_0^3 \cdot t; \quad I_{\rho} = 2\pi R_0^3 \cdot t. \quad (11.9)$$

де R_0 – середній радіус; t – товщина стінки; $R_0 \gg t$.

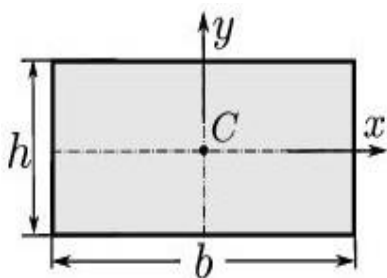


Рис. 11.2

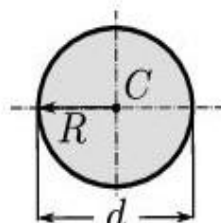


Рис. 11.3

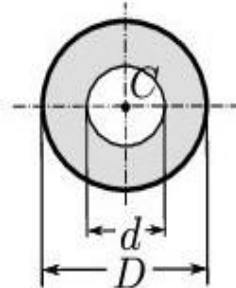


Рис. 11.4

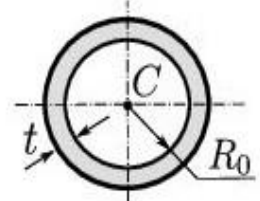


Рис. 11.5

11.4. Моменти інерції плоских перерізів відносно зміщених осей

Виділимо в плоскому перерізі довільної форми A площадку dA з координатами x і y відносно системи з центром O (рис. 11.6).

Система $y_1O_1x_1$ зміщена на a і b . Нове положення елементарної площини після зміщення осей:

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a. \quad (11.10)$$

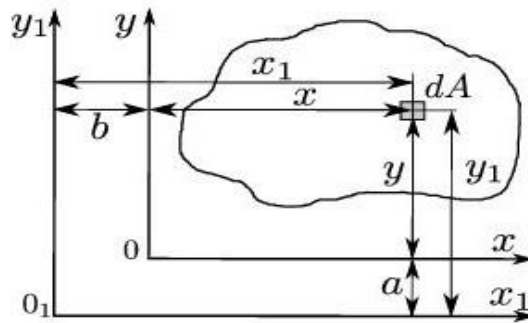


Рис. 11.6

Осьові моменти інерції відносно зміщених осей x_1 і y_1 :

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A; \quad J_{y_1} = J_y + b^2 A. \quad (11.11)$$

11.5. Радіус та еліпс інерції плоских перерізів

Для того, щоб мати уявлення про жорсткість поперечного перерізу при вивченні його геометричних властивостей, будують еліпс інерції. Для його побудови необхідно вміти визначати **радіус інерції**. Момент інерції фігури відносно будь-якої осі можна подати у вигляді добутку площі фігури на квадрат деякої величини, що називають радіусом інерції:

$$J_z = \int_F y^2 \cdot dA = A \cdot i_z^2, \quad (11.12)$$

де i_z – **радіус інерції** площі поперечного перерізу відносно осі z ;

A – площа поперечного перерізу.

Радіус інерції – відстань від відповідної осі до точки, концентрація всієї площі в якій дасть такий же момент інерції, як i для всієї фігури.

Радіус інерції i_z площі поперечного перерізу відносно осі z – це геометрична характеристика перерізу, що дорівнює квадратному кореню від осьового моменту інерції перерізу J_z відносно осі z , поділеному на площу поперечного перерізу:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}. \quad (11.13)$$

Радіус інерції і площі поперечного перерізу відносно осі y – це геометрична характеристика перерізу, що дорівнює квадратному кореню від осевого моменту інерції перерізу J_z відносно осі y , поділеному на площу поперечного перерізу:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}; \quad (11.14)$$

Радіуси інерції площі поперечного перерізу стрижня (плоскої фігури) **виражаються в одиницях довжини в першому ступені (м, см, мм)**. Вони застосовуються в розрахунках на стійкість та на позацентровий розтяг-стиск. Головні центральні радіуси інерції площі поперечного перерізу i_u та i_v відповідають головним центральним осям інерції поперечного перерізу u та v :

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}}. \quad (11.15)$$

Радіус інерції **завжди більше** відповідної координати центра ваги $i_z > y_C$. Для стандартних прокатних профілів значення радіусів інерції вказані в сортаменті.

Приклад розрахунку еліпса інерції прямокутного перерізу

Для прямокутника шириною b та висотою h , зображеного на рис. 11.2, визначити головні радіуси інерції площі поперечного перерізу.

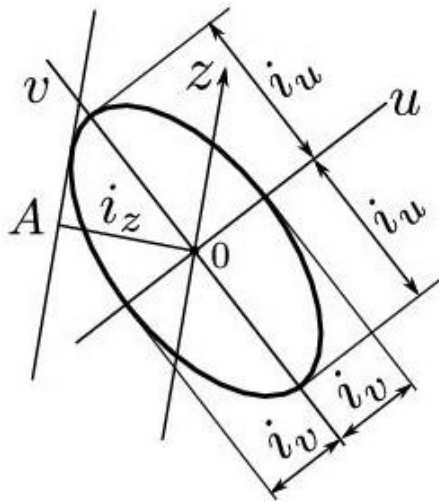
Розв’язання. Головні осеві моменти інерції дорівнюють:

$$J_u = \frac{bh^3}{12}; \quad J_v = \frac{b^3h}{12}, \quad (11.16)$$

тому головні радіуси інерції площі поперечного суцільного прямокутного перерізу визначають за формулами:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}} = \sqrt{\frac{b^3h/12}{bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}. \quad (11.17)$$

Еліпсом інерції називається еліпс (рис. 11.7), який побудовано



на головних центральних осях інерції перерізу, з напівосями, що дорівнюють головним радіусам інерції, причому вздовж осі u відкладаємо відрізки i_v , а вздовж осі v – відрізки i_u . Він описується рівнянням:

$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1. \quad (11.18)$$

Для еліпса інерції характерна така властивість: радіус інерції відносно осі z

Рис. 11.7

визначається перпендикуляром OA , поставленим із центра еліпса на дотичну до еліпса, паралельну цій осі. Для визначення точки дотику досить провести паралельно даній осі z будь-яку хорду. Точка перетину еліпса з прямою, що сполучає центр O із серединою хорди і є точкою дотику. Вимірявши потім відрізок $OA = i_z$, знаходимо момент інерції $J_z = A \cdot i_z^2$.

Контрольні запитання

1. Що називається статичним моментом площі перерізу відносно осі z або y , та в яких одиницях він вимірюється?
2. Чому дорівнюють статичні моменти площі поперечного перерізу стрижня відносно центральних осей перерізу?
3. Що називається осьовим і відцентровим моментом інерції площі поперечного перерізу стрижня?
4. Що називається полярним моментом інерції площі поперечного перерізу стрижня, та в яких одиницях він вимірюється?
5. Як співвідносяться між собою полярний та осьові моменти інерції?
6. Що таке головний центральний момент інерції перерізу?
7. Що називається осьовим і полярним моментом опору поперечного перерізу стрижня, та в яких одиницях він вимірюється?
8. Поясніть, чому дорівнює момент інерції площі складного поперечного перерізу, якщо відомі моменти інерції його складових частин?

9. Як визначається момент інерції площі поперечного перерізу відносно довільної осі, якщо відомі момент інерції відносно центральної осі, паралельної даній, та відстань між цими осями?
10. Запишіть формули для визначення напрямів (положення) головних центральних осей інерції перерізу.
11. Запишіть формули для визначення головних центральних моментів інерції площі перерізу через відомі центральні моменти інерції.
12. Що таке радіус інерції площі поперечного перерізу відносно осі, та в яких одиницях він виражається?
13. Що таке еліпс інерції та яка властивість для нього характерна?

12. ОПІР МАТЕРІАЛІВ

12.1. Механічні характеристики матеріалів

Опір матеріалів – розділ технічної механіки, у якому вивчають експериментальні і теоретичні основи і методи розрахунку елементів різних конструкцій під дією зовнішніх навантажень при достатній надійності й економічності.

Під дією навантажень усі частини конструкцій змінюють форму і розміри, а в деяких випадках руйнуються.

Міцність – здатність елементів конструкцій здійснювати опір дії зовнішніх навантажень без руйнування.

Жорсткість – здатність елементів конструкцій під дією зовнішніх навантажень отримувати деформації, які лежать у межах допустимої стійкості.

Стійкість – здатність елементів конструкцій приймати початкову форму стійкої рівноваги після зняття зовнішніх навантажень.

В'язкість – властивість сприймати ударні навантаження.

Витривалість – Властивість довгий час витримувати змінні навантаження.

В опорі матеріалів за розрахункову модель **прийнята модель ідеалізованого тіла, що деформується**, і ряд допущень.

12.2. Допущення про властивості матеріалів

1. Матеріал тіла являє собою ізотропне суцільне середовище.
2. До певної границі навантаження матеріал має ідеальну пружність.

3. Переміщення точок елементів при деформації дуже малі у порівнянні з розмірами елемента (принцип початкових розмірів). Елементи розглядаються як недеформоване тіло.
4. Переміщення точок елементів у пружній стадії роботи матеріалу пропорційні силам, що викликають переміщення.
5. До прикладання навантажень у тілі немає початкових навантажень.
6. Деформації тіла малі. Їх вплив на взаємний розподіл навантажень можна не враховувати.
7. Гіпотеза плоских перерізів. Поперечні перерізи бруса плоскі до навантаження й лишаються плоскими після навантаження.
8. **Принцип Сен-Венана.** У віддалених від місця докладання навантажень точках тіла внутрішні сили мало залежать від засобу докладання навантажень.

12.3. Дослідження механічних характеристик матеріалів

Під час проектування й розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів, машин та споруд треба знати механічні характеристики конструкційних матеріалів. Тому матеріали випробовують на **розтягання, стискання, зсув, кручення, згинання і твердість**. Механічні характеристики більшості матеріалів визначені експериментально і зведені в таблиці в довідниках. Основним експериментом зі знаходження характеристик матеріалів є іспит на розтягнення.

Діаграму розтягнення матеріалів (залежність видовження від повздовжньої сили) отримують експериментально. Для цього зразки стандартних розмірів закріплюють у дослідних машинах і розтягують до руйнування. При цьому прилади записують залежність абсолютного видовження зразка від прикладеної сили. На рис.12.1 показана діаграма для маловуглецевої сталі в координатах $F - \Delta \ell$. Діаграма розтягнення сталюго зразка має чотири характерні ділянки: *I* – ділянка пропорційності; *II* – ділянка плинності; *III* – ділянка самозміцнення; *IV* – ділянка руйнування.

За діаграмою можна визначити величину пружних і остаточних деформацій у будь-який момент випробувань. У точці А діаграма різко змінює напрямок – у металі відбуваються незворотні зміни – змінюється внутрішня структура і спостереігається самозміцнення.

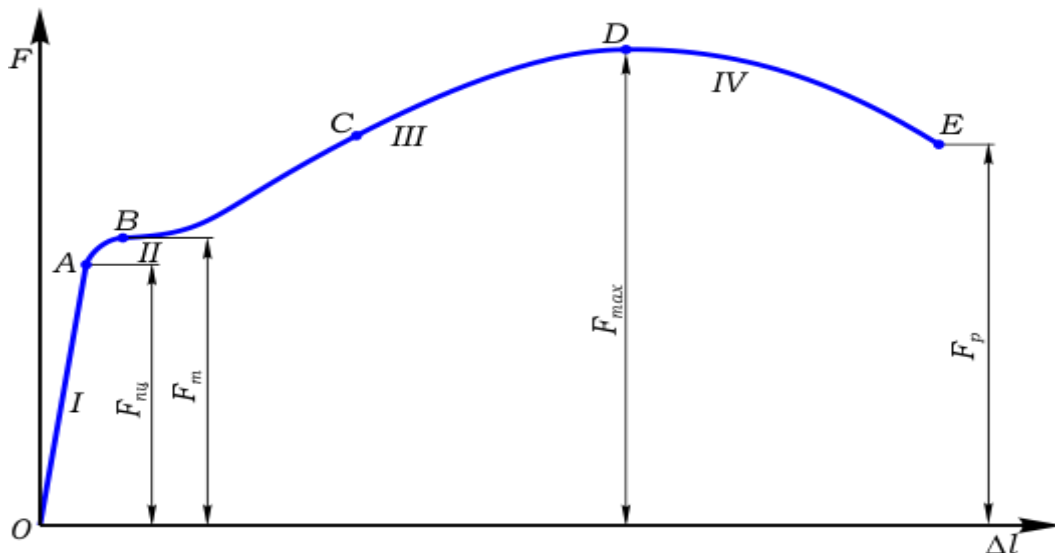


Рис. 12.1

У точці D розтягуючі зусилля досягають максимуму. У робочій частині з'являється «шийка» (рис.12.2).



