ВИЩА МАТЕМАТИКА

Практикум

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів
Лист № 14/18-2-534 від 17.03. 2003 р.

КИЇВ
ЦУЛ
2003

УДК 512.64;514,742;517.
ББК 22.1

Автори:
В.Г.Кривуца, д-р техн.наук, проф.,заслужений діяч науки і техніки України.
В.В.Барковський, д-р фіз.-мат.наук, проф.
Н.В.Барковська, канд.фіз.-мат.наук, доц.

Рецензенти:
Ю.М.Березанський, д-р фіз.-мат.наук, проф., академік НАНУ.(Інститут математики НАНУ)
Г.Є.Чайка, д-р фіз.-мат.наук, проф., лауреат державної премії України (Держуніверситет інформаційно-комунікаційних технологій).
В.К.Чибіряков, д-р техн.наук, проф.,(Київський національний ун-т будівництва і архітектури).

К 321 **Вища математика. Практикум.** В.Г. Кривуца, В.В. Барковський, Н.В. Барковська. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.
ISBN 966-690-035-1

Висококваліфіковані фахівці пропонують практикум з вищої математики, в якому коротко, зрозуміло, з прикладною спрямованістю викладено теоретичний матеріал, розв'язані з поясненнями типові приклади і наведені завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів.

Посібник містить 18 розділів, передбачених навчальною програмою дисципліни "Вища математика" для підготовки у вищих навчальних закладах бакалаврів, спеціалістів і магістрів з багатьох напрямів. Його зміст, структура і методика викладання матеріалу сприяють індивідуалізації навчального процесу і можливості використання сучасних телекомунікаційних технологій.

Посібник призначений для студентів денної і заочної форм навчання та викладачів вищих навчальних закладів.

ISBN 966-690-035-1

Серед усіх наук, що відкривають людству шлях до пізнання законів природи, наймогутніша, найвеличніша наука - математика.

С.Ковалевська

У математичних науках є вдалі винаходи, здатні принести велику користь, задовольняючи любов до знань, полегшуючи всі ремесла і скорочуючи працю людини.

Р.Декарт

Розквіт і довершеність математики тісно пов'язані з добробутом держави.

Наполеон

Теорія без практики мертва та безплідна, практика без теорії неможлива чи згубна. Для теорії потрібні головним чином знання, для практики, крім того, і вміння.

Академік О.М.Крилов

Люди, що засвоїли великі принципи математики, мають на один орган більше, ніж прості смертні.

Ч.Дарвін

Інженер, що не володіє матаматичними методами, це не інженер, а монтер.... Інженер у повному розумінні цього слова немислимий без знання математики.

Академік І.Г.Александров

ЗМІСТ

ВСТУП

В суспільстві розвиненої ринкової економіки працевлаштування та досягнення мети будь-якою людиною найчастіше тісно пов’язано з умінням вдосконалювати: свої здібності, комунікабельність, фізичний стан, навички уважної розумової творчої праці та використання сучасних інформаційних технологій. Важливі також: цілеспрямованість, знання іноземних мов, навички коротко і логічно виражати свої думки, організаційні здібності, культурний рівень.

Усі ці риси доцільно розвивати якомога раніше.

Організація навчального та виховного процесу у вищих навчальних закладах України сприяє такому розвитку студентів, які бажають одержати ґрунтовні знання з обраної спеціальності, приймають активну участь в наукових дослідженнях, художній самодіяльності, спорті, в громадському житті навчального закладу, міста, держави.

Значну роль у набутті майже усіх вказаних рис грає процес вивчення математичних дисциплін.

Використовувати можливості сучасних інформаційних технологій у різноманітних сферах людської діяльності вдається лише тим фахівцям, які мають навички творчої розумової діяльності і використання можливостей комп’ютерної техніки, володіють математичними знаннями та навичками.

При цьому математика використовується не тільки як засіб побудови і дослідження математичних моделей реальних процесів, інструмент кількісних розрахунків, але і як метод чіткого визначення різних понять, логічного мислення, виявлення об’єктивних закономірностей.

Математика суттєво використовується для засвоєння та застосування багатьох навчальних дисциплін.

Посібник містить теоретичний матеріал, вправи до кожного вивчаємого розділу та приклади їх розв'язування.

Методика і форма викладання матеріалу в посібнику сприяють прикладної спрямованості і якісному засвоєнню навчальної програми дисципліни "Вища математика".

Автори сподіваються, що цей посібник допоможе студентам якісно засвоїти фундаментальні розділи навчальної програми дисципліни «Вища математика» і набути навичок їх використання при вивченні інших дисциплін

ВХІДНИЙ КОНТРОЛЬ

1 Завдання вхідного контролю

Розв'язувати приклади одного варіанту

✷ **Приклад 1** Знайти А відсотків числа В

Варіанти / Числа	1	2	3	4	5
А	8	21	63	4,5	13,4
В	1250	1480	150	3600	180

Варіанти / Числа	6	7	8	9	10
А	120	154	82	7	3
В	350	540	440	380	845

✷ **Приклад 2** Поділити число С на частини пропорційно числам А, В, D

Варіанти / Числа	1	2	3	4	5
С	759	632,7	1510	490	88
А	10	0,1	2/3	1/2	0,5
В	11	0,01	0,7	3/4	0,75
D	12	0,001	11/3	6/5	1,5

Числа \ Варіанти	6	7	8	9	10
C	100	560	759	740	1518
A	1/2	2	14	1/2	10
B	3/4	3	6	3/4	11
D	5/6	9	3	3/5	12

✸ **Приклад 3** Спростити вирази а) та б) відповідного варіанту

Варіант 1

а) $\left(\dfrac{ав}{a^2-в^2}-\dfrac{в}{2a-2в}\right):\dfrac{2в}{a^2-в^2}$; б) $\dfrac{\cos^2\alpha-ctg^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+tg^2\alpha-1}$

Варіант 2

а) $\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1-x(x^2-1)^{-1/2}}{x(x^2-1)^{-1/2}+1}\right):\sqrt{x^2-1}$;

b) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+3$

Варіант 3

а) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$; б) $4\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+2\pi)$

Варіант 4

а) $\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$;

b) $4-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

Варіант 5

а) $\dfrac{m^{3/2}-m^{1/2}-n^{3/2}+n^{1/2}}{m^{3/2}+n^{1/2}+mn+m^2-m}$; б) $3\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+5tg\alpha$

Варіант 6

а) $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-в)\sqrt{x-в}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-в}}+a+в$;

б) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$

Варіант 7

а) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}-x-2y$; б) $\cos^2 2\alpha-cos4\alpha$

Варіант 8

а) $\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4\cdot y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)$;

b) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\dfrac{\sin2\alpha}{2}$

Варіант 9

а) $\dfrac{a^{7/3}-2a^{5/3}\cdot в^{2/3}+aв^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}\cdot в^{1/3}-aв^{2/3}+a^{2/3}\cdot в}:a^{1/3}$;

b) $\sin4\alpha\cdot ctg2\alpha-\cos4\alpha$

Варіант 10

а) $\left(\sqrt{1-x^2}+1\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)$;

б) $\sin^2\alpha(1+\sin^{-1}\alpha+ctg\alpha)(1-\sin^{-1}\alpha+ctg\alpha)$

✸ **Приклад 4** Вказати значення функції

Варіанти / Функції	1	2	3	4	5
	$\sin 0^0$	$\sin 30^0$	$\sin 45^0$	$\sin 60^0$	$\sin 90^0$
	$\cos 30^0$	$\cos 45^0$	$\cos 0^0$	$\cos 90^0$	$\cos 60^0$
	$tg 45^0$	$tg 60^0$	$tg 30^0$	$tg\dfrac{\pi}{2}$	$tg 45^0$

Варіанти / Функції	6	7	8	9	10
	$\sin\pi$	$\sin 360^0$	$\sin 390^0$	$\sin 405^0$	$\sin\dfrac{\pi}{2}$
	$\cos\dfrac{\pi}{2}$	$\cos\pi$	$\cos 2\pi$	$\cos 390^0$	$\cos 405^0$
	$tg\dfrac{\pi}{6}$	$tg\dfrac{\pi}{3}$	$tg 210^0$	$tg\, 240°$	$tg\dfrac{\pi}{4}$

✸

Приклад 5 Розв'язати рівняння

Варіант 1

а) $4^x-2^{x+1}-8=0$; б) $\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=3$

Варіант 2

а) $9^{x^2+4x-4,5}=9^{0,5}$; б) $\log_{(x^2-1)}27=3$

Варіант 3

а) $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$; б) $\ln(2x+1)=2$

Варіант 4

а) $\log_2 x+\log_4(x+2)=2$; б) $7^{2x+1}+1=8\cdot 7^x$

Варіант 5

а) $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$;

б) $\lg(3x+1)=3$

Варіант 6

а) $\log_5\sqrt{x-9}-\log_5 10+\log_5\sqrt{2x-1}=0$;

б) $\left(\dfrac{7}{6}\right)^{3x^2+4x-3}=\left(\dfrac{6}{7}\right)^{-7x-3}$

Варіант 7

а) $\lg(x+1,5)=-\lg x$; б) $2^{x-2}=7^{x-2}$

Варіант 8

а) $3^{2x}-5\cdot 3^x+6=0$; б) $6^{\log_3 x}=6$

Варіант 9

а) $5^x+3\cdot 5^{x-2}=140$; б) $\log_7\log_5\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)=0$

Варіант 10

а) $2^{3x}=8$; б) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$

Рекомендації до аналізу вхідного контролю

Вхідний контроль доцільно здійснювати на першому практичному занятті в кожній академічній групі під керівництвом викладача. Досвідчений викладач зробить детальний аналіз результатів вхідного контролю, проведе індивідуальні співбесіди і може розробити програму вдосконалення математичних знань та навичок кожного студента з врахуванням особистих рис характеру, рівня підготовленості, цілеспрямованості та мотивації до навчання.

Вхідний контроль, аналіз його результатів та розробка програми поглиблення математичних знань та навичок студент може здійснити самостійно або залучивши батьків чи друзів.

Доцільно визначити час розв'язування прикладів одного варіанта та звернути увагу на застосування мікрокалькулятора для обчислень. Кожен варіант середнє підготовлений студент повинен вірно розв'язати за 40-45 хвилин без використання мікрокалькулятора.

Варіанти вхідного контролю оформлені таким чином, щоб перевірити уважність та зосередженість студента при виборі прикладів кожного варіанта.

<u>Уважність та зосередженість необхідні не лише для засвоєння усіх навчальних дисциплін, але й для практичної діяльності, а також в побуті. Тому ці якості потрібно постійно розвивати.</u>

Студентів, які вірно і достатньо швидко розв'язали усі приклади варіанта вхідного контролю, доцільно залучати до науково-дослідницької роботи, до роботи із недостатньо підготовленими студентами, націлювати на одержання «червоного диплома» та лідерство в групі.

На жаль, в сучасних умовах викладачі перших курсів вищих навчальних закладів недостатньо приділяють увагу роботі зі студентами, які навчаються на «добре» та «відмінно».

Аналізуючи результати вхідного контролю студентів, треба особливу увагу звернути на допущені похибки (арифметичні, відсутність навичок алгебраїчних перетворень та знань основних тригонометричних формул і значень тригонометричних функцій) і недоліки оформлення роботи, що характеризують послідовність, логіку та чіткість мислення, акуратність або безладність.

Аналіз похибок та недоліків, допущених студентом при виконанні вхідного контролю, а також відповіді студента на тестові питання співбесіди дають можливість скласти для кожного студента програму ліквідації недоліків попереднього навчання та виховання, рекомендувати відповідну літературу, визначити терміни та форми контролю виконання індивідуальної програми. Крім того, кожному студенту доцільно дати обґрунтовані рекомендації для прискорення адаптації до навчання у вищому навчальному закладі.

Під час співбесіди зі студентом доцільно ознайомити його у доброзичливій формі з похибками і недоліками виконання вхідного контролю та одержати відверті відповіді на питання, наприклад, такого тесту:

<u>*І Допущені помилки та недоліки обумовлені:*</u>

1 Поспіхом розв'язування прикладів;
2 Не вмінням зосереджуватися;
3 Не акуратним записом;
4 Відсутністю мікрокалькулятора або комп'ютера;
5 Відсутністю потрібних знань правил та методів;
6 Відсутністю необхідних навичок.

II Відсутність необхідних знань та навичок обумовлена:

1 Впевненістю, що математика ніколи не буде потрібна;

2 Довгостроковою хворобою в … класах;

3 Умовами в родині;

4 Умовами навчання в школі (відсутність вчителів)

5 Пропуском багатьох занять;

6 Не регулярним виконанням завдань;

7 Не самостійним виконанням контрольних та екзаменаційних робіт з математики;

8 Незрозумілим викладанням математики вчителями школи і відсутністю необхідних навчально-методичних посібників;

9 Недостатньою вимогливістю вчителів;

10 Наявністю великої кількості правил, методів, формул, які важко запам'ятати;

11 Моральним кліматом в класі (не має поваги до учнів, що добре навчаються);

12 Захопленням спортом, мистецтвом.

13 Неуважністю, складністю запам'ятовувати.

III Відношення до вивчення математики у вищому навчальному закладі:

1 Пасивно, якось здавати планові заліки та іспити;

2 Активно вивчати і одержувати лише відмінні оцінки

3 Ліквідувати прогалини в математичних знаннях та навичках як можна скоріше і добре засвоювати розділи навчальної програми.

Кожному студенту треба зрозуміти, що при навчанні менше витрачається часу і нервових клітин, якщо вчитися на «добре» та «відмінно».

Для цього лише потрібно навчитися ефективно використовувати час і дотримуватися **рекомендацій:**

1 Відноситися до учбових занять як до роботи.

Пропуски занять можливі лише з дуже поважних причин.

2 Пропущені лекції та практичні заняття обов'язково треба своєчасно самостійно засвоїти, щоб розуміти наступні учбові теми.

3 На кожному занятті бути уважним, зосередженим, активним.

4 Навчитися акуратно, швидко і зрозуміло конспектувати лекції, робити пояснення до розв'язування задач та прикладів в робочому зошиті практичних занять.

5 Розуміння теоретичного матеріалу потрібно закріпити шляхом самостійного розв'язування відповідних задач чи прикладів.

6 Завжди приділяти увагу можливому застосуванню вивчаємого матеріалу до задач та проблем майбутньої роботи.

7 Систематизувати основні поняття, позначення, методи, правила та формули кожного розділу навчальної програми і ввести їх в довгострокову пам'ять шляхом періодичного повторення та використання.

8 Без сорому звертатися до викладачів або студентів з питаннями, що сприяють більш глибокому розумінню вивчаємого матеріалу.

9 Крім конспектів та робочих зошитів користуватися рекомендованою літературою і навчально-методичними посібниками.

10 Не відкладати на останній тиждень виконання індивідуальної семестрової роботи.

11 Добре готуватися до практичних занять, планових контрольних робіт, заліків та іспитів.

Розділ 1 Алгебра комплексних чисел

1.1 Теоретичні відомості та типові приклади

Необхідність добування кореня парного степеня з дійсних від'ємних чисел привела до поняття комплексних чисел, які використовуються в сучасній математиці та її застосуваннях.

<u>Означення 1</u>. Комплексним числом називають вираз вигляду $z=x+iy$, де x та y - дійсні числа, $i=\sqrt{-1}$ - уявна одиниця

Число x називають дійсною частиною комплексного числа z і позначають $x = Rez$.

Число y, що є коефіцієнтом при уявній одиниці і називають уявною частиною комплексного числа z і позначають $y = Imz$.

Якщо $y = 0$, то $z = x + 0 \cdot i = x$, тобто z, співпадає з дійсним числом x.

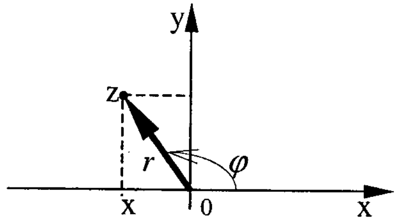
Якщо $x = 0$, то $z = 0 + iy = iy$ називається суто уявним.

Комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$, та $z_2 = x_2 + iy_2$ рівні, якщо рівні їх дійсні та уявні частини.

Отже, рівність $z_1=z_2$ означає, що $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Комплексне число $z = x + iy$ в декартовій системі координат можна зобразити точкою з координатами (x, y). При

цьому між точками площини і комплексними числами встановлюється взаємнооднозначна відповідність. Дійсна
частина x зображується точками осі Ox, яку називають дійсною віссю. Уявна частина y зображується точками осі Oy, яку називають уявною віссю.



Мал 1.

Кожній точці комплексної площини Oxy відповідає її радіус - вектор $\vec{r}$ (вектор від початку системи координат до числа z) і полярний кут φ (кут повороту осі Ox до радіус - вектора $\vec{r}$). Довжину вектора $\vec{r}$ позначають $|\vec{r}|$.

❐ ***Числа r і φ називають модулем та аргументом комплексного числа*** *і позначають: $r = |z|$, $\varphi = Arqz$.*

Arqz визначається з точністю до 2πк, його головне значення: $-\pi \le \arg z \le \pi$.

Комплексне число z можна представити в трьох формах:

алгебраїчна	$z = x + iy$	(1)
тригонометрична	$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	(2)
показникова	$z = re^{i\varphi}$	(3)

Для переходу від алгебраїчної форми запису комплексного числа z до тригонометричної або показникової

форм використовують формули:

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \quad \varphi = arctg\frac{y}{x} + \pi\kappa} \qquad (4)$$

✧ **Приклад 1.** Знайти модулі та головні значення аргументів чисел

$z_1=1+i$; $z_2=-1-i$; $z_3=3-5i$; $z_4=4+3i$;
$z_5=3i$; $z_6=-5$.

Розв'язування. Використовуючи формули (4), одержимо:

$$r_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; \quad r_2 = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}; \quad ;$$

$$r_3 = \sqrt{3^2 + \left(-5^2\right)} = \sqrt{34}; \qquad r_4 = \sqrt{4^2+3^2} = 5;$$

$$r_4 = \sqrt{4^2+3^2} = 5; \quad r_5 = \sqrt{0^2+3^2} = 3; \quad r_6 = \sqrt{(-5)^2+0^2} = 5;$$

$$tg\varphi_1 = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4};$$

Комплексне число z_2 розташовано в третьому квадранті системи координат, тому

$$tg\varphi_2 = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

$$tg\varphi_3 = \frac{-5}{3} \Rightarrow \varphi_3 = arctg\left(\frac{-5}{3}\right) = -arctg\frac{5}{3}.$$

$$tg\varphi_4 = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi_4 = arctg\frac{3}{4}.$$

$tg\varphi_5 = \dfrac{3}{0}$ не існує, але z_5 лежить на осі Oy, тому.

$tg\varphi_5 = \dfrac{\pi}{2}$. $\quad tg\varphi_6 = \dfrac{0}{-5} = 0$ Число z_6 лежить на осі Ox зліва від 0, $\varphi_6 = \pi$

Приклад 2. Записати комплексне число $z=\sqrt{3}+i$ в тригонометричній та показниковій формах.

Розв'язання. Спочатку знайдемо модуль комплексного числа r та головне значення його аргументу φ, використовуючи формули (4).

$$r=\sqrt{3+1}=2; \quad tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}$$

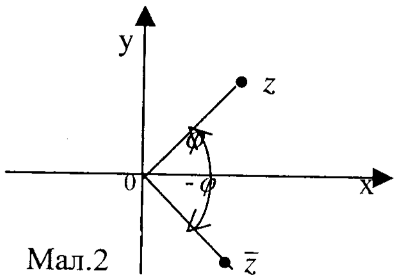
Згідно формулам (2) та (3) маємо:

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right); \; z=2\ell^{i\frac{\pi}{6}}$$

Означення 2. ***Комплексне число x-iy називають комплексно спряженим до числа z = x + iy, і позначають $\bar{z}$ або z^* (z з рискою або зірочкою).***

Комплексно спряжені числа відрізняються лише знаком уявних частин, їх модулі рівні, а аргументи відрізняються знаком.

Комплексно спряжені числа зображуються в системі координат точками, що симетричні відносно дійсної осі Ox (див. мал. 2).



Мал.2

Дії з комплексними числами.

1.Щоб помножити комплексне число z = x + iy на дійсне

число C, треба помножити на C дійсну та уявну частини z, тобто

$$\boxed{Cz = Cx + iCy} \qquad (5)$$

2.Для знаходження алгебраїчної суми комплексних чисел

$z_1=x_1+iy_1, \quad z_2=x_2+iy_2$

треба знайти таку саму алгебраїчну суму окремо дійсних та уявних частин чисел z_1, та z_2 і записати результат у вигляді відповідного комплексного числа, тобто

$$\boxed{z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)} \qquad (6)$$

Приклад 3. Знайти $2z_1-3z_2$, якщо $z_1 = -2 + 7i$; $z_2 = 3 - 2i$.

Розв'язування. Згідно формули (5) маємо:

$2z_1 = -4 + 14i$: ; $\quad 3z_2 = 9 - 6i$

Використовуючи правило знаходження різниці комплексних чисел за формулою (6) одержимо:

$$2z_1 - 3z_2 = (-4 - 9) + i(14 + 6) \Rightarrow 2z_1 - 3z_2 = -13 + 20i.$$

3. Множення та ділення комплексних чисел здійснюється за різними формулами в залежності від форми їх задання.

а) Якщо комплексні числа z_1 та z_2 задані алгебраїчною формою, то їх добуток буде комплексним числом, яке одержують за правилом множення многочленів і заміною добутку i x i на - 1, тобто за формулою

$z = z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 x_2)} \qquad (7)$$

Для ділення комплексних чисел треба помножити ділене і дільник на число, що комплексно спряжене до дільника, а потім відокремити дійсну та уявну частини.

Математично це можна записати так:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}} \qquad (8)$$

✧ **Приклад 4.** Знайти $z_1 \cdot z_2$ та $\dfrac{z_2}{z_1}$, якщо $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 2i$.

Розв'язування. Застосовуючи правило множення комплексних чисел за формулою (7) одержимо:

$z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(1 + 2i) = (2 + 4i + i + 2i^2) = 2 + 5i - 2 = 5i.$

Застосовуючи правило ділення комплексних чисел, знаходимо:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+2i}{2+i} = \frac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2 - i + 4i - 2i^2}{4 - i^2} = \frac{2 + 3i + 2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

▼ **<u>Зауваження</u>.** Сума комплексно спряжених чисел дорівнює подвоєної дійсної частині комплексного числа:

$$z + z^* = x + iy + x - iy = 2x = 2\mathrm{Re}z.$$

Добуток комплексно спряжених чисел дорівнює квадрату модуля комплексного числа:

$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$

б) При множенні комплексних чисел, що задані в тригонометричній або показниковій формах, їх модулі перемножуються, а аргументи додаються.

Отже, якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $r_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))} \qquad (7')$$

Якщо $z_1 = r_1\ell^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2\ell^{i\varphi_2}$, то

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\ell^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}} \qquad (7'')$$

При діленні комплексних чисел, що задані в тригонометричній або показниковій формах, їх модулі поділяються, а аргументи віднімаються.

Отже,

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))} \qquad (8')$$

Якщо $z_1 = r_1\ell^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2\ell^{i\varphi_2}$, то

$$\boxed{\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}\ell^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}} \qquad (8'')$$

✧ **Приклад 5.** Знайти:

а) $z_1 \cdot z_2$ та $\dfrac{z_2}{z}$; б) $z_3 \cdot z_4$ та $\dfrac{z_3}{z_4}$, якщо $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

$$z_3 = 4e^{i\pi/3}; \qquad z_4 = 2e^{i\pi/6}$$

Розв'язування. а) Використовуючи правила множення та ділення комплексних чисел, що задані в тригонометричній формі, одержуємо:

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5\pi}{12}\right);$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

б) Використовуючи правила множення та ділення комплексних чисел, що задані в показниковій формі, одержуємо:

$$z_3 \cdot z_4 = 4\cdot 2\ell^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = 8\ell^{i\frac{\pi}{2}}; \quad \frac{z_3}{z_4} = \frac{4}{2}\ell^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = 2^{i\frac{\pi}{6}}.$$

4 Піднесення до степеня і добування кореня доцільно виконувати використовуючи тригонометричну або показникову форми запису комплексних чисел.

Правило множення комплексних чисел розповсюджується на будь-яку кількість множників, тому

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} \qquad (9)$$

$$\boxed{z^n = r^n\ell^{in\varphi}} \qquad (10)$$

Для знаходження n різних значень $\sqrt[n]{z}$ використовують формули:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n}\right)} \qquad (11)$$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\ell^{i\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n}}} \qquad (12)$$

при к = 0, 1, 2, ..., n-1.

Приклад 6. Знайти: а) z_1^5 та $\sqrt[3]{z_1}$; б) z_2^3 та $\sqrt[5]{z_2}$,

якщо $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = 32\ell^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Розв'язування. а) Комплексне число z_1 задано в алгебраїчній формі. Для запису z_1 в тригонометричній формі знайдемо модуль та аргумент z_1:

$$|z_1| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}} = 1; \quad tg\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Отже, $z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

За формулою (9) знаходимо $z_1^5 = \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

За формулою (11) маємо

$$W_к = \sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi к}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi к}{3} \right), \quad k = 0;1;2$$

Таким чином, $W_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$;

$$W_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4};$$

$$W_2 = \cos\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}.$$

б) Комплексне число z_2 задано в показниковій формі. Використовуючи формули (10) та (12) одержимо:

$$z_2^3 = (32)^3 \ell^{-i\frac{\pi}{6}\cdot 3} = 32768\ell^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$W_к = \sqrt[5]{z_2} = \sqrt[5]{32\ell^{i\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi к}{5}}} = 2\ell^{i\frac{12\pi к-\pi}{6\cdot 5}}, \ k = 0;1;2;3;4.$$

Таким чином,

$$W_0 = 2\ell^{-\frac{\pi}{30}i}; \quad W_1 = 2\ell^{i\frac{11}{30}\pi}; \quad W_2 = 2\ell^{i\frac{23}{30}\pi}; \quad W_3 = 2\ell^{i\frac{35}{30}\pi};$$

$$W_4 = 2\ell^{i\frac{47}{30}\pi}.$$

▲ **Зауваження.** Для знаходження квадратного кореня із комплексного числа z = a + iв в алгебраїчній формі застосовують такий прийом:

$$\sqrt{a + iв} = x + iy \Rightarrow a + iв = (x + iy)^2 \Rightarrow a + iв = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Використовуючи умову рівності комплексних чисел, одержимо:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = в \end{cases}$$

Розв`язання цієї системи дозволяє визначити потрібні x та y.

✧ **Приклад 7.** Розв`язати рівняння

$$(4+i)z^2 - (35-21i)z + 18 - 174i = 0$$

**Розв`язання.** Розв`язки заданого квадратного рівняння з комплексними коефіцієнтами знайдемо за формулою

$$z_{1,2} = \frac{(35-21i) \pm \sqrt{(35-21i)^2 - 4(4+i)(18-174i)}}{2(4+i)} =$$

$$= \frac{(35-21i) \pm \sqrt{-200+1242i}}{2(4+i)}$$

Знайдемо значення квадратного кореня:

$$\sqrt{-200+1242i} = x + iy \Rightarrow -200 + 1242i = x^2 - y^2 + i2xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -200 \\ xy = 621 \Rightarrow y = \frac{621}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{385641}{x^2} = -200 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^4 + 200x^2 - 385641 = 0 \Rightarrow x^2 = -100 + 629 = 529 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm 23, \ y = \pm 27.$$

3*

Отже, $\sqrt{-200+1242i}=\pm(23+27i)$. Тому

$$z_1=\frac{35-21i+23+27i}{2(4+i)}=\frac{58+6i}{2(4+i)}=\frac{(29+3i)(4-i)}{16+1}=$$

$$=\frac{116-29i+12i-3i}{17}=\frac{119-17i}{17}=7-i$$

$$z_2=\frac{35-21i-23-27i}{2(4+i)}=\frac{12-48i}{2(4+i)}=\frac{(6-24i)(4-i)}{17}=\frac{-102i}{17}=-6i$$

1.2 ВПРАВИ

1. Знайти модуль та головне значення аргументу комплексних чисел та зобразити їх в комплексній площині.

a) $z=\sqrt{3}+i$; **b)** $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; **c)** $z=-1+\sqrt{3}i$;

d) $z=1-\sqrt{3}i$; **e)** $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; **f)** $z=4\sqrt{3}-4i$;

k) $z=-3+4i$; **m)** $z=4-3i$.

2. Комплексні числа першого завдання записати в тригонометричній та показниковій формах.

3. Знайти Nz_1+z_2 та Nz_2-z_1 заданих комплексних чисел (значення N задає викладач).

a) $z_1=3+2i$, $z_2=-1-i$; **b)** $z_1=-3+2i$, $z_2=1-i$;

c) $z_1=6-5i$, $z_2=-2+i$; **d)** $z_1=-6+5i$, $z_2=-2-i$;

t) $z_1=2+\frac{1}{2}i$, $z_2=3-\frac{1}{4}i$; **f)** $z_1=10+7i$, $z_2=-7-2i$;

k) $z_1=-5-2i$, $z_2=-3-4i$;. **m)** $z_1=1+3i$, $z_2=3-6i$.

4. Знайти добуток $z_1\cdot z_2$ та частку $\frac{z_2}{z_1}$ заданих в завданні 3 комплексних чисел.

5. Знайти z^{N+2} заданих в прикладах завдання 1 комплексних чисел (значення N задає викладач).

6. Знайти усі корені рівняння $z^5-Nz_0=0$ (значення N задає викладач), якщо

a) $z_0=\sqrt{3}+i$; **b)** $z_0=1+\sqrt{3}i$; **c)** $z_0=\sqrt{3}-i$;

d) $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; **e)** $z_0=1-\sqrt{3}i$; **f)** $z_0=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$;

k) $z_0=-1+\sqrt{3}i$; **m)** $z_0=1+i$;

7. Розв`язати рівняння:

a) $z^2+(15+3i)z+74+27i=0$;

б) $(2-6i)z^2-(14+18i)z-160+20i+0$;

в) $(6-2i)z^2-(74+42i)z+40+320i=0$;

г) $(7-4i)z^2+(39+117i)z-466+62i=0$;

8. Представити задане число z у тригонометричній і показниковій формах та знайти z^4 і $z^{1/4}$ з використанням таблиць значень тригонометричних функцій:

а) $z=-5+2i$; **б)** $z=-2-6i$

Відповіді:

а) $z=\sqrt{29}(\cos 158°12'+i\sin 158°12')$; $z^4=41-840i$

б) $z=2\sqrt{10}(\cos 251°34'+i\sin 251°342)$; $z^4=448{,}6-i1536{,}32$

Розділ 2 **Лінійна алгебра**

2.1 Матриці, визначники, мінори та алгебраїчні доповнення

2.1.1 Матриці і найпростіші дії з ними

Означення 1. **Матрицею розміром mxn називають таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, розташованих в m рядках та n стовпцях.**

Матриці позначають великими літерами, наприклад, A, B,C, та круглими дужками, а елементи матриць позначають відповідними малими літерами з двома індексами, наприклад, a_{ij}, $в_{ij}$, c_{ij}.

Перший індекс *i вказує номер рядка*, в якому знаходиться цей елемент, другий індекс *j вказує номер стовпця*, який містить цей елемент. Так, елемент c_{43} знаходиться на перетині четвертого рядка та третього стовпця матриці C.

Матриця розміру nx1 називається *матрицею-стовпцем* або вектором-стовпцем. *Матриця розміру 1xn* називається матрицею-рядком або вектором-рядком. *Матрицю називають квадратною порядку n, якщо кількість її рядків однакова з кількістю стовпців і дорівнює n.*

Приклад 1. Нехай задані матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&5&6&3\\3&4&2&5\\1&2&7&8\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3&-4&2\\2&1&9\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}3\\2\\5\\6\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}-2&5&4&3\end{pmatrix};\quad K=\begin{pmatrix}3&4&5\\2&7&6\\2&12&8\end{pmatrix}$$

Матриця A має розмір 3x4, матриця B розміру 2x3, матриця-стовпець C розміру 4x1, D - матриця рядок розміру 1x4, матриця K - квадратна порядку 3.

Елементи квадратної матриці A порядку n, що розташовані на діагоналі матриці, яка проходить з лівого верхнього кута до правого нижнього кута, утворюють головну діагональ матриці.

Елементи квадратної матриці, що розташовані на діагоналі матриці, яка проходить з правого верхнього кута до лівого нижнього кута, утворюють неголовну (допоміжну) діагональ матриці.

Наприклад, в матриці

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1(n-1)}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\dots&a_{2(n-1)}&a_{2n}\\-&-&-&-&-&-\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\dots&a_{n(n-1)}&a_{nn}\end{pmatrix}$$

елементами головної діагоналі будуть: a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}, а елементами неголовної діагоналі будуть: a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, $a_{3(n-2)}$, ..., a_{n1}.

Квадратна матриця зветься діагональною, якщо усі її елементи дорівнюють 0, крім елементів головної діагоналі.

Діагональна матриця, усі елементи якої дорівнюють одиниці, називається одиничною матрицею і позначається E або I.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ - діагональна матриця 4 порядку;

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - одинична матриця порядку 3.

Матриці А та В називають **рівними**, якщо:

1. вони мають однаковий розмір;
2. їх відповідні елементи рівні, тобто $a_{ij} = в_{ij}$ для усіх і та j.

Якщо в матриці А рядки записати стовпцями із збереженням їх нумерації, то одержана матриця зветься **транспонованою** і позначається $\mathbf{A^T}$, а вказана операція перетворення матриці А називається транспонуванням матриці А.

Наприклад,

якщо $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -4 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, тоді $C^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Матриці широко використовуються не лише в різних навчальних дисциплінах, але й в практичній діяльності спеціалістів багатьох галузей (див., наприклад, стор. 75 з [1]), тому треба розуміти правила дій з матрицями і мати навички їх використання.

Найпростіші дії з матрицями

Найпростішими діями з матрицями називають множення матриць на число, їх алгебраїчну суму та множення матриць.

Добутком матриці А на число к називається матриця, елементи якої дорівнюють добуткам відповідних елементів матриці А та числа к:

$$\boxed{кA = \begin{pmatrix} ка_{11} & ка_{12} & ка_{13} & ... & ка_{1n} \\ ка_{21} & ка_{22} & ка_{23} & ... & ка_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ ка_{m1} & ка_{m2} & ка_{m3} & ... & ка_{mn} \end{pmatrix}} \quad \mathbf{(1)}$$

Додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Алгебраїчною сумою матриць А та В однакового розміру m x n називається матриця С розміру m x n, елементи якої c_{ij} дорівнюють такої самої алгебраїчної суми елементів a_{ij} та $в_{ij}$ матриць А та В:

$$\boxed{A \pm B = C = \begin{pmatrix} a_{11} \pm в_{11} & a_{12} \pm в_{12} & ... & a_{1n} \pm в_{1n} \\ a_{21} \pm в_{21} & a_{22} \pm в_{22} & ... & a_{2n} \pm в_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} \pm в_{m1} & a_{m2} \pm в_{m2} & ... & a_{mn} \pm в_{mn} \end{pmatrix}} \mathbf{(2)}$$

Наприклад,

якщо $A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 25 \\ 16 & 12 & 18 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 15 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix}$, тоді

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 15 - 7 & 2 \cdot 20 - 4 & 2 \cdot 25 - 15 \\ 2 \cdot 16 - 9 & 2 \cdot 12 - 8 & 2 \cdot 18 - 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 36 & 35 \\ 23 & 16 & 23 \end{pmatrix}$$

Добуток AB матриць A та B існує лише при виконанні умов узгодженості: *<u>кількість стовпців матриці А (першого множника) дорівнює кількості рядків матриці В (другого множника).</u>*

Добутком AB матриці A розміру m x n і матриці B розміру n x p називається матриця C розміру m x p, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B. Таким чином, кожен елемент матриці C знаходиться за формулою:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}\text{в}_{1j} + a_{i2}\cdot \text{в}_{2j} + a_{i3}\cdot \text{в}_{3j} + \ldots + a_{in}\cdot \text{з}_{nj}} \qquad \textbf{(3)}$$

▼ **<u>Зауваження 1.</u>** Взагалі добуток матриць не має властивості комутативності, тобто AB ≠BA. Якщо добуток двох матриць не залежить від порядку множників, тобто AB = BA, тоді кажуть, що ці матриці комутують.