Рис. 12.2

У разі зменшення поперечного перерізу зразка при розтягуванні зусилля зменшується і крива діаграми іде вниз. У точці E в області шийки зразок розривається. Робота, що витрачена на розрив, приблизно дорівнює площі діаграми:

$$W = 0,8 F_{\max} \cdot \Delta \ell_{\max}.$$

Для отримання істинних механічних характеристик зразка діаграму розтягнення перетворюють у діаграму напруженості (рис. 12.3). На отриманій діаграмі $F - \Delta \ell$ відмічають декілька характерних точок, в яких визначаються розтягуючі сили F і абсолютні деформації $\Delta \ell$. Для цих точок знаходять нормальні напруги за формулою: $\sigma_i = F_i / A_0$, де A_0 – площа поперечного перерізу робочою частиною зразка; відносні деформації: $\varepsilon_i = \Delta \ell / \ell_0$. За отриманими даними будується умовна та істинна діаграма напруги-деформації (рис. 12.3). На діаграмі показані характерні точки.

Границя пропорційності $\sigma_{np} = F_{np} / A_0$ визначається як крайня верхня точка прямолінійної ділянки діаграми.

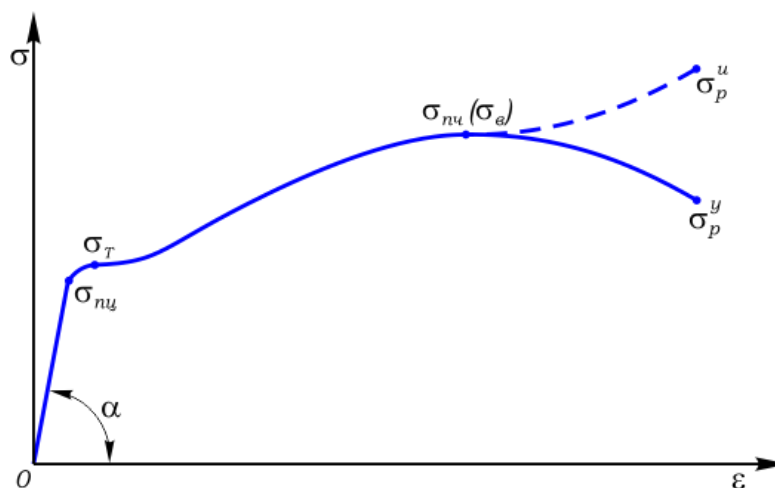


Рис. 12.3

Границя пружності $\sigma_{0,05} = F_{0,05} / A_0$ – максимальне значення напруги, при якій в елементах конструкції не виникає остаточних деформацій. На практиці за нього приймають напруги, при яких остаточні деформації не перевищують 0,05% ($\sigma_{0,05}$). Вона визначається при точних вимірюваннях.

Границя текучості $\sigma_T = F_T / A_0$. За границею плинності – **п майданчик текучості**. Деформація зростає без збільшення напруження. **Пластична** – частина деформації, що не зникає після зняття напруження.

Умовну границю текучості $\sigma_{0,2} = F_{0,2} / A_0$ визначають відкладаючи вздовж осі ϵ значення 0,2%, і проводять промінь паралельно початковій ділянці діаграми напружень. Точка перетинання променя із лінією діаграми і є умовною границею текучості матеріалу.

Границя міцності $\sigma_m = F_{max} / A_0$ – максимальна напруга під час випробувань. Вища точка умовної діаграми.

Напруга в момент руйнування зразка:

- умовна напруга руйнування $\sigma_p^y = F_p / A_0$;
- істинна напруга при $\sigma_p^i = F_p / A_u$, де A_u – площа поперечного перерізу шийки.

Зовнішні зусилля (навантаження)

Усі зовнішні сили (навантаження) зображають у вигляді сил або пар сил (моментів). Усі реальні тіла контактують через невеликі площини. **Принцип Сен-Венана** дозволяє розподілені навантаження q замінити рівнодіючою зосередженою силою F .

Навантаження можуть бути розподілені за поверхнею $[Нм^{-2}]$ (тиск вітру, води на стінку), за об'ємом $[Нм^{-3}]$, за довжиною $[Нм^{-1}]$.

Навантаження можуть бути як статичними, так і динамічними.

Динамічні – навантаження, які змінюються з великою швидкістю, **статичні** – з невеликою так, що прискореннями можна знехтувати. Сили інерції при динамічних навантаженнях можуть значно перевищувати статичні. Реальні конструкції характеризуються складністю форм, тому при розрахунках їх замінюють ідеалізованою спрощеною схемою. В опорі матеріалів основним елементом, що вивчається, є брус – тіло, у якого довжина значно більша двох інших, які визначають поперечний переріз.

Основні види навантажень і деформацій

У разі найпростіших випадків навантаження бруса в його поперечних перерізах виникає один внутрішній силовий фактор.

Розтягнення – у поперечному перерізі бруса виникає тільки внутрішня подовжня сила N .

Кручення – деформація, при якій виникає тільки внутрішній обертальний момент T .

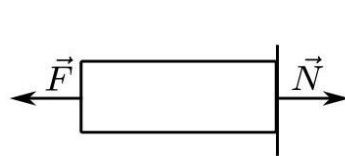


Рис. 12.4

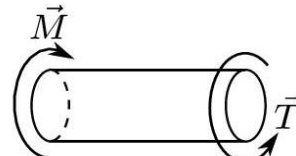


Рис. 12.5

Згин – вид навантаження, при якому у поперечному перерізі бруса діє згинаючий момент M .

Зсув (зріз) – у поперечному перерізі бруса діє тільки внутрішня поперечна сила Q . При зрізі зсовуються суміжні перерізи. Знак внутрішніх сил приймається згідно з правилами.

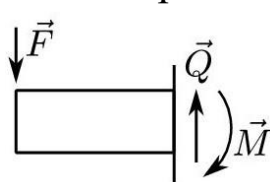


Рис. 12.6

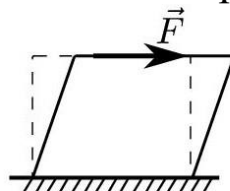
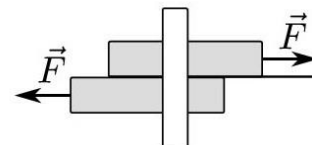


Рис.12.7



Внутрішні силові фактори. Метод перерізів

Під дією зовнішніх навантажень у поперечному перерізі бруса виникають внутрішні сили (сили взаємодії між частинками тіла) і

обертальні моменти (внутрішні силові фактори) (рис. 12.8). Внутрішні сили забезпечують цілісність і сумісність деформацій:



Рис.12.8

$N_z = N$ – поздовжня розтягуюча (стискаюча) сила;

$M_z = T$ – обертальний момент;

$Q_x (Q_y) = Q$ – поперечні сили;

$M_x (M_y) = M$ – згинаючі моменти.

Для розрахунку внутрішніх сил використовують **метод перерізів**: брус, який знаходиться в рівновазі, уявно розсікають у будь-якому місці, а відкинуту частину замінюють дією

внутрішньої сили $\vec{R}$ і внутрішнього моменту $\vec{M}$.

У загальному випадку внутрішні сили орієнтовані під кутами до перерізу, тому для спрощення розрахунків їх проєктують на координатні осі. Кожний з внутрішніх силових факторів визначають з рівнянь рівноваги частини, що залишилася після розтинання бруса. (рівняння статки):

$$\sum F_x = Q_x + \sum_{ост} F_{ix} = 0; \Rightarrow Q_x = \sum_{ост} F_{ix};$$

$$\sum m_x = M_x + \sum_{ост} m_x(F_i) = 0;$$

$$\sum F_y = Q_y + \sum_{ост} F_{iy} = 0; \Rightarrow Q_y = \sum_{ост} F_{iy};$$

$$\sum m_y = M_y + \sum_{ост} m_y(F_i) = 0;$$

$$\sum F_z = Q_z + \sum_{ост} F_{iz} = 0; \Rightarrow Q_z = \sum_{ост} F_{iz};$$

$$\sum m_z = M_z + \sum_{ост} m_z(F_i) = 0.$$

Правила знаків для видів деформації

Внутрішня поздовжня сила N приймається **позитивною**, якщо хоче розтягнути відсічену частину бруса.

Внутрішній скручувальний момент T приймається **позитивним**, якщо хоче повернути переріз проти годинникової стрілки при розгляданні з боку відкинутої частини бруса.

Внутрішня поперечна сила приймається **позитивною**, якщо вона хоче повернути частину бруса, що розглядається, за годинниковою стрілкою.

Внутрішній згинальний M приймається **позитивним**, якщо він хоче стиснути верхні шари бруса.

Епюри

У випадках, коли внутрішні зусилля змінюють величину і знак, для наочності будують епюри.

Епюрами називається графічне подання даних про розподіл факторів по довжині або перерізу бруса, що розглядається.

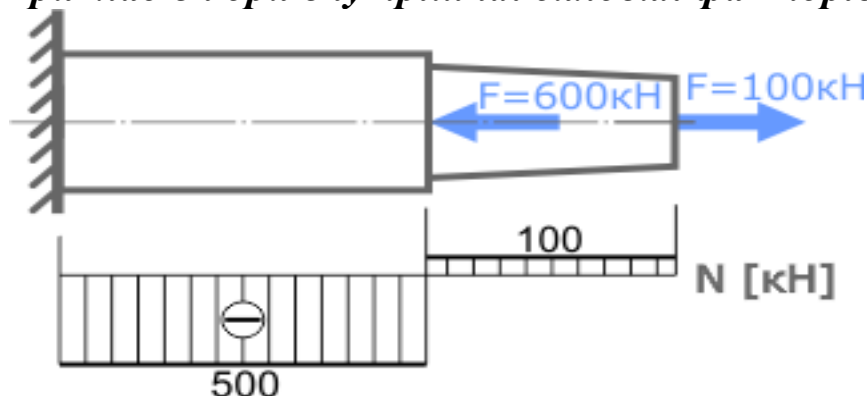
Епюри наглядно демонструють навантаження бруса, положення небезпечних точок, напрям і величину переміщень перерізів. Для їх побудови використовують метод перерізів:

1. Записують вирази для визначення внутрішніх зусиль за кожною силовою ділянкою.
2. Розраховують значення факторів на границях силових ділянок у характерних перерізах бруса або точках його поперечного перерізу. Отримані дані відкладають від базової лінії у відповідному масштабі і точки з'єднують.

Правила і рекомендації при побудові епюр

1. Базова (нульова) лінія епюри паралельна осі бруса. Ординати значень відкладають у масштабі з відповідним знаком.
2. Поряд вказують позначення і розмірність.
3. Поле епюр штрихують і вказують знак. У характерних точках вказують значення ординат.
4. Базова лінія і лінія штриховки – тонкими лініями, а лінії меж – жирними. Поряд вказують її позначення і розмірність.

Приклад епюри внутрішніх силових факторів



Контрольні запитання

1. Дайте визначення понять міцність, жорсткість, стійкість.
2. Що називається стрижнем або брусом?
3. Назвіть основні класифікації та види стрижнів.
4. Сформулюйте та поясніть гіпотезу про малість деформацій.

5. Що таке пружність? Сформулюйте та поясніть гіпотезу про ідеальну пружність матеріалу.
6. Сформулюйте та поясніть гіпотезу про лінійну залежність між деформаціями і навантаженнями.
7. Запишіть закон Гука для стрижня при деформації розтягу зсуву.
8. Сформулюйте і поясніть гіпотезу плоских перерізів.
9. Що називають деформацією твердого тіла?
10. Дайте визначення поняття «внутрішні сили».
11. На які дві складові проекції розкладають повне напруження p ?
12. Що таке пружна, пластична та абсолютна деформація?
13. У чому полягає відносна, температурна та об'ємна деформація?
14. Для чого в опорі матеріалів застосовують метод перерізів?
15. Проаналізуйте правила побудови епюр внутрішніх зусиль і моментів.

13. ДЕФОРМУВАННЯ РОЗТЯГОМ І СТИСКОМ

13.1. Напруження та деформації при розтяганні й стисканні

Напруженням називають міру дії внутрішніх силових факторів на одиницю площі в точці перерізу бруса, що розглядається. Розмірність – паскаль [Па], [МПа]. Внутрішні сили безперервно розподілені за перерізом. Рівнодіючу внутрішніх сил у будь-якій точці на площині A позначимо ΔR . Відношення $\Delta R/A = p_{cp}$ являє собою середнє напруження в будь-якій точці площини перерізу. Повне напруження в точці – частина внутрішніх зусиль, яка припадає на конкретну точку перерізу $p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta R / \Delta A$. Повне напруження p розкладають на три складові: по нормалі до площі перерізу σ і двох осях у площині перерізу τ (дотичне напруження).

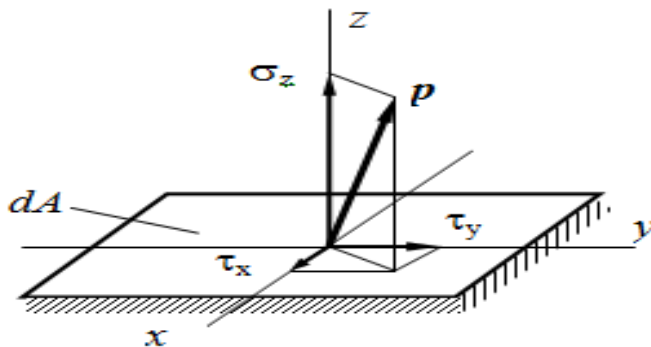
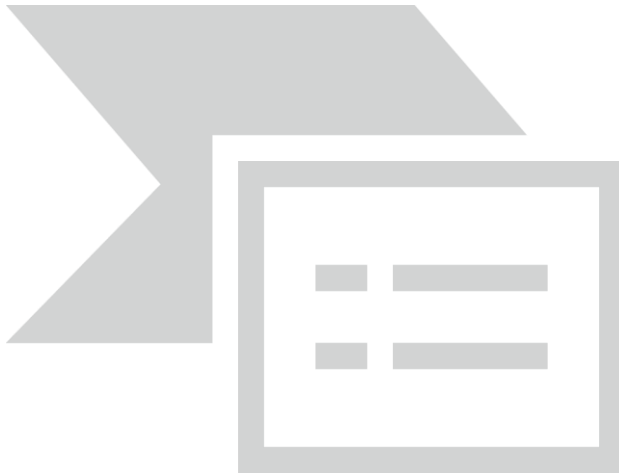


Рис. 13.1

Відокремимо на перерізі бруса нескінченно малу площину dA і прикладемо до неї елементарні сили σdA , $\tau_x dA$.



Знайдемо проекції цих елементарних сил і їх моментів відносно осей x , y , z :

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma \cdot dA; & M_x &= \int_A y \cdot \sigma dA; \\ Q_y &= \int_A \tau_y \cdot dA; & M_y &= \int_A x \cdot \sigma dA; \\ Q_x &= \int_A \tau_x \cdot dA; & M_z &= \int_A (\tau_y x - \tau_x y) dA. \end{aligned}$$

Рис. 13.2

Наведені формули дозволяють знайти рівнодіючі внутрішніх сил через напругу, якщо відомий закон розподілу по перерізу. Знаходять напругу через рівнодіючі внутрішніх сил, при цьому розглядають паралельно умови рівноваги і деформації бруса.

13.2. Напруження в перерізах

Прикладені до тіла зовнішні навантаження приводять до виникнення в його перерізах внутрішньої сили $\vec{R}$ і моменту $\vec{M}$ (рис. 14.3). Під час розрахунків використовують метод перерізів.

Метод перерізів полягає в тому, що тіло умовно розрізають площиною на дві частини, одну з яких відкидають, а взамін неї до перерізу частини, що залишилася, прикладають внутрішні сили, які діяли до розрізання (рис. 14.4). Внутрішня сила і внутрішній момент діють на весь переріз бруса.

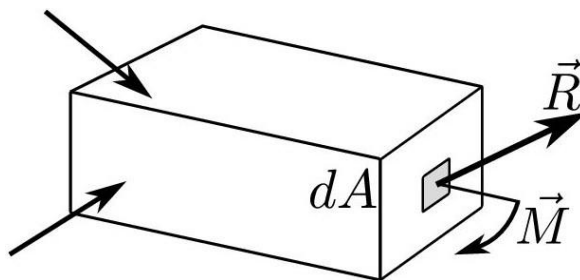


Рис. 13.3

У поперечних перерізах стрижня при розтяганні-стисканні повні напруження за модулем та напрямом дорівнюють нормальним σ (рис.13.4).

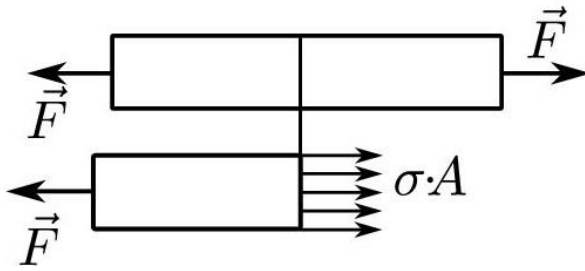


Рис. 13.4

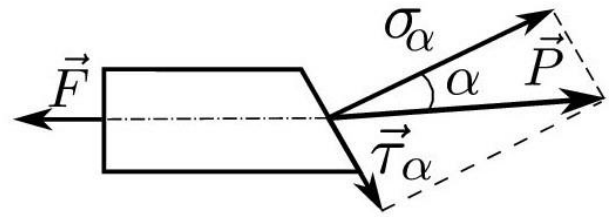


Рис. 13.5

Площа перерізу, який розташований під кутом α до поперечного, $A_\alpha = A_0 / \cos \alpha$ (рис. 13.5). Вектори повного напруження в похилому перерізі напрямлені вдовж лінії дії зовнішньої сили $\vec{F}$. З умови рівноваги відсіченої частини $F = N$ маємо $p_\alpha A_\alpha = \sigma_0 A_0$, звідки:

$$p_\alpha = \frac{N}{A_0} \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha. \quad (13.1)$$

Проеціюючи повне напруження p на площину перерізу і нормаль до неї, отримаємо складові – дотичне τ_α і нормальне σ_α напруження (рис.13.5):

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \quad (13.2)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (13.3)$$

В окремих випадках (наприклад, при розтяганні-стискуванні та крученні) в перерізах бруса виникають тільки дотичні напруження. Якщо в перерізах бруса є тільки нормальні або дотичні напруження, то їх зрівнюють із допустимими значеннями напружень.

Якщо навантаження діють лише вздовж осі стрижня, то в поперечних перерізах стрижня із шести внутрішніх силових факторів виникає лише один – поздовжнє (осьове) зусилля N . **Осьове зусилля N у перерізі** (рис. 13.6) є рівнодійною нормальних напружень $\sigma = F/S$, що виникають у кожній із точок перерізу:

$$N = \int_F dN = \int_F \sigma dA. \quad (13.4)$$

З рівняння не можна визначити нормальне напруження N , оскільки невідомий закон розподілу напружень у точках поперечного перерізу.

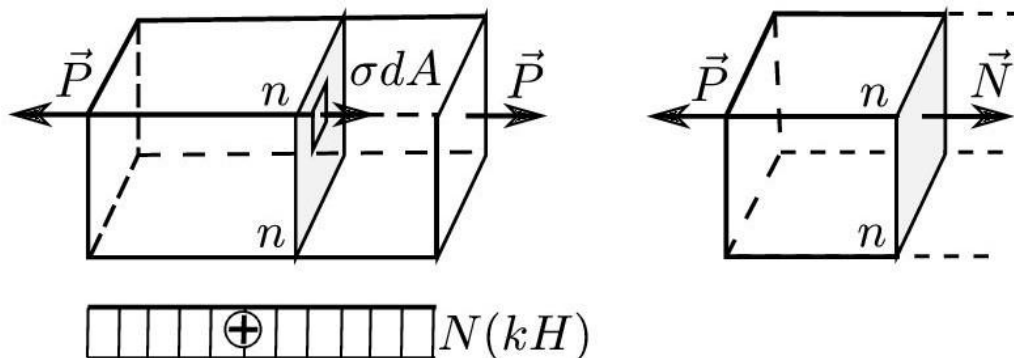


Рис. 13.6

Гіпотеза плоских перерізів: плоскі поперечні перерізи стрижня залишаються плоскими в процесі деформації. Всі елементи перерізу подовжуються на одну і ту саму величину, і їхні відносні подовження $\varepsilon = \frac{(l - l_0)}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$ однакові.

13.3. Залежності між напруженнями і деформаціями

При пружних деформаціях (розтягуванні або стисканні) стрижнів залежність між напруженнями і відносними деформаціями (рис. 13.6) описується **законом Гука**: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, де E – модуль Юнга. Для однорідного й ізотропного матеріалу маємо:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \text{const.} \quad (13.5)$$

Підставляючи вираз (13.5) у формулу (13.4), для всієї площі A поперечного перерізу стрижня одержимо значення поздовжнього (осьового) зусилля:

$$N = \int_A \sigma dA = \varepsilon E \int_A dA = E \varepsilon A = \sigma A, \text{ звідки } \sigma = N/A. \quad (13.6)$$

Знак напруження залежить від знака поздовжньої сили в перерізі, що розглядається. **У разі стискання напруження вважають від'ємними.** Формула (13.6) справедлива для перерізів, досить віддалених від місць прикладання зосереджених навантажень.

Принцип Сен-Венана: якщо зони прикладення навантажень невеликі порівняно з розмірами тіла, то в перерізах, які достатньо віддалені від місць прикладення сил, напруження мало залежать від способу навантажування.

Дослідження показують, що в усіх прикладах у поперечному перерізі, віддаленому на відстань, що перевищує в 1,5 – 2 рази його поперечні розміри, напруження практично однакові. Із виразу (13.6) можна знайти відносне подовження: $\varepsilon = \sigma/E = N/EA$. У межах призматичної ділянки стрижня завдовжки ℓ , виготовленого з однорідного матеріалу ($E = \text{const}$), у перерізах якого діють однакові поздовжні зусилля N , подовження кожної одиниці довжини однакові, отже, абсолютне подовження стрижня становить:

$$\Delta\ell = \varepsilon \cdot \ell = N \cdot \ell / E \cdot A. \quad (13.7)$$

Добуток $E \cdot A$ у знаменнику формули називається **жорсткістю** поперечного перерізу **стрижня при розтяганні та стисканні й має розмірність** сили. **Жорсткістю стрижня** називають величину

$c = \frac{E \cdot A}{\ell}$. Якщо на ділянці, що розглядається, поздовжня сила та поперечний переріз змінні (рис. 13.7), то для елемента нескінченно малої довжини dx на підставі формули (13.7) можна записати:

$$\Delta(dx) = \frac{N(x)dx}{E \cdot A_x}. \quad (13.8)$$

Повне подовження ділянки завдовжки ℓ дістанемо, підсумувавши подовження всіх нескінченно малих відрізків dx :

$$\ell = \int_0^\ell \frac{\sigma_x dx}{E} = \int \frac{N(x)dx}{EA_x}. \quad (13.9)$$

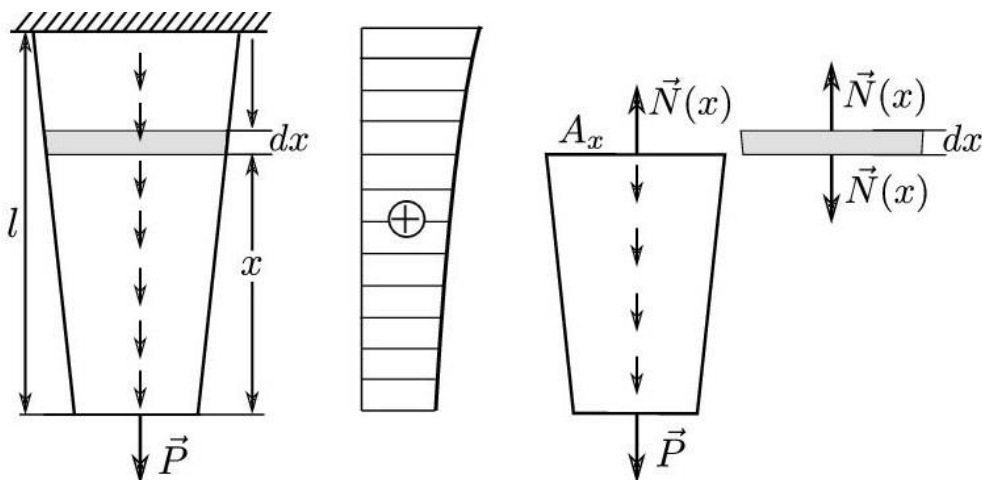


Рис. 13.7

Переміщення деякого перерізу відносно іншого дорівнює поздовжній деформації відрізка стрижня між перерізами, що розглядаються.