Наприклад, якщо A - квадратна матриця порядку n, E - одинична матриця порядку n, тоді AE = EA = A.

Приклад 2 Задані матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайти існуючі добутки цих матриць.

Розв'язання.

У даному випадку згідно умови узгодженості існування

добутку матриць, існують лише наступні добутки матриць: AX (кількість стовпців першого множника - 4 дорівнює кількості рядків другого множника); BC, CB, BA, CA.

Знайдемо вказані добутки матриць, використовуючи означення добутку матриць.

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \end{pmatrix}$$

розміри: 3 x 4 4 x 1 3 x 1

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot4+2\cdot1+1\cdot3; & 3\cdot5+2\cdot2+1\cdot2; & 3\cdot6+2\cdot4+1\cdot1 \\ 1\cdot4+3\cdot1+2\cdot3; & 1\cdot5+3\cdot2+2\cdot2; & 1\cdot6+3\cdot4+2\cdot1 \\ (-2)\cdot4+1\cdot1+2\cdot3; & (-2)\cdot5+1\cdot2+2\cdot2; & (-2)\cdot6+1\cdot4+2\cdot1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 21 & 27 \\ 13 & 15 & 20 \\ -1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$CB = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12+5-12; & 8+15+6; & 4+10+12 \\ 3+2-8; & 2+6+4; & 1+4+8 \\ 9+2-2; & 6+6+1; & 3+4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 29 & 26 \\ -3 & 12 & 13 \\ 9 & 13 & 9 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(5)}$$

Відмітимо, що з рівностей (4) та (5) випливає, що матриці B і C не комутують.

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3a_{11}+2a_{21}+a_{31}; & 3a_{12}+2a_{22}+a_{32}; & 3a_{13}+2a_{23}+a_{33}; & 3a_{14}+2a_{24}+a_{34} \\ a_{11}+3a_{21}+2a_{31}; & a_{12}+3a_{22}+2a_{32}; & a_{13}+3a_{23}+2a_{33}; & a_{14}+3a_{24}+2a_{34} \\ 2a_{11}+a_{21}+2a_{31}; & -2a_{12}+a_{22}+2a_{32}; & -2a_{13}+a_{23}+2a_{33}; & -2a_{14}+a_{24}+2a_{34} \end{pmatrix}$$

Аналогічно можна знайти і добуток СА.

▼ **Зауваження 2.** Ділення матриць $\frac{A}{B}$ розглядають як добуток АхВ$^{-1}$, де В$^{-1}$ - матриця, обернена до матриці В. Визначення та способи знаходження матриці В$^{-1}$ розглянемо пізніше, після введення нових необхідних понять.

▼ **Зауваження 3.** У випадках великого розміру матриць та їх елементів для дій з матрицями використовують комп'ютерну техніку.

2.1.2 Визначники та їх властивості

❐ **Означення 2.Визначником n-го порядку квадратної числової матриці А порядку n називають число, яке знаходиться з елементів матриці А за певним правилом і позначають $|A|$ або Δ(А).**

Правило обчислення визначника 2 порядку:

Для знаходження визначника другого порядку треба від добутку елементів головної діагоналі матриці відняти добуток

елементів допоміжної діагоналі.

Математично це правило можна записати у вигляді формули:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \quad (6)$$

Наприклад,

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = 21 - 10 = 11;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-9) \cdot 3 = 10 + 27 = 37.$$

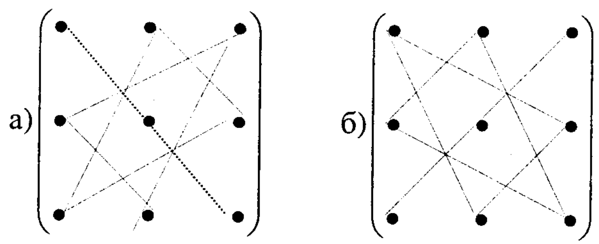
Правило обчислення визначника 3 порядку:

Визначник 3 порядку знаходять за формулою:

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \\ &+ a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}. \end{aligned}} \quad (7)$$

яку можна сформулювати за правилом Саріуса.

Перших три доданки є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами паралельними головній діагоналі (див. схему а) мал.1). Три останні доданки в правій частині (7) мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі та елементів вершин трикутників з основами паралельними неголовній діагоналі (мал. 1 б)).



Мал.1

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Розв'язання. За правилом Саріуса згідно формули (7) одержимо:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot6\cdot2 + 2\cdot1\cdot2 + 4\cdot(-3)\cdot(-1) -$$

$$-(-1)\cdot6\cdot2 - 2\cdot4\cdot2 - 1\cdot(-3)\cdot3 =$$

$$= 36 + 4 + 12 + 12 - 16 + 9 = 73 - 16 = 57.$$

Для обчислення визначників порядку n > 3 використовують алгебраїчні доповнення.

<u>Означення 3.</u>Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник (n-1) порядку, який одержуємо з визначника |A| шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

<u>Означення 4</u> Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називають мінор цього елемента, взятий зі знаком (+), якщо сума індексів (i+j) - парна, та зі знаком (-), якщо (i+j) - не парна, тобто

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}} \qquad (8)$$

Приклад 4. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів a_{32} та a_{13} визначника $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Розв'язання. Алгебраїчні доповнення до елементів a_{13} та a_{32} позначимо A_{13} та A_{32}, відповідно. Згідно з означенням 4 маємо:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$$

Мінори M_{13} та M_{32} знайдемо згідно означенн

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16;$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Підставимо значення мінорів у рівності (8), одержимо шукані алгебраїчні доповнення $A_{13} = 16$; $A_{32} = -1$

Правило обчислення визначника n-го порядку.

Визначник n порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (або рядка) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.

У випадку використання **i**-го рядка це правило математично виглядає так

$$
|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \qquad (9)
$$

$$
= a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{ij} Aij + .. + a_{in} \cdot A_{in}
$$

Рівність (9) називають **розкладом визначника за елементами і-го рядка**.

▼ **Зауваження 4.** Обчислення визначника **n** порядку зводиться до обчислення **n** визначників **(n-1)** порядку. Для скорочення обчислень визначник доцільно розкладати за елементами рядка або стовпця, який містить найбільшу кількість нулів. До нулів не треба знаходити алгебраїчних доповнень тому, що добуток 0 на його алгебраїчне доповнення дорівнює нулю. Властивості визначника дозволяють робити еквівалентні перетворення визначника і одержувати якомога більше нулів в деякому рядку або стовпці.

Властивості визначників

1 *Визначник при транспонуванні не змінюється:* $|A|=|A^T|$.

↳ **Наслідок**. Рядки та стовпці визначника мають однакові властивості.

2 *Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.*

3 *Якщо визначник має два однакових рядки (стовпця), то він дорівнює 0.*

4 *Якщо усі елементи одного рядка (стовпця) визначника помножити на однакове число* ***к****, то визначник зросте в* ***к*** *разів.*

↳ **Наслідок 1.** Спільний множник усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника можна виносити за знак визначника.

↳ **Наслідок 2.** Якщо усі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

5 *Якщо елементи двох будь-яких рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.*

6 *Якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) цього визначника, помножені на однакове число, то визначник* не зміниться.

✦ **Приклад 5.** Обчислити визначник 4-го порядку.

$$
|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}
$$

Розв'язання.

Якщо цей визначник обчислювати шляхом його розкладу за елементами 1-го стовпця або 2-го рядка (вони містять один нуль), то треба буде знайти та обчислити три алгебраїчних доповнення - визначники третього порядку.

4[69]

Перетворимо цей визначник так, щоб одержати якомога більше нулів у другому рядку, бо там вже є один нуль і є одиниця, яка спрощує перетворення. Елементи другого стовпця помножимо на (-2) і додамо до відповідних елементів третього стовпця, потім елементи другого стовпця помножимо на 4 і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця. Одержимо визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 13 \\ 5 & 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Тепер визначник доцільно розкласти за елементами другого рядка

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & 11 \\ -3 & -3 & 13 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ -3 & 1 & 13 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Останню рівність одержали шляхом виносу за знак визначника загального множника (-3) елементів другого стовпця.

Використовуючи правило обчислення визначника третього порядку, одержимо

$|A| = -3\ (7 + 130 - 33 - 55 + 42 - 13) = -3(179 - 101) = =(-3) \cdot 78 = -234.$

2.1.3 Ранг матриці

<u>Означення 5.</u>Мінором порядку s матриці A називають визначник матриці порядку s, що утворюється елементами довільно обраних s рядків та s стовпців матриці A.

Кожна матриця A має стільки мінорів порядку s, скільки існує способів вибору s рядків та s стовпців в матриці A.

<u>Означення 6.</u>Рангом матриці називають найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля.

Ранг матриці A позначають r(a) або r_A або r.

Ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці.

Найбільш ефективним методом знаходження рангу матриці є метод елементарних перетворень.

<u>Означення 7.</u>Елементарними перетвореннями матриці називають такі перетворення:

1) *перестановка стовпців (рядків) матриці*;

2) *множення усіх елементів стовпця (рядка) на число $k \neq 0$;*

3) *додавання до елементів стовпця (рядка) відповідних елементів іншого стовпця (рядка), помножених на деяке число.*

Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці, але дозволяють привести матрицю до матриці іншого вигляду, коли нижче головної діагоналі усі елементи матриці - нулі. Тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Приклад 6. Знайти ранги матриць A та B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Матриці A та B розміру 3x4. Найвищий порядок мінорів цих матриць дорівнює 3. Кожна матриця має 4 таких мінора.

Застосуємо метод елементарних перетворень для одержання нулів нижче головної діагоналі

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 2 & -2 & 6 & 3\end{pmatrix}^{(-2)} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 0 & 3 & -7 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & 3\\ 0 & 3 & -6 & -7\\ 0 & 0 & -7 & 0\end{pmatrix}$$

Таким чином, матриця А зведена до матриці, яка має 3 відмінних від нуля елемента на головній діагоналі, а нижче головної діагоналі - нулі. Тому r(A)=3.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 3 & 6 & -3 & -1\\ 3 & 6 & -3 & 10\end{pmatrix}^{(-3)} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -10\end{pmatrix} \times 10 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Тепер два елемента головної діагоналі відмінні від нуля, тому r(B)=2.

2.1.4 ВПРАВИ

Перед виконанням завдання 1 треба знати відповіді до питань:

1. Скільки рядків та стовпців має матриця розміру mxn (5x4)?

2. Які дії можна виконувати при елементарних перетвореннях матриць?

3.До якого виду треба привести матрицю для визначення її рангу методом елементарних перетворень?

4. Як визначають ранг матриці після приведення її до потрібного вигляду?

5. Як позначають ранг матриці?

Завдання 1. Визначити розмір та ранг заданих матриць

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad A_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix};\quad A_3=\begin{pmatrix}N & 0\\ 0 & N\end{pmatrix};\quad A_4=\begin{pmatrix}0 & N\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$A_5=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & N & 0\\ N & 0 & 0\end{pmatrix};\quad A_6=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix};\quad A_7=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix};$$

$$A_8=\begin{pmatrix}1 & -2 & N\\ N & -2N & 2+N^2\end{pmatrix}$$

Перед виконанням завдання 2 треба знати відповіді до питань:

1.Що одержують в результаті множення матриці на стале число?

2. Які розміри повинні мати матриці, щоб існувала їх алгебраїчна сума ?

3. Матрицею якого розміру буде алгебраїчна сума матриць ?

Завдання 2. Знайти 2NA+4B-3NC, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Перед виконанням завдання 3 треба знати відповіді до питань:

1. Які повинні бути розміри матриць А та В, щоб існував добуток АВ, ВА?

2. Який розмір має добуток матриць?

3. За яким правилом знаходять елемент c_{ij} добутку С=АхВ?

Завдання 3. Знайти добутки матриць АВ, ВА, CD, СК, КВ і показати, що $|C\cdot D|=|C|\cdot|D|$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} N & 2N \\ N & -N \end{pmatrix}; \quad D=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix};$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Перед виконанням завдання 4 треба засвоїти правила

обчислення визначників другого, третього та n порядків.

Завдання 4.

а) Обчислити визначники другого порядку

1. $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$; **3.** $\begin{vmatrix} 2N & 7 \\ 3 & 8N \end{vmatrix}$; **4.** $\begin{vmatrix} N & 5 \\ -3N & 4 \end{vmatrix}$

б) Обчислити визначники третього порядку

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \\ -8 & -9 & -2 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} N+1 & N+3 & N+7 \\ 3 & 5 & 7 \\ \dfrac{N+1}{3} & \dfrac{N+3}{3} & \dfrac{N+7}{3} \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 5N & -N & 3N \\ -8 & 5 & -6 \\ 8 & -3 & 9 \end{vmatrix}$

в) Обчислити визначники за правилом Саріуса та розкладом визначника за елементами якогось рядка чи стовпця.

1. $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; **3.** $\begin{vmatrix} 1 & N+4 & 1 \\ N+3 & 1 & N+5 \\ 1 & N+6 & 1 \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} \dfrac{N+5}{N+6} & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{N+6}{N+7} & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{N+7}{N+8} \end{vmatrix}$

<u>Завдання 5.</u> Обчислити визначники

1. $\begin{vmatrix} N & 0 & 2 & 3 \\ 2N & 0 & 2 & 0 \\ 3N & 1 & 4 & 5 \\ 5N & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ N & 2N & 3N & -3N \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 11 & 2 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & N & 1 & 1 \\ 2 & N & 3 & 4 \\ 4 & N & 9 & 16 \\ 8 & N & 27 & 64 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5N & -8N & 5N & 8N \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 2N & -7N & 7N & 7N & 2N \end{vmatrix}$.

<u>Завдання 6</u>. ***Задачі економічного змісту***

В таблиці вказані: норми витрат різних видів сировини, палива, електроенергії (в кіловатах), трудоємкості (в людино-годинах) на виготовлення одиниці продукції кожним підрозділом підприємства; вартість одиниці відповідної сировини, палива, електроенергії і оплати за людино-годину (в гривнях); валовий випуск продукції кожним підрозділом.

Треба:

1. Вказати матрицю А нормативних витрат підприємства на виготовлення одиниці продукції.
2. Матрицю В витрат кількості одиниць сировини, палива, електроенергії, трудових ресурсів для виконання плану підприємства
3. Виробничі витрати підрозділів підприємства - матрицю V.

	Нормативні показники	Норми витрат в підрозділах 1	2	3	4	Вартість C
а)	Сировина A_1	1,2	0,6	0,8	1,4	4
	Сировина A_2	0,5	0,8	0	1,2	9
	Сировина A_3	0	0,5	1	2,2	3
	Паливо	2	1,8	2,2	1,6	6
	Електроенерг.	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1
	Трудоємкість	10	20	20	30	5
	Валовий випуск D	180	200	160	240	
б)	Сировина B_1	1,6	0,4	1	1,8	5
	Сировина B_2	0,6	1	0,8	1,5	12
	Паливо	2	2,2	1,8	1,5	6
	Електроенерг.	0,6	0,4	0,4	0,8	0,2
	Трудоємкість	6	10	12	20	5
	Валовий випуск	150	250	200	300	

<u>Примітка:</u><u>1</u>. Елементи **к** стовпця матриці В одержують шляхом множення елементів **к**-го стовпця матриці А на елемент $d_к$ матриці - рядка D валового випуску.

2. Елементи матриці сумарних витрат V знаходять множенням матриці - рядка вартостей С на матрицю В.

2.2 Обернена матриця

2.2.1 Теоретичні відомості

<u>Означення 1</u>.Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці А, якщо виконуються рівності

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = E} \qquad (1)$$

Ці рівності означають, що матриці A та A^{-1} комутують і їх добуток є одиничною матрицею.

Не кожна матриця має обернену матрицю.

Матриця A має обернену матрицю A^{-1} лише при виконанні умов:

1. Матриця A - квадратна;
2. Визначник |A| матриці A не дорівнює нулю.

Якщо обернена матриця A^{-1} до матриці A існує, то її можна знаходити методом Гаусса-Жордана або за формулою:

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}} \qquad \textbf{(2)}$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A, причому алгебраїчні доповнення до елементів i-го рядка матриці A розташовані у i-тому стовпці.

Приклад 1. Знайти обернені матриці до матриць

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця C- не квадратна, тому не існує оберненої до неї матриці.

Матриця B - квадратна, але її визначник

|B| = -3 · 5 - (-1) · 15 = - 15 + 15 = 0,

тому матриця B також не має оберненої матриці.

Матриця A- квадратна, її визначник за правилом Саріуса

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}=5\cdot7\cdot8+4\cdot11\cdot1-3\cdot1\cdot2-2\cdot7\cdot1+3\cdot4\cdot8-1\cdot11\cdot5=$$

$$=280+44-6-14+96-55=420-75=345$$

Отже, матриця A^{-1} існує. Будемо шукати матрицю A^{-1} за формулою (2).

Спочатку знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot M_{11}=\begin{vmatrix} 7 & -11 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}=45; \quad A_{21}=30; \quad A_{31}=30$$

$$A_{12}=(-1)^3 M_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=-35; \quad A_{22}=38; \quad A_{32}=61$$

$$A_{13}=(-1)^4 M_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-10; \quad A_{23}=1; \quad A_{33}=47$$

Відмітимо, що алгебраїчні доповнення до елементів i-го рядка ми одержали в i-тому стовпці, що спрощує їх підстановку до формули (2). Одержали обернену матрицю вигляду:

$$A^{-1}=\frac{1}{345}\begin{pmatrix} 45 & -30 & 30 \\ -35 & 38 & 61 \\ -10 & 1 & 47 \end{pmatrix}$$

Зауваження 1. Перевірку можна здійснити так: якщо добуток $A^{-1}A=E$, то матриця A^{-1} знайдена вірно.

Зауваження 2. Якщо матриця A квадратна другого порядку $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, визначник якої $|A|\neq0$, то обернену до неї матрицю A^{-1} знаходять за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

тобто елементи головної діагоналі матриці А треба поміняти місцями, елементи неголовної діагоналі помножити на (-1) і одержану матрицю помножити на $\frac{1}{|A|}$.

Приклад 2. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Задана квадратна матриця другого порядку, її визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 8 = 16 \neq 0,$$

тому для знаходження оберненої матриці можна застосувати формулу (3) і одержати

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

<u>**Метод Гаусса-Жордана**</u> знаходження оберненої матриці A^{-1} доцільно застосовувати у випадку великого порядку матриці А.

***Суть методу Гаусса-Жордана в еквівалентності матриць* (A | E) та (E | A^{-1}).**

Тому, якщо до матриці А дописати справа одиничну матрицю Е однакового з А порядку і шляхом елементарних перетворень привести одержану матрицю (A | E) до вигляду (E | B), то дописана до Е матриця В дорівнює оберненій матриці A^{-1}.

Приклад використання цього методу розглянемо пізніше, після ознайомлення з методом Гаусса-Жордана.

2.2.2 ВПРАВИ

Знайти матрицю, обернену до заданої матриці, і зробити перевірку.

1. а) $A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; **б)** $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; **в)** $A_3 = \begin{pmatrix} 3N & 5 \\ 2N & 4 \end{pmatrix}$;

г) $A_4 = \begin{pmatrix} 5N & 7N \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

2.а) $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $B_3 = \begin{pmatrix} \frac{N+1}{N+5} & \frac{N+3}{N+4} & \frac{N+5}{N+4} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $B_4 = \begin{pmatrix} \frac{N+3}{N+4} & \frac{N+2}{N+5} & \frac{N+3}{N+5} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **д)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

2.3 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих.

2.3.1 Теоретичні відомості

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна привести до стандартного вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\kappa}x_\kappa + \ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\kappa}x_\kappa + \ldots + a_{2n}x_n = в_2 \\ ------------------------ \\ a_n x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n\kappa}x_\kappa + \ldots + a_{nn}x_n = в_n \end{cases} \qquad (1)$$

Відмітимо, що коефіцієнт a_{ij} при невідомих мають два індекси: *перший індекс **i** вказує номер рівняння, а другий - **j** вказує номер невідомого*, при якому знаходиться цей коефіцієнт.

Так, a_{32} є коефіцієнт третього рівняння при другому невідомому. Числа $в_1, в_2, \ldots, в_n$ вільні від невідомих і утворюють праву частину системи рівнянь.

Означення 1. **Система (1) зветься неоднорідною, якщо хоч би одне з чисел $в_1, в_2, \ldots, в_n$ не дорівнює нулю. Система зветься однорідною, якщо $в_1 = в_2 = \ldots = в_n = 0$.**

Означення 2. **Коефіцієнти системи (1) утворюють основну матрицю системи**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\kappa} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\kappa} \ldots a_{2n} \\ - & ------- \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{n\kappa} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці називають основним визначником системи (1) і позначають $|A|$ або $\Delta(A)$ або просто Δ.

Зауваження 1. Для правильного запису основної матриці або основного визначника системи треба бути уважним і записати в **i** рядок коефіцієнти **i**-го рівняння, а в **к** стовпець коефіцієнти при $x_к$. Якщо в деякому рівнянні немає якогось невідомого, то це означає, що відповідний коефіцієнт дорівнює нулю.

Наприклад, основною матрицею системи

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_1 + 6x_3 = 3 \\ 4x_1 + 9x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{буде матриця} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

тому, що друге рівняння системи записано у нестандартному вигляді (невідомі x_1 та x_2 переставлені), а в третьому рівнянні відсутнє невідоме x_2.

Означення 3. **Розв'язком системи (1) називають таку сукупність невідомих $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка при підстановці в рівняння системи перетворює кожне рівняння системи у тотожність.**

Це означення дозволяє перевіряти правильність знайденого розв'язку системи.

Якщо A - *основна матриця системи (1),*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ - \textit{матриця - стовпець невідомих},} \quad B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ \vdots \\ в_n \end{pmatrix} \text{ -}$$

матриця - стовпець правих частин рівнянь системи (1), то систему (1) можна записати у матричному вигляді

$$\boxed{AX = B} \qquad \textbf{(2)}$$

Правило Крамера. **Якщо основний визначник Δ(A) неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами**

$$\boxed{x_\kappa = \frac{\Delta_\kappa}{\Delta(A)},} \qquad \kappa = 1, 2, \dots, \qquad \textbf{(3)}$$

де $\Delta_к$ - допоміжний визначник, який одержується шляхом заміни **к**-го стовпця визначника Δ(A) стовпцем вільних членів системи.

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 3x + y - z = 2,. \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$$

Розв'язання.

Задана неоднорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з 3 невідомими x, y та z. Основний визначник цієї системи

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 3 + 2 + 3 - 1 = 8 - 4 = 4 \neq 0$$

Отже, усі вимоги правила Крамера ця система задовольняє, тому її розв'язок можна знайти за формулами (3).

Замінюючи певний стовпець визначника Δ(A) стовпцем

вільних членів системи, знайдемо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \equiv (3 - 2 - 3 - 2) = 4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 + 4 + 3 = -4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 - 9 + 2 = 0$$

Підставимо знайдені визначники до формул (3) і одержимо:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta(A)} = \frac{4}{4} = 1; \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta(A)} = \frac{-4}{4} = -1;$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta(A)} = \frac{0}{4} = 0.$$

Перевірка Підставляємо знайдені x, y та z в ліві частини рівнянь заданої системи:

$$\begin{cases} 1 - 1 - 0 = 0 \equiv 0 \\ 3 - 1 - 0 = 2 \equiv 2 \\ 2 + 1 - 0 = 3 \equiv 3. \end{cases}$$

Відповідь Розв'язком заданої системи буде (1, -1, 0).

Для розв'язування заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь **матричним методом** треба:

1. Перевірити виконання трьох вимог правила Крамера (система повинна бути неоднорідною; кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих; визначник основної матриці не дорівнює нулю).

2. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A;

3.Знайти розв'язок X шляхом множення оберненої матриці A^{-1} та матриці - стовпця B вільних членів заданої системи, тобто за формулою:

$$\boxed{X = A^{-1}B} \qquad \textbf{(4)}$$

Приклад 2. Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Розв'язування. Задана неоднорідна система 3 лінійних алгебраїчних рівнянь з 3 невідомими. Основний визначник цієї системи.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 5 - 2 - 10 - 6 = -3 \neq 0$$

Отже, задану систему можна розв'язати матричним методом.

Введемо позначення

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Таким чином,

$$A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Тепер знайдемо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2-14+10 \\ -8+28-5 \\ 6+0-15 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Відповідь: x = 2; y = -5; z=3 або X=(2, -5, 3).

2.3.2 Розв'язування однорідних систем

Розглянемо тепер однорідну систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\kappa}x_\kappa + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\kappa}x_\kappa + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ ------------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n\kappa}x_\kappa + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Якщо основний визначник цієї системи $\Delta(A) \neq 0$, то усі рівняння системи незалежні і за правилом Крамера система має єдиний розв'язок $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_\kappa=0,\ \ldots,\ x_n=0$, який називають тривіальним.

Якщо $\Delta(A)=0$, то система має нескінчену множину розв'язків.

В цьому випадку незалежними будуть r рівнянь (r - ранг основної матриці системи), а інші рівняння - їх наслідками, які можна відкинути.

В лівій частині r рівнянь залишають r невідомих, визначник з коефіцієнтів яких не дорівнює нулеві, а інші невідомі переносять в праву частину і розглядають як довільні сталі.

Таким чином одержують неоднорідну систему r рівнянь з r невідомими, яку можна розв'язати за правилом Крамера або матричним методом.

Приклад 1. Знайти розв'язки систем

а) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases}$

Розв'язування Основний визначник системи **а)**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12+2+1+4-3+2=18 \neq 0,$$ тому ця система

має лише тривіальний розв'язок: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
Основний визначник системи **б)**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 12-6-7+12+3-14=0,$$ тому система

має нескінчену множину розв'язків. Визначник другого порядку з коефіцієнтів перших двох рівнянь при x та y

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$$ (ранг основної матриці $r = 2$).

Таким чином система б) зводиться до системи

$$\begin{cases} x - y = z \\ x + 4y = -2z \end{cases}$$

За правилом Крамера одержуємо:
$x = \dfrac{5}{2}z;\quad y = \dfrac{-3}{5}z;\quad z \in (-\infty, \infty)$.

2.3.3 ВПРАВИ

При розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь доцільно розуміти, що кожна система є математичною моделлю певної практичної задачі. Наприклад, якщо коефіцієнти системи є нормами витрат сировини, палива, трудових ресурсів на одиницю продукції, а праві частини рівнянь - їх сумарні витрати, то розв'язок системи визначає план валового випуску продукції підрозділами підприємства.

Завдання 1. Знайти розв'язки систем за правилом Крамера

1. $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-y=4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3y-4x-1=0 \\ 3x+4y-18=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x-5y+1=0 \\ 7x+3y+17=0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ x+2y+3z=-1 \\ x-3y-2z=3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 5x+y-z=2 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2-2x_3=13 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=-15 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2-2x_3=13 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=-15 \end{cases}$

Завдання 2. Знайти розв'язки систем матричним методом

1. $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 4x-y=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1-2x_2=3 \\ 4x_1-x_2=4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x_3-2x_4=5 \\ 4x_3-x_4=7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-2y=3 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=-5 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+y+z=-2 \\ 5x-y-z=10 \\ x-y+5z=-12 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x+3y-3z=13 \\ 2x-3y+3z=-10 \\ x+z=2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$

Завдання 3. Матричним методом знайти розв'язки трьох систем, які мають однакові коефіцієнти

а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=7 \\ 3x_1-2x_2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_3+3x_4=1 \\ 3x_3-2x_4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_5+3x_6=9 \\ 3x_5-2x_6=3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1+y_1+z_1=11 \\ x_1+2z_1=15 \\ 3x_1+y_1+2z_1=14 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_2+y_2+z_2=2 \\ x_2+2z_2=1 \\ 3x_2+y_2+2z_2=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_3+y_3+z_3=-3 \\ x_3+2z_3=1 \\ 3x_3+y_3+2z_3=5 \end{cases}$

Завдання 4. Розв'язати за правилом Крамера та матричним методом

1. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=N-1 \\ 3x_1-2x_2-Nx_3=-1 \\ -Nx_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1+(N+1)x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=4-N \\ x_1+3x_2-x_3=2(1-N) \end{cases}$

Завдання 5. Знайти усі розв'язки систем

1. $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x+5y=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x-4y=0 \\ 2{,}5x-2y=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+4y+2z=0 \\ 3x+7y+3z=0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x-y+4z=0 \\ 3x+4y+2z=0 \\ 5x+2y+10z=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 2x-2y+4z=0 \\ 5x-5y+10z=0 \end{cases}$

Завдання 6. Визначити, при якому значенні а система $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ ax-14y+15z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$ має нетривіальний розв'язок.

Завдання 7. Розв'язати за правилом Крамера системи

1. $\begin{cases} 2x+3y+4z+5t=30 \\ 3x+3y+4z+5t=34 \\ 4x+4y+4z+5t=41 \\ x+y+z+t=10 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4=16 \\ x_1+7x_2+x_3+x_4=23 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4=10 \\ 4x_1-3x_2+4x_3+6x_4=1 \end{cases}$

2.4 Дослідження та розв'язування довільних лінійних систем алгебраїчних рівнянь

2.4.1 Теоретичні відомості

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими при m ≠ n. Стандартний вигляд такої системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=в_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=в_2 \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=в_m \end{cases} \qquad (1)$$

Означення 1. **Система лінійних алгебраїчних рівнянь, що має хоч би один розв'язок, називається сумісною, а система, що не має розв'язку, називається несумісною.**

Теорема Кронекера-Капеллі. ***Система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи***

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ - & ---- \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

дорівнює рангу розширеної матриці системи

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} & в_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} & в_2 \\ - & ----- & -- \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mn} & в_m \end{array}\right),$$

причому система має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\boxed{r(A)=r(\widetilde{A})=n} \qquad (2)$$

Основна матриця системи є частиною розширеної матриці, тому їх ранги знаходять одночасно, відділивши вертикальною лінією стовпець вільних членів системи.

Приклад 1. Дослідити сумісність системи

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3=12 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=7 \\ 7x_1+x_2+x_3=9 \end{cases}.$$

Розв'язання. Задана неоднорідна система 4 лінійних алгебраїчних рівнянь з 3 невідомими. Для перевірки умови теореми Кронекера-Капеллі знайдемо ранги основної r(A) та розширеної $r(\tilde{A})$ матриць заданої системи.

Розширену матрицю одержимо шляхом дописування до основної матриці системи стовпця вільних членів. Отже,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Використовуючи елементарні перетворення матриць, одержимо еквівалентну матрицю з нулями під елементами головної діагоналі. Для цього спочатку одержимо нулі в першому стовпці.

Помножимо елементи першого рядка матриці $\tilde{A}$ на 5, потім на 2, на 7 і віднімемо від елементів другого, потім третього, четвертого рядків. Одержимо матрицю (дивись а))

$$\tilde{A} = \underset{\textbf{а)}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array}\right)} \leftrightarrow \underset{\textbf{б)}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right)} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \underset{\textbf{в)}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

Щоб одержати матрицю вигляду б) другий рядок матриці а) помножили на (-1) та на (-6) і відняли від третього та четвертого рядків відповідно.

Щоб одержати матрицю вигляду в) третій рядок матриці б) помножили на (3), і додали до елементів четвертого рядка.

Із виду в) розширеної матриці $\tilde{A}$ випливає, що r(A)=3, $r(\tilde{A}) = 3$, тобто $r(A) = r(\tilde{A})$, а це означає, що задана система рівнянь є сумісною.

<u>Означення 2</u>.Системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають еквівалентними, якщо їх розв'язки співпадають.

<u>Основні методи розв'язування довільних СЛАР</u>

Розв'язувати будь-які системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) можна методами Гаусса (виключення невідомих) та Гаусса-Жордана.

<u>Суть методу Гаусса - зведення системи шляхом елементарних перетворень до такого вигляду системи, коли усі коефіцієнти, що знаходяться нижче головної діагоналі основної матриці, дорівнюють нулю.</u>

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

Розв'язання.Щоб виключити невідоме x_1 з другого та третього рівняння віднімемо від них перше рівняння і одержимо систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ -2x_2 + 2x_4 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$$

В останній системі виключимо x_2 із третього рівняння шляхом множення другого рівняння на $\left(\frac{-1}{3}\right)$ і додаванням до третього рівняння. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ -\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 - x_4 \\ 3x_2 + x_3 = 4 - 2x_4 \\ x_3 = -2 - 5x_4 \end{cases}$$

Вважаємо x_4 = C (стала), тоді з третього рівняння одержимо x_3 = - 2- 5C.

Підставимо це значення x_3 та x_4 = C в друге рівняння і одержимо:

$$3x_2 = -4 - 2C + 2 + 5C \Rightarrow x_2 = \frac{6+3C}{3} = 2 + C.$$

Тепер підставимо в перше рівняння x_2, x_3 та x_4 і одержимо

x_1 = 2 - C - 2 - C + 4 + 10C = 8C + 4.

Таким чином, задана система трьох лінійних рівнянь з 4 невідомими має одну вільну невідому x_4. Розв'язком цієї системи буде

$$X = \begin{pmatrix} 4+8C \\ 2+C \\ -2-5C \\ C \end{pmatrix} \qquad (3)$$

▼ **Зауваження 1.** Метод Гаусса часто спрощують, перетворюючи не усю систему, а лише її розширену матрицю (див стор. 109[1].

Поняття різновидів розв'язків

Якщо в розв'язку прикладу 2 сталій C надавати конкретні числові значення, то одержимо відповідні частинні розв'язки.

Коли розв'язок системи розглядають залежним від значень сталої C, тоді його називають загальним розв'язком системи. Якщо взяти C = 0, то одержаний розв'язок називають базисним. При C = 1 розв'язок називають фундаментальним. В прикладі 2 розв'язок виду (3) - загальний розв'язок системи. Базисним та фундаментальним розв'язками

будуть $X_б = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_ф = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Якщо усі елементи базисного розв'язку невід'ємні, то такий розв'язок називають опорним.

Метод Гаусса-Жордана *дозволяє ефективно розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з багатьма невідомими, визначати при цьому ранги матриць та сумісність системи, своєчасно здійснювати контроль розрахунків.*

При розв'язуванні лінійних алгебраїчних систем методом Гаусса-Жордана треба записати систему у вигляді таблиці і послідовно зробити декілька кроків перетворення

Гаусса-Жордана з певним правилом переходу від однієї таблиці до іншої.

Кроком перетворення Гаусса-Жордана називають елементарні перетворення, за допомогою яких задана система зводиться до еквівалентної системи у базисному вигляді.