Збільшення довжини при деформації розтягання (стискання) супроводжується зменшенням площі перерізу (рис. 13.8). При розтяганні поперечні деформації Δd від'ємні, а при стисканні – додатні. Відносною поперечною деформацією називається відношення абсолютної поперечної деформації до відповідного

початкового розміру $\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$. **Між поперечною та поздовжньою відносними деформаціями** в межах застосування закону Гука існує постійне співвідношення, яке характеризується коефіцієнтом Пуассона μ :

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{\text{non}}}{\varepsilon_{\text{nov}}} \right| = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta \ell}{\ell_0}, \quad (13.10)$$

де d – діаметр стрижня; Δd – зміна діаметра стрижня.

Коефіцієнт Пуассона – безрозмірна величина. Ураховуючи, що поздовжня й поперечна деформації завжди мають протилежні знаки, маємо:

$$\varepsilon_{\text{non}} = -\mu \cdot \varepsilon_{\text{nov}} = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (13.11)$$

При стисканні напруження у формулу (13.11) слід підставляти зі знаком «мінус». Коефіцієнт Пуассона μ , як і модуль пружності E , характеризує пружні властивості матеріалу.

Під час деформації зсуву (рис. 13.9) шари тіла зміщуються паралельно площі зсуву і закон Гука записують у вигляді:

$$\tau = G\gamma, \quad (13.12)$$

де τ – напруга зсуву; $\gamma \approx BB^1/AB$ – відносна деформація.

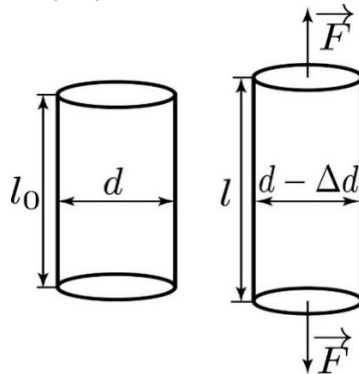


Рис. 13.8

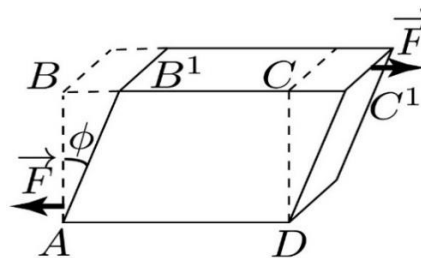


Рис. 13.9

Модуль зсуву G – фізичний параметр матеріалу, який характеризує жорсткість матеріалу при деформаціях зсуву. Використовується в розрахунках на зсув, зріз і кручення. Модуль зсуву визначають відношенням дотичних напружень τ до кута зсуву:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F/A}{BB^1/AB} = \frac{F \cdot AB}{A \cdot BB^1}, \quad (13.13)$$

де A – площа прикладання сили F ; BB^1 – величина зсуву; AB – розмір елемента.

Модулі Юнга, зсуву і коефіцієнт Пуассона пов'язані між собою співвідношенням:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (13.14)$$

Мінімальні значення коефіцієнта Пуассона у твердих матеріалів, максимальні – в еластичних. Для сталей залежно від марки значення μ від 0,27 до 0,32.

13.4. Умови міцності і жорсткості. Допустимі напруження

Надійні розміри і форму конструкцій і деталей визначають за **розрахунками на міцність та жорсткість**. Головним є розрахунок на міцність. Розглянемо умови міцності та жорсткості для розтягання та стискання. *Небезпека початку руйнування характеризується значеннями найбільших нормальних та дотичних напружень, а також їх комбінаціями, які діють у напруженіших точках перерізу.*

Найбільші напруження за умови надійної роботи деталі обмежуються **допустимими напруженнями**. При розтяганні та стисканні допустимі напруження позначають відповідно $[\sigma_+]$ та $[\sigma_-]$, при зсуві – $[\tau]$. Якщо відомі допустимі напруження і є формули, що визначають напруження через зусилля і моменти в перерізі, то можна розрахувати цю деталь на міцність. У разі розтягання або стискання стрижня знаходять небезпечні перерізи, в яких напруження досягають найбільших за модулем значень, і для цих перерізів записують **умову міцності**:

$$\sigma_{max} = \left| \frac{N_{max}}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (13.15)$$

Під час розтягання в праву частину цієї умови підставляють допустимі напруження на розтяг $[\sigma_+]$, а при стисканні – допустимі напруження на стиск $[\sigma_-]$.

Розміри деталей потрібно добирати такими, щоб під дією прикладених навантажень вони не руйнувалися й не зазнавали деформацій, які перевищують допустимі. Залишкові деформації звичайно не допускаються. Для деталей, виготовлених з **пластичного матеріалу**, небезпечними напруженнями можна вважати **границю текучості** σ_T , а для деталей з **крихкого матеріалу** – **границю міцності** σ_B . Ці напруження слід зменшити настільки, щоб в умовах експлуатації діючі напруження завжди були меншими за границю пружності. Отже, **допустимі напруження** можна визначити за формулою:

$$[\sigma] = \sigma_n / n, \quad (13.16)$$

де σ_n – **небезпечне напруження** (σ_T або σ_B); n – **коефіцієнт запасу міцності**, що показує, у скільки разів допустиме напруження менше, ніж небезпечне. Вибір n залежить від стану матеріалу (крихкий або пластичний), характеру прикладання навантаження (статичне, динамічне чи повторно-змінне) й деяких загальних факторів. **До таких факторів належать:**

- 1) неоднорідність матеріалу, а отже, різні його механічні властивості у малих зразках і в деталях;
- 2) неточність задання зовнішніх навантажень;
- 3) наближеність розрахункових схем та наближеність розрахункових формул. Зазначені фактори враховують коефіцієнтом запасу міцності n .

Запас міцності у разі статичного навантаження небезпечним напруженням є **границею міцності** σ_B і тоді:

$$[\sigma] = \sigma_B / n_B. \quad (13.17)$$

Запас міцності n_T для пластичних матеріалів при статичному навантаженні $2,4 \div 2,6$; для крихких матеріалів цей показник $2,5 \div 3,0$. (пластичні матеріали більш однорідні за своїми фізичними та

механічними властивостями). **Крихкі матеріали краще чинять опір стисканню, ніж розтягання**, і для них $[\sigma_-] > [\sigma_+]$.

Вибір допустимих напружень дуже важливий, тому встановленням допустимих напружень для основних марок матеріалів займаються державні нормувальні установи. Вони видають відповідні норми, якими й слід керуватись.

Умови міцності при розтяганні / стисканні:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (13.18)$$

де допустиме напруження $[\sigma] = \sigma_{\max} / n$; n – коефіцієнт запасу міцності (за нормативними документами).

Умови міцності дозволяють розв'язувати три типи задач:

1. Перевірка міцності (перевірочний розрахунок) – за відомими навантаженнями для вибраного матеріалу знаходять надійні з погляду міцності розміри поперечного перерізу стрижня.

2. Підбір перерізу (проектний розрахунок): $A = \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$.

3. **Визначення допустимих навантажень** за відомими розмірами деталі, матеріалом і схемою навантажування $N_{\max} \leq [\sigma]A$.

Для забезпечення нормальної роботи розміри деталей потрібно вибирати так, щоб задовольнити **умову жорсткості**, яка при

розтяганні (стисканні) має вигляд: $\varepsilon_{\max} = \frac{N}{E \cdot A} \leq [\varepsilon]$ або $\Delta \ell \leq [\Delta \ell]$, де

$\Delta \ell$ – зміна довжини деталі; $[\Delta \ell]$ – допустиме значення цієї зміни.

Розрахунок за умовою жорсткості завжди слід доповнювати розрахунком на міцність. Якщо умова жорсткості виконується, а умова міцності ні, то задачу слід розв'язувати з умови міцності.

Контрольні запитання

1. Поясніть, за яких умов в поперечному перерізі стрижня діє лише осьове зусилля?
2. Сформулюйте закон Гука для деформації розтягу (стиску) стрижня.

3. Запишіть та поясніть формули для відносного та абсолютного подовження стрижня.
4. Що називають жорсткістю поперечного перерізу стрижня при розтяганні і стисканні та жорсткістю стрижня?
5. Поясніть, як пов'язані між собою абсолютна та відносна поперечна деформація стрижня? Що називається коефіцієнтом Пуассона?
6. Поясніть, яку задачу опору матеріалів можна вирішити з розрахунків на міцність та жорсткість?
7. Що називається допустимими напруженнями?
8. Сформулюйте умову міцності при розтяганні або стисканні стрижня.
9. Які типи задач можна розв'язувати з використанням умови міцності?
10. Сформулюйте умову жорсткості при розтяганні або стисканні стрижня.
11. Проаналізуйте особливості діаграми розтягання.
12. Що називається границею пропорційності, пружності, текучості, міцності?
13. Що називається умовною границею текучості, пропорційності, пружності?
14. Як визначаються допустимі напруження через небезпечне напруження та коефіцієнт запасу міцності?
15. Поясніть формули для визначення відносного й абсолютного подовження короткого стрижня однакового поперечного перерізу.

14. ДЕФОРМУВАННЯ ЗСУВОМ

14.1. Розрахунок на зріз при деформуванні зсувом

Деформація зсуву відбувається тоді, коли з шести компонент головного вектора сили та головного вектора моменту внутрішніх зусиль *не дорівнюють нулю тільки поперечні зусилля* Q_x або Q_y . Прикладом такого навантаження може бути розрізання ножицями прутів і т. ін. (рис. 14.1). Деформація зсуву супроводжується іншими видами деформацій і найчастіше – згинанням.

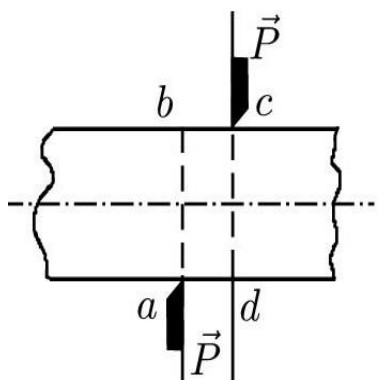


Рис. 14.1

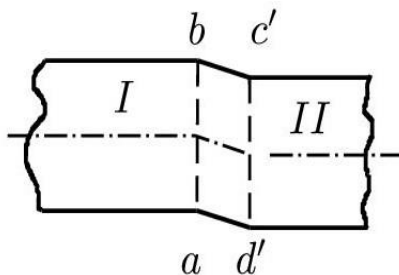


Рис. 14.2

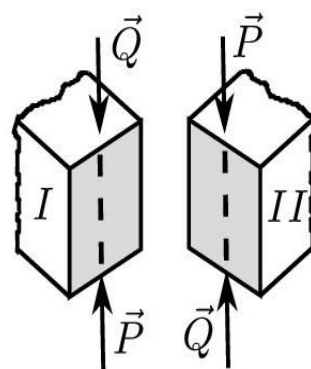


Рис. 14.3

Використовуючи метод перерізів, знаходимо, що на відрізку bc внутрішнє поперечне зусилля:

$$Q_y = Q = P. \quad (14.1)$$

Зв'язок між поперечним зусиллям й напруженням, яке діє в цьому перерізі:

$$\int_A \tau dA = Q. \quad (14.2)$$

Вважаючи, що дотичні напруження τ рівномірно розподілені по площі поперечного перерізу A (рис. 14.2), на підставі формул (14.1) та (14.2) маємо:

$$Q = P = \tau A \Rightarrow \tau = \frac{P}{A}. \quad (14.3)$$

Припущення про рівномірний розподіл дотичних напружень по перерізу умовне, але в інженерній практиці його використовують при розрахунку болтових, заклепочних та зварних з'єднань, шпонок та інших деталей.

14.2. Закон Гука при чистому зсуві

Для пластичних матеріалів залежність між навантаженням та деформацією при зсуві схожа на діаграму розтягання. Діаграму зсуву можна зняти при скручуванні тонкостінної труби. Уявно виділений елемент стінки труби (комірка ортогональної сітки, яку попередньо нанесено на поверхню труби) перебуває в умовах чистого зсуву. У межах пружності між відносним зсувом та дотичними напруженнями, що діють по гранях елемента, існує лінійна залежність, яку можна виразити формулою закону Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (14.4)$$

де G – модуль пружності при зсуві або модуль пружності другого роду і виражається в МПа (або Па).

14.3. Перевірка міцності при чистому зсуві

Дотичні напруження на гранях елемента при чистому зсуві дорівнюють τ , допустиме напруження для матеріалу при розтяганні – $[\tau]$. Умови міцності залежать від **вибору теорії (критерію) міцності**.

$$1. \text{ За II теорією міцності: } \tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}, \quad (14.5)$$

де права частина формули (13.7) є допустимим напруженням при чистому зсуві.

$$\text{Для металів } \mu = 0,25 \div 0,42 \Rightarrow \tau = (0,7 - 0,8)[\sigma]. \quad (14.6)$$

2. За III теорією міцності:

$$\frac{[\sigma]}{2} = [\tau], \text{ тобто } [\tau] \leq 0,5[\sigma]. \quad (14.7)$$

3. За IV теорією міцності:

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}, \text{ або } [\tau] \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6[\sigma]. \quad (14.8)$$

Одержані значення допустимих напружень застосовують також і при розрахунках на міцність деталей, які **зазнають деформації зрізу** (болти, заклепки, шпонки). Для пластичних матеріалів найбільше підходить формула (14.13), яка впливає з енергетичної теорії формозміни.

Умова міцності на зсув (зріз) може бути записана у звичайному вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau]. \quad (14.10)$$

Значення допустимих напружень на зріз $[\tau]$ залежать від властивостей матеріалу, характеру навантаження і типу елементів конструкції.

Контрольні запитання

1. За яких умов відбувається деформація зсуву?
2. Чим зсув відрізняється від зрізу та зминання?
3. Наведіть та поясніть формули для напружень при розрахунку на зріз стрижневих елементів конструкцій.
4. Поясніть, чому припущення про рівномірний розподіл дотичних напружень по перерізу досить умовне?
5. Що називається чистим зсувом? Наведіть закон Гука.
6. Визначте головні напруження та їхні напрями (головні площадки) при чистому зсуві.
8. Що називається кутом зсуву (відносним зсувом) та абсолютним зсувом?
10. Що називається модулем пружності при зсуві?
11. Яка існує залежність між модулем пружності G при зсуві та модулем пружності E при розтяганні?

15. ДЕФОРМУВАННЯ КРУЧЕННЯМ

15.1. Напруження і деформації при крученні

Деформація кручення спричинюється парами сил, площини дії яких перпендикулярні до осі стрижня. У довільному поперечному перерізі стрижня (вала) з шести внутрішніх силових факторів під дією зовнішнього моменту M_k виникає тільки один фактор – **крутний момент** $M_{кр}$. Поперечні перерізи вала при крученні повертаються один відносно одного навколо осі вала, при цьому довжина стрижня не змінюється. Під дією крутного моменту M_k , прикладеного на вільному кінці, будь-який переріз на відстані x від місця закріплення повертається відносно закріпленого перерізу на певний кут φ (рис. 15.1).

При цьому чим більший крутний момент M_k , тим більший і кут закручування φ . За нормальних умов роботи вала залежність між крутним моментом і кутом закручування лінійна. При крученні $M_{кр}$ – єдиний внутрішній силовий фактор у поперечному перерізі вала, тому діють тільки дотичні напруження.

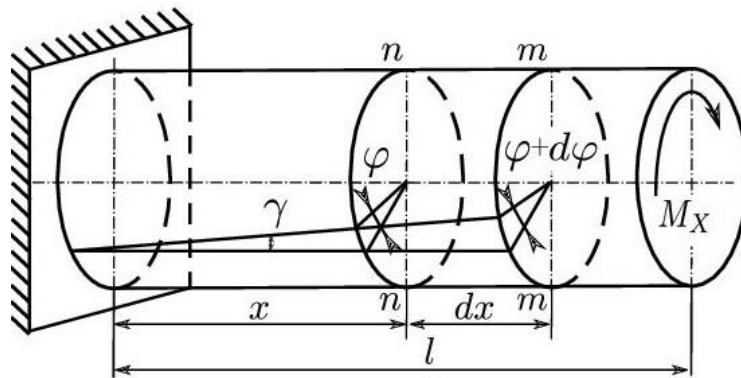


Рис. 15.1

Рівняння для крутного моменту має вигляд:

$$M_{кр} = \int_F \rho \tau dA, \quad (15.1)$$

де τ – дотичне напруження, що діє на елементарній площадці dA , розміщеній на довільній відстані ρ від центра перерізу (рис. 15.1).

Після прикладання крутного моменту поздовжні прямі лінії на поверхні вала перетворюються на гвинтові, тобто лінії однаково нахилені до осі стрижня, паралельні кола не викривляються і відстань між ними практично залишається незмінною; радіуси, проведені в торцевих перерізах, залишаються прямими. Картина, яку ми спостерігаємо на поверхні вала, зберігається і всередині: *плоскі до деформації перерізи, залишаються плоскими при крученні круглого стрижня, повертаючись один відносно одного на деякий кут закручування* (рис.15.1).

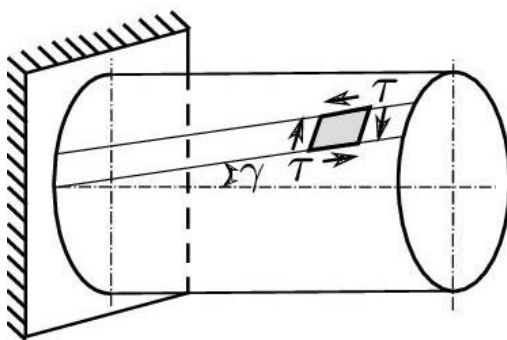


Рис. 15.2.

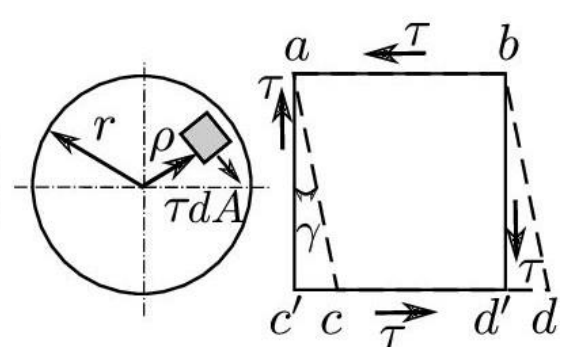


Рис. 15.3.

Нехай кут повороту поперечного перерізу $n-n$ (рис. 15.1) відносно нерухомого місця закріплення вала буде φ , тоді кут повороту перерізу $m-m$, розміщеного на відстані dx від перерізу $n-n$, буде $\varphi + d\varphi$. Кут закручування відрізка стрижня завдовжки dx дорівнює $d\varphi$. Розглянемо деформацію прямокутного елемента

$abd'c'$ (рис. 15.2) нескінченно малої товщини, виділеного у поверхні вала.

Оскільки радіуси при деформації кручення залишаються прямими, то при закручуванні на кут $d\varphi$ твірна ac' переміститься в нове положення ac (рис.15.3), утворивши з початковим кут γ . Аналогічно твірна bd' перейде в положення bd . Таким чином, деформація прямокутного елемента $abd'c'$ полягає в зміні початкових прямих кутів на кут γ . Розглянутий елемент перебуває в умовах чистого зсуву, і на його гранях діють дотичні напруження (рис. 14.5, 14.6). Отже, кут γ є кутом відносного зсуву:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{bb^1}{ab^1} = \frac{rd\varphi}{dx} = r\theta \approx \gamma, \quad (15.2)$$

де $d\varphi/dx = \theta$ – відносний кут закручування (см^{-1}).

Кут зсуву всередині стрижня на довільній циліндричній поверхні радіуса ρ (рис. 15.2):

$$\gamma = \rho\theta. \quad (15.3)$$

Оскільки елемент стрижня в будь-якій точці поперечного перерізу на відстані ρ від центра перерізу зазнає чистого зсуву, то з урахуванням (15.2) та (15.3) матимемо:

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\theta\rho, \quad (15.4)$$

де G – модуль зсуву.

Кути зсуву та дотичні напруження в поперечному перерізі змінюються за лінійним законом прямо пропорційно відстані ρ точок від центра перерізу (рис. 15.3). Максимальні дотичні напруження на поверхні стрижня при $\rho = r$:

$$\tau_r = \tau_{\max} = G\theta r. \quad (15.5)$$

Підставляючи (15.5) в (15.1), отримаємо:

$$M_{\text{кр}} = \int_F \rho \tau dF = G\theta \int_F \rho^2 dF = G\theta J_\rho. \quad (15.6)$$

Для відносного кута закручування круглого стрижня маємо:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_\rho}, \quad (15.7)$$

де GJ_ρ – жорсткість поперечного перерізу стрижня при крученні (Нм^2); J_ρ – полярний момент інерції круглого стрижня, який для

суцільного стрижня діаметром d виражається формулою $J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$,

а для трубчастого стрижня з внутрішнім діаметром d_B і зовнішнім діаметром d_3 :

$$J_\rho = \frac{\pi(d_3^4 - d_B^4)}{32} = \frac{\pi d_3^4}{32}(1 - \alpha^4), \quad (15.8)$$

де $\alpha = d_B/d_3$.

З урахуванням формули (15.7) кут взаємного закручування двох перерізів, розміщених на відстані ℓ :

$$\varphi = \int_0^\ell \frac{M_{кр}}{GJ_\rho} dx. \quad (15.9)$$

Якщо крутні моменти в перерізах не змінюються:

$$\varphi = \theta \ell = \frac{M_{кр} \ell}{GJ_\rho}. \quad (15.10)$$

Зв'язок між **кутом закручування і силовим фактором** $M_{кр}$ виражає закон Гука при крученні.

Для визначення дотичного напруження τ у будь-якій точці перерізу вала під дією крутного моменту досить у формулу (15.4) підставити значення відносного кута закручування θ із формули (15.7):

$$\tau_\rho = G \cdot \theta \cdot \rho = G \frac{M_{кр}}{GJ_\rho} \rho = \frac{M_{кр} \rho}{J_\rho}. \quad (15.11)$$

Максимальне дотичне напруження, яке діє в зовнішньому шарі матеріалу стрижня:

$$\tau_{max} = G\theta r = \frac{M_{кр} r}{J_\rho}. \quad (15.12)$$

Для **суцільного круглого перерізу** полярний момент і максимальне дотичне напруження дорівнюють:

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}; \quad \tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{16M_{кр}}{\pi d^3}. \quad (15.13)$$

Для трубчастого круглого перерізу:

$$W_\rho = \frac{\pi d^3(1 - \alpha^4)}{16}; \quad \tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{16M_{кр}}{\pi d^3(1 - \alpha^4)}. \quad (15.14)$$

Максимальне дотичне напруження в круглому стрижні пропорційне крутному моменту $M_{кр}$ та обернено пропорційне кубу зовнішнього діаметра стрижня.

Згідно з формулою (15.12), умова міцності:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} r}{J_{\rho}} \leq [\tau], \quad (15.15)$$

де $[\tau]$ – допустиме напруження при крученні.

Умову жорсткості визначають за формулою (15.7):

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta], \quad (15.16)$$

звідки $J_{\rho} \geq \frac{M_{\text{кр}}}{G[\theta]},$

де $[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування.

15.2. Аналіз напруженого стану і руйнування при крученні

Напруження при крученні розподілені нерівномірно і залежно від радіуса змінюються за лінійним законом від нуля в центрі перерізу до максимуму на його периферії. Унаслідок закону парності дотичних напружень у поздовжніх перерізах, що проходять через вісь вала, також виникають такі самі за значенням дотичні напруження. В елементі матеріалу, уявно виділеного із зовнішніх шарів матеріалу вала перерізами, паралельними та перпендикулярними до твірної (рис. 15.1, 15.2) циліндричного вала, по гранях діятимуть тільки дотичні напруження. У перерізах, нахилених до осі, діятимуть також і нормальні напруження, як і при напруженому стані елемента в умовах чистого зсуву. Найбільші нормальні напруження діють на головних площадках, які нахилені під кутом 45° до осі вала.