Алгоритм кроку перетворення Гаусса-Жордана:

1. *Обираємо розв'язувальний елемент* $a_{ij} \neq 0$;

2. *Елементи i-го рядка (його звуть розв'язувальним) ділимо на a_{ij} і запишемо в i-тий рядок нової розрахункової таблиці;*

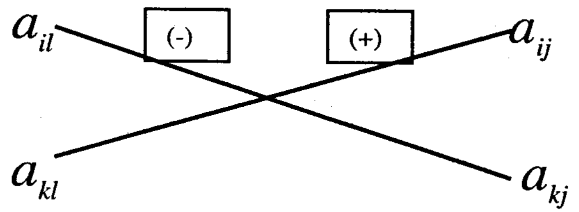
3. *В розв'язувальному j стовпці замість a_{ij} пишуть одиницю, а замість інших елементів цього стовпця пишуть нулі;*

4. *Усі інші елементи розрахункової таблиці, в тому числі і елементи контрольного стовпця, знаходять за формулою:*

$$\boxed{\tilde{a}_{k\ell} = \frac{a_{ij}a_{k\ell} - a_{kj}a_{i\ell}}{a_{ij}},} \qquad (4)$$

k=1, 2, ..., m; ℓ =1, 2, ..., n; $k \neq i$, $j \neq \ell$

Обчислення елементів $\tilde{a}_{k\ell}$ за формулою (4) доцільно виконувати з використанням схеми прямокутників



5.*Роблять перевірку правильності розрахунків шляхом порівняння суми елементів рядка з відповідним елементом контрольного стовпця.*

Приклад 3. Скласти розрахункову таблицю і виконати крок перетворень Гаусса-Жордана для системи

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 11 \end{cases}$$

Розв'язування. Запишемо задану систему у вигляді

розрахункової таблиці 1 при цьому в к-тий стовпець записують коефіцієнти, що стоять перед $x_к$, в стовпець $в_i$ записують вільні члени системи.

x_1	x_2	x_3	$в_i$	K
3	2	3	5	13
2	3	8	12	25
2	1	9	11	23

табл. 1

Елементи останнього - контрольного стовпця повинні дорівнювати сумі елементів відповідного рядка таблиці

За алгоритмом кроку перетворень Гаусаа-Жордана зробимо перехід до розрахункової таблиці 2:

1. Обираємо розв'язувальний елемент $a_{12} = 2$;
2. Елементи першого (розв'язувального) рядка ділимо на 2 і запишемо в перший рядок таблиці 2;
3. У другому (розв'язувальному) стовпці $\tilde{a}_{12} = 1$, а інші елементи дорівнюють нулю;
4. Решту елементів таблиці 2 обчислюємо за формулою (4) з використанням схеми прямокутника:

x_1	x_2	x_3	$в_i$	к
3/2	1	3/2	5/2	13/2
-5/2	0	7/2	9/2	11/2
1/2	0	15/2	17/2	33/2

табл. 2

$$\tilde{a}_{21} = \frac{2\cdot 2 - 3\cdot 3}{2} = \frac{-5}{2}; \qquad \tilde{a}_{31} = \frac{2\cdot 2 - 3\cdot 1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\tilde{a}_{23} = \frac{8\cdot 2 - 3\cdot 3}{2} = \frac{7}{2}; \qquad \tilde{a}_{24} = \frac{24 - 15}{2} = \frac{9}{2};$$

$$\tilde{a}_{25} = \frac{50-39}{2} = \frac{11}{2}; \qquad \tilde{a}_{33} = \frac{18-3}{2} = \frac{15}{2};$$

$$\tilde{a}_{34} = \frac{22-5}{2} = \frac{17}{2}; \qquad \tilde{a}_{35} = \frac{46-13}{2} = \frac{33}{2}.$$

5.Перевіряємо правильність розрахунків:

$$\frac{3}{2}+1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{13}{2} \Rightarrow \frac{13}{2} \equiv \frac{13}{2}; \quad \frac{-5}{2}+\frac{7}{2}+\frac{9}{2}=\frac{11}{2};$$
$$\frac{1}{2}+\frac{15}{2}+\frac{17}{2}=\frac{33}{2}$$

Рекомендації до скорочення розрахунків

1. *Розв'язувальним елементом доцільно обирати одиницю, тоді формули (4) спрощуються.*

2. *Якщо у розв'язувальному стовпці є нулі, тоді відповідний рядок з цієї таблиці переписують в нову таблицю без змін.*

3. *Якщо в розв'язувальному рядку розрахункової таблиці є нулі, тоді відповідні стовпці переписують в нову таблицю без змін.*

Наприклад, нехай в і-тому ров'язувальному рядку $a_{il} = 0$, тоді l-й стовпець таблиці переписуємо без змін.

4. *Якщо в таблиці є два пропорційні рядки, тоді один з них можна закреслити.*

Наступні кроки перетворень Гаусса-Жордана виконуються таким же чином, при цьому кожного разу розв'язувальний елемент треба обирати з інших рядків та стовпців.

Після послідовного виконання декількох, наприклад r, кроків перетворення Гаусса-Жордана одержимо систему у

вигляді таблиці 3, яку звуть базисним виглядом.

x_1	x_2	...	$x_к$	...	x_r	x_{r+1}	...	x_n	b_1	**k**
1	0	...	0	...	0	b_{1r+1}		b_{1n}	c_1	k_1
0	1	...	0	...	0	b_{2r+1}		b_{2n}	c_2	k_2
0	0	...	0	...	0	...		...	...	...
0	0		1	...	0	...		...	...	...
0	0		0	...	1	b_{rr+1}		b_{rn}	c_r	k_r

табл. 3

<u>Можливі такі випадки:</u>

1. r = n, *тоді система має єдиний розв'язок* $x_к = c_к$, к = 1, 2, ..., n;

2. $r \le m < n$, *тоді система має множину розв'язків. Загальним розв'язком буде:*

$$\begin{cases} x_1 = c_1 - в_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - в_{1n}x_n; \\ x_2 = c_2 - в_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - в_{2n}x_n; \\ ------------------ \\ x_r = c_r - в_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - в_{rn}x_n \end{cases} \qquad (5)$$

Невідомі x_1, x_2, ... , x_r, відносно яких система розв'язана, називають базисними, а невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ називають вільними або небазисними. Кожне базисне невідоме входить лише в одне рівняння системи з коефіцієнтом 1.

Якщо у загальному розв'язку (5) усі вільні невідомі прирівняти нулю, то одержимо <u>базисний розв'язок</u> системи

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \ldots,\ x_r = c_r,\ x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Якщо одну вільну невідому прирівняти одиниці, а інші - нулю, тоді одержимо фундаментальний розв'язок системи.

Базисний невід'ємний розв'язок системи називають опорним розв'язком цієї системи.

3. *При перетворені системи одержали рівняння, усі коефіцієнти якого дорівнюють нулю, а права частина c_j не дорівнює нулю.*

В цьому випадку система ***несумісна****.*

Приклад 4. Розв'язати методом Гаусса-Жордана систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases} \qquad (6)$$

Розв'язання. будемо проводити з використанням розрахункової таблиці, формул (4) та рекомендацій до скорочення розрахунків.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_I	k
1	1	1	1	1	7	12
3	2	1	1	-3	-2	2
0	1	2	2	6	23	34
5	4	3	3	-1	12	26
1	1	1	1	1	7	12
0	-1	-2	-2	-6	-23	-34
0	**1**	2	2	6	23	34
0	-1	-2	-2	-6	-23	-34
1	0	-1	-1	-5	-16	-22
0	1	2	2	6	23	34

Табл.4

У другій таблиці четверте рівняння дорівнює другому, тому його викреслили Друге рівняння пропорційне третьому, тому його також викреслили

Із останньої таблиці видно, що система (6) сумісна і має множину розв'язків. Базисні невідомі x_1 та x_2, вільні невідомі x_3, x_4 та x_5.

Загальний розв'язок системи (6) має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

Базисним розв'язком цієї системи буде $X_\delta = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Фундаментальних розв'язків система (6) має три:

$$X_{\phi,1} = \begin{pmatrix} -15 \\ 21 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad X_{\phi,2} = \begin{pmatrix} -15 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad X_{\phi,3} = \begin{pmatrix} -11 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.4.2 ВПРАВИ

Завдання 1. Записати основну та розширену матриці системи

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - x_2 = -4 \\ x_2 + 3x_1 - x_3 = -1 \\ 4x_1 - 3x_3 + 2x_2 = 7 \end{cases}$

Завдання 2. Дослідити сумісність системи.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 12x_4 = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 6x_1 - 6x_2 + 10x_3 - 8x_4 = 5 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - \frac{1}{2}y - 3z = 2 \\ 4x - 2y - 12z = 8 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{2}z = 5 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 6 \end{cases}$

Завдання 3. Розв'язати методом Гаусса та методом Гаусса-Жордана

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + (N+2)x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - Nx_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = N - 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2N + 1 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$

Розділ 3 **Векторна алгебра**

3.1 Теоретичні відомості

3.1.1 Вектори та способи їх задання

Означення **1.Вектором називають величину, що характеризується не тільки своїм числовим значенням (довжиною), але й напрямом**

Вектори позначають однією літерою із стрілкою $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ або однією жирною літерою **a, в, c** або двома літерами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.

При позначенні двома літерами, наприклад $\overrightarrow{AB}$, перша літера А вказує точку початку вектора, а друга літера В - точку його кінця.

Довжину (модуль) вектора позначають $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.

В економічних дослідженнях n упорядкованих параметрів розглядають як вектор n - вимірного простору E_n і позначають однією великою літерою. Матриця - рядок та матриця - стовпець містять упорядковані елементи, тому їх розглядають як вектори простору відповідного виміру.

Наприклад,

$$A = (3, \quad 5, \quad 12, \quad 0, \quad 7, \quad 9) \in E_6; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in E_4.$$

Вектори можна задавати у геометричній або координатній формах.

Геометрично вектор зображують як напрямлений відрізок (дивись мал. 1).

мал. 1

Зображені на цьому малюнку вектори мають довжину $|\vec{a}| = 3$; $|\overrightarrow{AB}| = 6$; $|\vec{в}| = 2$, якщо одиниця масштабу відповідно малюнку —

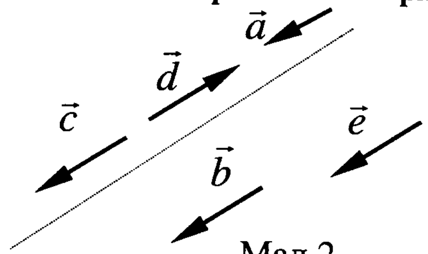
Означення 2.Рівними називають вектори, які мають однакові довжини та напрями: $\vec{a} = \vec{в}$ **.**

Протилежними називають вектори однакової довжини і протилежно спрямовані.

Ортом вектора $\bar{a}$ **називають вектор** $\bar{a}_o$**, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям співпадає з напрямом вектора** $\vec{a}$**, тобто** $\vec{a}_0 = \vec{a}/|\vec{a}|$.

Нульовим вектором називають вектор, початок і кінець якого співпадають. Такий вектор позначають $\vec{0}$, його довжина дорівнює нулю а напрям - довільний.

Колінеарними називають вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих (див. Мал.2).



Мал.2

Компланарними називають вектори, що лежать в одній площині або в паралельних площинах.

<u>Проекцію вектора</u> $\vec{a}$ **на напрямок** $\vec{\ell}$ визначають за формулою

$$\boxed{np_{\vec{\ell}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi},$$

де φ - гострий кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{\ell}$.

<u>Координатами вектора</u> називають проекції вектора на осі координат або упорядковані елементи матриці - стовпця чи матриці - рядка.

Позначимо через a_x, a_y, a_z **координати вектора** $\vec{a}$**,** що є проекціями на осі координат Ox, Oy, Oz, відповідно. Ці проекції знаходять за формулами:

$$\boxed{a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\vec{a}|\cos\gamma} \qquad (1)$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають **напрямними косинусами** вектора $\vec{a}$**.**

<u>В координатній формі</u> вектор $\boxed{\vec{a} = (a_x, \quad a_y, \quad a_z)}$ або $\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{\kappa}}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{\kappa}$ - орти координатних осей.

Якщо $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ і відомі координати початку вектора - точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та кінця вектора - точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ тоді координатами вектора $\vec{a}$ буде упорядкована трійка чисел

$$\boxed{\vec{a} = (x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1)}.$$

Отже, **координати вектора** $\overrightarrow{M_1M_2}$ **дорівнюють різниці відповідних координат кінця та початку вектора.**

Наприклад, вектор $\vec{a}$, початок якого знаходиться в точці $M_1(2, -3, 6)$, кінець - в точці $M_2(1, 1, 3)$, має координати $\vec{a} = (1-2, \ 1-(-3), \ 3-6) = (-1, \ 4, \ -3)$.

<u>Означення 3</u>. Вектор $\overrightarrow{OA}$**, початок якого точка 0 є початком системи координат, називають радіусом - вектором точки A** і позначають $\vec{r}$ або $\vec{r}_A$. Координати **вектора** $\vec{r}$ співпадають з координатами точки A.

Наприклад, радіусом - вектором точки A(3, 7, 13) буде вектор $\vec{r} = (3, \quad 7, \quad 13)$ або $\vec{r} = 3\vec{i} + \ 7\vec{j} + \ 13\vec{\kappa}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ заданий у координатній формі, тобто $\vec{a} = (a_x, \quad a_y, \quad a_z)$, то його довжину знаходять за формулою:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \qquad (2)$$

а його напрямні косинуси знаходять за формулами:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}}; \quad \boxed{\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}};$$

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}} \qquad (3)$$

3.1.2. Дії з векторами

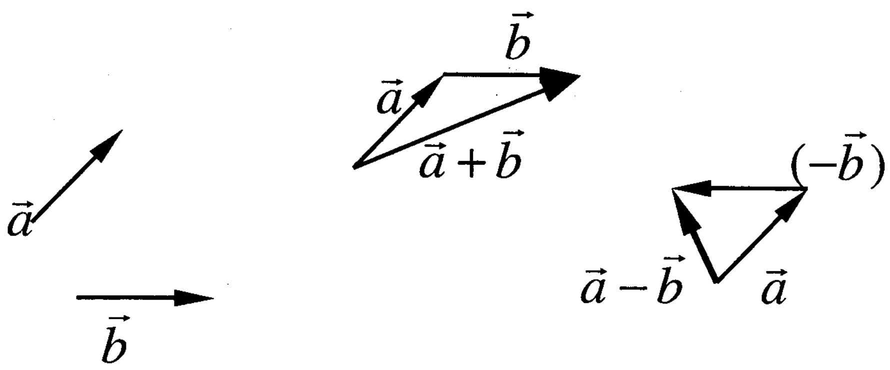
Лінійними операціями з векторами називають їх алгебраїчну суму та множення вектора на число.

<u>Означення 4.Добутком</u> вектора $\vec{a}$ на число к називають вектор $\vec{в} = \overrightarrow{ка}$, колінеарний з вектором $\vec{a}$, що має довжину в к раз більшу ніж $|\vec{a}|$ та напрям вектора $\vec{a}$, якщо к > 0 і протилежний до $\vec{a}$, якщо к < 0.

<u>Сумою</u> векторів $\vec{a}$ та $\vec{в}$ називають вектор $\vec{c}$, який сполучає початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{в}$ при умові, що початок вектора $\vec{в}$ вміщено в кінець вектора $\vec{a}$.

<u>Різницю</u> двох векторів та $\vec{в}$ визначають як суму вектора $\vec{a}$ та вектора $\left(-\vec{в}\right)$.

Наприклад, якщо геометрично задані вектори $\vec{a}$ та $\vec{в}$ див. мал. 3а)), то їх суму та різницю легко побудувати за вказаними правилами (див. малюнок 3б) та в)).

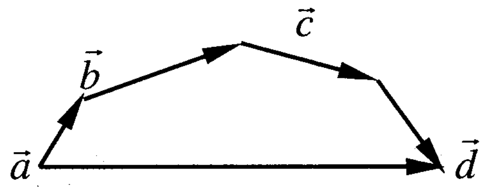


а) б) в)

Мал.3

Аналогічно визначають і будують суму кількох векторів: кінець першого вектора сполучають з початком другого, а

кінець другого з початком третього і так далі. Вектор, який з'єднує початок першого вектора з кінцем останнього і буде сумою цих векторів (див. малюнок 4).



$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

Мал.4

Лінійні операції з векторами, що задані координатами, здійснюють за слідуючими правилами.

Правило множення вектора на число.

Щоб помножити вектор $\vec{a}$ на число к треба усі координати вектора помножити на число к.

Наприклад, якщо $\vec{a} = 6\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{к}$, то $3\vec{a} = (18, \ -15, \ 12)$.

Правило знаходження алгебраїчної суми векторів.

Координати алгебраїчної суми скінченої кількості векторів дорівнюють такій же алгебраїчній сумі відповідних координат цих векторів.

Наприклад, якщо $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$; $\vec{в} = (в_1, в_2, ..., в_n)$; $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$, то їх алгебраїчною сумою $\vec{a} - \vec{в} + \vec{c}$ буде

$$\boxed{\vec{a} - \vec{в} + \vec{c} = (a_1 - в_1 + c_1, a_2 - в_2 + c_2, ... a_n - в_n + c_n)}.$$

Означення 5.Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{в}$ називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута φ між ними. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{в}$ позначають $\vec{a}\cdot\vec{в}$ або ($\vec{a}$, $\vec{в}$).

Отже,

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{в}=|\vec{a}||\vec{в}|\cos\varphi} \qquad \textbf{(4)}$$

Якщо вектори задані координатами, то їх скалярний добуток дорівнює сумі добутків однойменних координат:

$$\boxed{\vec{a}\vec{в}=a_1в_1+a_2в_2+...+a_nв_n} \qquad \textbf{(5)}$$

Косинус кута між векторами $\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$ та $\vec{в}=(в_x,\ в_y,\ в_z)$ знаходять за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi==\frac{a_xв_x+a_yв_y+a_zв_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{в_x^2+в_y^2+в_z^2}}} \qquad \textbf{(6)}$$

Необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ та $\vec{в}$:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{в}=0} \qquad \textbf{(7)}$$

або в координатній формі

$$\boxed{a_xв_x+a_yв_y+a_zв_z=0} \qquad \textbf{(7')}$$

Означення 5. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{в}$ називають вектор $\vec{c}$, довжина якого чисельно дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{в}$, який лежить на перпендикулярі до векторів $\vec{a}$ та $\vec{в}$ і напрямлений так, що якщо дивитись з кінця вектора $\vec{c}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{в}$ повинен здійснюватися проти руху годинникової стрілки.

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{в}$ позначають $\vec{a}\times\vec{в}$ або $[\vec{a},\vec{в}]$.

За означенням модуль векторного добутку

$$\boxed{|\vec{a}\times\vec{в}|=|\vec{a}||\vec{в}|\sin\varphi}, \qquad \textbf{(8)}$$

де φ - кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{в}$. Знаходити векторний добуток векторів доцільно за формулою:

$$\boxed{\vec{c}=\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{к}\\ a_x & a_y & a_z\\ в_x & в_y & в_z\end{vmatrix}} \qquad \textbf{(9)}$$

Необхідна і достатня умова колінеарності векторів $\vec{a}$ та $\vec{в}$:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{в}=\vec{0}} \qquad \textbf{(10)}$$

або в координатній формі

$$\boxed{\frac{a_x}{в_x}=\frac{a_y}{в_y}=\frac{a_z}{в_z}} \qquad \textbf{(10')}$$

Означення 7.Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ називають скалярний добуток векторів $(\vec{a}\times\vec{в})$ та $\vec{c}$ і позначають $\vec{a}\vec{в}\vec{c}$.

Отже,

$$\boxed{\vec{a}\vec{в}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{в})\cdot\vec{c}} \qquad \textbf{(11)}$$

Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{в}$ та $\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, і знаходиться за формулою:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}} \qquad \textbf{(12)}$$

Компланарними називаються вектори, що паралельні одній площині або лежать на ній.

Необхідна і достатня умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$:

$$\boxed{\vec{a}\vec{в}\vec{c} = 0} \qquad \textbf{(13)}$$

або у координатній формі

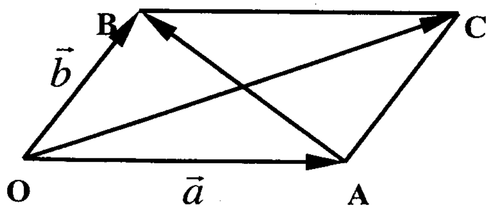
$$\boxed{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0} \qquad \textbf{(13')}$$

Приклад 1. Знайти кут φ між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ та $\vec{в} = -2\vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язання. Позначимо $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{в} = \overrightarrow{OB}$. Тоді діагоналі паралелограма (див. мал. 5) будуть

$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{в} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (2, \quad -1, \quad 1)$;

$\overrightarrow{AB} = \vec{в} - \vec{a} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (-2, \quad -3, \quad 1)$



Мал.5

За формулою (6) одержимо:

$$\cos\varphi = \frac{2(-2)+(-1)(-3)+1\cdot 1}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+9+1}} = = \frac{0}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^0$$

Приклад 2. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{в}| = 8$, кут φ між векторами $\vec{a}$ та $\vec{в}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Знайти скалярний добуток цих векторів та площу S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{в}$.

Розв'язування.

За формулою (4) знаходимо:

$$\vec{a}\cdot\vec{в} = 3\cdot 8\cdot cos\frac{\pi}{3} = 24\cdot\frac{1}{2} = 12$$

За формулою (8), враховуючи геометричний зміст $|\vec{a}\times\vec{в}|$, одержуємо: $S = |\vec{a}\times\vec{в}| = 3\cdot 8\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

Приклад 3. Перевірити, чи будуть точки A(2, -1, -2), B(1, 2, 1), C(2, 3, 0) та D(5, 0, -6) лежати в одній площині.

Розв'язання. Побудуємо три вектори, що починаються в одній точці, наприклад A, і обчислимо їх координати:

$$\overrightarrow{AB} = (1-2, \quad 2-(-1), \quad 1-(-2)) = (-1, \quad 3, \quad 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-2, \quad 3-(-1), \quad 0-(-2)) = (0, \quad 4, \quad 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (5-2, \quad 0+1, \quad -6+2) = (3, \quad 1, \quad -4)$$

Тепер обчислимо мішаний добуток цих векторів:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -4\end{vmatrix}=16+18-36+2=0$$

Ця рівність означає, що вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ компланарні, а задані точки A, B, C, D лежать в одній площині.

3.1.3 Розклад вектора за базисом

<u>Означення 8.</u>Лінійно залежними називають вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$, якщо існує хоч би одне дійсне число $\alpha_i\ (i=1,2,\dots,n)$, що не дорівнює нулю і виконується рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n=0 \qquad \textbf{(14)}$$

Якщо рівність (14) виконується тільки тоді, коли усі $\alpha_i=0\ (i=1,2,\dots,n)$, то вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ називають лінійно незалежними.

В множині векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ кількість лінійно незалежних векторів дорівнює рангу матриці, що складена з координат цих векторів.

Якщо вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ належать E_n (кожен з них має n координат) і визначник матриці, складеної з координат цих векторів, не дорівнює нулю, то ці вектори лінійно незалежні.

Приклад 4. Визначити лінійну залежність або незалежність векторів

$$\vec{a}_1=(-1,\ \ -2,\ \ -5),\quad \vec{a}_2=(5,\ \ -2,\ \ 4),\quad \vec{a}_3=(-4,\ \ 2,\ \ -3)$$

Розв'язання. Знайдемо ранг матриці, складеної з

координат цих векторів

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -4\\ -2 & -2 & 2\\ -5 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

Визначник цієї матриці буде:

$|A|=-6+32-50+40-30+8=-6\neq 0$, тому r(A)=3 і вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ лінійно незалежні.

<u>Означення 9.</u>Базисом n вимірного простору E_n називають будь-яку сукупність n лінійно незалежних векторів цього простору.

Довільний вектор $\vec{d}$ із n вимірного простору E_n можна представити у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ за формулою:

$$\boxed{\vec{d}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\dots+x_n\vec{a}_n} \qquad \textbf{(15)}$$

Таке представлення називають розкладом вектора $\vec{d}\in E_n$ за базисом $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$, а числа x_1, x_2, ..., x_n називають координатами вектора $\vec{d}$ у базисі цих векторів.

Формулу (15) можна записати в координатному вигляді.

Так, якщо вектори $\vec{a}=(a_x,\ \ a_y,\ \ a_z)$, $\vec{в}=(в_x,\ \ в_y,\ \ в_z)$, $\vec{c}=(c_x,\ \ c_y,\ \ c_z)$ утворюють базис в E_3, то розклад будь-якого вектора $\vec{d}=(d_x,\ \ d_y,\ \ d_z)\in E_3$ за цим базисом в координатному вигляді буде:

$$\begin{cases} d_x=x_1a_x+x_2в_x+x_3c_x\\ d_y=x_1a_y+x_2в_y+x_3c_y\\ d_z=x_1a_z+x_2в_z+x_3c_z\end{cases} \qquad \textbf{(16)}$$

Розв'язавши цю систему знаходять x_1, x_2, x_3 і за формулою (15) розклад вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$.

Приклад 5. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (5, \ 4, \ 3)$, $\vec{a}_2 = (-3. \ -1, \ 2)$ та $\vec{a}_3 = (-3, \ 1, \ 3)$ утворюють базис в E_3, розкласти вектор $\vec{d} = (12, \ 9, \ 10)$ за цим базисом і знайти його довжину в цьому базисі.

Розв'язання. Задані вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ та $\vec{a}_3$ мають три координати, тому належать трьохвимірному простору E_3.

Матриця, що складена з координат цих векторів

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

має визначник $|A| = -15 - 9 - 24 - 9 + 36 - 10 = -31 \neq 0$, тому вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ - лінійно незалежні. Згідно означенню 9 ці вектори утворюють базис в E_3.

Заданий вектор $\vec{d}$ також має три координати, тобто належить E_3, тому його можна представити у вигляді (15) або у координатному вигляді (16), який прийме вигляд:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 12 \\ 4x - x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases} \qquad \textbf{(17)}$$

Система (17) є неоднорідною системою трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими, основний визначник якої не дорівнює нулю. Тому ця система має єдиний розв'язок, який можна знайти за правилом Крамера, матричним методом, методом Гаусса або методом Гаусса-Жордана.

Застосуємо матричний метод розв'язування системи (17).

Обернена матриця до основної матриці А буде

$$A^{-1} = \frac{-1}{31}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ -9 & 24 & -17 \\ 11 & -19 & 7 \end{pmatrix}$$

Тому

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{31}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ -9 & 24 & -17 \\ 11 & -19 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{-1}{31}\begin{pmatrix} -93 \\ -62 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Таким чином, згідно формули (15) розклад вектора $\vec{d}$ за базисом приймає вигляд:

$$\vec{d} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3.$$

Координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ будуть (3, 2, -1), тому довжина $\vec{d}$ в цьому базисі буде

$$|\vec{d}| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

3.1.4 Власні вектори та власні числа матриці

Нехай А - квадратна матриця порядку n.

Означення 10. Ненульовий вектор X називається власним вектором матриці А, якщо існує таке число λ, що виконується рівність

$$AX = \lambda X \qquad \textbf{(18)}$$

Число λ називають власним числом матриці А.

Використовуючи одиничну матрицю Е, рівність (18) можна записати у вигляді однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda E)X = 0 \qquad \textbf{(19)}$$

Щоб система (19) мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$\boxed{|A-\lambda E|=0} \qquad \textbf{(20)}$$

Рівність (20) називають характеристичним рівнянням матриці А, а його корені λ - власними числами матриці А.

Властивості власних векторів та власних чисел.

1. В дійсному просторі власними числами будуть лише дійсні корені характеристичного рівняння (20), а в комплексному просторі - усі корені рівняння (20).

2. Якщо усі власні числа матриці різні, то всі її власні вектори лінійно незалежні.

3. Якщо квадратна матриця А порядку n має різні власні числа, то матриця $B = (X_1, X_2, ..., X_n)$, стовпцями якої є власні вектори $X_1, X_1, ..., X_n$, має обернену матрицю B^{-1}.

4.Якщо квадратна матриця А порядку n має різні власні числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, то матрицю А можна привести до діагонального вигляду

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix} \lambda_1 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(21)}$$

який називають канонічною формою Жордана матриці А.

▼ **Зауваження.** Якщо квадратна матриця А порядку n має кратні власні числа, то кількість власних векторів може бути меншою від n. В цьому випадку форма Жордана (21) замінюється складнішою матрицею.

✦ **Приклад 6.** Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A=\begin{pmatrix} 15 & 15 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Характеристичним рівнянням заданої матриці А буде рівняння

$$\begin{vmatrix} 15-\lambda & 15 \\ -8 & -7-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

яке одержується шляхом віднімання λ від елементів головної діагоналі визначника матриці А і прирівнювання його нулю.

Знайдемо корені характеристичного рівняння матриці А:

$-(15 - \lambda)(7 + \lambda) + 8 \cdot 15 = 0 \Rightarrow -(15 \cdot 7 + 15\lambda - 7\lambda - \lambda^2) + 8 \cdot 15 = 0$
$\Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1.$

Отже, одержали два дійсних різних кореня характеристичного рівняння

$$\lambda_1 = 5 \text{ та } \lambda_2 = 3.$$

Згідно властивості 1 ці корені є власними числами заданої матриці А, а згідно властивості 2 їм відповідають лінійно незалежні вектори, які знайдемо шляхом розв'язування системи (19) для кожного власного числа.

У випадку λ = 5 маємо:

$$\begin{cases}(15-5)x_1+15x_2=0\\ -8x_1+(-7-5)x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}10x_1+15x_2=0\\ -8x_1-12x_2=0\end{cases} \Rightarrow x_1=-\frac{3}{2}C,\ x_2=C.$$

Власний вектор матриці А, що відповідає власному числу λ = 5, має вид $\overline{X}_1=\begin{pmatrix} -\dfrac{3C}{2} \\ C \end{pmatrix}$, де С - довільне число.

У випадку λ = 3 маємо:

$$\begin{cases}(15-3)x_1+15x_2=0\\ -8x_1+(-7-3)x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}12x_1+15x_2=0\\ -8x_1-10x_2=0\end{cases} \Rightarrow x_1=-\frac{5}{4}C_1, x_2=C_1$$

Тому власний вектор матриці А, що відповідає власному числу $\lambda = 3$, має вид вектора-рядка

$$\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5C_1}{4} \\ C_1 \end{pmatrix}, \text{ де } C_1 \text{ - довільна стала.}$$

При С = 2 та $C_1 = -4$ одержимо власні вектори виду

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Приклад7. Привести до діагонального вигляду матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Задану матрицю А до діагонального вигляду будемо приводити за формулою (21). Для цього потрібно знайти власні числа і власні вектори матриці А. Маємо:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2.$$

Отже, характеристичне рівняння заданої матриці А має корінь $\lambda = 2$ кратності два.

Із рівняння $(A-\lambda E)X=0$ одержимо систему для знаходження власних векторів

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Ненульовим розв'язком цієї системи буде $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Тому задана матриця А має лише один власний вектор $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Візьмемо $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ і за формулою (21) одержимо: $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ - матриця А у канонічній формі Жордана, яка не є діагональною оскільки власні числа рівні.

3.2 ВПРАВИ

Завдання 1. Побудувати довільні не колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{в}$ і знайти:

а) $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{в}$; $\quad \vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{в}$; $\quad \vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$;

б) $\vec{c} = 2N\vec{a} - 3\vec{в}$; $\quad \vec{d} = 2N\vec{a} + \frac{N}{2}\vec{в}$.

Завдання 2. На векторах $\vec{a}$ та $\vec{в}$ побудований паралелограм ABCD, M - точка перетину його діагоналей. Виразити через $\vec{a}$ та $\vec{в}$ вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ та $\overrightarrow{MD}$.

Завдання 3. Побудувати трикутник ABC за координатами його вершин:

а) $A(N+1, \ N)$; $B(N, \ N-\sqrt{3})$; $C(N, \ N+\sqrt{3})$

б) $A(N, \ N+2)$; $B(N+1, \ N+3)$; $C(N, \ N+3)$

Знайти довжини сторін AB і AC.

Завдання 4. Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, довжина якого дорівнює 6, утворює з осями координат кути $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 120^0$.

Знайти координати вектора $\vec{a}$ і координати його кінця M_2, якщо $M_1(0, -3, 5)$.

Завдання 5. Знайти координати вектора $\vec{c} = 2N\vec{a} - 3N\vec{в}$ та орти векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$, якщо

$\vec{a}(2, \ -1, \ 2)$, $\vec{в} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{к}$

Завдання 6. Знайти $(2\vec{a} - 3\vec{в}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{в})$, якщо $\vec{a} = (4, -2, -4)$, $\vec{в} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{к}$.

Завдання 7. Задані точки A(-1, 3, -7), B(2, -1, 5), C(0, 1, +6).

Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{BC}$, їх скалярний та векторний добутки.

Завдання 8. Знайти площу трикутника з вершинами A(1, 2, 0), B (3, 0, -3), C(5, 2, 6).

Завдання 9. Довести компланарність векторів $\vec{a}(7, \ -3, \ 2)$, $\vec{в} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{к}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{к}$.

Завдання 10. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}(2, \ -1, \ 2)$, $\vec{в}(N, \ 2N, \ -3N)$, $\vec{c}(3, \ -4, \ 5)$.

Завдання 11. Задані вектори $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ утворюють базис в E_3, знайти координати $\vec{d}$ та $|\vec{d}|$ в цьому базисі

1. $\vec{a}(1, \ 3, \ 5)$, $\vec{в}(0, \ 2, \ 0)$, $\vec{c}(5, \ 7, \ 9)$, $\vec{d}(0, \ 4, \ 16)$.

2. $\vec{a}(4N, \ 3, \ -1)$, $\vec{в}(5N, \ 0, \ 4)$, $\vec{c}(2N, \ 1, \ 2)$, $\vec{d}(0, \ 12, \ -6)$.

3. $\vec{a}(-2, \ 3, \ 5)$, $\vec{в}(1, \ -3, \ 4)$, $\vec{c}(7, \ 8, \ -1)$, $\vec{d}(N, \ 20N, \ N)$.

Завдання 12. Знайти власні числа, власні вектори та канонічну форму Жордана заданої матриці

1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; **2.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$; **3.** $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; **6.** $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$; **7.** $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$;

8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **9.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; **10.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 13. Знайти кут між діагоналями та довжини діагоналей паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{в}$, якщо

а) $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{в} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 3$; $\widehat{(\vec{p}, \ \vec{q})} = 30^0$.

б) $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{в} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 4$, $\widehat{(\vec{m}, \ \vec{n})} = 60^0$.

Завдання 14. Знайти $пр_{\vec{в}+\vec{c}}\vec{a}$, якщо

$\vec{a} = (1, \ -3, \ 2)$ $\vec{в} = (3, \ -4, \ 2)$, $\vec{c} = (-1, \ 1, \ 3)$.

Завдання 15. Визначити кількість лінійно незалежних векторів системи:

$\vec{\ell}_1 = (1, \ 9, \ 4, \ 2)$, $\vec{\ell}_2 = (1, \ 4, \ 1, \ 1)$, $\vec{\ell}_3 = (2, \ 3, \ -1, \ 1)$, .
$\vec{e}_4 = (0,5,3,1)$.

Модульний контроль з розділів 1-3

<u>Завдання 1.</u> Розв’язати рівняння
$(a + вi)z^2 + (c + di)z + \ell + fi = 0$
за даними значеннями коефіцієнтів:

№ варіанту	a	в	c	d	ℓ	f
1	6	5	- 8	34	156	69
2	3	1	44	- 2	208	- 84
3	5	- 2	- 21	49	22	- 90
4	1	5	24	42	23	89
5	4	- 2	- 16	8	- 4	- 118
6	8	1	68	41	117	169
7	0	- 6	54	- 6	162	444
8	3	- 6	12	51	- 105	45
9	5	- 7	- 31	- 75	- 250	54
10	0	- 7	70	- 14	84	168

<u>Завдання 2.</u> Обчислити визначник

№ варі-анту	Визначник	№ варі-анту	Визначник
1	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	**2**	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$	**4**	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$	**6**	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 0 \end{vmatrix}$	**8**	$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	**10**	$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

Завдання 3. Знайти загальний і базисний розв'язки системи

№ вар	Система	№ вар	Система
1	$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1 \\ 3x_1+4x_2+6x_3+2x_4=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1 \\ 7x_1+2x_2+10x_3=1 \\ -2x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ -3x_1+7x_2+5x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1-7x_2-5x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1 \\ -2x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=2 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ 5x_1+5x_2-2x_3+13x_4=7 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ -x_1+3x_2-2x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-x_2+x_3+4x_4=1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1-3x_2+2x_3-3x_4=-1 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=5 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 3x_1+6x_2-3x_3+12x_4=6 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \end{cases}$

Завдання 4. Знайти базис векторного простору, заданого векторами $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, та координати і довжину вектора, що залишився, в цьому базисі.