При крученні круглих валів небезпечними можуть бути як дотичні напруження в поперечних та поздовжніх перерізах вала, так і нормальні напруження, що виникають в площадках під кутом 45° до перших. Тобто характер руйнування вала при крученні залежить від здатності матеріалу протидіяти дотичним нормальним напруженням. Якщо матеріал погано чинить опір дотичним напруженням (дії зсуву деревини вздовж волокон), то перші тріщини руйнування виникають по твірних у місцях дії максимальних дотичних напружень (рис. 14.9). Якщо матеріал погано чинить опір дії нормальних напружень (чавун), тоді тріщини руйнування при крученні пройдуть по лініях, нормальних до дії головних

розтягувальних напружень, тобто по гвинтових лініях, дотичні до яких утворюють кут 45° з віссю вала.

Контрольні запитання

1. Поясніть, в яких випадках виникає деформація кручення.
2. Що називають валом та крученням вала?
3. Охарактеризуйте статичний аспект задачі на кручення вала.
4. Що розуміють під кутом відносного зсуву?
5. З'ясуйте різницю між кутом закручування та відносним кутом закручування.
6. Розгляньте фізичний аспект задачі на кручення вала.
7. Наведіть Закон Гука при крученні.
8. Проаналізуйте формули для визначення максимального дотичного напруження при крученні суцільного і трубчастого круглого перерізу.
9. Запишіть умови міцності та жорсткості при крученні.
10. З'ясуйте основні положення розрахунку валів на міцність.
11. Проаналізуйте особливості розрахунку валів на жорсткість.
12. Поясніть, чому виготовлення порожнистих валів є ефективним засобом зниження затрат матеріалу, а отже, і зниження ваги валів?

16. ДЕФОРМУВАННЯ ЗГИНОМ

16.1. Напруження при плоскому згинанні прямого стрижня

Із шести внутрішніх силових факторів, які можуть діяти в її поперечних перерізах у загальному випадку згинання, при чистому плоскому згинанні не дорівнює нулю тільки згинальний момент M . Вісь балки деформується в площині, що збігається з силовою (на рис. 15.1 – у площині креслення).

Проведемо поперечний переріз $m-m$ на довільній відстані x від початку координат (рис. 16.1). У площині перерізу проведемо координатні осі x та y : вісь y сумістимо з силовою лінією (лінією перетину силової площини з площиною перерізу). Вісь z спрямуємо перпендикулярно до площини перерізу. Виділимо в перерізі елемент площі dA , координати якого x та y . При чистому згинанні всі зусилля та моменти $(Q_y, Q_z, M_{кр})$, пов'язані з дотичними напруженнями,

дорівнюють нулю. З усіх шести умов рівноваги залишаються тільки три:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA; \quad M_x = \int_A y \cdot \sigma dA; \quad M_y = \int_A x \cdot \sigma dA. \quad (16.1)$$

У перерізах балки діє тільки згинальний момент M_x , тому:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = 0; \quad M_y = \int_A x \cdot \sigma dA = 0; \quad M_x = \int_A y \cdot \sigma dA = M. \quad (16.2)$$

Розглянемо картину деформацій самої балки (рис. 16.2). При чистому згинанні еластичних моделей, на поверхню яких нанесена прямокутна сітка, видно, що сітка деформується таким чином: поздовжні лінії викривлюються по дузі кола; контури поперечних перерізів залишаються плоскими (рис. 16.2).

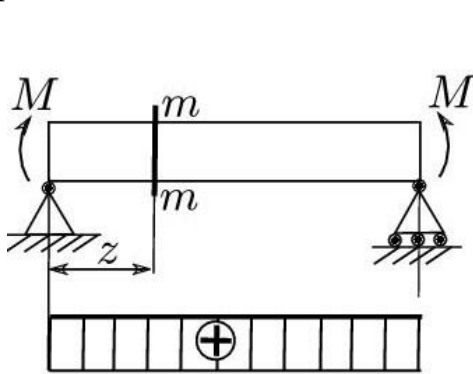


Рис. 16.1.

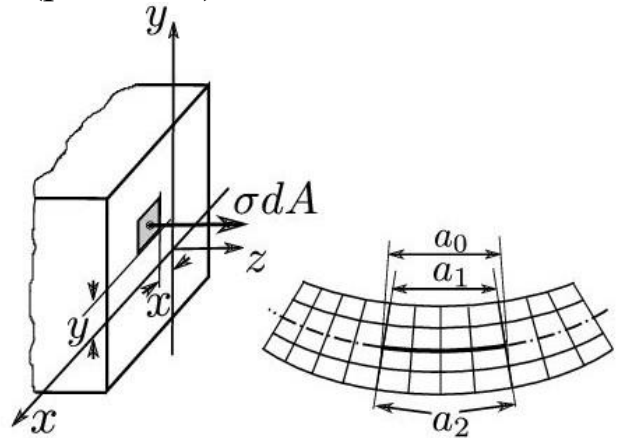


Рис. 16.2.

При чистому згинанні поперечні перерізи балки залишаються плоскими і повертаються так, що залишаються нормальними до зігнутої осі балки. Тому при чистому згинанні, як і при розтяганні (стисканні) та крученні круглих стрижнів, буде справедливою гіпотеза плоских перерізів. Відстані між аналогічними точками контуру будь-яких двох перерізів при деформуванні змінюються. Верхні поздовжні волокна балки укорочуються, а нижні – подовжуються $a_1 < a_0 < a_2$ (рис. 16.2).

Волокна, що належать нейтральному шару, до деформації лежать в одній площині, а в деформованому стані утворюють деяку циліндричну поверхню. Їх довжина не змінюється ($a = a_0$), а кожний поперечний переріз балки перетинається з нейтральним шаром по прямій, яка називається нейтральною лінією перерізу. При плоскому згинанні нейтральний шар виявляється перпендикулярним до силової площини, а отже, нейтральна лінія перпендикулярна до

силової лінії в перерізі. Нехай вісь z (рис. 16.1) збігається з нейтральною лінією.

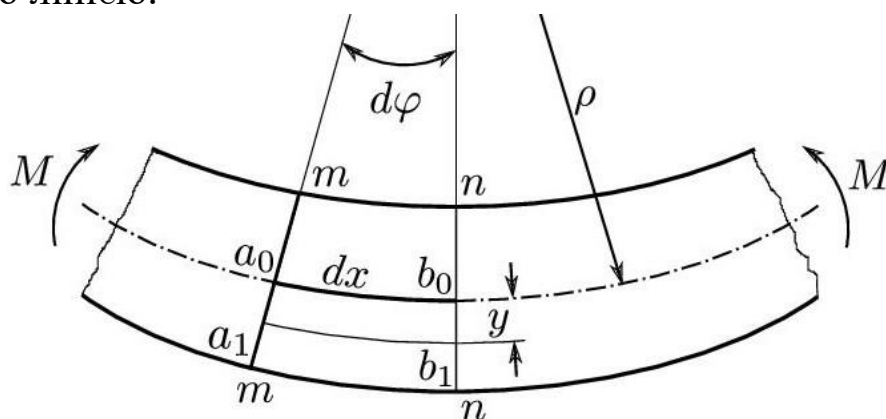


Рис. 16.3

Виділимо елемент балки двома суміжними поперечними перерізами $m-m$ та $n-n$, які розміщені один від одного на відстані dx (рис. 16.3), та розглянемо його деформований стан.

Перерізи $m-m$ та $n-n$ повертаються один відносно одного на кут $d\varphi$ і залишаються плоскими. Елемент a_0b_0 нейтрального пласта перетворюється на дугу з радіусом ρ , а волокно, яке розміщено на відстані y від нейтрального шару, – на криволінійне волокно a_1b_1 з радіусом кривини $\rho + y$. Відносне подовження цього волокна:

$$\varepsilon = \frac{a_1b_1 - a_0b_0}{a_0b_0} = \frac{(\rho + y)d\varphi - dx}{dx}, \quad (16.3)$$

де $a_0b_0 = dx = \rho d\varphi$.

Підставивши $dx = \rho d\varphi$ у формулу (16.3) і скоротивши на $d\varphi$, матимемо:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (16.4)$$

Отже відносна подовжня деформація пропорційна відстані волокна від нейтральної осі. Для того щоб записати закон Гука, треба з'ясувати, в якому напруженому стані перебуває волокно a_0b_0 . На елементарній площадці dA зрізу (рис. 16.1) дотичних напружень немає. Якщо припустити, що волокна матеріалу, розміщені вздовж балки, не тиснуть одне на одне, то напруження між ними дорівнюють нулю. Волокно a_0b_0 перебуває в лінійному напруженому стані – зазнає простого розтягання або стискання.

Тому для нього закон Гука записується так:

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{y}{\rho}. \quad (16.5)$$

Згинальний момент:

$$M = M_x = \int_A y \cdot \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \quad (16.6)$$

Оскільки $\int_A y^2 dA = J_x$ – момент інерції перерізу відносно осі x , остання формула приймає вигляд:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}. \quad (16.7)$$

Формула (16.7) фактично є законом Гука при згинанні, оскільки вона пов'язує деформацію (кривину нейтрального шару $1/\rho$ із силовим фактором – згинальним моментом, що діє в перерізі).

Підставивши $1/\rho$ з формули (16.7) у (16.5), отримаємо так звану формулу К. Нав'є:

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = \frac{EMy}{EJ_x} = \frac{My}{J_x}. \quad (16.8)$$

Формула Нав'є дає змогу визначати нормальні напруження при чистому згинанні балки в будь-якій точці її перерізу.

Нейтральна лінія перерізу, вісь Z – проходить через центр тяжіння (ц.т.) поперечного перерізу, силова площина – через вісь балки, силова лінія (вісь y) – через центр тяжіння перерізу. Осі x та y – головні центральні осі перерізу. Цим визначається положення нейтральної лінії перерізу. Якщо силова лінія збігається з однією із головних центральних осей перерізу, то згинання буде плоским, і нейтральна лінія перерізу буде збігатися з іншою головною центральною віссю.

Величина EJ_x називається жорсткістю перерізу при згинанні, H_m^2 . З формули (16.8) випливає, що коли балка виготовлена з однорідного матеріалу ($E = const$) і має постійний переріз ($J_x = const$), то при чистому згинанні ($M = const$) її вісь викривляється по дузі кола ($\rho = const$). Формула (16.8) показує, що незалежно від форми та розмірів перерізу балки напруження в точках нейтральної лінії завжди дорівнюють нулю. Величина σ лінійно зростає в міру віддалення від нейтральної лінії. При цьому

напруження виявляються однаковими по ширині перерізу (уздовж лінії $y = \text{const}$).

Усі волокна, розміщені вище за нейтральну лінію, виявляються стиснутими, а нижче за неї – розтягнутими. Максимальні напруження ($\sigma_{\max}$) мають місце в найбільш віддалених від нейтральної лінії волокнах. У випадку симетричного перерізу відносно горизонтальної осі Z :

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot 0,5h}{J_x}. \quad (16.9)$$

Позначивши $W = \frac{J_x}{0,5h}$ як осьовий момент опору, м^3 , одержимо:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}. \quad (16.10)$$

Якщо переріз балки не має горизонтальної осі симетрії, то нейтральна лінія зміщена відносно середини висоти перерізу і напруження у крайніх верхніх та у крайніх нижніх волокнах не будуть однаковими. На відміну від простого розтягання чи стискання під час згинання, як і при крученні, напруження в перерізі розподіляються нерівномірно.

16.2. Умови міцності при згинанні

У зоні нейтрального пласта матеріал навантажений мало. Тому з метою економії матеріалу та зниження ваги конструкції, яка працює на згинання, вибирають такі форми перерізу, щоб більша частина матеріалу була віддалена від нейтральної лінії. Найближчий до ідеального профілю є двотавровий переріз.

Згинальний момент, який переріз може витримати безпечно, залежить від моменту опору W . Згідно з формулою (16.10), допустимий згинальний момент:

$$[M] = \sigma_{\max} W = [\sigma] W. \quad (16.11)$$

Затрата матеріалу пропорційна площі перерізу A . Отже, чим більше добуток FW , тим більший згинальний момент витримує переріз із заданою площею і тим менше матеріалу піде на виготовлення стрижня, що витримує заданий згинальний момент. Тому добуток FW є критерієм, що оцінює якість профілю. Для загального випадку згинання дія поперечних сил призводить до того, що гіпотеза плоских перерізів, на якій ґрунтується виведення формули Нав'є для

обчислення нормальних напружень, порушується, оскільки поперечні перерізи викривляються; поздовжні волокна взаємодіють між собою, тиснуть одне на одне і, отже, перебувають не в лінійному, а в плоскому напруженому стані. При поперечному згинанні балок, коли в перерізі, крім M , діють N та Q , можна використовувати формули, виведені для чистого згинання.