№ варіантів	Вектори
1	$\vec{a}_1=(1,\ 0,\ 2)$, $\vec{a}_2=(0,\ 2,\ 3)$, $\vec{a}_3=(1,\ 2,\ 1)$, $\vec{a}_4=(6,\ 12,\ 11.)$
2	$\vec{a}_1=(2,\ 1,\ 0)$, $\vec{a}_2=(4,\ 3,\ -3)$, $\vec{a}_3=(-6,\ 5,\ 7)$, $\vec{a}_4=(34,\ 5,\ -26)$.
3	$\vec{a}_1=(4,\ 5,\ 2)$, $\vec{a}_2=(3,\ 0,\ 1)$, $\vec{a}_3=(-1,\ 4,\ 2)$, $\vec{a}_4=(5,\ 7,\ 8.)$
4	$\vec{a}_1=(3,\ -5,\ 2)$, $\vec{a}_2=(4,\ 5,\ 1)$, $\vec{a}_3=(-3,\ 0,\ -4)$, $\vec{a}_4=(-4,\ 5,\ -16)$
5	$\vec{a}_1=(-2,\ 1,\ 7)$, $\vec{a}_2=(3,\ -3,\ 8)$, $\vec{a}_3=(5,\ 4,\ -1)$, $\vec{a}_4=(18,\ 25,\ 1)$
6	$\vec{a}_1=(4,\ 3,\ -1)$, $\vec{a}_2=(2,\ 1,\ 2)$, $\vec{a}_3=(5,\ 0,\ 4)$, $\vec{a}_4=(0,\ 12,\ -6)$
7	$\vec{a}_1=(3,\ 4,\ -3)$, $\vec{a}_2=(-5,\ 5\ \ 0)$, $\vec{a}_3=(2,\ 1,\ -4)$, $\vec{a}_4=(8,\ -16,\ 17)$
8	$\vec{a}_1=(2,\ 4,\ -6)$, $\vec{a}_2=(0,\ -3,\ 7)$, $\vec{a}_3=(1,\ 3,\ 5)$, $\vec{a}_4=(3,\ 2,\ 52)$
9	$\vec{a}_1=(1,\ 3,\ 5)$, $\vec{a}_2=(0,\ 2,\ 0)$, $\vec{a}_3=(5,\ 7,\ 9)$, $\vec{a}_4=(0,\ 4,\ 16)$
10	$\vec{a}_1=(-2,\ 3,\ 5)$, $\vec{a}_2=(7,\ 8,\ -1)$, $\vec{a}_3=(1,\ -3,\ 4)$, $\vec{a}_4=(1,\ 20,\ 1)$

Завдання 5. Знайти: площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$; об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Вказані вектори взяти із завдання 4.

<u>Завдання 6</u>. Знайти обернену матрицю до заданої матриці А.

1. $A=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}$; **2.** $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&5\\7&6&4\end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$; **4.** $A=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&2&-1\\3&4&5\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&1&3\\-3&2&4\end{pmatrix}$; **6.** $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&3&-1;\\2&1&3\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&-1&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$ **8.** $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}$;

9. $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&3\\-1&2&1\end{pmatrix}$; **10.** $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$.

Розділ 4	Основи аналітичної геометрії

Предметом аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів алгебраїчними методами.

Кожна точка на площині ототожнюється з упорядкованою парою чисел, а в просторі - з упорядкованою трійкою чисел - координатами цієї точки.

4.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

1. ***Відстань між двома точками*** $M_1(x_1y_1z_1)$ та $M_2(x_2y_2z_2)$ знаходять за формулою:

$$\boxed{|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \qquad (1)$$

2. ***Ділення відрізка у заданому відношенні.***

Якщо відомі координати кінців відрізка $M_1(x_1y_1z_1)$ та $M_2(x_2y_2z_2)$, то <u>*координати точки $M(x,y,z)$, що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні λ*</u>, знаходять за формулами:

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ \ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ \ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda};} \qquad (2)$$

Якщо <u>*точка М поділяє відрізок M_1M_2 навпіл*</u>, тоді її координатами будуть:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z=\frac{z_1+z_2}{2};\qquad (3)$$

Приклад 1. Знайти відстань між точками $M_1(4, 6, 1)$ та M_2 (2, 1, -1), а також координати точки M, що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\frac{1}{2}$

Розв'язання. За формулою (1) одержимо:

$$|M_1M_2|=\sqrt{(2-4)^2+(1-6)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{4+25+4}=\sqrt{33};$$

За формулою (2) при $\lambda=\frac{1}{2}$ знайдемо шукані координати точки M.

$$x=\frac{4+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5\cdot 2}{3}=\frac{10}{3};\quad y=\frac{6+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{13}{3};\qquad z=\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3};$$

Отже, M $\left(\frac{10}{3},\frac{13}{3},\frac{1}{3}\right)$.

4.2. Основні задачі аналітичної геометрії

1. Складання рівняння геометричного об'єкта, який розглядають як геометричне місце точок.
2. Дослідження і побудова геометричного об'єкта за його рівнянням.

4.3. Аналітична геометрія на площині

Означення І. Рівнянням лінії ℓ на площині називають рівняння із змінними x та y, якому задовольняють координати будь-якої точки цієї лінії і не задовольняють координати точки, що не належить лінії ℓ.

Найпростішою лінією на площині є пряма. В залежності від способу задання прямої на площині одержують різні види рівняння прямої на площині, які можна систематизувати, наприклад, таким чином

№	Вид рівняння	Назва та позначення	Спосіб побудови в системі координат
1	$A(x-x_0)+$ $+B(y-y_0)=0$	***Рівняння прямої, що проходить через точку*** $M_o(x_o,y_o)$ перпендикулярно $\vec{n}$ (A,B).	Через точку $M_o(x_o, y_o)$ провести пряму перпендикулярну до $\vec{n}$ (A,B).
2.	Ax + By + C=0	***Загальне рівняння прямої.*** Коефіцієнти A, B - координати перпендикуляра $\vec{n}$ до прямої.	Знайти точки перетину прямої з осями координат (при x=0 та y=0) і через них провести пряму.
3.	$\frac{x-x_o}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}$	***Канонічне рівняння прямої.*** (x_o, y_o) - координати точки M_o, що лежить на прямій; (ℓ,m) - координати напрямного вектора $\vec{S}$, який паралельний прямій.	Побудувати т. $M_o(x_o, y_o)$ і вектор $\vec{S}(\ell,m)$. Провести пряму через точку M_o паралельно $\vec{S}$.
4.	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	***Рівняння прямої, що проходить через дві точки*** $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$.	Побудувати точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ і через них провести пряму.

8[69]

№	Вид рівняння	Назва та позначення	Спосіб побудови в системі координат
5	$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$	***Рівняння прямої у відрізках.***	Відкласти на осі Ох відрізок а, на осі Оу - відрізок в. Через кінці цих відрізків провести пряму.
6	$y - y_o = к(x - x_o)$	***Рівняння прямої, що проходить через точку $M_o(x_o, y_o)$ з кутовим коефіцієнтом к.*** к = $tg\alpha$, α - кут нахилу прямої до осі Ох.	Побудувати точку $M_o(x_o, y_o)$, знайти кут нахилу α і провести пряму через точку M_o під кутом α до Ох.
7	у = кх + в	***Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом к*** = $tg\alpha$; в - відрізок, який відтинає пряма на осі Оу.	Відкласти відрізок в на осі Оу, знайти кут нахилу α і провести пряму через кінець відрізка в під кутом α до осі Ох.

Відстань від точки до прямої

Відстань d від заданої точки $M_o(x_o, y_o)$ до прямої, що задана загальним рівнянням, знаходять за формулою:

$$\boxed{d=\frac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}} \qquad (4)$$

Для знаходження відстані між двома паралельними прямими треба знайти координати будь-якої точки, що лежить на одній прямій, і, використовуючи загальне рівняння іншої прямої, за формулою (4) знайти відстань між паралельними прямими.

Знаходження кута між прямими

Якщо прямі ℓ_1 та ℓ_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, відповідно, то *косинус кута φ* між ними знаходять за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}} \qquad (5)$$

Умова паралельності прямих має вигляд:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}} \qquad (6)$$

Умовою перпендикулярності прямих буде рівність

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2=0} \qquad (7)$$

Якщо прямі задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_o}{\ell_1}=\frac{y-y_o}{m_1} \quad \text{та} \quad \frac{x-x_1}{\ell_2}=\frac{y-y_1}{m_2},$$

тоді косинус кута φ між ними знаходять за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\ell_1\cdot\ell_2+m_1\cdot m_2}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{\ell_2^2+m_2^2}}} \qquad (8)$$

Умова паралельності прямих має вигляд:

$$\boxed{\frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{m_1}{m_2}} \qquad (9)$$

Умовою перпендикулярності прямих буде рівність:

$$\boxed{\ell_1\cdot\ell_2+m_1\cdot m_2=0} \qquad (10)$$

Якщо прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом
$y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$,
тоді *тангенс кута φ* між ними знаходять за формулою:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}} \qquad (11)$$

Умова паралельності прямих: $\boxed{k_1 = k_2}$, а *умова перпендикулярності прямих* виглядає так: $\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1}$ або

$$\boxed{k_2 = \frac{-1}{k_1}}$$

Приклад 2. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M_o(2, -3)$: а) паралельно осі Ox; б) паралельно осі Oy; в) перпендикулярно до прямої x - 3y - 7 = 0.

Розв'язання. Напрямними векторами прямої у випадках а) та б) можна розглядати орти осей Ox та Oy, тобто, вектори $\vec{i} = (1,0)$ та $\vec{j} = (0,1)$, відповідно.

Координати точки M_o, через яку проходить пряма, задані. Тому, використовуючи канонічне рівняння прямої $\frac{x - x_o}{\ell} = \frac{y - y_o}{m}$, одержимо:

а) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{0}$; б) $\frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{1}$

На нуль поділяти не можна, але в аналітичній геометрії ці рівності розглядають як пропорції, з яких випливає:

а) $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$

б) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

У випадку в) пряма задана загальним рівнянням, тому відомий вектор $\vec{n} = (1, -3)$ перпендикулярний до цієї прямої, його можна розглядати як напрямний вектор до прямої,

рівняння якої треба знайти. Отже, маємо:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-3} \Rightarrow y + 3 = -3(x-2) \Rightarrow y = -3x + 3$$

Приклад 3. Знайти кут між прямими

$$3x - 4y + 2 = 0 \text{ та } \qquad \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3}$$

Розв'язання можна здійснити декількома способами. Використаємо два способи:

Перший спосіб

Канонічне рівняння прямої приведемо до загального вигляду рівняння прямої:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow 2y + 2 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 2y - 11 = 0$$

Тепер обидві прямі задані загальними рівняннями і косинус кута між ними можна знайти за формулою (5)

Одержимо:

$$\cos\varphi = \frac{3x3 + (-4)(-2)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}x\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{17}{5\sqrt{13}} = \frac{17\sqrt{13}}{65} \Rightarrow$$

$$\varphi = arc\cos\frac{17\sqrt{13}}{65}$$

Другий спосіб.

Зведемо задані рівняння до рівнянь прямої з кутовим коефіцієнтом

$$3x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow 4y = 3x + 2 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

Отже, кутовим коефіцієнтом першої прямої буде

$$K_1 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow y + 1 = \frac{3}{2}(x-3) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$$

Отже, кутовим коефіцієнтом другої прямої буде:

$$K_2 = \frac{3}{2}.$$

Тепер тангенс шуканого кута φ можна знайти за формулою (11):

$$tg\varphi = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{14}{8}} = \frac{3}{7} \Rightarrow \varphi = arctg\left(\frac{3}{7}\right)$$

Приклад 4. Знайти відстань між прямими

$2x - 3y + 2 = 0$ та $6x - 9y + 21 = 0$

Розв'язання. Прямі задані загальними рівняннями,вони паралельні тому, що виконується умова паралельності

$$\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9}$$

Знайдемо координати будь-якої точки, що задовольняють рівняння другої прямої.

Рівняння $6x - 9y+21=0$ є лінійним з двома невідомими, тому воно має нескінчену кількість розв'язків.

Візьмемо $y=1$, тоді $6x - 9 + 21 = 0 \Rightarrow x = -2$

Отже, точка $M_0(-2,1)$ лежить на цій прямій.

Тепер за формулою (4) знайдемо відстань між прямими

$$d = \frac{|2\cdot(-2) + (-3)\cdot 1|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

<u>Означення2</u> Кривими лініями другого порядку називають лінії, координати точок яких задовольняють рівняння другого степеня.

Канонічні рівняння ліній другого порядку можна систематизувати, наприклад, таким чином

	Вид рівняння	Назва та позначення	Спосіб побудови в системі координат
1	$(x - a)^2 + (y - в)^2 = R^2$	**Рівняння кола**, радіуса R з центром С(а, в).	Побудувати точку С(а, в) і коло радіуса R з центром в цій точці.
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$	**Рівняння еліпса**. а і в - півосі еліпса, розташовані на осях Ох і Оу, відповідно.	На осі Ох відкласти відрізок [-а, а], на осі Оу - відрізок [-в, в] і побудувати еліпс.
3	**а)** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$ **б)** $\frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$	**Рівняння гіпербол** а) дійсна вісь гіперболи Ох, $x = \pm a$ - вершини гіперболи б) дійсна вісь гіперболи Оу, $y = \pm в$ - вершини гіперболи	Побудувати прямокутник $x \in [-a, a]$, $y \in [-в, в]$ і його діагоналі, а потім гіперболу, яка перетинає дійсну вісь.
4	**а)** $y^2 = 2px$ **б)** $x^2 = 2qy$	**Рівняння парабол** а) вісь симетрії Ох; директриса $x = \frac{-p}{2}$ б) вісь симетрії Оу; директриса $y = \frac{-q}{2}$	Вершина параболи - початок системи координат. Визначити 2 точки, через які проходить парабола.

Для визначення геометричного образу, який описує, алгебраїчне рівняння вигляду

$$\mathbf{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0} \qquad (12)$$

<u>треба звести це рівняння до одного з канонічних рівнянь ліній другого порядку шляхом виділення повних квадратів</u>. При цьому доцільно керуватись наступним:

1. якщо коефіцієнти **А** та **В одного знаку і рівні**, то це буде рівняння **<u>кола;</u>**

2. якщо **А** та **В одного знаку**, але **не рівні**, то це буде рівняння **<u>еліпса</u>**;

3. якщо **А** та **В** мають **різні знаки**, то це буде рівняння **<u>гіперболи</u>**.

4. якщо **А=0 або В=0**, то це буде рівняння **<u>параболи.</u>**

✧ **Приклад 5.** Визначити та побудувати лінію, рівняння якої:

$$2x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$$

Розв'язання. У даному випадку коефіцієнти при x^2 та y^2 одного знаку, але різні. Тому це рівняння описує еліпс. Будемо зводити задане рівняння до канонічного рівняння еліпса.

Спочатку об'єднаємо члени рівняння, що містять x та y окремо. Одержимо: $(2x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) + 1 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + 1 = 0$.

Рівняння не зміниться, якщо у першу дужку додамо та віднімемо 4, а в другій дужці 9.

Тоді матиму: $2\,(x^2 - 4x + 4 - 4) + (y^2 + 6y + 9 - 9) + 1 = 0$

Виділимо повні квадрати:

$$2(x-2)^2 - 8 + (y+3)^2 - 9 + 1 = 0 \Rightarrow 2(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16 \Rightarrow$$

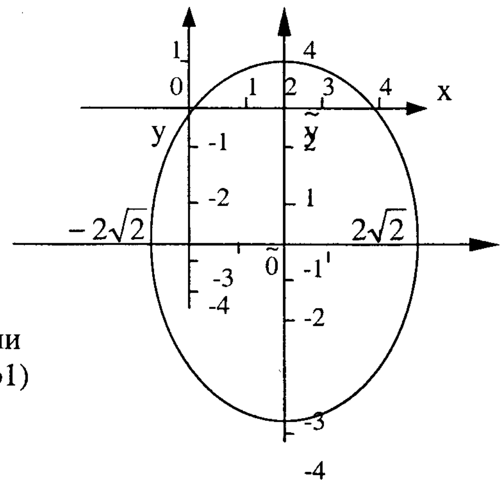
$$\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

Позначимо: $\tilde{x} = x - 2$, $\tilde{y} = y + 3$, тоді задане рівняння прийме вигляд: $\dfrac{\tilde{x}^2}{8} + \dfrac{\tilde{y}^2}{16} = 1$

Це канонічне рівняння еліпса в системі координат $\tilde{x}\tilde{O}\tilde{y}$ з півосями $a = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$, в=4.

Оскільки $x = \tilde{x} + 2$, $y = \tilde{y} - 3$, то початок нової системи координат буде $\tilde{O}(2;-3)$, а осі $\tilde{O}\tilde{x}$ та $\tilde{O}\tilde{y}$ паралельні осям старої системи Ox та Oy.

Побудуємо разом дві системи координат і еліпс (див.малю1)



Мал. 1

4.4 ВПРАВИ

<u>Завдання 1</u>. Визначити, які з точок A(3, 5), B(2, 7), C(-1, -3), D(-2, -4) лежать на прямій 2x - y - 1 = 0, а які розташовані нижче або вище цієї прямої.

<u>Завдання 2</u>. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно вектору $\vec{n}$

а) M(1, 1), $\vec{n}$ (2, 1); **б)** M(2, -1), $\vec{n}$ (-3, 2); **в)** M(-1, 2), $\vec{n}$ (2, -3);

г) M(1, 0), $\vec{n}$ (0, 2); **д)** M(-2, 3), $\vec{n}$ (-2, 0)

Побудувати пряму і звести її рівняння до загального рівняння

<u>Завдання 3</u>. Визначити точки перетину прямої

$2x - 3y - 12 = 0$ з осями координат і записати рівняння цієї прямої у вигляді рівняння у відрізках.

Завдання 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M паралельно вектору $\vec{s}$

а) M(3, -2), $\vec{s}$ (2, 3); **б)** M(0, 1), $\vec{s}$ (-1, 3); **в)** M(-1,-2), $\vec{s}$ (1, 0) ; г) M(-2, 0), $\vec{s}$ (0, -2); **д)** M(3, -4), $\vec{s}$ (5, 3)

Побудувати пряму і звести її рівняння до загального рівняння.

Завдання 5. Задані вершини трикутника A(2, 1), B(-1, 1), C(3, 2).

Скласти рівняння його сторін та висоти, що опущена з вершини A, а також бісектриси кута A.

Завдання 6. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_o(-1, 0)$

а) паралельно **б)** перпендикулярно

до прямої $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2}$

Завдання 7. Скласти рівняння сторони AC та медіани BD трикутника з вершинами A(3, 2), B(3, -2), C(1, 0).

Завдання 8. Визначити кутовий коефіцієнт к і відрізок в, який відтинає на осі Oy, кожна з прямих:

а) $5x - y + 3 = 0$; **б)** $2x + 3y - 6 = 0$;
в) $5x + 3y + 2 = 0$;
г) $3x + 2y = 0$; **д)** $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-4}{3}$.

Завдання 9. Визначити кут між прямими

а) $5x - y + 7 = 0$ та $2x - 3y + 1 = 0$;
б) $2x + y = 0$ та $y = 3x-4$;
в) $3x - 2y +7 = 0$ та $2x + 3y - 3 = 0$;
г) $x - 2y - 4 = 0$ та $2x - 4y + 3 = 0$;
д) $y = 2x + 3$ та $y = 3x + 5$;
е) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-4}$ та $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y}{3}$.

Завдання10.Визначити паралельність або перпендикулярність прямих

а) $3x - 2y + 3 = 0$; **б)** $6x - 4y - 5 = 0$;
в) $6x + 4y - 9 = 0$; **г)** $2x + 3y - 6 = 0$

Завдання 11. Знайти відстань d від точки A до прямої

а) A(2, -1), $4x + 3y + 10 = 0$;
б) A(0, -3), $5x - 12y - 24 = 0$;
в) A(-2, 3), $3x - 4y - 2 = 0$;
г) A(1, -2), $x - 2y - 5 = 0$;
д) A(-1, 2), $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4}$;
е) A(0, -1), $y = -x + 3$

Завдання 12. Знайти відстань d між паралельними прямими

а) $3x - 4y - 10 = 0$ та $6x - 8y + 6 = 0$;
б) $5x - 12y + 26 = 0$ та $5x - 12y - 3 = 0$;
в) $4x - 3y + 15 = 0$ та $8x - 6y + 25 = 0$
г) $24x - 10y + 52 = 0$ та $12x - 5y - 26 = 0$.

Завдання 13. Скласти рівняння і побудувати коло, центр якого C і радіус R

а) C(0, 0), R=5; **б)** C(0, -1), R=2; **в)** C(2, 0), R=3;
г) C(-3, 2), R=4; **д)** C(1, -2), R=3.

Завдання 14. Визначити координати центра та радіус кола

а) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$; **б)** $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 33 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 37 = 0$; **г)** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

Завдання 15. Знайти півосі еліпса і побудувати його

а) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; **б)** $x^2 + 25y^2 = 25$; **в)** $5x^2 + y^2 = 45$;
г) $9x^2 + 25y^2 = 225$; д) $9x^2 + 5y^2 = 45$; е) $16x^2 + y^2 = 16$.

Завдання 16. Визначити і побудувати лінію за її рівнянням

а) $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$; **б)** $x^2 - 16y^2 - 16 = 0$;

в) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1;$

Завдання 17. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку системи координат і яка розташована

а) в правій півплощині симетрично відносно осі Ox з параметром p = 3;

б) в лівій півплощині симетрично відносно осі Ox з параметром p = 0,5;

в) у верхній полуплощині симетрично відносно осі Oy з параметром $p=\dfrac{1}{4}$;

г) в нижній півплощині симетрично відносно осі Oy з параметром p = 3.

Зобразити параболу, її фокус та директрису.

Завдання 18. Визначити точки перетину прямої і параболи

а) $x + y - 3 = 0,\ x^2 = 4y$; **б)** $3x - 4y - 12 = 0,\ y^2 = -9x$;
в) $3x - 2y - 6 = 0,\ y^2 = 6x$.

Завдання 19. Розв'язати графічно систему нерівностей

а) $\begin{cases} x+y-2N-3\le 0; \\ x-y-1\ge 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} (N+4)x-y-1\ge 0; \\ 2x+y-N-6\le 0. \end{cases}$

4.5. Аналітична геометрія в просторі

4.5.1. Рівняння площини в просторі

Якщо **площина проходить через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}$(A, B, C),** тоді рівнянням площини буде:

$$\boxed{A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o)=0} \qquad (13)$$

Загальне рівняння площини в просторі має вигляд:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \qquad (14)$$

Коефіцієнти A, B, C є координатами вектора $\vec{n}$, який перпендикулярний до площини.

Якщо *площина проходить через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, то рівняння цієї площини знаходять за формулою:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0} \qquad (15)$$

Якщо *площина відтинає на осях координат Ox, Oy,* Oz *відрізки а, в, с*, відповідно, то її рівняння має вигляд

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1} \qquad (16)$$

і зветься рівнянням площини у відрізках.

Приклад 6. Задані точки $M_o(1, 6, 4)$, $M_1(2, 1, -3)$, $M_2(5, -2, 3)$

Треба: **а)** скласти рівняння площини, що проходить через точку M_o перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) одержане рівняння звести до загального рівняння та рівняння площини у відрізках;

в) побудувати цю площину в системі Oxyz.

Розв'язання:

а) Спочатку знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (5-2, \quad -2-1, \quad 3+3) = (3, \quad -3, \quad 6)$$

Координати точки M_0 і вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, що перпендикулярний до площини, дозволяють за формулою (13) знайти рівняння площини у вигляді:

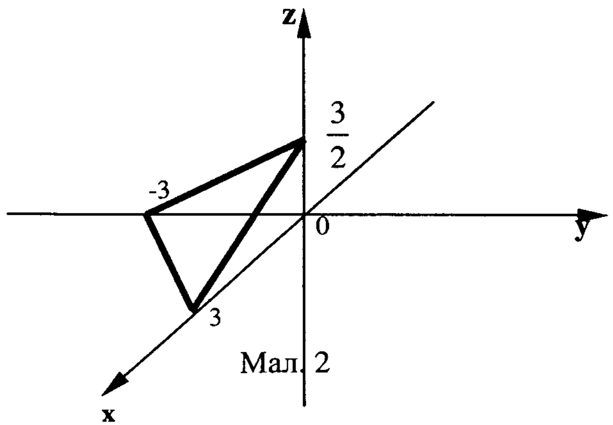
$$3(x - 1) - 3(y - 6) + 6(z - 4) = 0$$

б) Одержане рівняння зведемо до загального рівняння площини, тобто до вигляду (14): $3(x - 1) - 3(y - 6) + 6(z - 4) = 0 \Rightarrow x - y + 2z - 3 = 0$.

Останнє рівняння легко звести до рівняння площини у відрізках (16). Дійсно,

$$x - y + 2z - 3 = 0 \Rightarrow x - y + 2z = 3 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{3/2} = 1$$

в) Побудуємо площину в системі координат, використовуючи рівняння цієї площини у відрізках. Для цього відкладемо відрізки довжиною 3, -3 та $\frac{3}{2}$ на координатних осях Ox, Oy, Oz, відповідно, і побудуємо площину, що проходить через кінці цих відрізків (дивись мал. 2).



Мал. 2

Косинус кута φ між двома площинами, що задані загальними рівняннями: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, знаходять за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \qquad (17)$$

Умова паралельності площин має вигляд:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}} \qquad (18)$$

Умовою перпендикулярності площин буде:

$$\boxed{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0} \qquad (19)$$

Відстань d від точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$ до площини, заданої загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, обчислюють за формулою:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \qquad (20)$$

4.5.2. Рівняння прямої в просторі

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ паралельно вектору $\bar{s}(\ell, m, p)$ має вигляд:

$$\boxed{\frac{x - x_o}{\ell} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{p}} \qquad (21)$$

і зветься канонічним рівнянням прямої в просторі.

Рівняння вигляду:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_o + \ell t, \\ y = y_o + mt, \quad t \in (-\infty, \infty) \\ z = z_o + pt, \end{cases}} \qquad (22)$$

зветься параметричним рівнянням прямої в просторі; (x_o, y_o, z_o)-

координати точки M_o, через яку проходить пряма; (ℓ, m, p) - координати вектора $\vec{s}$, паралельного прямої; t - параметр.

Якщо <u>пряма проходить через точки</u> $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то її рівняння має вигляд:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}} \qquad (23)$$

і зветься рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки M_1 та M_2.

Рівнянням прямої - перетину двох площин, заданих *<u>загальними рівняннями</u>*, буде система

$$\boxed{\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}} \qquad (24)$$

Приклад 7. Скласти канонічне та параметричне рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(2, 0, -3)$ та $M_2(-3, 2, -1)$.

Розв'язання. Використовуючи координати заданих точок M_1 та M_2 і рівняння (23) прямої, що проходить через ці точки, одержимо:

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z+3}{-1+3} \Rightarrow \frac{x-2}{-5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{2} \quad -$$

канонічне рівняння.

Використовуючи рівності $\frac{x-2}{-5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{2}=t$

одержимо параметричне рівняння цієї прямої у вигляді:

$$\begin{cases} x=2-5t, \\ y=2t, \qquad t\epsilon(-\infty,\infty) \\ z=-3+2t, \end{cases}$$

Отже, ця пряма проходить через точку $M_1(2, 0, -3)$ паралельно $\vec{S}(-5, \ 2, \ 2)$

<u>Косинус кута φ</u> між прямими, що задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ та $\frac{x-x_2}{\ell_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$,

знаходять за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\ell_1\cdot\ell_2+m_1\cdot m_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{\ell_2^2+m_2^2+p_2^2}}} \qquad (25)$$

<u>Умова паралельності</u> прямих: $\boxed{\frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2};}$

<u>Умова перпендикулярності</u> прямих:

$$\boxed{\ell_1\cdot\ell_2+m_1\cdot m_2+p_1\cdot p_2=0}$$

Приклад 8. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ та площини $2x + y + z - 8 = 0$.

Розв'язання. Шукані координати точки перетину (x , y, z) повинні задовольняти рівняння прямої та площини.

Параметричним рівнянням заданої прямої знайдемо як в прикладі 7 у вигляді:

$$\begin{cases} x=2+3t, \\ y=3+t, \\ z=4+2t, \end{cases} \qquad (26)$$

Підставимо ці x, y, z в рівняння площини:

$$2(2+3t)+3+t+4+2t-8=0 \Rightarrow 9t+3=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{3}$$

Підставимо знайдене t в формули (26) і одержимо координати точки перетину:

Отже, точкою перетину заданої прямої та заданої площини буде $M\left(1,\ \dfrac{8}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$.

Якщо пряма задана канонічним рівнянням $\dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_o}{m}=\dfrac{z-z_o}{p}$, а площина - загальним рівнянням Ax + By + Cz + D = 0, то <u>*синус кута φ*</u> між ними знаходять за формулою:

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{A\ell+Bm+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{\ell^2+m^2+p^2}}} \qquad (27)$$

4.5.3. Поверхні другого порядку

❒ **<u>Означення3.</u>Поверхнями другого порядку називають такі поверхні, рівняння яких містять хоч би одну з координат x, y, z у другому степені**

Якщо центром сфери є точка C(x_o, y_o, z_o), а радіус R, то рівнянням сфери буде:

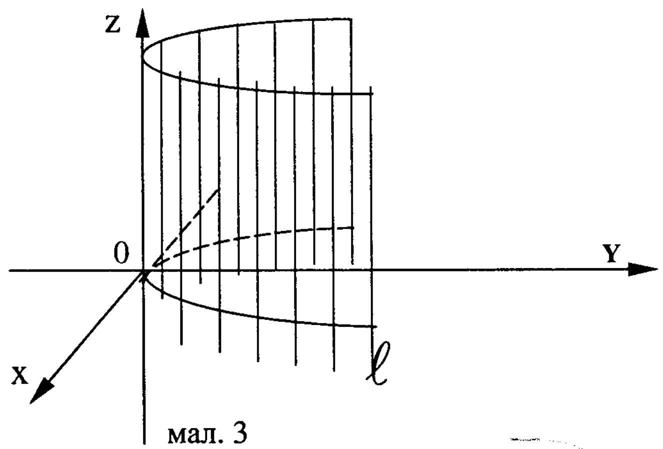
$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2} \qquad (28)$$

Крім сфери, часто використовують циліндричні поверхні та поверхні обертання.

❒ **<u>Означення 4.</u>Конічною називають поверхню, яка утворена прямою лінією (твірною), що проходить через задану точку (вершину поверхні) і перетинає задану лінію (напрямну лінію).**

❒ **<u>Означення 5.</u>Поверхня називається циліндричною, якщо вона утворена прямою (твірною), паралельною до заданої прямої L (віссі поверхні) і яка проходить через задану лінію ℓ (напрямну лінію).**

Приклад циліндричної поверхні з віссю Oz і напрямною ℓ зображено на малюнку 3.



мал. 3

Якщо твірна циліндричної поверхні паралельна осі Oz, а напрямна лінія ℓ лежить в площині xOy і задана рівняннями:

$$\boxed{\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}} \qquad (29)$$

Тоді рівняння циліндричної поверхні буде:

$$\boxed{\begin{cases}F(x,y)=0\\ z\epsilon(-\infty,\infty)\end{cases}} \qquad (30)$$

Рівняння F(x, z) = 0, що не містить змінної y, визначає в просторі циліндричну поверхню з твірною, що паралельна осі Oy.

Рівняння F(y, z) = 0 визначає в просторі циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі Ox.

Наприклад, рівняння $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ визначає в просторі еліптичну циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі Oz.

Рівняння $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{25}=1$ визначає в просторі гіперболічну циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі Ox.

Правило знаходження рівняння поверхні обертання

Для одержання рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії ℓ навколо однієї з координатних осей, треба:

1. *В рівнянні лінії обертання залишити незмінною координату, однойменну з віссю обертання;*

2. Другу координату рівняння лінії обертання замінити на плюс - мінус квадратний корінь із суми квадратів двох інших просторових координат.

Наприклад, нехай обертається еліпс $\frac{y^2}{в^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ навколо осі Oz. Тоді рівнянням поверхні обертання буде:

$$\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{в^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{в^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Останнє рівняння називають рівнянням еліпсоїда обертання навколо осі Oz.

Якщо вказаний еліпс обертається навколо осі Oy, то рівняння поверхні обертання буде:

$$\frac{y^2}{в^2}+\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{в^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$$ - рівняння

еліпсоїда обертання навколо осі Oy.

Приклад 9. Визначити поверхню, яку описує рівняння $z^2 + 2z - 4x + 1 = 0$

Розв'язання. Це рівняння не містить координати y, тому воно описує в просторі циліндричну поверхню, твірна

якої паралельна осі Oy. Напрямна лінія цієї поверхні в площині Oxz буде параболою.

Дійсно, із $\begin{cases} z^2+2z-4x+1=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z+1)^2=4x \\ y=0 \end{cases}$

Вершина параболи - в точці (0, 0, -1), її вітки напрямлені в додатну сторону осі Ox.

Приклад 10. Визначити координати центра та радіус сфери $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Розв'язання. В лівій частині рівняння виділимо повні квадрати

$(x^2+ 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + (z - 0)^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 0)^2 = 3^2$

Одержали канонічне рівняння сфери, тому C(-1, 2, 0), R = 3.

Приклад 11. Скласти рівняння поверхні обертання гіперболи

$\begin{cases} \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ навколо **а)** осі Ox, **б)** осі Oy

Розв'язання.а) В рівнянні гіперболи координату x не змінюємо, а y замінимо на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$. Одержимо рівняння поверхні обертання у вигляді:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2+z^2}{2}=1.$$

б) В рівнянні гіперболи координату y не змінюємо, а x замінимо на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$. Одержимо рівняння поверхні обертання у вигляді $\frac{x^2+z^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1.$

Для визначення і побудови поверхні в системі координат за заданим рівнянням поверхні застосовують метод перерізу. За цим методом визначають рівняння ліній перерізу поверхні з координатними та паралельними до них площинами, а потім зображують ці лінії в системі координат.

4.6. Деякі приклади застосування кривих та поверхонь обертання.

1. Кількість тепла Q, що виділяється за одиницю часу пропорційна квадрату сили струму i або квадрату напруги u:

$$Q = iR^2 \quad \text{або} \quad Q=\frac{u^2}{R^2}$$ при сталому опорі R.

2. За законом Кеплера усі планети сонячної системи рухаються по еліптичним траєкторіям, причому центр Сонця знаходиться в одному із фокусів цих еліпсів.

3. Орбітою штучного супутника Землі, який знаходиться під дією тільки сили тяжіння (відсутній опір повітря), буде коло, еліпс, парабола або гіпербола в залежності від величини і напрямку швидкості в момент виключення двигуна та відстані від поверхні Землі. Початкова швидкість супутника ($7{,}8^{км}/_{сек}$ при r = 350км), що відповідає кругової орбіті, називають першою космічною швидкістю. Початкова швидкість супутника, що відповідає параболічній орбіті ($11^{км}/_{сек}$ при r = 350км) називають другою космічною швидкістю. При ($V > 11\ ^{км}/_{сек}$ та r = 350км) орбіта буде гіперболічною

4. В теорії імовірності важливим поняттям є еліпс розсіювання випадкової величини.

5. При будівництві водонапорних башт та радіощогл використовують конструкції, що мають форму однополостного гіперболоїда, оскільки ці поверхні можна одержати за допомогою прямолінійних твірних – металічних стержнів.

6. В прожекторах, фарах, антенах радіолокаторів використовуються поверхні параболоїдів обертання, оскільки вони дозволяють одержати вузьку в`язку паралельних променів в однаковій фазі, тобто гостроспрямоване випромінювання джерела світла (або радіохвиль), яке розташоване у фокусі параболічної поверхні.

4.7 ВПРАВИ

<u>Завдання 1</u>. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3, 2, -7)$ паралельно до площини $2x - 3y + 5 = 0$.=

<u>Завдання 2.</u> Задані точки $M_1(3, -1, 2)$ та $M_2(4, -2, -1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно відрізку M_1M_2.

<u>Завдання 3.</u> Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -1, 1)$ та $M_3(2, 0, 2)$.

<u>Завдання 4</u>. Як розташовані задані площини відносно системи координат: **а)** $x + 5y - z = 0$; **б)** $3x - 2y - 2 = 0$; **в)** $5y - 3z = 0$; **г)** $x + 2 = 0$; **д)** $y - 3 = 0$.

<u>Завдання 5.</u> Знайти відрізки, які відтинає площина $3x - 4y - 24z + 12 = 0$ на координатних осях.

<u>Завдання 6</u>. Записати рівняння площини $x + 2y - 3z - 6 = 0$ у вигляді рівняння у відрізках.

<u>Завдання 7.</u> Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ і координатними площинами.

<u>Завдання 8.</u> Площина проходить через точки $M_1(5, 4, -1)$, $M_2(0, 2, 3)$ та $M_3(-1, 3, 4)$. Знайти: **а)** будь-який вектор, що перпендикулярний до цієї площини; **б)** відрізки, які відтинає площина на осях координат; **в)** відстань від початку координат до площини.

<u>Завдання 9.</u> Обчислити відстань d від точки M до площини: **а)** $M(-2, -4, 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$;
б) $M(2, -1, -1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$;

в) M(1, 2, -3), 5x - 3y + z + 4 = 0;

г) M(3, -6, 7), 4x - 3z - 1 = 0.

Завдання 10. Обчислити відстань між паралельними площинами: а) x - 2y - 2z - 12 = 0 та x - 2y - 2z - 6 = 0;

б) 2x - y + 2z + 9 = 0 та 4x - 2y + 4z - 21 = 0

в) 16x + 12y - 15z + 50 = 0 та 16x + 12y - 15z + 25 = 0;

г) 6x - 18y - 9z - 27 = 0 та 4x - 12y - 6z - 8 = 0.

Завдання 11. Визначити паралельні пари площин

а) 2x - 3y + 5z - 7 = 0 та 2x - 3y + 5z + 3 = 0;

б) 4x + 2y - 4z + 5 = 0 та 2x + y + 2z - 1 = 0;

в) x - 3z + 2y + 9 = 0 та 2x - 6z + 4y - 6 = 0.

Завдання 12. Визначити пари перпендикулярних площин

а) 3x - y - 2z - 5 = 0 та x + 9y - 3z + 2 = 0;

б) 2x + 3y - z - 3 = 0 та x - y - z + 5 = 0;

в) 2x - 5y + z = 0 та x + 2z - 3 = 0.

Завдання 13. Виявити, які з точок $M_1(-3, 3, -4)$, $M_2(4, -2, 9)$ $M_3(1, -1, 2)$ лежать на прямій:

а) $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{4}$; б) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4t \end{cases}$

Завдання 14. Скласти канонічне і параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M_o(2, -3, 1)$ паралельно:

а) вектору $\vec{s}\,(5, -2, 6)$; б) прямій $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{2}$; в) осі Oz.

Завдання 15. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки:

а) $M_1(2, 0, -3)$ та $M_2(-3, 2, -1)$; б) $M_1(1, -2, 1)$ та $M_2(2, 1, -1)$;

в) $M_1(1, 1, -2)$ та $M_2(3, -1, 0)$; г) $M_1(1, 2, -4)$ та $M_2(-1, 3, -8)$.

Завдання 16. Знайти гострий кут між прямими:

$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ та $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$

Завдання 17. Довести: а) паралельність прямих:

$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ та $\begin{cases} x = -6t \\ y = 1 + 4t \\ z = -2t \end{cases}$

б) перпендикулярність прямих:

$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ та $\begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = 14t \\ z = 7t \end{cases}$

Завдання 18. Знайти кут φ між прямою $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$ і площиною x - 3y + 5z - 1 = 0.

Завдання 19. Знайти точку перетину:

а) прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ з площиною 2x + 3y + z - 1 = 0

б) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{-z-3}{2}$ і x + 2y - 2z + 6 = 0

в) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$ і 3x - 2y + z - 16 = 0

Завдання 20. Впевнитись, що прямі:

$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ та $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$

паралельні і знайти відстань d між ними.

Завдання 21. Записати рівняння сфери, центр якої C(2, -1, 3) і радіус 6.

Завдання 22. Записати рівняння і побудувати в системі координат циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі

137

Oz, а напрямна лінія лежить в площині xOy і є:

а) колом с центром в початку коорд;

б) еліпсом;

в) гіперболою;

г) параболою симетричною відносно осі Ox.

Завдання 23. Визначити поверхню та її рівняння у канонічному вигляді:

а) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$;

б) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$; **в)** $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 3$

Завдання 24. Скласти рівняння гіперболоїдів, одержаних обертанням

гіперболи $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ навколо а) осі Ox; б) осі Oy.

Завдання 25. Скласти рівняння параболоїдів, одержаних обертанням

параболи: а) $\begin{cases} y^2 = 5x \\ z = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 = 5z \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox.

Модульний контроль з розділу 4

Перший рівень

Завдання 1. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(3N; -5N)$ перпендикулярно до прямої $\dfrac{x}{2N} + \dfrac{y}{3N} = 1$

Завдання 2. Визначити і побудувати лінії за їх рівняннями:

а) $4x^2 + 9N^2 \cdot y^2 = 36N^2$; **б)** $y^2 = 2Nx$; **в)** $y = (x - N)^2$

Завдання 3. Побудувати в системі координат та заштрихувати область, що обмежена лініями: $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = N^2$; $-6x + 4y = 24N$ та $3x + 4y - 24N = 0$.

Завдання 4. Що описує рівняння $x = 2Ny^2$ на площині та в просторі ?

Скласти рівняння поверхонь обертання лінії $x = 2Ny^2$ навколо: **а)** осі Ox, **б)** осі Oy.

Завдання 5. Задані вершини піраміди:

A(N+3, N+7, N+6), B(N+2, N+5, N+6), C(N+6, N+11, N+4), D(N+2, N+3, N+1)

Знайти: **а)** рівняння ребра AD;

б) рівняння основи піраміди ABC;

в) синус кута нахилу AD до основи піраміди;

г) висоту, проведену з вершини D до основи ABC.

Модульний контроль з розділу 4

Другий рівень

Завдання 1. Скласти рівняння прямої, що проходить через центри двох кіл: $(x + 2N)^2 + (y - N)^2 = 16$ та $x^2 + y^2 - 4Nx + 6Ny = 0$.

Завдання 2. Задані вершини трикутника: A(N+1, 3), B(3, -5), C(-3, 2N).

Знайти висоту BD та рівняння бісектриси кута $\widehat{BAC}$.

Завдання 3. Побудувати в системі координат і заштрихувати область, що обмежена лініями: $\frac{x^2}{(2N)^2} - \frac{y^2}{N^2} = 1$,

$x + 4y - 3N = 0$; $\qquad x + \frac{8}{3}y - 4N = 0$

Завдання 4. Що описує рівняння $y^2 = (2N + 1)z$ на площині та в просторі ?

Скласти рівняння і побудувати поверхні обертання цієї лінії навколо:

а) осі Oz, **б)** осі Oy.

Завдання 5. Задані вершини піраміди: A(N+2, N+6, N+5), B(N+1, N+4, N+5), C(N+5, N+10, N+3), D(N+1, N+2, N). Знайти: **а)** рівняння ребра AD;
б) рівняння площини, на якій лежать точки A, B, C;
в) кут нахилу AD до основи піраміди;
г) висоту, проведену з вершини D до основи піраміди ABC.

Розділ 5 Вступ до математичного аналізу

5.1. Основні поняття

Предметом математичного аналізу є змінні величини та їх функціональні залежності.

Основними поняттями вступу до математичного аналізу є величини і функції, їх множини, різновиди, характеристики і границі.

5.1.1. Характеристики і множини змінних величин

Означення 1. Величиною називають те, що можна виразити в певних одиницях та характеризувати числовим значенням

Наприклад, площа круга та довжина кола - величини, а коло не буде величиною тому, що для нього характерна лише певна форма.

Величини бувають розмірні та безрозмірні. Розмірністю величини називають ту одиницю, за якою величина вимірюється.

Наприклад, розмірністю площі може бути $см^2$, $м^2$, $км^2$.

Додавати та віднімати можна величини лише однакової розмірності. Множити та ділити величини можна будь-якої розмірності.

Наприклад, швидкість 60 км/год.

Якщо поділити величини однакової розмірності, то одержимо безрозмірну величину.

Наприклад, $\frac{8м}{2м} = 4$

В математиці найчастіше вивчають безрозмірні величини, які повністю характеризуються лише своїм числовим значенням.

Величини бувають постійні та змінні.

<u>Означення 2</u>.Величина, числове значення якої при розглядаємих умовах не змінюється, називається постійною. Змінною величиною називається величина, яка при розглядаємих умовах може приймати різні числові значення.

До основних характеристик змінної величини відносять: неперервність або дискретність, монотонність (зростання або спадання в процесі зміни), обмеженість (часткова або повна) або необмеженість.

Постійні величини прийнято позначати літерами a, в, c, d, ...

Змінні величини позначають x, y, z, t, u, v, ...

<u>Означення 3</u>Сукупність деяких величин називають множиною цих величин

Наприклад, множина точок в трикутнику, студентів в аудиторії, цілих чисел у відрізку [0, 79].

Множини позначають великими літерами A, B, C, D..., а їх елементи відповідними малими літерами.

Якщо a є елементом множини A, то пишуть $a \in A$, в протилежному випадку $a \notin A$.

Запис $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ означає, що множина A складається з елементів $a_1, a_2, ..., a_n$, причому серед них можуть бути рівні елементи.

<u>Потужністю множини</u> називають кількість її елементів.

Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то кажуть, що A є підмножиною множини B і позначають $A \subset B$.

*Множина, що складається з елементів, які належать хоч би одній з множин A, B, називається **<u>об'єднанням</u>** множин*

множин A і B і позначається через $A \cup B$.

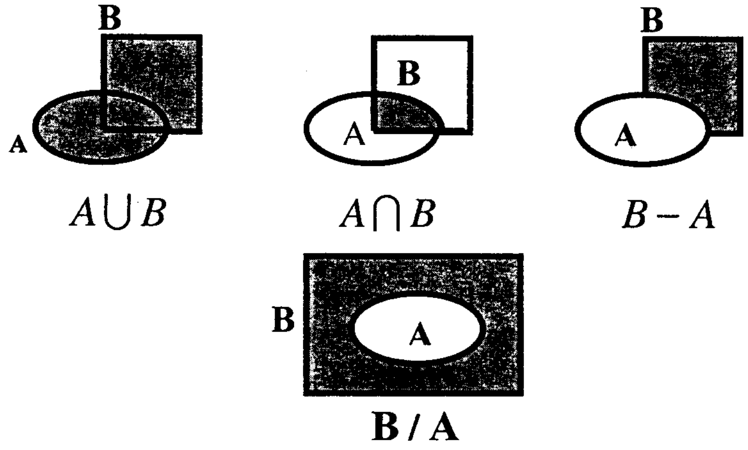
*Множина, що складається з елементів, які належать множинам і A і B, називається **<u>перетином</u>** множин A та B і позначається так:* $A \cap B$.

Операції об'єднання та перетину множин називають операціями логічного додавання та множення і позначають так: $A \cup B = A + B$; $A \cap B = A \cdot B$.

*Множина усіх елементів множини B, які не належать множині A, називається **<u>різницею</u>** множин A і B і позначається через* $B \setminus A$.

Якщо A є підмножиною B, то $B|A$ *називаєть **<u>доповненням</u>** A до B.*

Геометрично ці поняття можна ілюструвати малюнком 1.



Мал.1

5.1.2. Поняття та характеристики функцій

Якщо в розглядаємому процесі при зміні однієї величини змінюється інша величина, то кажуть, що між цими величинами існує функціональна залежність.

Серед функціонально залежних величин можна вказати такі величини, значення яких можна обирати довільно (їх називають незалежними змінними), тоді як значення іншої величини визначається значеннями незалежної змінної (їх називають залежними величинами або функціями).

Наприклад, якщо розглядати зв'язок між довжиною кола y і його радіусом **x**, тоді доцільно за незалежну змінну прийняти **x**, а довжина кола $y = 2\pi x$, буде залежною змінною.

<u>Означення 4.</u>Змінна величина y називається функцією змінної величини x, якщо вказано закон, за яким кожному значенню x, взятому з множини можливих значень, відповідає певне дійсне значення y. Змінну величину x називають незалежною змінною або аргументом.

Функціональну залежність між **у** та **x** позначають

y = f(x).

Замість літери f часто використовують літери $F, \Phi, u, v, \varphi, \psi$.

<u>Означення 5.</u>Функція $y = f(x)$ називається однозначною, якщо кожному значенню аргументу x відповідає одне значення y.

Функцію y називають <u>багатозначною,</u> якщо кожному значенню x відповідає декілька значень y.

Функція y є змінною величиною, тому вона може бути неперервною або дискретною, монотонною або не монотонною, обмеженою (зверху або знизу, або зверху та знизу) або необмеженою.

Крім цих характеристик часто використовують властивості парності та періодичності функцій.

Означення 6.Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо при заміні x на (-x) функція не змінюється, тобто $f(-x) = f(x)$. Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо при заміні x на (- x) функція лише змінює свій знак на протилежний, тобто $f(-x) = -f(x)$.

<u>Графіки парних функцій симетричні відносно осі Oy, а непарних функцій - симетричні відносно початку координат.</u>

Наприклад, функції y = cosx, y = x^{2m} - парні, а функції y = sinx, y = x^{2m+1} - непарні.

<u>Означення 7.</u>Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо існує таке постійне число ω, що виконується рівність $f(x+\omega) = f(x)$ для будь-якого x.

Найменше додатне число ω, що задовольняє цю рівність, зветься періодом функції.

Наприклад, функції y = sinx, y = cosx періодичні з періодом 2π, функції y=tgx, y = ctgx періодичні з періодом π.

В теорії зв'язку та в електротехніці функцію $f(t)$ часу t називають сигналом та імпульсом.

Струми і напруги міської електричної мережі здійснюють гармонічні коливання за законом

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

де: **A** - амплітуда, ω - частота, φ - початкова фаза коливань.

В міській електричній мережі найчастіше частота коливань ω = 50Гц.

5.1.3. Способи завдання функцій. Області визначення та значень.

Існує декілька способів задання функцій: аналітичний, табличний, графічний, мовний та програмний.

При аналітичному способі функція задається однією або декількома рівностями, що зв'язують залежні та незалежні змінні.

Наприклад: а) y = xsin2x-3; б) $y = \begin{cases} 2x-1, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le 1; \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$

в) $5x^2$ - siny = 3.

Якщо рівняння, що зв'язує аргумент **x** з функцією **y** не розв'язано відносно **y**, а задано у вигляді F(x, y) = 0 (випадок в)), тоді кажуть, що **y** є неявно заданою функцією **x**.

Від аналітичного способу задання функції неважко перейти до табличного або графічного способу задання цієї функції. Перехід від табличного або графічного способу задання функції до аналітичного способу потребує певних знань та навичок, а іноді здійснюється лише наближено.

<u>Означення 8</u>.Областю визначення функції $y = f(x)$ називають сукупність усіх тих значень аргументу x, для яких значення y, обчислені за формулою, будуть певними дійсними числами.

Область визначення функції позначають D(y) або D(f).

<u>Наприклад</u>: функція $y = \sqrt{x^2 - 3}$ приймає дійсні значення лише при умові $x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 3 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{3}$, тобто $x \leq -\sqrt{3}$ та $x \geq \sqrt{3}$.

Таким чином, $D(y) = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \infty\right)$

<u>Означення 9</u>.Областю значень функції $y = f(x)$ називають сукупність усіх значень y, коли x змінюється в області визначення цієї функції.

Область значення функції позначають R(y) або R(f).

Наприклад, для функцій y = sinx та y = cosx областю значень буде відрізок [-1, 1].

5.14. Елементарні функції

Важливу роль в математичному аналізі відіграють **основні елементарні функції:**

Степенева функція: $y = x^a$, де a – дійсне число;

Показникова функція: $y = a^x$, де $a > 0, a \neq 1$;

Експоненціальна функція: $y = e^x$, де $e \approx$ **2,7182;**

Логарифмічна функція: $y = \log_a x$, де $a > 0, a \neq 1$;

Натуральна логарифмічна функція: $y = \ln x$;

Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$,
$y = tgx$, $y = ctgx$,
$y = \sec x$, $y = \operatorname{cos}ecx$.

Обернені тригонометричні функції:
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
$y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Гіперболічні функції:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$thx = \frac{shx}{chx}, \qquad cthx = \frac{chx}{shx}.$$

<u>Означення 10</u>.Якщо змінна величина y залежить від змінної u, яка в свою чергу є функція x, то y називають функцією від функції або складною функцією або суперпозицією функцій.

Математично це можна записати так: якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то $y = f[\varphi(x)]$ або $y = fo\varphi$, де **x** - аргумент (незалежна змінна), **u**- проміжний аргумент, **y**- складна функція, **o** - знак суперпозиції функцій.

<u>Наприклад</u>: а) $y = \cos^5 x$ або $y = u^5$, де $u = \cos x$; б) $y = arctgx^2$ або $y = arctgu$, де $u = x^2$

в) $y = 2^{\sin^2 3x}$ або   y = 2^u , u = v^2, v = sinω, ω = 3x

Зауваження: *Вміння розщепляти складну функцію на ланцюг основних елементарних функцій потрібне в диференціальному та інтегральному численнях.*

Означення 11Елементарною функцією називають таку функцію, яку можна задати формулою вигляду $y = f(x)$, де вираз правої частини складено з основних елементарних функцій та постійних з використанням скінченої кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня та побудови функції від функції.

Наприклад функція $y = \dfrac{\ell n^2 x + 4\sqrt{3x} - arc\sin 2x + 10^{x^2}}{3 + x^5 - tg^2 x}$

буде елементарною функцією.

5.1.5.Нескінчено малі та нескінченої великі величини

Означення12.Змінна величина x, називається нескінченно малою, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної x стає і залишається менше будь-якого, скільки завгодно малого, наперед заданого додатного числа ε, тобто

$$|x| < \varepsilon.$$

Нескінченно малі величини позначають літерами

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

Наприклад, величина $\dfrac{1}{5^n}$ при $n \to \infty$ є нескінченно малою.

Властивості нескінченно малих величин:

1. *Алгебраїчна сума скінченої кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала;*

2. *Добуток сталої величини або обмеженої величини на нескінченно малу величину є величина нескінченно мала*;

3. *Добуток скінченої кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.*

Означення13. Змінна величина x, називається нескінченно великою, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної x стає і залишається більше будь-якого, скільки завгодно великого, наперед заданого додатного числа N, тобто $|x| > N.$

Наприклад, величина 5^n при n $\to \infty$ є величина нескінченно велика.

Зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими величинами:

якщо x нескінченно велика величина, то $y = \dfrac{1}{x}$ *буде нескінченно малою;*

якщо y - нескінченно мала і $y \neq 0$, *то* $x = \dfrac{1}{y}$ *буде нескінченно великою величиною.*

Нескінченно великі величини мають такі самі властивості, як і нескінченно малі.

5.1.6. Означення та властивості границі

Означення14. Постійна величина a **називається границею змінною x, якщо абсолютна величина різниці *x-a* є величиною нескінченно малою, тобто | x -** a **| < ε**

Якщо число $\boldsymbol{a}$ є границею змінної x, то кажуть, що x прямує до границі $\boldsymbol{a}$ і позначають так: $x \to \boldsymbol{a}$ або

$$\ell im x = a.$$

З цього означення випливає, що $x = \boldsymbol{a} + \alpha$, тобто x відрізняється від границі а на нескінченно малу α.

<u>Границя нескінченно малої величини дорівнює нулю.</u>

Границею нескінченно великої величини вважають нескінченість, тобто $|x| \to \infty$ або $\ell im x = \pm\infty$.

❒ **<u>Означення15</u>.Число** a **називається границею послідовності** $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$ **якщо для будь-якого наперед заданого, скільки завгодно малого** $\varepsilon > 0$ **існує такий номер N, що для усіх n > N виконується нерівність**

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Позначають границю послідовності так:

$$\ell im_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{або} \quad x_n \to a \qquad \text{при } n \to \infty.$$

❒ **<u>Означення16</u>. Число <u>A</u> називається границею функції** $y = f(x)$ **при** $x \to x_0$**, якщо для будь-якого наперед заданого, скільки завгодно малого ε > 0 знайдеться таке число δ > 0, що для усіх** x**, відмінних від** x_0 **і які задовольняють нерівність** $|x - x_0| < \delta$, **виконується нерівність** $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають границю функції так:

$$\ell im_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{або} \quad f(x) \to A \quad \text{при } x \to x_0.$$

<u>Поняття однобічних границь</u>

Якщо $y = f(x)$ *має границею число* A_1*, лише при умові, що* $x \to x_0$ *<u>зліва</u>, то це позначають так:*

$$A_1 = \ell im_{x\to x_0 - 0} f(x)$$

Якщо число A_2 *є границею функції* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$ *<u>справа</u>, то використовують запис:*

$$A_2 = \ell im_{x\to x_0 + 0} f(x)$$

<u>Ознаки існування границі змінної величини</u>

<u>Ознака I</u> *Монотонна обмежена змінна величина має границю*

<u>Ознака 2</u>*Якщо в одному процесі змінна величина* ***y*** *заключена між двома іншими змінними* ***x*** *та z, які мають однакову границю* ***a****, то і змінна* ***y*** *має границю, що дорівнює* ***a****.*

<u>Властивості границі змінної величини:</u>

1. *Якщо* $x = C$ *- стала величина, то* $\ell im C = C$.

2. *Границя алгебраїчної суми скінченої кількості змінних величин, що мають границі, дорівнює тій самій алгебраїчній сумі границь доданків, тобто:*

$$\boxed{\ell im(x \pm y \pm \ldots \pm z) = \ell im x \pm \ell im y \pm \ldots \pm \ell im z}$$

3. *Границя добутку скінченої кількості змінних величин, що мають границю, дорівнює добутку границь множників, тобто:*

$$\boxed{\ell im(x \cdot y \cdot \ldots \cdot z) = \ell im x \cdot \ell im y \cdot \ldots \cdot \ell im z}$$

↳**<u>Наслідки:</u>** **1)** $\boxed{\ell im Cx = C \ell im x}$;

2) $\boxed{\ell im(x^n) = (\ell im x)^n}$.

4. *Границя частки від ділення двох змінних величин дорівнює частці від ділення їх границь, якщо границя дільника не дорівнює нулю, тобто:*

$$\boxed{\ell im\frac{x}{y}=\frac{\ell im x}{\ell im y},\quad \ell im y\neq 0}.$$

5.1.7. Чудові границі

Перша чудова границя: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

Друга чудова границя:

$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$ або $\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e}$, де $\ell\approx 2{,}72$

5.1.8. Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих

Ділення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин не визначено тому, що їх відношення може бути нескінченно малою або нескінченно великою або постійною величиною.

Використовуючи ділення, можна порівнювати нескінченно малі та нескінченно великі величини.

Означення17. **Нескінченно малі величин α та β називаються нескінченно малими однакового порядку малості, якщо їх відношення має скінчену границю що не границю що не дорівнює нулю, тобто якщо** $\ell im\frac{\alpha}{\beta}=K\neq 0$.

Величини α та β називають ***еквівалентними*** *нескінченно малими, якщо* $\boxed{\ell im\frac{\alpha}{\beta}=1}$.

Означення18. **Якщо відношення двох нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною, тобто** $\ell im\frac{\alpha}{\beta}=0$, **то α називають нескінченно малою величиною вищого порядку малості в порівнянні з β.**

Наприклад, якщо $\alpha=\beta^2$, то $\ell im\frac{\alpha}{\beta}=\ell im\frac{\beta^2}{\beta}=\ell im\beta=0$.

Нескінченно великі величини порівнюють таким же чином.

Знаходження границі відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин називають розкриттям невизначеності їх відношення.

Основні еквівалентності:

1. $\sin x \sim x$ *при* $x\to 0$;
2. $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ *при* $x\to 0$;
3. $\ell n(1+x) \sim x$ *при* $x\to 0$;
4. $e^x-1 \sim x$ *при* $x\to 0$;
5. $\sqrt[\kappa]{1+x}-1 \sim \frac{x}{\kappa}$ *при* $x\to 0$;
6. $tgx \sim x$ *при* $x\to 0$;

5.1.9. Способи знаходження границь

1. ***Границя відношення многочленів***

Нехай треба знайти

$$\lim_{x\to c}\frac{a_o X^{\kappa}+a_1X^{\kappa-1}+\ldots+a_{\kappa}}{в_o X^{\ell}+в_1X^{\ell-1}+\ldots+в_{\ell}}$$

Можливі випадки: **а)** с - скінчене число; **б)** c = ± ∞

У випадку а) треба під знаком границі замість х підставити с в чисельник і в знаменник. Якщо під знаком границі одержимо стале число А або дріб вигляду $\frac{A}{O}$ *чи* $\frac{O}{A}$, *то границею буде А, ∞ чи 0, відповідно.*

Якщо під знаком границі одержимо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$, *то треба чисельник і знаменник розкласти на множники і скоротити загальний множник (х - с) під знаком границі, а потім обчислити границю так, як вказано вище.*

У випадку б) треба під знаком границі поділити чисельник і знаменник на X^m, *де m - найбільше з чисел k та* ℓ, *і після цього обчислити границю.*

Відмітимо, *що при к =* ℓ *границя буде:* $\frac{a_0}{в_0}$;

при $k>\ell$ *границя буде +∞ або (-∞) в залежності від знака* $\frac{a_0}{в_0}$; *при* $k<\ell$ *границя буде дорівнювати 0.*

Приклад 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+3x+8}{x+4}$; **б)** $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x+7}{x^3-27}$; **в)** $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-2x-15}{x^2-5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{3x^2+5x+1}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2+2x+8}{4x^2+3x+7}$;

Розв'язання:

а) У вираз під знаком границі підставимо замість х його граничне значення 2. Одержимо:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x+8}{x+4}=\frac{2^2+3\cdot2+8}{2+4}=\frac{4+6+8}{6}=\frac{18}{6}=3.$$

б) Коли х → 3 чисельник дробу $\frac{2x+7}{x^3-27}$ прямує до сталої величини 13, а знаменник до 0, тобто є нескінченно малою величиною α.

Дріб $\frac{13}{\alpha}$ є нескінченно великою величиною, границя якої дорівнює ∞. Отже, $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x+7}{x^3-27}=\left(\frac{13}{0}\right)=\infty$.

в) Якщо у вираз під знаком границі підставити замість х його граничне значення, то одержимо:

$$\frac{5^2-2\cdot5-15}{5^2-5\cdot2}=\frac{25-10-15}{25-25}=\frac{0}{0}\quad\text{- невизначеність.}$$

Таку особливість записують у вигляді:

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-2x-15}{x^2-5x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Щоб розкрити цю особливість розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники:

із рівності $x^2-2x-15=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm8}{2}$;

$x_1=5,\ x_2=-3б$

Таким чином, $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$

$x^2-5x=x(x-5)$.

Тепер маємо:

$$\ell im_{x\to 5}\frac{x^2-2x-15}{x^2-5x}=\ell im_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+3)}{x(x-5)}=\ell im_{x\to 5}\frac{x+3}{x}=\frac{8}{5}$$

г) В цьому прикладі x $\to\infty$ і маємо особливість вигляду $\frac{\infty}{\infty}$, яку записують так: $\ell im_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{3x^2+5x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Показник найбільшого степеня x у чисельнику і в знаменнику однаковий і дорівнює 2, тому поділимо чисельник і знаменник дробу під знаком границі на x^2. Одержимо, використовуючи властивості границі:

$$\ell im_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{3x^2+5x+1}=\ell im_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\ell im_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\ell im_{x\to\infty}\left(3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{\ell im_{x\to\infty}2+\ell im_{x\to\infty}\frac{1}{x}+3\,\ell im_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\ell im_{x\to\infty}3+5\,\ell im_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\ell im_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

д) В цьому прикладі особливість має вигляд $\frac{\infty}{\infty}$. Але тепер найбільші показники степеня чисельника (3) і знаменника (2) різні. Найбільшим з них буде 3. Тому поділимо чисельник і знаменник дробу під знаком границі на x^3.

Одержимо:

$$\ell im_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2+2x+8}{4x^2+3x+7}=\ell im_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{8}{x^3}}{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\infty.$$

При x $\to\infty$ чисельник дробу $\to 5$, а знаменник $\to 0$, тому дріб під знаком границі є нескінченно великою величиною, границя якої дорівнює ∞.

2. *Знаходження границь виразів, що містять ірраціональності і мають особливість вигляду* $\frac{0}{0}$.

При обчислені границь виразів, що містять ірраціональності і мають особливості вигляду $\frac{0}{0}$ треба під знаком границі застосувати алгебраїчні перетворення, що дозволяють ліквідувати особливість.

Перетворення, які доцільно застосовувати, вказані при розв'язуванні наступних прикладів.

Приклад 2. Знайти границі

а) $\ell im_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; **б)** $\ell im_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

в) $\ell im_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+x-1}{x}$; **г)** $\ell im_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{29+x}-3}{x^2+3x+2}$.

Розв'язання. а) Щоб позбутися особливості вигляду $\frac{0}{0}$, помножимо чисельник і знаменник дробу під знаком границі на $\sqrt{x+3}+2$. Тоді одержимо:

$$\ell im_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ell im_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\ell im_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}.$$

б) Щоб позбутися особливості вигляду $\frac{0}{0}$, помножимо чисельник і знаменник дробу на $(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})$ і розкладемо чисельник на множники.

Із рівності $x^2+x-12=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{-1\pm7}{2}$;

$x_1=-4, \quad x_2=3$

Таким чином, $x^2+x-12=(x+4)(x-3)$. Отже,

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to3}\frac{(x+4)(x-3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}{x-2-(4-x)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+4)(x-3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}{2(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}{2}=\frac{7\cdot2}{2}=7$$

в) Щоб позбутися особливості вигляду $\dfrac{0}{0}$, помножимо чисельник і знаменник дробу на $(\sqrt{1+x}-(x-1))$. Тоді одержимо:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+x-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1+x-(x-1)^2}{x\left(\sqrt{1+x}-x+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1+x-x^2+2x-1}{x\left(\sqrt{1+x}-x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(3-x)}{x\left(\sqrt{1+x}-x+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{3-x}{\sqrt{1+x}-x+1}=\frac{3}{2}$$

г) Щоб позбутися особливості вигляду $\dfrac{0}{0}$, квадратний тричлен знаменника розкладемо на множники і помножимо чисельник і знаменник дробу на неповний квадрат суми $\sqrt[3]{29+x}$ та 3, щоб одержати у чисельнику різницю їх кубів.

Із рівності $x^2+3x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{-3\pm1}{2}$;

$x_1=-2, \quad x_2=-1$, тому $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$.

Отже, $$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{29+x}-3}{x^2+3x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{29+x-27}{(x+2)(x+1)\left(\sqrt[3]{(29+x)^2}+3\sqrt[3]{29+x}+9\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{(29+x)^2}+3\sqrt[3]{29+x}+9\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{27^2}+3\sqrt[3]{27}+9}=\frac{1}{27}$$

<u>*3. Знаходження границь виразів, що містять тригонометричні функції.*</u>

При знаходженні границь виразів, що містять тригонометричні функції, часто використовують першу чудову границю $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, *тригонометричні формули, алгебраїчні перетворення, властивості границь та поняття еквівалентних величин.*

При розв'язуванні наступних прикладів ознайомимось з вказаною технікою обчислення границь.

Приклад 3. Знайти границі

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3 5x}{x^3}$; **б)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,tg\,3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

Розв'язання: **а)** Використовуючи властивість границі добутку, одержимо: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3 5x}{x^3}=\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}\right)^3$.

Щоб застосувати першу чудову границю, треба знаменник дробу під знаком границі x зробити рівним аргументу 5x функції синус. Тому під знаком границі помножимо чисельник і знаменник на 5 і винесемо сталий множник 5 із чисельника за знак границі. Тоді одержимо:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^3 5x}{x^3}=\left(5\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)^3=(5\cdot1)^3=125$$

При $x \to 0$ $\sin 5x \sim 5x$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 5x}{x^3}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}\right)^3=125$$

б)Використовуючи формулу $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}.$$

Сталий множник 2 винесемо за знак границі і використаємо властивості границі добутку. Тоді:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot 1^2=2.$$

в) Використаємо формули:

$$tg3x=\frac{\sin 3x}{\cos 3x},$$

$$\cos x-\cos^3 x=\cos x(1-\cos^2 x)=\cos x\cdot\sin^2 x$$

Тоді:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xtg3x}{\cos x-\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\cos 3x\cdot\cos x\cdot\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x\cdot\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 3x}{\sin^2 x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\frac{\sin^2 x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{\frac{3x\cdot\sin^2 x}{x^2}}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}:\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=3:1=3$$

Використання поняття еквівалентності нескінченно малих величин $tg3x \sim 3x$, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$ значно спрощує розв'язування цього прикладу.

Дійсно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{xtg3x}{\cos x-\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3x}{\cos x\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\cos x\cdot x^2}=3$$

4. Знаходження границь виразів, що містять змінну величину в основі і в показнику степеня або під знаком логарифма.

При знаходженні границь вказаних виразів використовують другу чудову границю $\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$, *дії із степенями або логарифмами та властивості границь.*

Типові прийоми, які використовують найчастіше, розглянемо при розв'язуванні прикладів.

Приклад 4. Знайти границі:

а) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{5x-1}$, **б)** $\lim_{x\to\infty} x\left[\ln(x^5+3x^4)-5\ln x\right]$

Розв'язання. а) Основу заданого виразу представимо у вигляді суми одиниці і нескінченно малої: $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-2+1}{x-2}=1+\frac{1}{x-2}$ (дріб не змінюється якщо до чисельника додати та відняти 1).

Тепер маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{5x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{5x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{(x-2)\cdot\frac{5x-1}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-1}{x-2}}=e^5.$$

Показник степеня не змінюється якщо його помножити і поділити на множник (x-2), який нам треба для використання другої чудової границі.

б)Використовуючи властивості логарифмів, перетворимо вираз, що стоїть під знаком границі

$$x\left[\ln\left(x^5+3x^4\right)-5\ln x\right]=x\ln\frac{x^5+3x^4}{x^5}=x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$$

Таким чином

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\ell n\left(x^5+3x^4\right)-5\ell nx\right]=\lim_{x\to\infty}\ell n\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$$

Тепер перейдемо до границі під знаком логарифма і застосуємо другу чудову границю:

$$\lim_{x\to\infty}\ell n\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\ell n\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\right]=\ell n\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}\right]=\ell n\left[\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3\right]=$$

$$=\ell n\left(\ell^3\right)=3\ell n\ell=3$$

Знаходження границі виразу $[u(x)]^{v(x)}$, який має невизначеність 1^{∞}, доцільно здійснювати за формулою

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}[u(x)]^{v(x)}=e^k,\\ &\text{де}\quad \kappa=\lim_{x\to\infty}v(x)\cdot[u(x)-1].\end{aligned}}$$

Приклад 5 Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x+5}{3x-1}\right]^{2x+3}$.

Розв'язання В данному випадку вираз під знаком границі при $x\to\infty$ має невизначеність вигляду 1^{∞}.

Оскільки $u(x)=\dfrac{3x+5}{3x-1}$, $v(x)=2x+3$, то

$$k=\lim_{x\to\infty}\left\{(2x+3)\left[\frac{3x+5}{3x-1}-1\right]\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)(3x+5-3x+1)}{3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x+18}{3x-1}=4.\qquad \text{Тому}\ \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x+5}{3x-1}\right]^{2x+3}=e^4.$$

При обчисленні границь корисно також застосовувати таку властивість

$$\lim_{x\to\infty}[u(x)]^{v(x)}=(a)^{\infty}=\begin{cases}0 & \text{при}\ \ 0<a<1;\\ \infty & \text{при}\ \ a>1.\end{cases}$$

5.2 ВПРАВИ

Завдання 1. Знайти значення функції в заданих точках

а) $f(x)=3\cos 5x+\sqrt{x+16};\quad x=0;$

б) $f(x)=5\sin 3x+\dfrac{\pi}{2};\quad x=0;$

в) $f(x)=8\ell n\sqrt{\dfrac{10-x}{x}}+2^{x+1};\quad x=2;$

г) $x^3-5xy+y^2=0;\quad x=4;$

д) $\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{t+3}{t^2+1}, & t\le 0;\\ 3t+1, & t>0\end{cases}\qquad t_1=-2,\quad t_2=3$

е) $f(t)=4^t-3\cdot 2^t+5^{3t};\quad t=2;$

Завдання 2. Задану функцію записати у вигляді ланцюга рівностей, кожна ланка якого містить основну елементарну функцію.