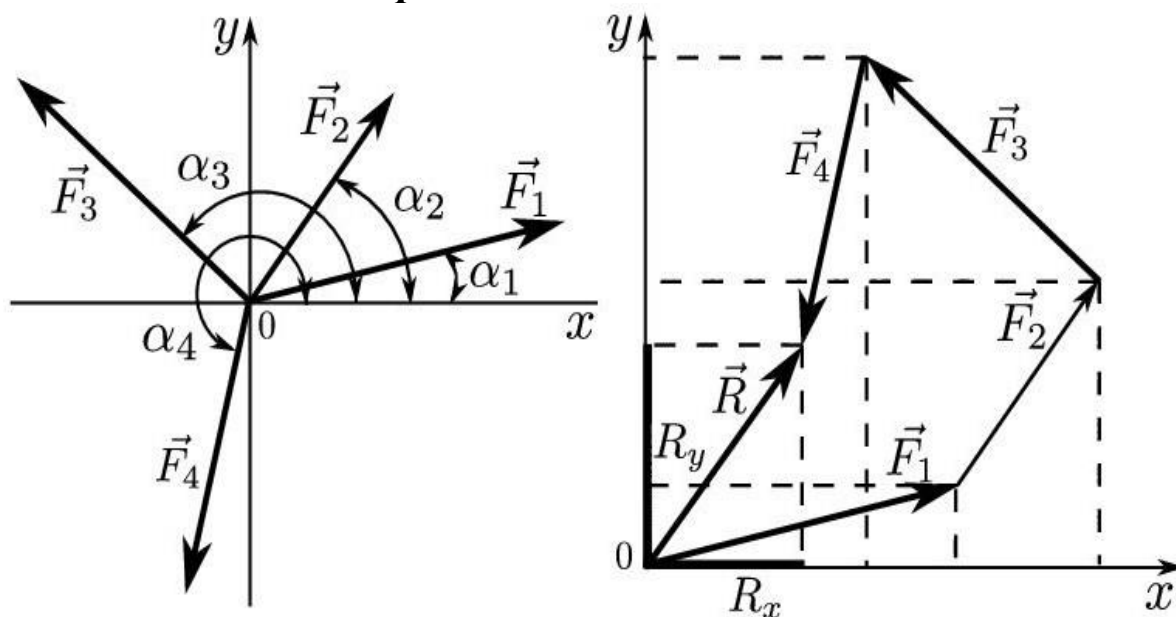
При поперечному згинанні, коли в поперечних перерізах бруса діють Q та M , виникають не тільки нормальні напруження σ , а й дотичні τ .

Контрольні запитання

1. Укажіть умови, за яких виникає чисте плоске згинання балки.
2. Проаналізуйте задачу на чисте плоске згинання балки.
3. Запишіть формулу К. Нав'є.
4. Що розуміють під нейтральною лінією перерізу?
5. Визначте закон Гука при згинанні.
6. Що називається жорсткістю перерізу при згинанні?
7. Що називається осьовим моментом опору при згинанні?
8. Проаналізуйте особливості розподілу величини нормальних напружень при чистому плоскому згинанні балки.
9. Поясніть, чому з метою зниження ваги конструкції, яка працює на згинання, слід вибирати такі форми перерізу, щоб більша частина матеріалу була віддалена від нейтральної лінії.
10. Запишіть та проаналізуйте формулу для допустимого згинального моменту.
11. Наведіть та проаналізуйте припущення про характер розподілу дотичних напружень у балках прямокутного перерізу.
12. Наведіть формули для визначення дотичного напруження при поперечному згинанні балок прямокутного та круглого перерізів.
13. Укажіть загальні висновки щодо розподілу дотичних напружень у перерізах при поперечному згинанні балок.
14. Проаналізуйте умови міцності для небезпечних точок при згинанні.
15. Поясніть, чому для балки, яка працює на згин, найбільш раціональним є двотавровий переріз.
16. Укажіть особливості вибору раціональної форми перерізу балки з крихкого матеріалу.

Розрахунково-графічна робота № 1

Визначення рівнодійної плоскої системи збіжних сил аналітичним і геометричним засобами



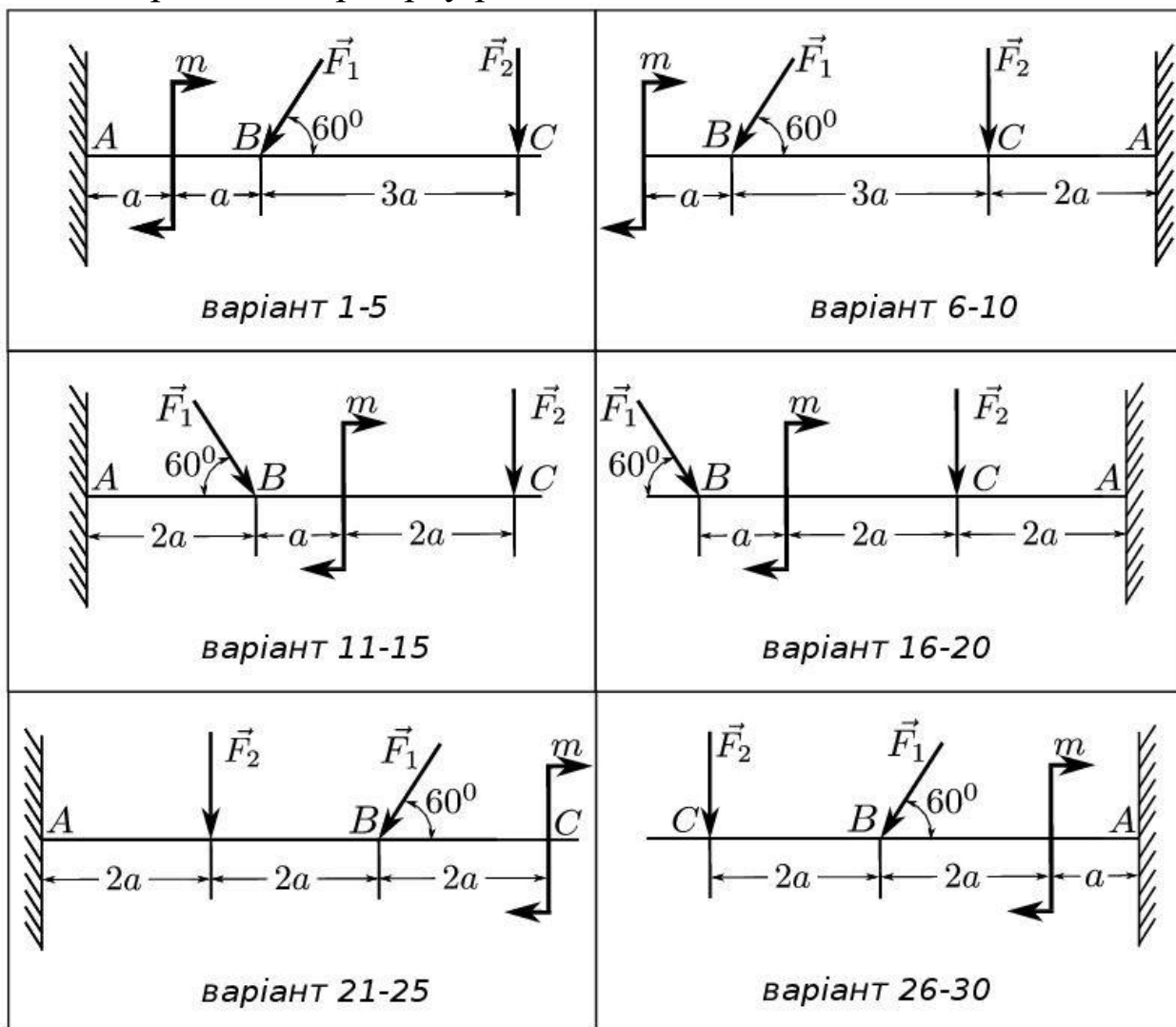
Завдання. За схемою рисунків знайти рівнодійну систему збіжних сил. Варіанти завдань наведені в таблиці.

Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$F_1, \text{кН}$	10	12	8	16	4	6	14	18	10	8
$F_2, \text{кН}$	6	8	10	12	6	14	8	10	6	12
$F_3, \text{кН}$	8	4	12	14	10	15	10	8	12	10
$F_4, \text{кН}$	6	10	14	15	9	8	16	12	8	14
$\alpha_1, \text{град}$	30	0	60	120	45	75	30	60	0	45
$\alpha_2, \text{град}$	45	60	30	30	75	0	60	45	30	60
$\alpha_3, \text{град}$	0	300	270	150	300	270	210	150	120	150
$\alpha_4, \text{град}$	150	120	210	60	120	150	120	210	60	75

Розрахунково-графічна робота № 2

Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених сил і пар сил

Завдання. Визначити величини реакцій у опорі защемленої балки. Провести перевірку розв'язання.

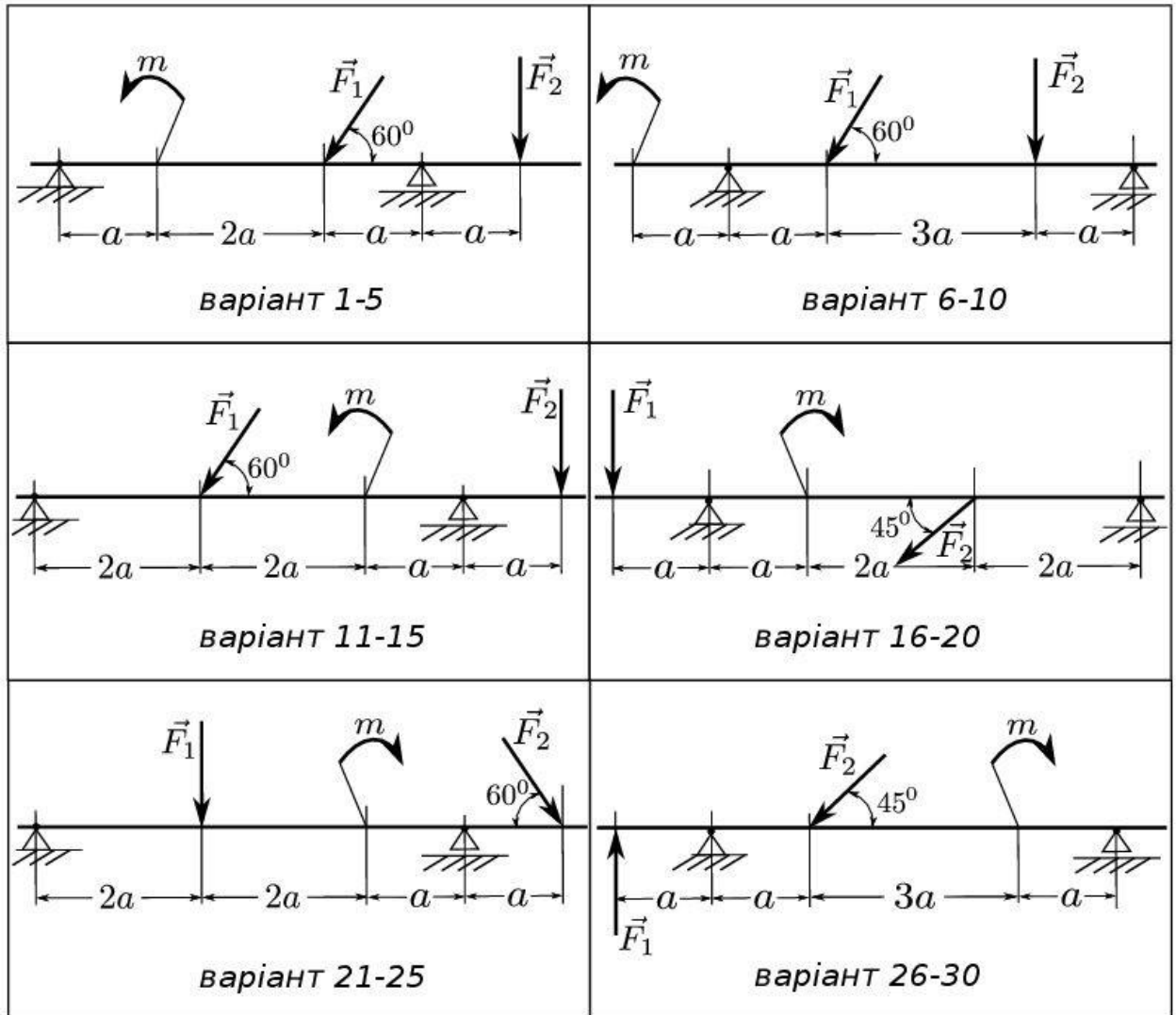


Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$F_1, \text{кН}$	12	14	16	18	20	22	10	24	26	28
$F_2, \text{кН}$	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	5
$m, \text{кНм}$	14	13	12	11	10	9	8	7	12	14
$a, \text{м}$	0,5	0,5	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2

Розрахунково-графічна робота № 3

Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених сил і пар сил

Завдання. Визначити величини реакцій для балки у шарнірних опорах балки. Перевірити розв'язання.