а) $y=arctg\left(2^x\right);$ **б)** $y=\cos^3\left(x^2\right);$ **в)** $y=\ell n\left(arc\sin x^5\right);$

г) $y=2^{\sin x^3}$

Завдання 3. Знайти область визначення функції

а) $y=\dfrac{4+x^2}{6-x}$; **б)** $y=\sin\sqrt{x}$; **в)** $y=5\cos 3x$;

г) $y=\sqrt{x^2-16}$; **д)** $y=\dfrac{3}{\sqrt{x+4}}$; **е)** $y=\ell n\sqrt{4-x}$

Завдання 4. Знайти границі

а) **1.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$; **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^2+5x-6}$;

3. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{\sqrt{x-3}}$; **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\cdot\sin 3x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{3}{2x}}$; **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)[\ell n(x+5)-\ell nx]$

б) **1.** $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-7x+3)$; **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$;

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{8}{1-x}}$; **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)[\ell n(x+2)-\ell nx]$

в) **1.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+N^3+1}-N}{x^2+1}$; **2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(N+4)x^3+Nx^2+x}{(N+3)x^2+(N+2)x+N}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{N+x}-\sqrt{N-x}}{Nx}$; **4.** $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\sqrt{N+2t}\right)}{t^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(N+2)x+N+5}{(N+2)x-N-1}\right)$; **6** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{4}[\ell n(Nx+4)-\ell nNx]$;

7*. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+5x}{2+3x}\right)^{1-2x}$; **8** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+3}\right)^{3x}$.

Завдання 5. Визначити парність чи непарність функцій:
а) $y = x^4 - 2x^2$; **б)** $y = x\cos 2x$; **в)** $y = x\sin x$; **г)** $y = x^3\cos x$;

5.3. Неперервність та розриви функції

Застосовують наступні два означення неперервності функції в точці.

Означення 19 **Якщо функція y = f(x) визначена в точці x_0 та в її околі і нескінченно малому приросту аргументу Δx в точці $x = x_0$ відповідає нескінченно малий приріст Δy функції, то функцію називають неперервною при $x = x_0$.**

Означення 20. **Функція y = f(x) називається неперервною при $x = x_0$, якщо:**

1. f(x) визначена при $x = x_0$ і в деякому околі x_0;

2. існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$; **незалежно від способу прямування x до** x_0, **тобто** $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0 t_0} f(x)=f(x_0)$.

Наслідок: *якщо f(x) неперервна в точці x_0, то можна переходити до границі під знаком функції, тобто*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left[\lim_{x\to x_0} x\right]=f(x_0);$$

Означення 21 **Якщо функція f(x) неперервна в кожній точці інтервалу (а, в), то її називають неперервною в інтервалі (а, в).**

Якщо функція визначена при x = a і $\lim\limits_{x\to a+o} f(x)=f(a)$, то кажуть, що *f(x)* ***неперервна в точці а справа***.

Якщо f(x) визначена при x = в і $\lim\limits_{x\to в-o} f(x)=f(в)$, то кажуть, що *f(x)* ***неперервна в точці в зліва***.

Якщо при деякому $x = x_1$ будь-яка із трьох умов означення 20 не виконується, то кажуть, що функція в цій точці має розрив, а точку x_1 називають ***точкою розриву функції.***

Функція f(x) називається неперервною на відрізку [а, в], якщо вона неперервна в інтервалі (а, в) і на кінцях цього інтервалу, відповідно зліва та справа.

Властивості неперервних функцій

1. *Алгебраїчна сума та добуток скінченої кількості функцій, неперервних в точці x_0, є також неперервна функція в точці x_0.*

2. Частка функцій, неперервних при $x = x_0$ є також неперервною функцією в цій точці, якщо дільник при $x = x_0$ не дорівнює нулю.

3. Неперервна функція від неперервної функції є також неперервна функція.

4. Усі основні елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області визначення.

5. Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.

6.Теорема Вейєрштрасса. *Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [а, в], то вона обмежена на цьому відрізку, тобто існують такі числа М та m, що $m \le f(x) \le M$ для усіх $x \in [a, в]$.*

Розриви функції бувають ліквідовні та неліквідовні

При класифікації точок розриву функції керуються наступним:

1. *якщо функція f(x) не визначена при $x = x_1$ або визначена, але мають місце співвідношення $\lim\limits_{x\to x_1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_1+0} f(x) \ne f(x_1)$, то розрив в точці x_1 називають ліквідовним. В цьому випадку функцію можна визначити або змінити її значення в точці x_1 так, щоб виконувались рівності*

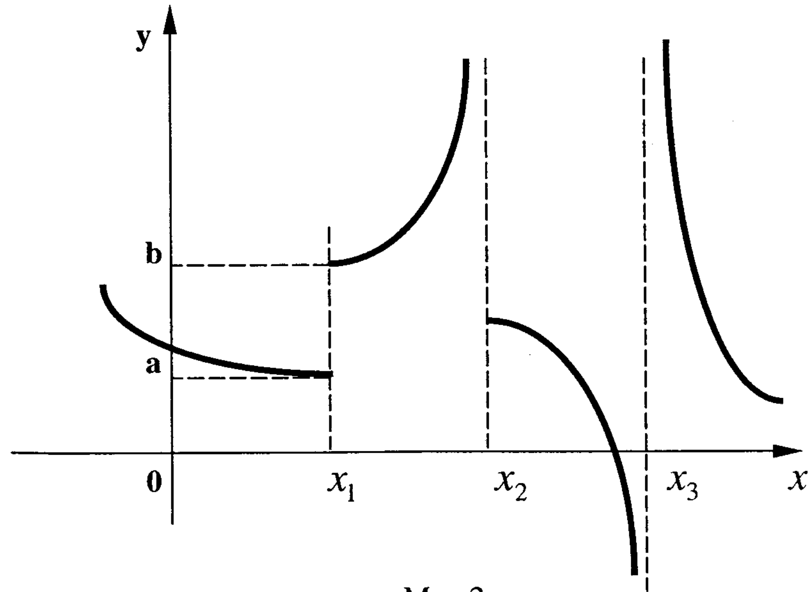
$$\lim_{x\to x_1-0} f(x) = \lim_{x\to x_1+0} f(x) = f(x_1).$$

2. *неліквідовані розриви поділяються на розриви першого та другого роду:*

а) *якщо однобічні границі функції $\lim\limits_{x\to x_1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_1+0} f(x)$ існують та скінченні, але не рівні між собою, то x_1 називають точкою розриву першого роду, а різницю однобічних границь $\lim\limits_{x\to x_1+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_1-0} f(x)$ називають стрибком функції f(x) в точці x_1;*

б) *якщо хоч би одна з однобічних границь не існує, або дорівнює $\pm\infty$, то розрив в цій точці називають розривом другого роду.*

На малюнку 2 функція має розрив першого роду в точці x_1, її стрибок дорівнює b - a, в точках x_2 та x_3 функція має розриви другого роду.



Мал.2

✧ **Приклад 5.** Знайти області неперервності та класифікувати розриви функції.

а) $y = 3^{\frac{1}{4-x}}$; б) $y = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$

Розв'язання. а) Ця функція визначена для усіх x ≠ 4, тому область її неперевності (- ∞, 4) ∪ (4, ∞). В точці x = 4 функція має розрив. Для класифікації цього розриву знайдемо її однобічні границі при x → 4:

$$\lim_{x \to 4-0} 3^{\frac{1}{4-x}} = \infty;$$

$$\lim_{x \to x_1+0} f(x) = \lim_{x \to 4+0} 3^{\frac{1}{4-x}} = \lim_{x \to 4+0} 3^{\frac{-1}{|4-x|}} = \lim_{x \to 4+0} \frac{1}{3^{\frac{1}{|4-x|}}} = 0.$$

Отже, в точці x = 4 ця функція має розрив другого роду.

б) На кожному з інтервалів (- ∞, 1) та (1,∞) ця функція визначена і є основною елементарною функцією. Тому в цих інтервалах функція неперервна. Знайдемо однобічні границі функції, коли x прямую до точки стику інтервалів x = 1:

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} x^2 = 1; \quad \lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} \sqrt{x} = 1.$$

Одержали, що однобічні границя функції в точці стику інтервалів рівні, але функція в цій точці не визначена.

Отже, це точка ліквідовного розриву. Для ліквідації розриву треба задати f(1)=1.

Якщо функцію б) задати співвідношенням:

$$y = \begin{cases} x^2, & x \le 1; \\ \sqrt{x}, & x > 1; \end{cases} \quad \text{або} \quad y = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \ge 1 \end{cases},$$

то функція буде неперервною для усіх x є (- ∞, ∞).

5.4 ВПРАВИ

Знайти області неперервності і класифікувати розриви функцій:

Завдання 1. а) $y = 8^{\frac{1}{x-2}}$; б) $y = \begin{cases} x^2+1, & x \le 1; \\ 2x, & 1 < x \le 3 \\ x+2 & x > 3 \end{cases}$

в) $y = 3x^2 + 2x + 1$.

Завдання 2. а) $y = 10^{\frac{1}{x-3}}$; б) $y = \begin{cases} x-3, & x < 0 \\ x+1, & 0 \le x \le 4; \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4 \end{cases}$

в) $y = \ln(3x - 9)$.

Завдання3. а) $y = 9^{\frac{1}{x-7}}$; б) $y = \begin{cases} 2x^3, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1; \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

в) $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Завдання 4. а) $y = 25^{\frac{1}{8-x}}$; б) $y = \begin{cases} x-1, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x < 2; \\ 2x, & x \ge 2 \end{cases}$

в) $y = 2^{3\sin x}$.

Завдання 5. а) $y = 7^{\frac{2}{x-5}}$; б) $y = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ 1-x, & 0 < x \le 2; \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$

в) $y = e^{3\cos x}$.

Завдання 6. а) $y = 10^{\frac{2}{3-x}}$; б) $y = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ tgx, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 2, & x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

в) $y = \dfrac{1}{3x^2 + 2x + 1}$.

Завдання 7. а) $y = arctg\dfrac{1}{x^2}$; б) $y = x - \dfrac{x+2}{|x+2|}$;

в) $y = \dfrac{1}{(x-2)(x-5)}$.

Завдання 8. а) $y = \dfrac{tgx \cdot arctg\,\dfrac{1}{x-3}}{x(x-5)}$;

б) $y = (2^{\frac{1}{x-3}} - 1) / (2^{\frac{1}{x-3}} + 1)$;

в) $y = \dfrac{3}{(x-1)(x-7)}$.

Розділ 6 Диференціальне числення функцій однієї змінної

6.1. Похідні та диференціали

6.1.1. Означення похідної та деякі її інтерпретації.

Означення1.Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом х називають границю відношення приросту функції Δу до приросту аргументу Δх, коли Δх довільним чином прямує до нуля.

Якщо ця границя існує, то її позначають $f'(x)$ або y', або y'_x, або $\dfrac{dy}{dx}$, або $\dfrac{df(x)}{dx}$. Отже:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad (1)$$

Відмітимо, що похідну $f'(x)$ визначають за допомогою граничного переходу при постійному х, тому при х = а, похідна приймає конкретне значення, яке позначають

$$f'(a) \text{ або } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}.$$

Означення 2.Операцію знаходження похідної функції називають диференціюванням цієї функції. Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці х, називають диференційовною в точці х. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то її називають диференційовною в цьому проміжку.

Основні інтерпретації похідної :

1. ***Механічний зміст похідної***. Якщо тіло рухається за законом $s = f(t)$, де s - шлях, а t - час, то похідна $f'(t)$ є величиною *миттєвої швидкості* руху;

2. ***Геометричний зміст похідної***. Похідна $f'(x)$ дорівнює *кутовому коефіцієнту дотичної* до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x;

3. ***Економічний зміст похідної***. Похідні $V'(x)$, $D'(x)$ $P'(x)$ дорівнюють *маргінальній (граничної) вартості, доходу та прибутку*, відповідно, при кількості продукції x . Використовують також поняття еластичності η попиту

$$\eta = \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)} \quad \text{або} \quad \eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} \qquad \textbf{(2)}$$

де p - вартість одиниці виробу, $x = f(p)$ - кількість виробів, що виготовлена та продана за деякий певний термін часу.

6.1.2. Правила диференціювання.

1. *Похідна постійної величини C дорівнює нулю, тобто* $C' = 0$.

2. *Постійний множник C можна виносити за знак похідної:*

$$\boxed{(cf(x))' = c \cdot f'(x)}.$$

3. *Якщо кожна із функцій* $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ *(n - скінчене число) має похідну в деякій точці x, то їх алгебраїчна сума також має похідну в цій точці, причому похідна алгебраїчної суми цих функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі їх похідних:*

$$\boxed{[f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm ... f_n'(x)} \qquad \textbf{(3)}$$

4. *Якщо кожна з функцій* $u(x)$ *та* $v(x)$ *мають похідні в точці x, то їх добуток також має похідну в точці x, яку знаходять за формулою:*

$$\boxed{[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)} \qquad \textbf{(4)}$$

5. *Якщо* $u(x)$ *та* $v(x)$ *мають похідні в точці x і* $v(x) \neq 0$, *то частка цих функцій також має похідну в точці x, яку знаходять за формулою:*

$$\boxed{\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}} \qquad \textbf{(5)}$$

6. *Якщо* $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ *і функції* f *та* φ *диференційовні функції своїх аргументів, то існує похідна за аргументом x складної функції y, причому вона дорівнює добутку похідної функції y за проміжним аргументом* u *та похідної функції* φ *за аргументом x, тобто:*

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x} \qquad (6)$$

7. *Якщо функціональна залежність y від x задана неявно, тобто рівністю* $F(x, y) = 0$, *то для знаходження похідної* y'_x *потрібно задану рівність продиференціювати за змінною x, враховуючи залежність y від x, і із одержаної рівності визначити* y'.

Наприклад, якщо функціональна залежність задана рівністю $y^5 - y - x^3 = 0$, то диференціюванням за змінною x одержимо:

$$5y^4 \cdot y' - y' - 3x^2 = 0 \Rightarrow y'(5y^4 - 1) = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{5y^4 - 1}$$

8. *Правило диференціювання функції, що задана параметрично*

Якщо функціональна залежність у від х задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \epsilon [T_1, T_2]$$

то похідна функції у за змінною х для кожного $t \epsilon [T_1, T_2]$ знаходиться за формулою:

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}} \qquad \textbf{(7)}$$

6.1.3. Таблиця похідних

Для зручності застосування правила диференціювання складної функції використовують таблицю похідних основних елементарних функцій:

№	Функції	Похідні
1.	***Степенева*** $y = u^n$	$y' = nu^{n-1} \cdot u'$
2.	***Показникові***	
	а) $y = a^u$	а) $y' = a^u \cdot \ell na \cdot u'$
	б) $y = \ell^u$	б) $y' = \ell^u \cdot u'$
3.	***Логарифмічні***	
	а) $y = \ell og_a u$	а) $y' = \frac{1}{u \cdot \ell na} \cdot u'$
	б) $y = \ell nu$	б) $y' = \frac{1}{u} \cdot u'$

№	Фннкція	Похідна
4.	***Тригонометричні***	
	а) $y = \sin u$	а) $y' = \cos u \cdot u'$
	б) $y = \cos u$	б) $y' = -\sin u \cdot u'$
	в) $y = tgu$	в) $y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
	г) $y = ctgu$	г) $y' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$
5.	***Обернені тригонометричні***	
	а) $y = arc\sin u$	а) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
	б) $y = arc\cos u$	б) $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
	в) $y = arctgu$	в) $y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
	г) $y = arcctgu$	г) $y' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$

Використовуючи правила диференціювання та таблицю похідних основних елементарних функцій знаходять похідні заданих функцій.

✦**Приклад 1**. Знайти похідну функції:

а) $y = 3 \cdot x^{5/3} - 2arctgx + x \cdot \ell^x - 2\ell og_5 x$; **б)** $y = \frac{2\sin x}{x + 3^x}$;

в) $y = x \cdot arc\sin x$

Розв'язування. У випадку функції **а)** використуємо правила диференціювання алгебраїчної суми функцій:

$$y' = (3x^{5/3})' - (2arctgx)' + (x \cdot \ell^x)' - (2\ell og_5 x)'$$

Оскільки постійний множник можна виносити за знак похідної, то одержимо:

$$y' = 3(x^{5/3})' - 2(arctgx)' + (x\ell^x)' - 2(\ell og_5 x)'$$

Тепер до третього доданку застосуємо правило диференціювання добутку функцій, а похідні інших доданків знайдемо згідно таблиці похідних основних елементарних функцій при $u = x$ та $u' = 1$:

$$y' = 3\cdot\frac{5}{3}x^{5/3-1} - 2\cdot\frac{1}{1+x^2} + x'\ell^x + x(\ell^x)' - 2\cdot\frac{1}{x\ell n5} \Rightarrow$$

$$y' = 5x^{2/3} - \frac{2}{1+x^2} + \ell^x + x\ell^x - \frac{2}{x\cdot\ell n5}$$

Відмітимо, що при наявності навичок знаходження похідних можна не дотримуватись вказаної послідовності дій, а застосувати правила диференціювання та відповідні значення похідних основних елементарних функцій.

Отже, можна записати:

$$y' = 5x^{2/3} - \frac{2}{1+x^2} + \ell^x + x\ell^x - \frac{2}{x\cdot\ell n5}$$

б) За правилом диференціювання дробу одержимо:

$$y' = \frac{2(\sin x)'(x+3^x) - 2\sin x(x+3^x)'}{(x+3^x)^2}$$

Використовуючи табличні похідні, одержимо:

$$y' = \frac{2\cos x\cdot(x+3^x) - 2\sin x(1+3^x\cdot\ell n3)}{(x+3^x)^2};$$

в) За правилом диференціювання добутку одержимо:
$y' = x'\cdot arc\sin x + x\cdot(arc\sin x)'$

Використовуючи табличні похідні, одержимо:

$$y' = arc\sin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Приклад 2. Знайти похідні першого порядку функцій

а) $\begin{cases} x = t + \frac{1}{2}\sin 2t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$; б) $x\sin y - y\cdot\cos x = 0$

Розв'язання а) В цьому випадку функціональна залежність у від х задана параметрично. Використовуючи правило диференціювання функції, що задана параметрично, за формулою (7) одержимо:

$$y'_x = \frac{(\cos^3 t)'}{\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)'} = \frac{3\cos^2 t\cdot(\cos t)'}{\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2t\cdot(2t)'\right)} = \frac{-3\cos^2 t\cdot\sin t}{1+\cos 2t}$$

б) В цьому випадку функціональна залежність у від х задана неявно. Використовуючи правило диференціювання неявно заданої функції, одержимо:

$$x'\sin y + x(\sin y)' - (y'\cdot\cos x + y(\cos x)') = 0 \Rightarrow$$

$$\sin y + x\cos y\cdot y' - y'\cos x + y\sin x = 0 \Rightarrow$$

$$y'(x\cos y - \cos x) = -(y\sin x + \sin y) \Rightarrow y' = -\frac{(y\cdot\sin x + \sin y)}{x\cdot\cos y - \cos x}$$

6.1.4. Гіперболічні функції та їх похідні

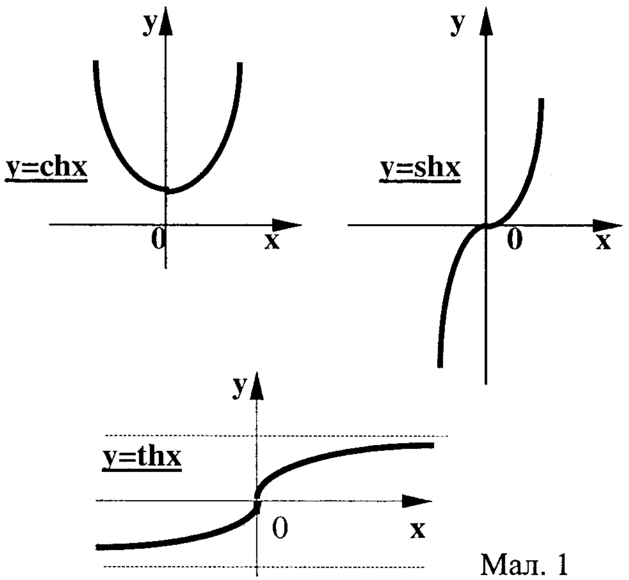
<u>Означення 3.</u> Функція $y = \frac{\ell^x - \ell^{-x}}{2}$ **називається гіперболічним синусом і позначається** $y = shx$.

Функція $y = \frac{\ell^x + \ell^{-x}}{2}$ **називається гіперболічним косинусом і позначається** $y = chx$.

Функція $y = \dfrac{\ell^x - \ell^{-x}}{\ell^x + \ell^{-x}}$ **називається гіперболічним тангенсом і позначається** $y = thx.$

Властивості цих функцій аналогічні властивостям тригонометричних функцій синуса, косинуса і тангенса.

Графіки гіперболічних функцій зображено на мал. 1.



Мал. 1

Похідні гіперболічні функцій знаходять за формулами:

$$(shx)' = chx; \quad (chx)' = shx; \quad (thx)' = \frac{1}{ch^2 x} \quad \textbf{(8)}$$

Якщо в формулах (8) замість x записати $u(x)$ і врахувати правило диференціювання складних функцій, то ці формули можна включити у вигляді пункту 6 до таблиці похідних.

6.1.5. Логарифмічне диференціювання

Для знаходження похідної першого порядку функції вигляду:

$$y = (u(x))^{v(x)}$$

використовують спосіб логарифмічного диференціювання.

Спочатку задану функцію логарифмують:

$$\ell ny = v(x)\ell nu(x)$$

Шляхом диференціювання цієї рівності одержимо:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x)\ell nu(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

Розв'язуючи цю рівність відносно похідної y', одержимо:

$$y' = y\left[v'(x) \cdot \ell nu(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

Підставимо в праву частину замість у степенево-показникову функцію. Тоді:

$$y' = (u(x))^{v(x)}\left[v'(x)\ell nu(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

Приклад 3. Знайти похідну першого порядку функції

$$y = x^{arc\sin x}$$

Розв'язання. Застосуємо метод логарифмічного диференціювання:

$$\ell ny = arc\sin x \cdot \ell nx$$

Диференціюванням цієї рівності одержимо:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\ell nx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{arc\sin x}{x}$$

Тому $$y' = x^{\arcsin x} \cdot \left[\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right]$$

▼ **Зауваження.** Похідну степенево-показникової функції $[u(x)]^{V(x)}$ можна знаходити за формулою:

$$\boxed{\left(u^{v}\right)' = u^{v}\cdot \ell nu\cdot v' + vu^{v-1}\cdot u',}$$

тобто як суму похідних показникової та степеневої функцій.

6.1.6. Диференціал функції

Означення4.Диференціалом функції $y = f(x)$ **називають головну лінійну частину приросту функції і позначають** dy **або** $df(x)$

Диференціал функції $y = f(x)$ знаходять за формулою:

$$dy = f'(x)dx \quad \text{або} \quad dy = f'(x)\Delta x \qquad \textbf{(9)}$$

Приріст функції в точці x_0

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_o)$$

відрізняється від диференціала $f'(x_0)\Delta x$ на нескінченно малу величину більшого порядку малості відносно приросту аргументу Δx.

Диференціали функцій часто використовуються в інтегральному численні, при розв'язуванні диференціальних рівнянь і в наближених обчисленнях значень функції за формулою:

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_0)\cdot\Delta x} \qquad \textbf{(10)}$$

Приклад 4. Знайти диференціал функції

а) $y = x^3 + \ell^{3x}$;**б)** $y = tgx$ в точці $x = \pi/3$ при $\Delta x = 0{,}01$

Розв'язання. а) За формулою (9) знаходимо:

$$dy = (x^3 + \ell^{3x})'dx = (3x^2 + 3\ell^{3x})dx.$$

б) Спочатку за формулою (9) знайдемо диференціал функції в довільній точці x при довільному прирості $\Delta x = dx$:

$$dy = (tgx)'\cdot\Delta x = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\Delta x$$

Підставимо замість x число $\frac{\pi}{3}$, замість Δx число 0,01 і використаємо значення $\cos 60^0 = 1/2$. Одержимо:

$$dy\Big|_{\substack{x=\pi/3\\ \Delta x=0{,}01}} = \frac{1}{\frac{1}{4}}\cdot 0{,}01 = 0{,}04.$$

Приклад 5. Знайти наближено значення $\sin 29^0$.

Розв'язування. Нехай $f(x) = \sin x$, тоді $f'(x) = \cos x$

За формулою (10) маємо при x_0=30, $\Delta x = -1^0 = -\frac{\pi}{180} \approx -0{,}017$

$$\sin 29^0 = \sin(30^0 - 1^0) \approx \sin 30^0 + \cos 30^0\cdot(-0{,}017)$$

Але $\sin 30^0 = 0{,}5$; $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}856$, тому

$$\sin 29^0 = 0{,}5 - 0{,}856\cdot 0{,}017 = 0{,}48555$$

Інваріантність диференціала першого порядку

$df(u) = f_u'du$ *незалежно від того, що* $u(x)$ *функція або* u *- незалежна зміна.*

6.1.7. Похідні та диференціали вищих порядків

Означення 5.Похідною n-го порядку функції $y = f(x)$ **називають похідну першого порядку від похідної (n-1)-го**

порядку і позначають

$$y', \ f''(x), \ y''', \ f'''(x), \ \ldots, \ y^{IV}, \ f^{IV}(x), \ \ldots, \ y^{(n)}, \ f_{(x)}^{(n)} \ \text{або} \ \frac{d^n y}{dx^n}$$

Згідно з цим означенням:

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]' .$$

<u>Механічний зміст похідної другого порядку</u>: *<u>якщо тіло рухається за законом $S = S(t)$, то похідна другого порядку</u>* $S''(t)$ *<u>є величиною прискорення в момент t.</u>*

<u>Похідна другого</u> порядку функції, що <u>задана</u> <u>параметрично,</u> знаходиться за формулою:

$$\boxed{y''_x = \frac{x'_t \cdot y''_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}} \qquad \textbf{(11)}$$

При знаходженні похідних порядку n > 2 корисні формули:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right); \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right); \qquad \textbf{(12)}$$

$$(y \pm u \pm v)^{(n)} = y^{(n)} \pm u^{(n)} \pm v^{(n)} \quad \textbf{(13)}$$

$$\begin{aligned}(u\cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}\cdot v + C_n^1 u^{(n-1)}\cdot v' + C_n^2\cdot u^{(n-2)}\cdot v'' + \\ &+ \ldots + C_n^m\cdot u^{(n-m)}\cdot v^{(m)} + \ldots + u\cdot v^{(n)}\end{aligned} \qquad \textbf{(14)}$$

де $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $\qquad k! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots k.$

Диференціал *n-го порядку визначається як диференціал першого порядку від диференціала (n-1) порядку, тобто:*

$$d^n f(x) = d[d^{n-1} f(x)] \qquad \textbf{(15)}$$

Приклад 6. Знайти похідні другого порядку функцій

а) $y = x^3 \cdot \cos x$; $\qquad$ **б)** $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$

Розв'язання

а) Використовуючи формулу (14), одержимо:

$$y'' = (x^3)''\cdot\cos x + 2(x^3)'\cdot(\cos x)' + x^3\cdot(\cos x)'' =$$
$$= 6x\cdot\cos x - 6x^2\cdot\sin x - x^3\cos x.$$

б) Використовуючи формулу (11), одержимо:

$$y''_x = \frac{(3\cos t)'\cdot(3\sin t)'' - (3\sin t)'\cdot(3\cos t)''}{\left[(3\cos t)^1\right]^3} =$$
$$= \frac{-3\sin t\cdot 3(-\sin t) - 3\cos t\cdot 3(-\cos t)}{(-3\sin t)^3} =$$
$$= \frac{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}{-27\sin^3 t} = \frac{9}{-27\sin^3 t} = \frac{-1}{3\sin^3 t}$$

Приклад 7. Знайти прискорення руху тіла, що рухається за законом $S = 3\ell^{2t} - 2t^3$, в момент t = 3.

Розв'язання

У довільний момент часу t прискорення руху тіла буде $a(t) = S''(t)$.

Знайдемо спочатку похідну першого порядку функції $S(t)$:

$$S'(t) = 3\ell^{2t}\cdot 2 - 6t^2 = 6(\ell^{2t} - t^2);$$

Диференціюванням $S'(t)$ одержимо:

$$S''(t) = a(t) = 6(2\ell^{2t} - 2t) = 12(\ell^{2t} - t).$$

Тепер знайдемо прискорення в заданий момент t = 3:

$a(3) = 12(\ell^6 - 3)$ - одиниць виміру прискорення.

6.1.8 ВПРАВИ

Завдання 1. Знайти похідні першого порядку, використовуючи правила диференціювання та таблицю похідних:

а) $y=3x^5+8\cdot 3^x-2tgx+15arctgx+80$

б) $y=2\sqrt[3]{x}+5^x-\ell og_3x+3\sin x-18arc\sin x+7$

в) $y=x^{N/_{N+2}}+\dfrac{x}{N}+(N+2)^x+\ell og_{N+1}x-3\ell nx+N$

Завдання 2. Знайти похідні першого порядку, використовуючи правила диференціювання добутку та частки:

а) $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{x^2+1}-x^2\cdot ctgx$; **б)** $y=\dfrac{x^2+1}{x^3+6}+\sqrt{x}\cdot\sin x$;

в) $y=\dfrac{(N+1)^x+\sin x}{\cos x}+\ell^x\cdot tgx$; **г)** $y=\dfrac{\ell nx+Nx}{x}-x^{3/_2}\cdot\cos x$

Завдання 3. Знайти похідні першого порядку функцій:

а) $y=2\cos 3x-3\sin 2x+5^{x^2}+\ell n\sqrt{x}$;

б) $y=3\cos 2x+2\sin 3x-7^{tgx}+\ell n(\cos x)$;

в) $y=\left(\dfrac{N+1}{N+2}\right)^{2x}\cdot\ell n\sqrt{x^2+N}$; **г)** $y=Nx^2\cdot arctgNx$;

д) $y=x^3\cdot arctg3^{\sin^2 2x}$; **е)** $y=\dfrac{arctg^3x}{\sqrt{x-5^{\ell n\cos x}}}$;

Завдання 4.Методом логарифмічного диференціювання знайти похідні першого порядку функцій:

а) $y=x^{x^2}$; **б)** $y=(tgx)^x$; **в)** $y=(x^2+3x)^{\sin 2x}$

г) $f(x)=(\cos 3x)^x$; **д)** $y=[(N+2)x]^{3tgNx}$ **е)** $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{2x+1}}$

Завдання 5. Знайти диференціали першого порядку функцій:

а) $y=\sin Nx$; **б)** $y=N\cos\dfrac{x}{N}$; **в)** $y=arctg\dfrac{x}{N}$;

г) $y=2arc\sin\dfrac{x}{N}$; **д)** $y=(N+x^2)$; **е)** $y=\cos(Nx^2)$.

Завдання 6. Знайти похідні першого порядку функцій, що задані неявно:

а) $\ell^{Nxy}-x^{2N}+y^{2N}=0$; **б)** $N\cos(x-y)-2Nx+4y=0$;

в) $xy+\ell nNy-2N\ell nx=0$; **г)** $y\ell nx-x\ell ny=x+y$

д) $y=x^2y+\cos(2x+y)$; **е)** $arc\sin(x^2\cdot y)+x+y^2=0$

Завдання 7. Знайти похідні першого та другого порядків функцій

1 **а)** $y=\dfrac{x-1}{x+1}\ell^{-x}$; **б)** $\begin{cases}x=t+\ell n\cos t\\ y=t-\ell n\sin t\end{cases}$; **в)** $y=tg(\ell nx)$

2 **а)** $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; **б)** $\begin{cases}x=t^5+2t\\ y=t^3+8t-1\end{cases}$; **в)** $y=\sin\sqrt{1+x^2}$

3 **а)** $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$; **б)** $\begin{cases}x=arc\sin t\\ y=arc\cos t\end{cases}$; **в)** $y=\cos(\ell nx)$

4 **а)** $y=x\ell^{-x}$; **б)** $\begin{cases}x=\dfrac{2-t}{2+t}\\ y=\dfrac{t}{2+t}\end{cases}$; **в)** $y=\sqrt{1+\ell nx}$

6.2. Розкриття невизначеностей з використанням правила Лопіталя

6.2.1. Правило Лопіталя. Нехай виконані умови:

1. *функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0;*

2. *частка цих функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в точці x_0 має невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$;*

3. *існує* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *і виконується рівність*:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \textbf{(16)}$$

<u>**Наслідок**</u>. Нехай:

1) *визначені в околі точки x_0 функції $f(x)$, $g(x)$ та їх похідні до n-го порядку включно;*

2) *частки* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, ..., $\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$ *мають невизначеність вигляду* $\dfrac{0}{0}$ *або* $\dfrac{\infty}{\infty}$;

3) *існує* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, *тоді*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}} \qquad \textbf{(17)}$$

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$

Розв'язання. Функції $f(x)=x-\sin x$ та $g(x)=x^2$ визначені з усіма своїми похідними в околі точки x = о. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

6.2.2. Розкриття невизначеностей вигляду:

$$\infty-\infty;\ 0\cdot\infty;\ 1^{\infty};\ 0^0;\ \infty^0.$$

Існують прийоми, що дозволяють зводити вказані невизначеності до невизначеностей вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$, які можна розкривати з використанням правила Лопіталя.

1. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to x_0} f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{1-\dfrac{g(x)}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}} \qquad (18)$$

За умовою $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$,

тому $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$ при $x\to x_0$

Якщо $1-\dfrac{g(x)}{f(x)}$ не прямує до 0 при $x\to x_0$, то границя в правій частині (18) не існує, а тому і границя лівої частини (18) не існує.

Якщо $\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)\to 0$ при $x \to x_0$, то вираз $\left(1-\frac{\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\right)$ має невизначеність $\frac{0}{0}$.

2. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, тоді $f(x)\cdot g(x)$ має невизначеність вигляду $0.\infty$ при $x \to x_0$. В цьому випадку поступають так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=(0.\infty)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Під знаком останньої границі маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

3. Нехай $f(x)\to 1, g(x)\to\infty$ при $x \to x_0$. Тоді $[f(x)]^{g(x)}$ має невизначеність вигляду 1^∞.

Позначимо $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=C$.

Шляхом логарифмування цієї рівності одержимо:

$$\ell nC=\ell n\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\ell n[f(x)]^{g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0} g(x)\ell nf(x)\Rightarrow \ell nC=\lim_{x\to x_0}\frac{\ell nf(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Тепер під знаком границі - невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$ тому, що $\ell nf(x)\to 0$ і $\frac{1}{g(x)}\to 0$ при $x \to x_0$.

Отже, обчислення натурального логарифма границі $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$ зводиться до розкриття невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$.

4. Невизначеності вигляду 0^0 та $(\infty)^0$ зводять до невизначеностей $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ шляхом логарифмування аналогічно до невизначеності вигляду 1^∞.

В п.5.1.9 вказан більш ефективний спосіб розкриття невизначеності 1^∞.

Приклад 9. Знайти границі

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ell nx}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$

Розв'язання. а) Функції $f(x)=x$, та $g(x)=\ell nx$ диференційовані, а їх частка $\frac{x}{\ell nx}$ має невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to\infty$.

Використовуючи правило Лопіталя, одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ell nx}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1/x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

б) В цьому випадку маємо невизначеність вигляду $(\infty)^0$.

Позначимо $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}=C$ і прологарифмуємо цю рівність.