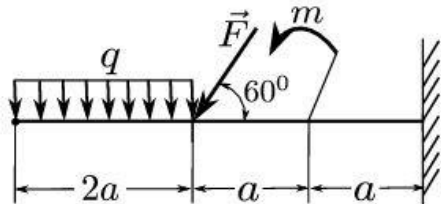
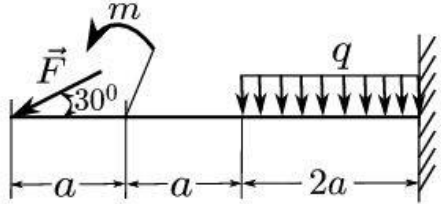
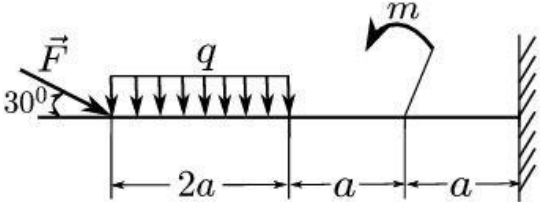
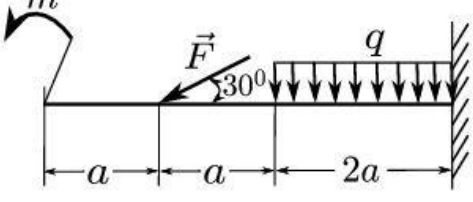
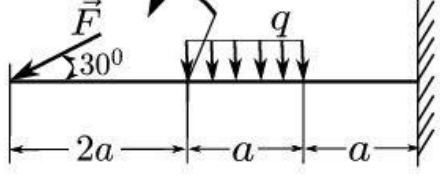
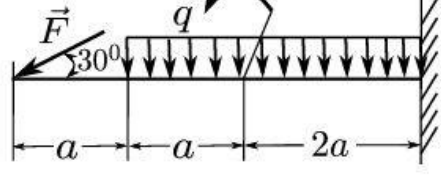


Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$F_1, \text{кН}$	12	14	16	18	20	22	10	24	26	28
$F_2, \text{кН}$	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	5
$m, \text{кНм}$	14	13	12	11	10	9	8	7	12	14
$a, \text{м}$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2

Розрахунково-графічна робота № 4

Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених і розподілених навантажень

Завдання. Визначити величини реакцій у опорі защемленої балки. Перевірити розв'язання.

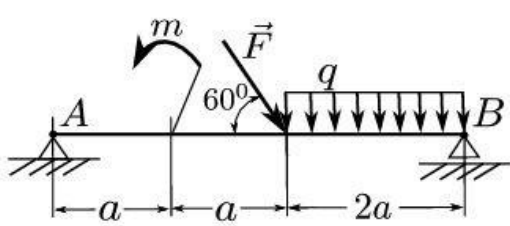
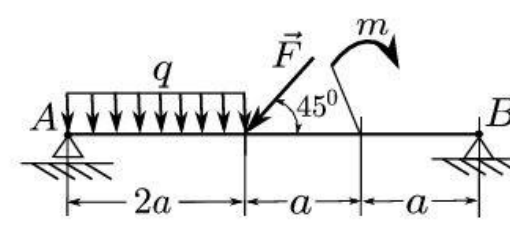
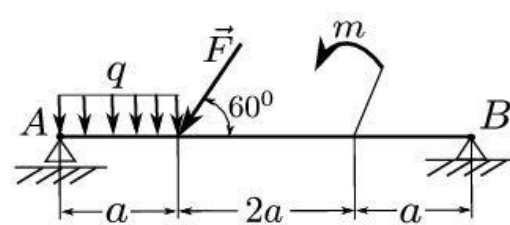
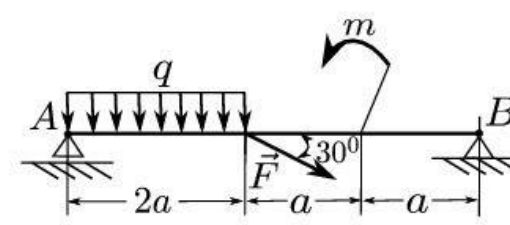
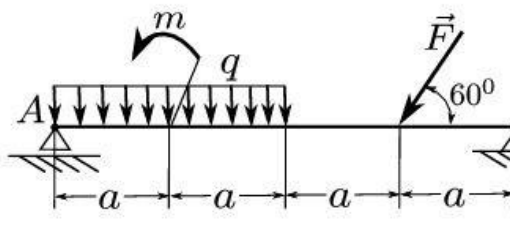
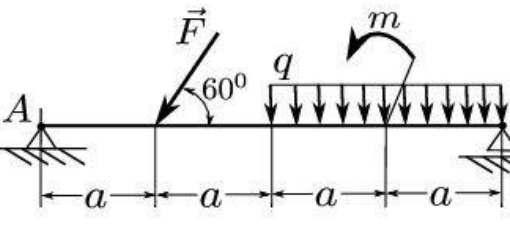
 варіант 1-5	 варіант 6-10
 варіант 11-15	 варіант 16-20
 варіант 21-25	 варіант 26-30

Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$F_1, \text{кН}$	6	8	10	12	14	22	20	18	16	4
$q, \text{кН/м}$	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
$m, \text{кНм}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	20
$a, \text{м}$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2

Розрахунково-графічна робота № 5

Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених і розподілених навантажень

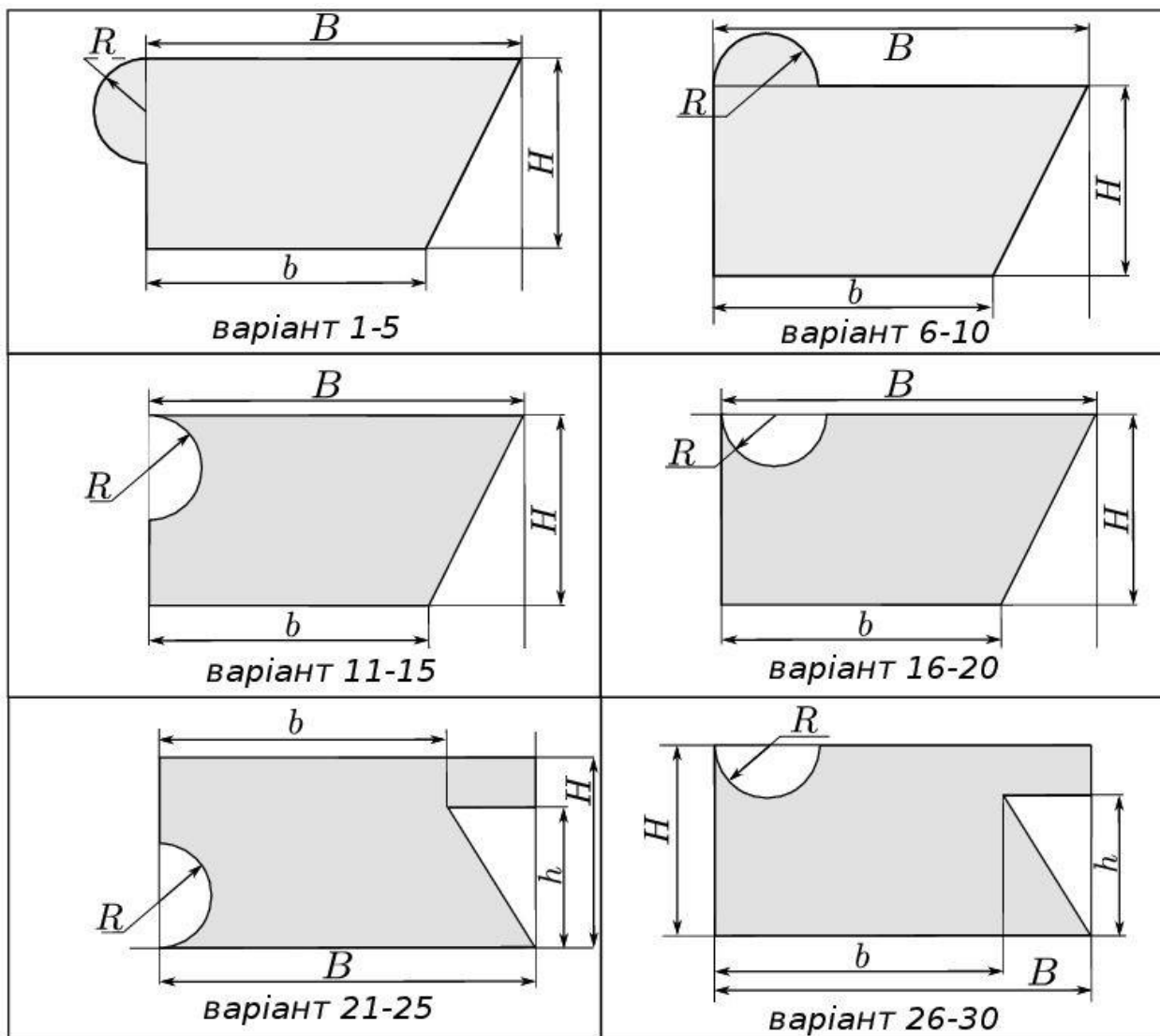
Завдання. Визначити величини реакцій у шарнірних опорах балки. Перевірити розв'язання.

 варіант 1-5	 варіант 6-10
 варіант 11-15	 варіант 16-20
 варіант 21-25	 варіант 26-30

Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$F_1, \text{кН}$	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80
$q, \text{кН/м}$	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
$m, \text{кНм}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	20
$a, \text{м}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4

Розрахунково-графічна робота № 6

Завдання. Визначити координати центра тяжіння заданого перерізу.



Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$B, \text{мм}$	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
$b, \text{мм}$	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
$H, \text{мм}$	90	100	120	130	140	150	160	170	180	190
$h, \text{мм}$	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
$R, \text{мм}$	26	26	30	30	30	40	40	50	50	50

Список рекомендованої літератури

1. Технічна механіка / І.Я. Бялер, В.Н. Левінсон, В.Ю. Саліон В.А. Михайловський. – Київ: Вища шк., 1971. – 379 с.
2. Олофинская В.П. Техническая механика / В.П. Олофинская. – Москва: Форум, 2007. – 347 с.
3. Рохманов М.Я. Фізика / М.Я. Рохманов, С.С. Авотін, А.А. Онищенко. – Харків: ХНАУ, 2018. – 287с.
4. Ткачук А.Т. Технічна механіка / А.Е. Ткачук. – Кіровоград: Авангард, 2015. – 260 с.
5. Федуліна А.І. Теоретична механіка / А.І. Федуліна. – Київ: Вища шк., 2005. – 319 с.
6. Эрдеди А.А. Техническая механика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов / А.А. Эрдеди, Ю.А. Медведев, Н.А. Эрдеди. – Москва: Высш. шк., 1991. – 303 с.
7. Федуліна А.І. Теоретична механіка / А.І. Федуліна. – Київ: Вища шк., 2005. – 309 с.
8. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – Київ: Вища шк., 2004. – 655 с.
9. Гнап А.К. Технічна механіка / А.К. Гнап, М.Я. Рохманов. – Харків: ХНАУ, 2003. – 198с.
10. Рохманов М.Я. Фізика / М.Я. Рохманов, С.С. Авотін, Є.А. Пивовар. – Харків: ХНАУ, 2012. – 286с.