Одержимо:

$$\ell nC = \lim_{x\to 0} tgx \cdot \ell n\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0} tgx\ell nx = -\lim_{x\to 0}\frac{\ell nx}{ctgx},$$ тобто

невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$. Використовуючи правило Лопіталя, одержимо:

$$\ell nC = -\lim_{x\to 0}\frac{\ell nx}{ctgx} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{1} = 0$$

Отже, $\ell nC = 0 \Rightarrow C = \ell^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = 1$

в) В цьому випадку маємо невизначеність вигляду 1^{∞}.

Нехай $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = C.$$

Логарифмуючи цю рівність, одержимо:

$$\ell nC = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ell n\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ell n\frac{\sin x}{x}\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ell n\sin x - \ell nx)'}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^2\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6\cos x - 2x\sin x} = -\frac{1}{6}.$$

Чотири рази застосували правило Лопіталя. Отже маємо:

$$\ell nC = -\frac{1}{6} \Rightarrow C = \ell^{-1/6} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \ell^{-1/6}$$

6.2.3 ВПРАВИ

Знайти границі:

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$ **2.** $\lim_{x\to 0}\frac{\ell nx}{ctgx}$; **3.** $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$;

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ell^x}{x^3}$; **5.** $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$; **6.** $\lim_{x\to\infty}\frac{\ell nx}{\sqrt[3]{x}}$;

7. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 1}$; **8.** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\ell nx}$; **9.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right)$;

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - x/3}{x^2}$; **11.** $\lim_{x\to 0} X^x$; **12.** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{\ell^x}$;

6.3. Дослідження функцій та побудова графіка функції

6.3.1. Монотонність та екстремуми функції

<u>Означення 6.</u> Функцію $y = f(x)$ називають зростаючою (спадною) в проміжку (а, в), якщо більшому значенню аргументу в цьому проміжку відповідає більше (менше) значення функції, тобто якщо із нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, то функція $f(x)$ - зростаюча, а якщо $f(x_2) < f(x_1)$, то функція - спадна.

Функцію $y = f(x)$ називають <u>*монотонною*</u> *в проміжку (а, в), якщо вона в цьому проміжку зростаюча або спадна. Проміжки, в яких функція монотонна називають проміжками монотонності цієї функції.*

<u>Достатня ознака монотонності функції</u>

Якщо похідна диференційовної функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає в цьому проміжку. Якщо похідна диференційованої функції від'ємна всередині деякого проміжку, то функція спадає в цьому проміжку.

Для <u>знаходження інтервалів монотонності</u> заданої функції $y = f(x)$ доцільно дотримуватись такого порядку дій:

1. *знайти область визначення та похідну $f'(x)$;*

2. знайти корені рівняння $f'(x) = 0$;

3. поділити область визначення функції знайденими коренями рівняння $f'(x) = 0$ на інтервали знакової постійності $f'(x)$;

4. *визначити знак похідної $f'(x)$ в кожному інтервалі і зробити висновок, в якому інтервалі функція зростає, а в якому спадає.*

Приклад 10. Знайти інтервали монотонності витрат виробництва, визначених функцією $V(x) = 2x^3 - 6x + 5$.

Розв'язання. Ця функція визначена при x є (-∞, ∞), але має економічний зміст лише для x ≥ 0.

Знаходимо похідну функції: $V'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$.

Із рівності $6(x^2-1)=0$ знаходимо $x_1=1$, $x_2=-1$, які поділяють вісь Ox на інтервали (-∞, -1), (-1, 1), (1, ∞).

При x є (-∞, -1), похідна $V'(x) > 0$;

При x є (-1, 1), похідна $V'(x) < 0$;

При x є (1, ∞), похідна $V'(x) > 0$.

<u>Згідно достатньої ознаки монотонності функції робимо</u> висновок:

функція V(x) зростає при x є (-∞, -1) ∪ (1, ∞) і спадає при x є (-1, 1).

Враховуючи економічний зміст функції, ця функція спадає в інтервалі (0, 1) і зростає в проміжку (1, ∞).

<u>Означення7</u>.Функція $y = f(x)$ має при $x=x_0$ максимум (мінімум), якщо існує такий окіл точки x_0, для усіх точок x якого виконується нерівність:

$$f(x_0) > f(x) \text{ для максимуму,}$$

$$f(x_0) < f(x) \text{ для мінімуму.}$$

Екстремум функції - це узагальнений термін понять максимуму та мінімуму. Значення аргументу $x = x_0$, при якому функція $f(x)$ має екстремум (максимум або мінімум) називають точкою екстремуму функції (максимуму або мінімуму, відповідно).

<u>Означення 8.</u> Критичними точками першого роду функції $y = f(x)$ називають точки, в яких $f'(x)$ не існує або дорівнює нулю.

Рівність $f'(x) = 0$ називають необхідною умовою існування екстремуму функції $y = f(x)$.

Щоб визначити, в яких з критичних точок функція має екстремум і який саме, використовують достатні умови існування екстремуму.

<u>Достатні умови існування екстремуму функції</u>

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в околі критичної точки першого роду $x = x_0$ і її похідна $f'(x)$:

1. *при $x < x_0$ - додатна, а при $x > x_0$ - від'ємна, то в точці x_0 функція має максимум;*

2. при $x < x_0$ - від'ємна, а при $x > x_0$ - додатна, то в точці x_0 функція має мінімум;

3. зліва та справа від точки x_0 має однаковий знак, то в точці x_0 функція не має екстремуму.

Порядок дій при дослідженні функції на екстремум:

1. знаходять похідну $f'(x)$ заданої функції;

2. знаходять критичні точки першого роду (значення х, при яких $f'(x)$ не існує або дорівнює нулю);

3. визначають знак $f'(x)$ зліва та справа в околі кожної критичної точки;

4. роблять висновок, чи має функція екстремум і який саме у знайдених критичних точках;

5. обчислюють екстремальні значення функції в точках екстремуму.

Дослідження функції на екстремум доцільно виконувати з використанням таблиці по аналогії з наведеним нижче прикладом.

Приклад 11. Знайти екстремуми функції

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5.$$

Розв'язання. Знаходимо похідну:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$$

Знаходимо критичні точки першого роду: із рівності

$$6(x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

Інших точок не має тому, що y' визначена при усіх $x \in (-\infty, \infty)$.

Критичні точки x_1 та x_2 поділяють область визначення функції $(-\infty, \infty)$ на інтервали постійного знака похідної (критичні точки та відповідні інтервали записуємо у перший рядок таблиці 1).

Визначаємо знак $f'(x)$ в кожному інтервалі (записуємо ці знаки у другий рядок таблиці 1).

Згідно з достатніми умовами існування екстремуму функції робимо висновок відносно кожної критичної точки (характер поведінки функції вказуємо у третьому рядку таблиці 1).

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

Таблиця 1

Обчислимо максимальне та мінімальне значення функції:

$y_{max} = y(1) = 2 \cdot 1 - 9 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 5 = 10;$

$y_{min} = y(2) = 2 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 5 = 9;$

6.3.2. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Функція, неперервна на відрізку [а, в], досягає на цьому відрізку найбільшого та найменшого значень. Ці значення функція може досягнути всередині відрізку або на одному з кінців відрізку.

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку [а, в], які позначають: $\max\limits_{[a,в]} f(x)$ та $\min\limits_{[a,в]}(x)$, відповідно, треба:

1. *знайти усі критичні точки першого роду функції $f(x)$;*

2. *знайти значення функції $f(x)$ в тих критичних точках, що належать відрізку [а, в], а також значення функції на кінцях відрізку $f(a)$ та $f(в)$;*

3. *із одержаних значень функції обрати найбільше та найменше значення функції на відрізку.*

Приклад 12. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2+7} \qquad \text{на відрізку } [-3, 7]$$

Розв'язання.

Знайдемо критичні точки першого роду заданої функції. Маємо:

$$f'(x)=\frac{x^2+7-2x(x+3)}{(x^2+7)^2}=\frac{-x^2-6x+7}{(x^2+7)^2}$$

Похідна існує для усіх x є (-∞, ∞), тому критичні точки одержимо із рівності:

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+6x-7=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2};$$

$$x_1=-7, \quad x_2=1$$

Так як $x_1=-7 \notin [-3,7]$, тому знайдемо значення заданої функції при x = 1, x = - 3 та x = 7:

$$f(1)=\frac{1+3}{1+7}=\frac{1}{2}; \quad f(-3)=0; \quad f(7)=\frac{7+3}{49+7}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$$

Із одержаних значень функції обираємо найбільше значення $\max\limits_{[-3,7]} f(x)=\frac{1}{2}$ та найменше значення $\min\limits_{[-3,7]} f(x)=0$.

6.3.3. ВПРАВИ

Завдання 1. Знайти інтервали монотонності функцій

а) $y=\frac{x}{x-2}$; **б)** $y=x^2(x-3)$; ; **в)** $y=(x-2)^2$;

г) $y=1-4x-x^2$; **д)** $y=x\ln x$; ; **е)** $y=2e^{x^2-4x}$. ;

Завдання 2. Знайти екстремальні значення функцій

а) $y=x^2+4x+6$; **б)** $y=x^2(x-12)^2$; **в)** $y=x\ell n^2 x$;

г) $y=x\ell^x$; **д)** $y=x^2\ell^{-x}$; **е)** $y=\frac{\ell^x}{x}$.

Завдання 3. Знайти найменше та найбільше значення функцій в заданих відрізках.

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, [- 1, 5] ; б) $y = x^3 - 27x$, [0, 10] ;

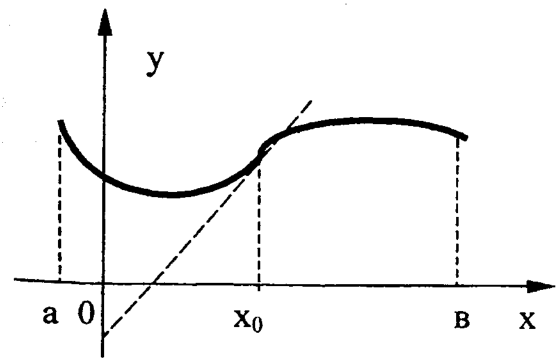
в) $y=\ell n^2 x-2\ell nx$, [- 1, 5] ; **г)** $y=2x-\frac{1}{x^2}$, [1, 10] .

6.3.4. Опуклість та угнутість графіка. Точки його перегину

Означення 9. Крива $y=f(x)$ називається опуклою на проміжку (а, в), якщо усі точки графіка функції лежать нижче її дотичних на цьому проміжку.

Крива $y=f(x)$ називається угнутою на (а, в), якщо усі точки графіка функції лежать вище її дотичних на цьому інтервалі.

Означення 10. Якщо в досить малому околі точки дотику з абсцисою x_0 крива $y=f(x)$ зліва та справа цієї точки лежить по різні боки дотичної, то точку x_0 називають точкою перегину графіка функції.



мал. 2

Функція, що зображена на малюнку 2, на проміжку (x_0, в) опукла, на проміжку (а, x_0) угнута і в точці $x = x_0$ має перегин графіка

Достатні умови опуклості

Нехай $y = f(x)$ *визначена і двічі диференційована в проміжку (а, в). Тоді якщо* $f''(x) < 0$ *для* $x \in (a, в)$, *то графік функції в цьому проміжку опуклий, а якщо* $f''(x) > 0$ *- угнутий.*

Необхідна умова перегину

Нехай $f(x)$ *визначена в околі точки* x_0 *і двічі диференційовна в цій точці. Якщо* x_0 *є точкою перегину, то* $f''(x_0) = 0$

Означення 11.Значення х, при яких $f''(x)$ не існує або дорівнює нулю, називають критичними точками другого роду функції $f(x)$.

Приклад 13. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції $y = \ell^{-x^2/2}$ (крива Гаусса).

Розв'язання. Знайдемо похідну другого порядку цієї функції

$$y' = -x\ell^{-x^2/2}, \quad y'' = -\ell^{-x^2/2} + x^2 \cdot \ell^{-x^2/2} = (x^2 - 1)\ell^{-x^2/2}$$

Друга похідна визначена для усіх х. Тому критичні точки другого роду знайдемо із рівності $y'' = 0$: $x_1 = -1, \quad x_2 = 1$

Визначимо знак $f''(x)$ при проходженні х зліва направо через кожну критичну точку. Результати цього дослідження відображені таблицею 2.

x	(- ∞,- 1)	- 1	(- 1, 1)	1	(1, ∞)
$f''(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	∪	перегин	∩	перегин	∪

Таблиця 2

Ці результати дозволяють зробити висновок: область угнутості графіка (- ∞, -1) ∪ (1, ∞);інтервал опуклості - (- 1, 1); точки перегину $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, значення функції в точках перегину буде: $y_{пер.} = f(\pm 1) = \ell^{-1/2}$

6.3.5. Асимптоти кривої

Означення 12Пряму лінію називають асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань точки M(x, y) кривої від цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки M в нескінченність.

Асимптоти можуть бути вертикальними, похилими та горизонтальними

Якщо в точці х = а функція $f(x)$ має розрив другого роду, то х = а буде рівнянням вертикальної асимптоти.

Рівняння похилої асимптоти функції $y = f(x)$ шукають у вигляді:

$$\boxed{y = kx + b} \tag{19}$$

де

$$\boxed{к = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \tag{20}$$

$$\boxed{в = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]} \tag{21}$$

Якщо не існує скінченого значення границі (20), то похилої асимптоти не існує. Якщо к = 0, то за формулою (21) одержимо

$$в = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

і пряма у = в буде горизонтальною асимптотою.

Приклад 14. Знайти асимптоти кривої

$$y=\frac{x^2+3x+2}{x-3}$$

Розв'язання. Задана функція має розрив другого роду в точці x = 3 тому, що однобічні границі будуть:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2+3x+2}{x-3}=-\infty, \qquad \lim_{x\to 3+0}\frac{x^2+3x+2}{x-3}=\infty$$

Висновок: x = 3 є рівняння вертикальної асимптоти.

Тепер будемо шукати рівняння похилої асимптоти у вигляді (19).

Маємо за формулою (20):

$$\kappa=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+2}{(x-3)x}=1$$

За формулою (21) знаходимо в:

$$в=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+3x+2}{x-3}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+2-x^2+3x}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x+2}{x-3}=6$$

Підставимо знайдені к та в у формулу (19) і одержимо рівняння похилої асимптоти у вигляді: y = x + 6

6.3.6. Схема дослідження функції і побудови її графіка

Науково обґрунтовано дослідження функції та побудова її графіка здійснюється за такою схемою:

<u>Перший етап</u> (використовується вид заданої функції)

1. *Знаходимо область визначення функції, точки розриву та однобічні границі функції в цих точках, інтервали неперервності.*

2. *Досліджуємо функцію на парність, непарність, періодичність.*

3. *Знаходимо асимптоти графіка функції.*

4. *Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат та значення функції на кінцях відрізку, якщо область визначення функції є замкнений відрізок.*

<u>Другий етап</u> (використовується похідна першого порядку)

5. *Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання та спадання, точки екстремумів та екстремальні значення функції.*

<u>Третій етап</u> (використовується похідна другого порядку)

6. *Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перегину та значення функції в точках перегину.*

<u>Четвертий етап</u>

7. *Будуємо у системі координат точки та значення функції, асимптоти, які одержані в ході дослідження. Потім будуємо графік функції з урахуванням інтервалів неперервності, монотонності, опуклості та угнутості, періодичності, парності чи непарності.*

Приклад 15. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^3}{x^2-9}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Функція визначена і неперервна в області $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$.

В точках $x_1=-3$ та $x_2=3$ функція має розриви.

Функція непарна: y(- x) = - y(x), тому її графік симетричен відносно початку системи координат. Дослідження можна продовжити лише для $x\ge 0$.

Знайдемо однобічні границі в точці розриву x = 3:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^3}{x^2-9}=-\infty, \qquad \lim_{x\to 3+0}\frac{x^3}{x^2-9}=\infty$$

Отже x = 3 є точкою розриву другого роду, а рівнянням вертикальної асимптоти буде x = 3.

Будемо шукати рівняння похилої асимптоти у вигляді y = кx + в.

$$к = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x^2-9)x} = 1;$$

$$в = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + 9x}{x^2-9} = 0$$

Отже рівнянням похилої асимптоти буде y = x.

Функція перетинає осі координат в точці O (0, 0).

Тепер будемо шукати інтервали монотонності та екстремуми функції:

$$y' = \frac{3x^2(x^2-9) - 2x\cdot x^3}{(x^2-9)^2} = \frac{3x^4 - 27x^2 - 2x^4}{(x^2-9)^2} = \frac{x^2(x^2-27)}{(x^2-9)^2}$$

При x = ± 3 похідна не існує, але ці точки можна не розглядати тому, що вони не належать області визначення функції.

Із умови $y' = 0 \Rightarrow x_1 = -3\sqrt{3}, \quad x_2 = 3\sqrt{3}, \quad x_3 = 0$.

В околі точки x = 0 похідна має постійний знак: $y' < 0$, тому ця точка не буде екстремальною.

Точку $x = -3\sqrt{3}$ не розглядаємо тому, що обмежились x ≥ 0.

Залишилось дослідити критичну точку першого роду $x = 3\sqrt{3}$.

При $x < 3\sqrt{3}$ маємо $y' < 0$, а при $x > 3\sqrt{3}$ маємо $y' > 0$.

Тому в точці $x = 3\sqrt{3}$ функція має мінімум:

$$y_{min} = y(3\sqrt{3}) = \frac{81\sqrt{3}}{27-9} = \frac{9}{2}\sqrt{3} \approx 7{,}78;$$

$(0, \quad 3\sqrt{3})$ - інтервал спадання; $(3\sqrt{3}, \quad \infty)$ - інтервал зростання.

Тепер будемо досліджувати характер опуклості та точки перегину графіка функції.

$$y'' = \frac{(4x^3 - 54x)(x^2-9)^2 - 2(x^2-9)\cdot 2x(x^4 - 27x^2)}{(x^2-9)^4} =$$

$$= \frac{4x^5 - 54x^3 - 36x^2 + 486x - 4x^5 + 108x^3}{(x^2-9)^3} = \frac{x(18x^2+486)}{(x^2-9)^3}.$$

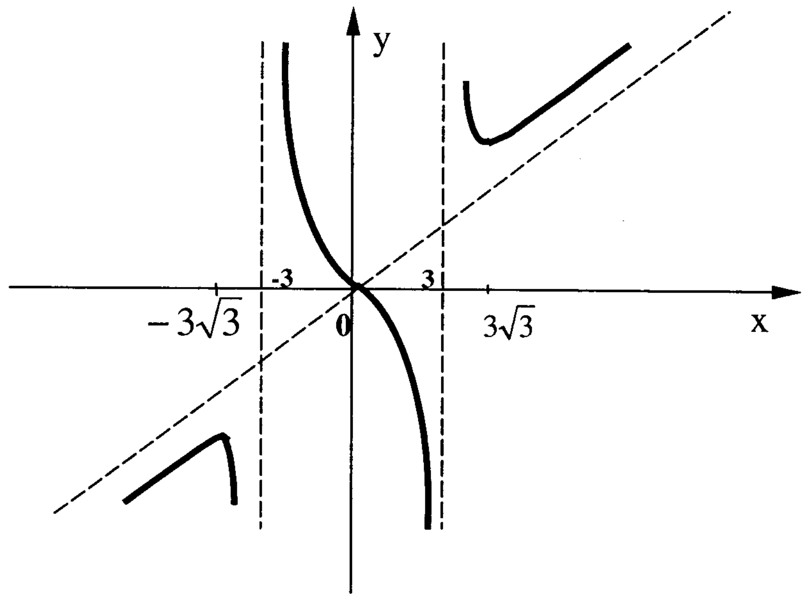
Друга похідна не існує в точках x = ± 3, які не належать області визначення функції.

Із рівності $y'' = 0 \Rightarrow x = 0$.

При x < 0 маємо $y'' < 0$, а при x > 0 маємо $y'' > 0$.

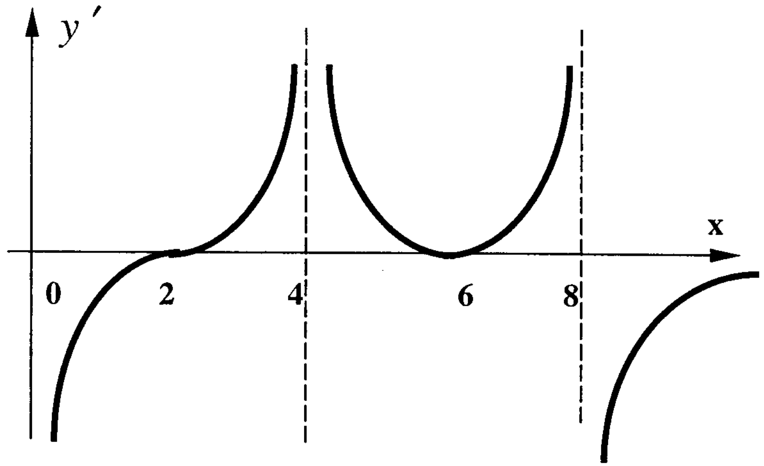
Тому в точці O (0, 0) є перегин графіка функції.

Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції (дивись малюнок 3).



Мал. 3

✧ **Приклад 16.** Визначити властивості неперервної функції $f(x)$ за заданим графіком її похідної.



Мал.4

Розв'язок. Оскільки на графіку похідна функції додатна на $(2;8)$ і від'ємна на $(0;2)\cup(8;\infty)$, то функція $f(x)$ зростає в $(2;8)$ і спадає в $(0;2)\cup(8;\infty)$. В точках $x_1=2$ та $x_2=6$ похідна дорівнює 0, а в точках x=0, $x_3=4$ та $x_4=8$ похідна невизначена. Тому ці точки є критичними точками першого роду функції $f(x)$. Враховуючи зміну знака похідної в околі кожної критичної точки за достатньою ознакою існування екстремуму функції, визначаємо: $x_1=2$ є точкою мінімуму, $x_4=8$ є точкою максимуму, а в точках $x_2=6$ та $x_3=4$ функції $f(x)$ екстремумів не має.

Інтервали опуклості, угнутості і точки перегину графіка $f(x)$ визначаються за знаком похідної другого порядку.

На графіку $f'(x)$ зростає в $(0;4)\cup(6;8)\cup(8;\infty)$, тому в цих проміжках $f''(x)>0$, а графік функції $f(x)$- угнутий. В проміжку (4;6) похідна $f'(x)$ спадає, тому $f''(x)<0$, а графік функції $f(x)$ в цьому проміжку опуклий.

Оскільки $f''(x)$ має різні знаки зліва та справа від точок $x_2=6$ та $x_3=4$, то ці точки є точками перегину графіка функції.

6.4. ВПРАВИ

Завдання 1. Знайти інтервали опуклості, угнутості і точки перегину графіка функцій

а) y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 10 **б)** $y=\sqrt[3]{x^5}$

в) $y=4\sqrt{(x-1)^5}+20\sqrt{(x-1)^3}$ **г)** $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

Завдання 2. Знайти рівняння асимптот заданих функцій і побудувати асимптоти в системі координат.

а) $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ **б)** $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}+x$ **в)** $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$

г) $y = x e^{1/x}$ д) $y = \sqrt{1 + x^2} + 2x$ е) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$

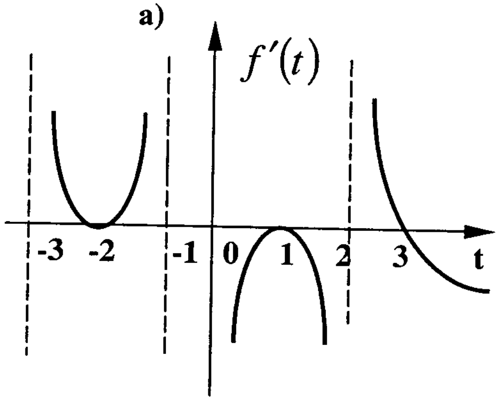
Завдання 3. Дослідити функцію і побудувати її графік.

а) $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$ б) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$ в) $y = x + \ln(x^2 - 1)$

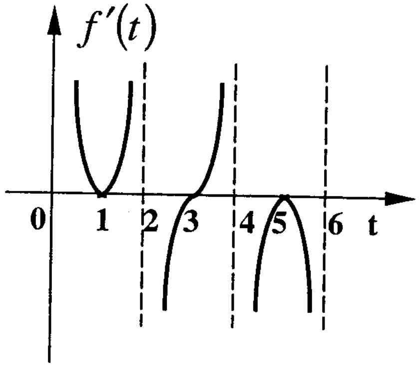
г) $y = x^3 - 3x + 2$ д) $y = x^2 e^{-x}$ е) $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$

Завдання 4. Визначити властивості сигналу $f(x)$ за графіком швидкості його розповсюдження

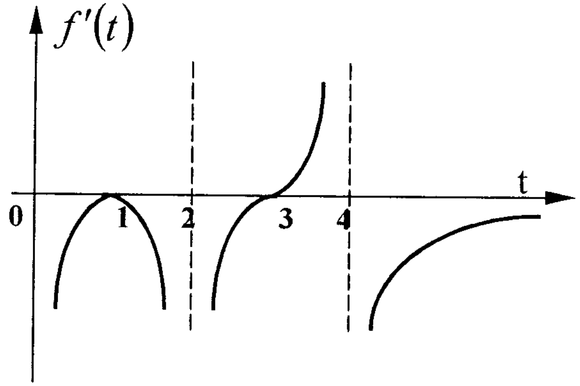
а)



б)



в)



Завдання 5. Дослідити функцію і побудувати її графік

а) $y = e^{-x^2}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; в) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 16}$.

Розділ 7	Диференціальне числення функцій кількох

7.1. Вступ до математичного аналізу функцій кількох змінних

7.1.1. Основні поняття

Означення 1. **Якщо змінна величина u залежить від n незалежних змінних x_1, x_2, ..., x_n, то її називають функцією цих змінних. А функціональну залежність позначають так:**

$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ **або** $u = f(M)$**, де точка** $M \in E_n$.

Незалежні змінні рівноправні і називаються аргументами

Означення 2. **Сукупність усіх числових значень, які можуть приймати аргументи x_1, x_2, ..., x_n і при яких функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ приймає певні дійсні значення, називають областю визначення функції.**

Якщо функція визначена для усіх x_1, x_2, ..., x_n з деякої області D та її межі dD, тоді кажуть, що функція визначена у замкненій області $\overline{D} = D \cup dD$.

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$u = \sqrt{121 - (x-2)^2 - (y+3)^2 - (z-1)^2}$

Розв'язання. Задана функція u залежить від трьох змінних x, y та z. Вона приймає певні дійсні значення лише при умові

$121 - (x - 2)^2 - (y + 3)^2 - (z - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 \leq 11^2$

Рівність $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 11^2$ є рівнянням сфери з центром в точці (2, - 3, 1) і радіусом 11. Одержана нестрога нерівність означає, що задана функція u визначена у замкненій області

$$\overline{D} = \left\{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 \leq 11^2\right\}$$

✲ ***Рекомендації.*** *При знаходженні області визначення* функції кількох змінних, що задана аналітично, доцільно керуватись наступним:

1. *вираз під коренем парного степеня повинен бути невід'ємним;*

2. *вираз під знаком логарифма повинен бути додатним;*

3. *вираз знаменника дробу не повинен дорівнювати нулю.*

4. *модуль виразу, що стоїть під знаком arcsin або arccos, ≤1.*

Точка або сукупність точок, в яких функція кількох змінних не визначена, ***називають розривами цієї функції.***

Приклад 2. Знайти розриви функцій

а) $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + 7y^2}{x^2 - y^2}$ б) $f(x, y, z) = \dfrac{\cos(x + y)}{x^2 + y^2 - z}$

Розв'язання. У випадку а) функція має розриви $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x$, тобто прямі лінії в площині xOy.

У випадку б) функція має розриви $x^2 - y^2 - z = 0 \Rightarrow z = x^2 + y^2$.

Остання рівність є рівнянням параболоїда обертання навколо осі Oz.

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ часто задають таблицею з двома входами, наприклад:

14[69]

x \ y	y_1	y_2	...	y_m
x_1	z_{11}	z_{12}	...	z_{1m}
x_2	z_{21}	z_{22}	...	z_{2m}
⋮	⋮	...	...	...
x_n	z_{n1}	z_{n2}	...	z_{nm}

Табл. 1

Функцію двох змінних можна задавати графічно.

Так, графічним зображенням функції z = 6 - 2x - 5y є площина, яка проходить через точки $M_1(0{,}0{,}6)$, $M_2\left(0,\frac{6}{5},0\right)$, $M_3(3{,}0{,}0)$.

Графічним зображенням функції $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ є півкуля з центром O(0, 0) і радіусом 4.

Найчастіше функції кількох змінних задають аналітично у вигляді однієї або кількох формул.

Наприклад, $z=\ell^{x+y}\cdot\left(x^2+y^2\right)$ або

$$z=\begin{cases}x^2+y^2, & y\ge x\\ -2(x^2+y^2), & y<x\end{cases}$$

Функції кількох змінних іноді задають геометрично з використанням ліній або поверхонь рівня, рівняння яких:

$$f(x_1,x_2)=C \quad \text{або} \quad f(x_1,x_2,\dots,x_n)=C \qquad \textbf{(1)}$$

відповідно, де С - довільна стала.

Приклад 3. Знайти:

а) лінії рівня функції $u=\ell og_2(x^2+(y-2)^2)$,

б) поверхні рівня функції $u=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}$

Розв'язання. У випадку **а)** функція u залежить від двох змінних x та рівняння її ліній рівня:

$$\ell og_2(x^2+(y-2)^2)=C\Rightarrow x^2+(y-2)^2=2^c$$

Останнє рівняння є рівнянням кола з центром $\tilde{C}(0{,}2)$ і радіусом $R=\sqrt{2^c}$. Якщо С надавати різні числові значення, наприклад, 2, 4, 6, ..., то одержимо сукупність кіл з єдиним центром, але різного радіуса.

У випадку **б)** рівняння поверхонь рівня мають вигляд:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=C\Rightarrow\frac{x^2}{16C}+\frac{y^2}{9C}+\frac{z^2}{4C}=1$$

Це є рівняння еліпсоїда з півосями $4\sqrt{C}$, $3\sqrt{C}$ та $2\sqrt{C}$.

Якщо С надавати різні числові значення, то одержимо сукупність еліпсоїдів з єдиним центром.

Для означення границі та неперервності функції кількох змінних потрібне поняття околу точки радіуса r.

<u>Означення 3.</u>Околом радіуса r точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{no})$ називають сукупність усіх точок $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ простору E_n, відстань яких до точки M_0 менше або дорівнює r, тобто виконується співвідношення

$$\sqrt{(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+\dots+(x_n-x_{no})^2}\le r$$

<u>Означення4.</u>Число А називають границею функції $u=f(x_1;x_2;\dots;x_n)$ або $u=f(M)$ в точці $M_0(x_{1_0};x_{20};\dots;x_{n_0})$, якщо для будь-якого малого $\varepsilon>0$ знайдеться число r таке, що для усіх точок $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з околу радіуса r точки M_0, відмінних від точки M_0, виконується нерівність

$$\left|f(x_1,x_2,x_n)-A\right|<\varepsilon \quad \textbf{(або } \left|f(M)-A\right|<\varepsilon\textbf{).}$$

Використовують позначення:

$$\lim_{\substack{x_1\to x_{10}\\ x_2\to x_{20}\\ x_n\to x_{no}}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=A \qquad \left(\text{або } \lim_{M\to M_0} f(M)=A\right)$$

Границі функцій кількох змінних мають властивості однакові з границями функцій однієї змінної: сталий множник можна виносити за знак границі; границя скінченної алгебраїчної суми функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі границь цих функцій; границя добутку функцій дорівнює добутку їх границь та інші.

При обчисленні границі функції кількох змінних можна використовувати чудові границі та необхідні алгебраїчні перетворення під знаком границі.

Приклад 4. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{3\left(x^2+y^2\right)}$ б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(1+\dfrac{1}{(xy)^2}\right)^{(xy)^2+3}$

Розв'язання. У випадку а) маємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. Щоб позбутися цієї невизначеності помножимо під знаком границі чисельник і знаменник на $\sqrt{x^2+y^2+4}+2$. Тоді одержимо:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{3\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2+4-4}{3\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{}^1\!/_3={}^1\!/_3\,.$$

У випадку б) зробимо заміну $t^2=(xy)^2$.

При $x\to\infty$ $y\to\infty$ згідно властивостям нескінченно великих величин $t^2\to\infty$ і можна використати другу чудову границю:

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(1+\frac{1}{(xy)^2}\right)^{(xy)^2+3}=\lim_{t^2\to\infty}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{t^2+3}=\lim_{t^2\to\infty}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{t^2}\cdot\lim_{t^2\to\infty}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{3}=$$

$$=\ell\cdot\left[\lim_{t^2\to\infty}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]^3=\ell\cdot 1^3=\ell$$

Означення 5.Функція $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ $(u=f(M))$ **називається неперервною в точці $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, якщо вона визначена в цій точці і** $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)$ **незалежно від способу прямування точки M до точки M_0.**

Функція, що неперервна в кожній точці деякої області, називається неперервною в цій області. Якщо функція неперервна в області D та на її межі dD, тоді кажуть, що вона неперервна в замкненій області.

При знаходженні області неперервності функції кількох змінних доцільно використовувати таку властивість неперервних функцій:

Області визначення та неперервності функцій співпадають.

Часто використовують такі властивості неперервних функцій:

1. *якщо* $u(x_1,x_2,...,x_n)$ *та* $v(x_1,x_2,...,x_n)$ *- неперервні функції в точці M_0, і $v(M_0)\neq 0$, тоді їх частка* $\dfrac{u}{v}$ *також неперервна функція в точці M_0;*

2. *алгебраїчна сума та добуток скінченої кількості неперервних в області D функцій буде неперервною функцією в області D;*

3. неперервна в замкненій області $\overline{D}$ *функція обмежена в цій області, тобто існують такі числа m та M, що виконуються співвідношення:*

$$m\le f\left(x_1,x_2,...x_n\right)\le M$$

для усіх $(x_1,x_2,...,x_n)\in\overline{D}$.

Приклад 5. Знайти область неперервності функції

$$u=\frac{5}{\sqrt{9-(x+3)^2-y^2-(z-1)^2}}$$

Розв'язання. Ця функція визначена лише тоді, коли вираз під знаком квадратного кореня буде додатним:

$$9 - (x + 3)^2 - y^2 - (z - 1)^2 > 0 \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 < 9.$$

Останню нерівність задовольняють координати x, y, z точок, що лежать всередині кулі з центром C (- 3, 0, 1) і радіусом 3.

Нерівність строга, тому координати точок сфери

$$(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$$

не належать області визначення функції u.

Область визначення функції u співпадає з областю її неперервності. Отже, задана функція u має незамкнену область неперервності - сукупність точок M (x, y, z), що лежать всередині кулі з центром C (- 3, 0, 1) і радіусом 3.

7.1.2 ВПРАВИ

Завдання 1. Знайти значення заданої функції у вказаних точках.

1. $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 1$; M_0 (1, 2, 3), M_1 (- 2, 1, 2)

2. $f(x,y,t) = \dfrac{2x+y+t}{x+2y-t}$; $\quad (x,y,t)_1 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$

$(x,y,t)_2 = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{2}, 1\right)$

3. $f(u,v) = u + \ell n v$; $\quad (u,v)_1 = (2, \ell)$; $\quad (u,v)_2 = (-2, 1)$

4. $f(x,y) = 2^{x-y} + \dfrac{3x-1}{x+y}$; $\quad M_1$ (2, 2); $\quad M_2$(2, - 1)

5. $f(x,y) = \dfrac{(x-1)(y+1)}{x+y}$; $\quad M_1$ (1, - 2); $\quad M_2$ (3, 3)

6. $f(x,y) = 2\arcsin(x+y) + x^y$; $\quad M_1$ (1, - 1); M_2 (3, - 2).

Завдання 2. Знайти області визначення та неперервності функцій, їх розриви.

1. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ $\quad$ 2. $z = \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 4}$ $\quad$ 3. $z = \dfrac{\ell n(x-y)}{x+y}$

4. $z = \ell n(4x^2 + 9y^2 - 36)$ $\quad$ 5. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ $\quad$ 6. $z = \dfrac{3}{x-y}$

7. $u = \dfrac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ $\quad$ 8. $z = \dfrac{2}{(x-1)^2 + (y+1)^2 - 9}$ $\quad$ 9. $u = xy + 2yz - 3zx$

Завдання 3. Побудувати графіки ліній перетину поверхні $z = f(x,y)$ та площин x = 0, ± 1; y = 0, ± 1.

а) $z = x^2 - y^2$; $\quad$ б) $z = 2x^2 + y^2$;

в) $z = \sqrt{25 - (x+3)^2 - y^2}$ $\quad$ г) $z = 2x^2 - y^2$

Завдання 4. Обчислити границі

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ $\quad$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 16} - 4\right)}{x^2 + y^2}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{5(x^2 + y^2)}$ $\quad$ 4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{5}{3\left(x^2 + y^2 + 1\right)}$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ell^{\frac{-1}{x^2 + y^2 + 1}}}{x^4 + y^4}$ $\quad$ 6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1 + (xy)^2\right)^{\frac{2}{(xy)^2}}$;

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1 - \cos 2(x+y)}{3(x+y)^2}$ $\quad$ 8. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -3}} \dfrac{2x + 3y}{(x-2)^2 + (y+3)^2 - 4}$

7.2. Похідні та диференціали функції кількох змінних.

7.2.1. Основні поняття та формули

Якщо у функції кількох змінних $u = f(x_1, x_2, ... x_n)$ змінна $x_к$ (к = 1, 2, ..., n) одержить приріст $\Delta x_к$, а усі інші незалежні змінні - фіксовані, тоді функція одержить частинний приріст $\Delta_{x_к} u = f(x_1, x_2, ... x_к + \Delta x_к, ... x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_к, ..., x_n)$ за аргументом $x_к$

Означення6. **Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x_к \to 0} \frac{\Delta_{x_к} u}{\Delta x_к}$, що не залежить від способу прямування $\Delta x_k \to 0$, тоді її називають частинною похідною першого порядку функції $u = f(x_1, x_2, ... x_n)$ по змінній $x_к$ (к = 1, 2, ..., n) і позначають:**

$$\frac{\partial u}{\partial x_к} \quad \text{або} \quad \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_к} \quad \text{або} \quad u'_{x_к}.$$

Отже, за означенням частинна похідна першого порядку буде:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x_к} = \lim_{\Delta x_к \to 0} \frac{\Delta_{x_к} u}{\Delta x_к}} \qquad (2)$$

Зауваження. *Позначення похідної першого порядку $\frac{du}{dx_к}$ означає, що функція u залежить лише від однієї змінної $x_к$.*

Тому в частинних похідних треба писати літеру ∂.

При знаходженні частинної похідної по змінній $x_к$ усі інші аргументи функції слід вважати постійними величинами і тому можна використовувати правила диференціювання та таблицю похідних функцій однієї змінної.

Механічний зміст частинних похідних першого порядку- *це швидкість зміни функції u в напрямку осі $Ox_к$,* коли інші аргументи не змінюються

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ частинним похідним першого порядку можна надати **геометричну інтерпретацію:** похідна $Z'_x(Z'_y)$ чисельно дорівнює *тангенсу кута нахилу дотичної до кривої лінії*, яка утворюється перетином поверхні $z = f(x, y)$ з площиною $y = y_0$ $(x = x_0)$.

Приклад 6. Об'єм продажу нового продукту x залежить від часу t і витрат у підприємства на рекламу. Якщо t вимірювати тижнями, а y в гривнях, тоді ця залежність має вигляд: $x = 200 \cdot \left(5 - \ell^{-0,002y}\right) \cdot \left(1 - \ell^{-t}\right)$

Знайти $\frac{\partial x}{\partial t}$ та $\frac{\partial x}{\partial y}$ і вказати економічний зміст цих похідних при t=1, y=400.

Розв'язання. В даному випадку x є функцією змінних t та y. Будемо шукати потрібні за умовою задачі частинні похідні першого порядку. При диференціюванні x по змінній t змінна y буде сталою, тому:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 200 \cdot \left(5 - \ell^{-0,002y}\right) \cdot \left(1 - \ell^{-t}\right)'_t = 200\left(5 - \ell^{-0,002y}\right)\ell^{-t}$$

При диференціюванні функції x по змінній y змінна t буде сталою, тому:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 200 \cdot \left(1 - \ell^{-t}\right) \cdot \left(5 - \ell^{-0,002y}\right)'_y = 0,4\left(1 - \ell^{-t}\right)\ell^{-0,002y}$$

При t = 1 та y = 400 одержимо:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\substack{t=1 \\ y=400}} = 200\left(5 - \ell^{-0,8}\right)\ell^{-1} \approx 335;$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{\substack{t=1 \\ y=400}} = 0,4\left(1 - \ell^{-1}\right)\ell^{-0,8} \approx 0,11$$

Частина похідна x'_t характеризує швидкість зміни об'єму продажу нового продукту за тиждень, коли витрати на рекламу не змінюються.

Частинна похідна x'_y характеризує швидкість зміни об'єму продажу продукту при зміні суми витрат на рекламу і постійному t.

За один тиждень при витратах на рекламу 400 гривень швидкість зростання об'єму продажу продукту буде 0,11.

Частинну похідну функції $u = f(x, y, z)$ за **напрямком вектора** $\vec{\ell} = (\ell_x, \ell_y, \ell_z)$ знаходять за формулою:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}, \qquad \textbf{(3)}$$

де напрямні косинуси вектора $\vec{\ell}$:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\ell_x}{|\vec{\ell}|}, \quad \cos\beta = \frac{\ell_y}{|\vec{\ell}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\ell_z}{|\vec{\ell}|}}.$$

Якщо $\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2 = 1$, то координати вектора $\vec{\ell}$ будуть його напрямними косинусами.

Напрям найбільшої швидкості зміни функції $u = f(x, y, z)$ ***співпадає з напрямком вектора (його називають градієнтом u).***

$$\boxed{grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}, \qquad \textbf{(4)}$$

а величина цієї найбільшої швидкості зміни функції дорівнює довжині вектора $grad\,u$, тобто:

$$\boxed{|grad\,u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

Приклад 7. Знайти величину найбільшої швидкості зміни функції

$$u = 7x^2y - \frac{7}{2}y^2z + \frac{14}{3}z^3 \quad \text{в точці } M_0(1, 0, 3)$$

Розв'язання.

Частинні похідні першого порядку цієї функції будуть:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 14xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 7x^2 - 7yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 14z^2 - \frac{7}{2}y^2$$

В точці M_0 ці частинні похідні набувають значень:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 7; \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 14 \cdot 9 = 126$$

Величину найбільшої швидкості зміни функції u в точці M_0 знайдемо за формулою (5):

$$|grad\,u(M_0)| = \sqrt{0^2 + 7^2 + (126)^2} = \sqrt{7^2 + 7^2 \cdot 2^2 \cdot 9^2} = 7\sqrt{325} =$$
$$7\sqrt{25 \cdot 13} = 35\sqrt{13} \approx 35 \cdot 3{,}6 = 126$$

(одиниць виміру).

<u>Диференціювання складної функції</u> $z = f(u(x, y), v(x, y))$ здійснюють за формулами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad (6)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}} \qquad (7)$$

<u>Означення 7.</u> **Головна, лінійна відносно приросту аргументів $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$ частина повного приросту функції**

називається повним диференціалом функції $u = f(x_1, x_2, ... x_n)$ **і позначається du або** $df(x_1, x_2, ... x_n)$.

Повний диференціал функції $u = f(x_1, x_2, ... x_n)$ знаходять за формулою:

$$\boxed{du = f'_{x_1}\Delta x_1 + f'_{x_2}\Delta x_2 + ... + f'_{x_n}\cdot \Delta x_n} \qquad \textbf{(8)}$$

Частинним диференціалом відносно змінної $x_к$ називають $f'_{x_k}\cdot \Delta x_k$ і позначають $d_{x_k} f$. У випадку функції 2 змінних $z = f(x, y)$: повний приріст в точці $M_0(x_0 y_0)$ буде:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 y_0);$$

повний диференціал цієї функції в точці M_0 буде:

$$\boxed{dz = f'_x(x_0 y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y};$$

наближена рівність $dz(M_0) \approx \Delta z(M_0)$ дозволяє одержати формулу:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0 y_0)\Delta y}, \ (9)$$

яка використовується для знаходження наближених значень функції двох змінних.

Приклад 8. Знайти наближене значення функції $z = 2x^2 + 3xy + y^2$ в точці $M_1(1,02; 1,97)$.

Розв'язання. Потрібне значення заданої функції z будемо шукати за формулою (9). Нехай M_0 (1, 2), тоді $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = -0,03$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку функції z в точці M_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y \Rightarrow \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 4 + 3\cdot 2 = 10;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y \Rightarrow \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7.$$

Підставимо значення $z(M_0) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 = 12$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 10$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 7$, $\Delta x = 0,02$ та $\Delta y = -0,03$ у формулу (9). Одержимо: $z(M_1) = 12 + 10 \cdot 0,02 + 7 \cdot (-0,03) = 12 + 0,2 - 0,21 = 11,99$.

Означення 8. Частину похідну першого порядку по змінній x_m**, від частинної похідної першого порядку функції по змінній** $x_к$**, називають частинною похідною другого порядку функції по змінним** $x_к$ **та** x_m **і позначають:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_к \partial x_m} \quad \textbf{або} \quad u''_{x_к x_m} \quad \textbf{при } к \neq m;$$

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x_к)^2} \quad \text{або} \quad u''_{x_к x_к} \quad \textbf{при } к = m;$$

Аналогічно визначаються частинні похідні порядку $n > 2$.

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ маємо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Якщо ***<u>мішані частинні похідні другого порядку</u>*** неперервні, тоді має місце рівність:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}},$$

яка означає, що *<u>мішана частинна похідна другого порядку не залежить від порядку диференціювання функції.</u>*

Приклад 9. Довести, що функція $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$ задовольняє рівняння $x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = 0.$

Розв'язання. Для спрощення диференціювання функції z представимо її у вигляді $z = y^{3/2} \cdot x^{-1/2}$

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку функції z, що входять до заданого рівняння:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}x^{-3/2} \cdot y^{3/2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2} \cdot y^{3/2} = \frac{3}{4}x^{-5/2} \cdot y^{3/2} = \frac{3}{4}\left(x^{-5} \cdot y^3\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{-1/2} \cdot \frac{3}{2} \cdot y^{1/2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = \frac{3}{2}x^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2} = \frac{3}{4}\left(x^{-1} \cdot y^{-1}\right)^{1/2}$$

Підставимо $\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2}$ та $\frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2}$ в ліву частину заданого рівняння. Одержимо:

$$x^2 \cdot \frac{3}{4}\left(x^{-5} \cdot y^3\right)^{1/2} - y^2 \cdot \frac{3}{4}\left(x^{-1} \cdot y^{-1}\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{x^4}{x^5} \cdot y^3} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{y^4}{y} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{y^3}{x}} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{y^3}{x}} = 0$$

Права частина заданого рівняння також дорівнює нулю.

Отже, при підстановці заданої функції z в задане рівняння одержали тотожність $0 \equiv 0$. Це означає, що функція z задовольняє задане рівняння.

7.2.2 ВПРАВИ

Завдання 1. Знайти усі похідні першого порядку заданих функцій

1. $z = x^2 \cdot \ell^{-y}$ **2.** $z = x^2 \ell n y$ **3.** $z = (3y - x)^2$ **4.** $z = \frac{\ell n y}{x}$

5. $z = y\ell^{2x}$ **6.** $z = \ell^{-x} \cdot y^2$ **7.** $z = \frac{x^2 + \cos 2y}{2}$ **8.** $z = \sqrt{x^2 + 3y^2}$

9. $u = 3^x - 2arctg\frac{x}{y} + x^{3/2} \cdot y^{-5/3} - \frac{xz}{z+3}$ **10.** $u = 2x^{1/2} \cdot t - y^2 \cdot t^2 + z^3 t^{5/2}$

Завдання 2. Знайти усі похідні другого порядку функції в точці, що задана:

1. $y = arctg\frac{x}{y}$, $M_0(1, \ 1)$ **2.** $z = \ell n\left(x^2 + y\right)$, $M_0(-1, \ 2)$

3. $z = \sqrt{2xy + y^2}$, $M_0(2, \ 1)$ **4.** $z = (1 + x)^m \cdot (2 + y)^n$, $M_0(2, -1)$

5. $z = x^y$, $M_0(\ell, \ 1)$ **6.** $z = (3x + 2y)^5$, $M_0(0, \ 1)$

7. $z = \frac{2x}{y+1}$, $M_0(2, \ 1)$ **8.** $z = \ell^{2x+3y}$, $M_0(2, \ -1)$

Завдання 3. Знайти похідну за напрямком $\vec{\ell}$ та градієнт заданої функції в точці M_0.

1. $z = \ell n\sqrt{2x^2 + 2y^2}$; $\vec{\ell} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$; $M_0(1, \ -1)$

2. $z = 2x^2 - 3y^2$; $\vec{\ell} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$; $M_0(0, \ -2)$

3. $z = x^3 + y^3 - 3xy$; $\vec{\ell} = \left(\frac{1}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $M_0(2, \ 1)$

4. $u=3x^2+2y^3+z^2$; $\vec{\ell}=\left(\frac{1}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$; $M_0(2, \ -2 \ \ 1)$

5. $z=\ell n\left(3x^2+2xy^2\right)$; $\vec{\ell}=3\vec{i}-4\vec{j}$; $M_0(1, \ 2)$

6. $z=arctg(xy)$; $\vec{\ell}=4\vec{i}+3\vec{j}$; $M_0(2, \ 3)$

7. $z=\ell n(2x+3y)$; $\vec{\ell}=2\vec{i}-3\vec{j}$; $M_0(2, \ 2)$

8. $z=x^3y+xy^2$; $\vec{\ell}=(-5, \ 12)$; $M_0(1, \ 3)$

<u>Завдання 4.</u> Знайти повний диференціал функції

1. $z=x+2y+5\left(x^2+y^2-3\right)$ **2.** $u=3x^2+4y^2+z^2$ **3.** $z=\sqrt{y^2-4x}$

4. $u=xy+2yz-z^2x$ **5.** $z=\ell^{x/y}$ **6.** $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}$

7. $z=\ell n\left(4-x^2-y^2\right)$ **8.** $z=\frac{6}{x}+\frac{x}{y}+y$ **9.** $u=3\arcsin\frac{x}{3}+2^y\cdot z-z^3$

<u>Завдання 5.</u> Довести, що задана функція z задовольняє задане рівняння:

1. $z=\ell^{xy}$; $x^2z''_{xx}-y^2\cdot z''_{yy}=0$

2. $z=\ell^{-\cos(Nx+y)}$; $N^2\cdot z''_{yy}=z''_{xx}$

3. $z=\sin^2(y-Nx)$; $N^2\cdot z''_{yy}=z''_{xx}$

4. $z=\frac{x}{y}$; $x^2\cdot z''_{xx}+2xyz''_{xy}+y^2\cdot z''_{yy}=0$

5. $z=\ell n\left(x^2+y^2+2y+1\right)$; $z''_{xx}+z''_{yy}=0$

6. $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$; $x^2\cdot z''_{xx}-(y^2\cdot z'_y)^1_y=0$

7.3. Оптимальні значення функції

7.3.1. Екстремальні значення функції двох змінних.

<u>Означення9</u>. Функції кількох змінних $u=f(M)$, $M\in D\subset E_n$ **має максимум (мінімум) в точці M_0, якщо** $f(M_0)>f(M)$ $(f(M_0)<f(M))$ **для усіх точок M із достатньо малого околу точки M_0.**

Максимуми та мінімуми функції кількох змінних називають екстремумами функції, а точку M_0 - точкою екстремуму функції

Необхідні умови існування екстремуму

Якщо функція $u=f(x_1,x_2,...x_n)$ *має екстремум в точці* $M_0(x_{10},x_{20},...x_{no})$, *то усі частинні похідні першого порядку функції дорівнюють нулю або деякі з них не існують в цій точці.*

Точки, в яких $u'_{x_\kappa}(\kappa=1,2,...,n)$ ***не існують або дорівнюють нулю називають критичними точками або підозрілими на екстремум.***

<u>Достатні умови існування екстремуму функції двох змінних.</u>

Нехай в околі критичної точки $M_0(x_0, y_0)$ функція $z=f(x,y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно, $a_{11}=\frac{\partial^2 f(x_0y_0)}{(\partial x)^2}$, $a_{22}=\frac{\partial^2 f(x_0y_0)}{(\partial y)^2}$, $a_{12}=\frac{\partial^2 f(x_0y_0)}{\partial y\partial x}$,

$$\boxed{d=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2}$$

Тоді:**1.** *якщо d > 0, то функція $f(x, y)$ в точці M_0 має екстремум, причому максимум при $a_{11} < 0$, мінімум при $a_{11} > 0$.*

2. якщо d < 0, то функція в точці M_0 екстремуму не має.

3. при d=0 в точці M_0 екстремум може існувати, а може і не існувати. В цьому випадку треба використовувати іншу достатню ознаку.

Для <u>знаходження екстремумів функції</u> двох змінних $z = f(x, y)$ доцільно діяти в наступному порядку:

1. *знайти область визначення функції;*

2. *знайти частинні похідні першого порядку z'_x та z'_y;*

3. *визначити критичні точки функції, тобто такі x та y, при яких z'_x та z'_y не існують або дорівнюють нулю, і які належать області визначення функції;*

4. *знайти частинні похідні другого порядку: z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy};*

5. *застосувати достатню ознаку існування екстремуму функції в кожній критичній точці, тобто обчислити:*

$$d(M_k) = \frac{\partial^2 f(x_\kappa, y_\kappa)}{(\partial x)^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_\kappa, y_\kappa)}{(\partial y)^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_\kappa, y_\kappa)}{\partial x \partial y}\right)^2$$

в кожній критичній точці $M_\kappa(x_\kappa, y_\kappa)$ і зробити висновок

Приклад 10. Дослідити на екстремум функцію:

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 7$$

Розв'язання. Ця функція визначена для усіх $(x , y) \in E_2$. Знайдемо її частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15\,; \qquad z'_y = +6xy - 12$$

Ці похідні існують при усіх $(x , y) \in E_2$, тому критичними точками функції будуть лише ті точки, де $z'_x = 0$

та $z'_y = 0$. Отже, для знаходження критичних точок треба розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ +6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Цю систему нелінійних алгебраїчних рівнянь можна розв'язати різними способами.

З другого рівняння системи можна одержати рівність

$$y = \frac{2}{x} \qquad (*)$$

і підставити її в перше рівняння. Тоді це рівняння прийме вигляд:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Розв'язком біквадратного рівняння будуть:

$x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2;$

$x^2 = 1 \Rightarrow x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

Підставимо знайдені значення x в (*) і одержимо:

$$y_1 = \frac{2}{2} = 1\,; \quad y_2 = \frac{2}{-2} = -1\,; \quad y_3 = \frac{2}{1} = 2\,; \quad y_4 = \frac{2}{-1} = -2$$

Отже, критичними точками заданої функції будуть точки:

$M_1(2, 1)$, $M_2(-2,-1)$, $M_3(1, 2)$, $M_4(-1, -2)$.

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку заданої функції: $z''_{xx} = 6x$; $z''_{xy} = 6y$; $z''_{yy} = 6x$

і $d(M) = 6x \cdot 6x - (6y)^2 = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)$ (**)

Тепер застосуємо достатню ознаку існування екстремуму функції двох змінних до кожної критичної точки.

Для точки M_1 : $d(M_1) = 36(4 - 1) > 0$, причому $z''_{xx}(M_1) = 12 > 0$.

Тому в точці M_1 функція має мінімум

$Z_{min} = Z(M_1) = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 15 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 1 + 7 = -21.$

Для точки M_2 : $d(M_2) = 36(4 - 1) > 0$, причому $z''_{xx}(M_2) = -12 < 0$.

Тому в точці M_2 функція має максимум

$Z_{max} = Z(M_2) = (-2)^3 + 3(-2)(-1)^2 - 15(-2) - 12 \cdot (-1) + 7 = 35$

Для точки M_3 : $d(M_3) = 36(1 - 4) < 0$, тому функція в цій точці екстремуму не має.

Для точки M_4 : $d(M_4) = 36(1 - 4) < 0$, тому функція в цій точці екстремуму не має.

7.3.2. Метод Лагранжа знаходження умовного екстремуму

❒ **<u>Означення10</u>.Екстремум функції** $z = f(x, y)$ **при виконанні умови** $\varphi(x, y) = 0$ **називають умовним екстремумом функції**

Для знаходження <u>умовного екстремуму</u> методом Лагранжа треба:

1. записати функцію Лагранжа у вигляді:

$$\boxed{L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y);}$$

2. знайти критичні точки $M_к(x_к, y_к, \lambda_к)$ функції Лагранжа, використовуючи необхідні умови існування екстремуму функції:

$$\boxed{\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}}$$

3. перевірити в кожній критичній точці достатні умови існування екстремуму:

а) *якщо в точці $M_к(x_к, y_к, \lambda_к)$ визначник третього порядку:*

$$\boxed{\Delta(M_к) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_к) & \varphi'_y(M_к) \\ \varphi'_x(M_к) & L''_{xx}(M_к) & L''_{xy}(M_к) \\ \varphi'_y(M_к) & L''_{xy}(M_к) & L''_{yy}(M_к) \end{vmatrix}}$$

додатний, тоді точка $M_к$ є точкою максимуму і

$$Z_{max} = f(M_к) = f(x_к, y_к).$$

б) якщо визначник $\Delta(M_к) < 0$, тоді точка $M_к$ є точкою мінімуму і

$$Z_{min} = f(M_к) = f(x_к, y_к).$$

Приклад 11. Знайти екстремум функції $z = x + 2y$ при умові $x^2 + y^2 = 5$.

Розв'язання. Для знаходження потрібного умовного екстремуму застосуємо метод Лагранжа.

У даному випадку функція Лагранжа прийме вигляд

$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$;

Необхідні умови існування екстремуму мають вигляд

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Для знаходження критичних точок функції Лагранжа розв'яжемо останню систему.

З першого рівняння системи одержимо: $2\lambda = \dfrac{-1}{x}$ і підставимо це 2λ в друге рівняння. Одержимо: $2 - \dfrac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = 2x$. Тепер останнє рівняння системи буде: $x^2 + (2x)^2 - 5 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$.

Із рівності $2\lambda = \frac{-1}{x}$ слідує, що $\lambda = \frac{-1}{2x}$.

Тому $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

Із рівності $y = 2x$ одержимо: $y_1 = 2$, $y_2 = -2$.

Отже, критичними точками функції Лагранжа будуть

$$M_1\left(1, \quad 2, \quad -\frac{1}{2}\right) \text{ та } M_2\left(-1, \quad 2, \quad \frac{1}{2}\right).$$

Для перевірки достатніх умов існування екстремуму в кожній критичній точці знайдемо потрібні похідні в довільній точці M(x, y):

$$\varphi'_x(M) = 2x; \quad \varphi'_y(M) = 2y; \quad L''_{xx} = 2\lambda; \quad L''_{xy} = 0; \quad L''_{yy} = 2\lambda$$

Тепер запишемо та обчислимо визначник третього порядку:

$$\Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 16 + 4 = 20 > 0$$

Отже, в точці M_1 функція має максимум, причому

$$Z_{\max} = z(M_1) = 1 + 2 \cdot 2 = 5.$$

$$\Delta(M_2) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -16 - 4 = -20 < 0$$

Отже, в точці M_2 функція має min: $Z_{\min} = Z(M_2) = -1 + 2(-2) = -5$.

7.3.3. Найбільше і найменше значення функції в замкненій області

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції у замкненій області $\overline{D}$, які позначають $\max\limits_{D} f(x,y)$,

$\min\limits_{D} f(x,y)$, відповідно, треба знайти екстремальні значення функції в точках, що лежать всередині області D та на межі області, і обрати з них найбільше та найменше значення.

Приклад 12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в трикутнику, що обмежений лініями $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо критичні точки заданої функції:

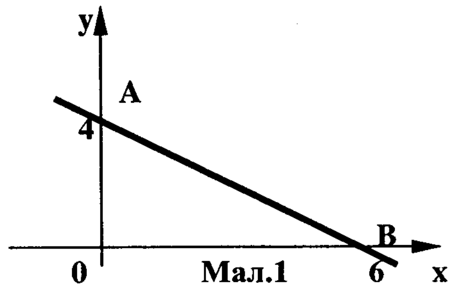
$$\begin{cases} Z'_x = 0 \\ Z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ 2 \cdot 2y - y = 4 \Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y = 4/3, x = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Критична точка $M_0\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$ лежить в середині вказаного трикутника тому, що $x_0 = \frac{8}{3} > 0$, $y_0 = \frac{4}{3} > 0$, а $2x_0 + 3y_0 - 12 < 0$ (див. мал. 1).

Знайдемо значення функції Z в точці M_0:

$$Z(M_0) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{8}{3} = -\frac{48}{9}$$



Мал.1

Тепер будемо досліджувати функцію Z на сторонах трикутника - його межі.

На замкненому відрізку ОА функція Z приймає вигляд $Z=y^2$ тому, що $x = 0$ на цьому відрізку.

Критичною точкою буде: $Z' = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$, тобто $M_1(0, 0)$.

Маємо: $Z(M_1) = 0$; $Z(A) = f(0,4) = 16$

На замкненому відрізку ОВ $y = 0$ і функція Z приймає вигляд: $Z = x^2 - 4x$. Критичною точкою буде: $Z' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Маємо: $Z(2, 0) = 4 - 8 = -4$; $Z(B) = Z(6, 0) = 36 - 24 = 12$.

На відрізку АВ $y = \frac{12-2x}{3} = 4 - \frac{2}{3}x$ і функція Z приймає вигляд:

$$Z = x^2 - x\left(4 - \frac{2}{3}x\right) + \left(4 - \frac{2}{3}x\right)^2 - 4x = \frac{19}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 16$$

Знайдемо критичну точку цієї функції. Із рівності

$$Z'_x = \frac{38}{9}x - \frac{40}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{3} : \frac{38}{9} = \frac{60}{19}; y = \frac{36}{19}.$$

Значення функції Z в цій точці буде:

$$Z\left(\frac{60}{19}\right) = \frac{19}{9} \cdot \left(\frac{60}{19}\right)^2 - \frac{40}{3} \cdot \left(\frac{60}{19}\right) + 16 = \frac{400}{19} - \frac{400}{19} + 16 = 16$$

Отже, одержали наступні значення функції:

$$Z(M_0) = -\frac{48}{9}; \quad Z(0) = 0; \quad Z(A) = 16; \quad Z(2, \quad 0) = -4; \quad Z(B) = 12;$$

$$Z\left(\frac{60}{19}\right) = 16$$

Обираємо серед них найбільше значення $\max\limits_{\Delta OAB} Z = 16$. Це значення функція приймає в точці А та всередині відрізка АВ.

Найменше значення функції $\min\limits_{\Delta OAB} Z = \frac{-48}{9}$. Це значення функція Z приймає всередині трикутника.

7.3.4 ВПРАВА

Завдання 1. Знайти екстремуми функцій:

1. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 3$

2. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 + 5$

3. $z = \ell^{x/2}\left(x + y^2\right) + \frac{3}{\ell}$

4. $z = \ell^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$

5. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 22$

6. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$

7. $z = (x-1)^2 + 2y^2 + 3$

8. $z = (x-1)^2 - 2y^2 + 9$

Завдання 2. Знайти умовні екстремуми функцій

1. $z = xy$ при $x + y = 1$

2. $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$

3. $z = x^2 + y^2$ при $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

4. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ при $y - x = \frac{\pi}{4}$

5. $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$

6. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y - 2 = 0$

7. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$

8. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$

<u>Завдання 3</u>. Знайти найбільше та найменше значення функції в області, що вказана:

1. $z = x^2 - y^2$ в колі $x^2 + y^2 \le 4$

2. $z = \ell^{-x^2-y^2} \cdot (2x^2 + 3y^2)$ в колі $x^2 + y^2 \le 4$

3 . $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$

4. $z = x^2 \text{ x } y^2$ в колі $x^2 + y^2 \le 1$

5. $z = x^2 - y^2$ в колі $x^2 + y^2 \le 1.$

6. $z = x^2 + y^2 - 3xy$ в області $D = \{0 \le x \le 2;\ -1 \le y \le 2\}$

<u>Завдання 4</u>. Із усіх прямокутних трикутників із заданою площиною S, знайти такий, гіпотенуза якого має найменше значення.

Розділ 8

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

8.1. Означення та властивості

<u>Означення 1.</u>Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на відрізку [а, в], якщо в усіх точках цього відрізка виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$

Наприклад, для функції $f(x) = x^5$ первісною буде $F(x) = \dfrac{x^6}{6}$ тому, що $\left(\dfrac{x^6}{6}\right)' = \dfrac{1}{6} \cdot 6 \cdot x^5 = x^5$

Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$, то вона має нескінченну кількість первісних $F(x) + C$, які відрізняються лише постійним доданком С.

<u>Означення 2.</u>Сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для заданої функції $f(x)$ називають невизначеним інтегралом і позначають $\int f(x)dx$

Отже,

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \qquad \textbf{(1)}$$

Вираз $f(x)dx$ називають підінтегральним виразом, $f(x)$ - підінтегральна функція; змінну x, що стоїть під знаком *диференціала, називають змінною інтегрування;* $F(x)$ *- деяка первісна для* $f(x)$, *а C - довільна стала інтегрування.*

Процес **знаходження невизначеного інтеграла функції** $f(x)$ **називають інтегруванням цієї функції.**

Інтегрування функції - обернена дія до диференціювання.

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$; **2.** $\int dF(x) = F(x) + C$

З першої властивості випливає, що комбінація символів "$d\int$" *взаємно знищується . З другої властивості випливає, що комбінація символів* "$\int d$", *застосована до функції* $F(x)$, *додає до цієї функції довільну сталу C.*

Наприклад, а) $d\int 5^{3\sin 2x}dx = 5^{3\sin 2x}dx$; б) $\int dx = x + C$

8.2. Таблиця інтегралів

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ell n(u) + C$

3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ell na} + C$

4. $\int \ell^u du = \ell^u + C$

5. $\int cosudu = \sin u + C$

6. $\int sinudu = -\cos u + C$

7. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$

8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

9. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\sin\dfrac{u}{a} + C$

10. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{u}{a} + C$

11. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

12. $\int \dfrac{u \cdot du}{u^2 \pm a} = \dfrac{1}{2}\ell n\left|u^2 \pm a\right| + C$

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ell n\left|u + \sqrt{u^2 \pm a}\right| + C$

14. $\int shudu = chu + C$

15. $\int chudu = shu + C$

16. $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = thu + C$

У цих формулах u може бути незалежною змінною ($u = x$ або $u = t$) або проміжним аргументом ($u = \varphi(x)$ або $u = \varphi(t)$).

Табличні інтеграли грають важливу роль в інтегральному численні, тому їх треба розуміти і пам'ятати.

8.3. Основні правила інтегрування

1. *Постійний множник А можна виносити за знак інтеграла, тобто*

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$

2. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює тій самій алгебраїчній сумі*

невизначених інтегралів від кожної із функцій - доданків, тобто

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx =$$
$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \left[3x^{3/2} + 5 \cdot 2^x - \frac{7}{x}\right]dx$

Розв'язання. Використовуючи правила інтегрування одержимо

$$\int \left[3x^{3/2} + 5 \cdot 2^x - \frac{7}{x}\right]dx = 3\int x^{3/2}dx + 5\int 2^x dx - 7\int \frac{dx}{x}$$

Тепер інтеграли правої частини рівності є табличними інтегралами, тому

$$\int \left[3x^{3/2} + 5 \cdot 2^x - \frac{7}{x}\right]dx = 3\frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + 5 \cdot \frac{2^x}{\ell n 2} - 7\ell n|x| + C =$$

$$= \frac{6x^{5/2}}{5} + \frac{5 \cdot 2^x}{\ell n 2} - 7\ell n|x| + C$$

8.4. Методи інтегрування

Для знаходження заданого невизначеного інтеграла його треба звести до табличного інтеграла або до алгебраїчної комбінації табличних інтегралів. Найбільш часто використовують методи: безпосереднього інтегрування, заміни змінної (підстановки), інтегрування частинами, знаходження інтеграла за допомогою довідника.

8.4.1.Метод безпосереднього інтегрування

застосовується у тих випадках, коли підінтегральна функція f має вигляд однієї із підінтегральних функцій табличних інтегралів, але її аргумент відрізняється від змінної інтегрування постійним доданком або постійним множником

або постійним множником та постійним доданком.

Щоб змінна інтегрування стала рівною аргументу функції, використовують рівність

$$dx = \frac{1}{a}d(ax + в) \qquad (2)$$

Приклад 2. Знайти інтеграли

а) $\int (x-2)^{13}dx$ **б)** $\int \cos 3x dx$ **в)** $\int \sqrt{4-9x}dx$

Розв'язання. У випадку **а)** $(x - 2)^{13}$ є степенева функція аргументу (x - 2), а змінна інтегрування x відрізняється на сталий доданок (- 2).

Маємо: dx = d(x - 2), тому

$$\int (x-2)^{13}dx = \int (x-2)^{13}d(x-2) = \frac{(x-2)^{14}}{14} + C$$

У випадку **б)** аргумент підінтегральної функції 3x відрізняється від змінної інтегрування x множником 3. Введемо цей множник під знак диференціала. Маємо: $dx = \frac{1}{3}d(3x)$, тому

$$\int \cos 3x dx = \int \cos 3x \cdot \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}\int \cos 3x d3x = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

У випадку в) аргумент 4 - 9x степеневої підінтегральної функції відрізняється від змінної інтегрування x сталим множником (- 9) та сталим доданком 4. Введемо під знак диференціала потрібні множник та доданок. Маємо: $dx = \frac{-1}{9}d(4-9x)$, том

$$\int \sqrt{4-9x}dx = \int \sqrt{4-9x}\left(\frac{-1}{9}\right)d(4-9x) =$$

$$= \frac{-1}{9}\int (4-9x)^{1/2}d(4-9x) = -\frac{2 \cdot (4-9x)^{3/2}}{27} + C.$$

8.4.2. Метод підстановки (заміни змінної) базується на двох прийомах.

а) *Якщо для знаходження інтеграла* $\int f(x)dx$ *зробити підстановку* $x = \varphi(t)$, *тоді має місце рівність*

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$$

Інтеграл у правій частині може стати більш простим або табличним. Після його знаходження треба повернутись до початкової змінної інтегрування x. Для цього треба, щоб функція $x = \varphi(t)$ мало обернену $t = \psi(x)$.

Приклад 3. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{49-x^2}}$

Розв'язання. Зробимо підстановку $x = 7\sin t$, тоді

$$\sqrt{49-49\sin^2 t} = 7\sqrt{1-\sin^2 t} = 7\sqrt{\cos^2 t} = 7\cos t;$$

$$dx = (7\sin t)' dt = 7\cos t dt$$

Отже, одержимо

$$I = \int \frac{(7\sin t)^2 \cdot 7\cos t \cdot dt}{7\cos t} = 49\int \sin^2 t dt = \frac{49}{2}\int (1-\cos 2t)dt = \frac{49}{2}(\int dt -$$

$$-\int \cos 2t dt) = \frac{49}{2}t - \frac{49}{4}\int \cos 2t d(2t) = \frac{49}{2}t - \frac{49}{4}\sin 2t + C \quad (*)$$

Із рівності $x = 7\sin t$ одержимо: $t = \arcsin\frac{x}{7}$;

$$\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = 2\frac{x}{7}\cdot\frac{1}{7}\sqrt{49-x^2}$$

Підставимо знайдені вирази t та sin2t в рівність (*) і одержимо

$$I = \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7} - \frac{49}{4}\cdot\frac{2x}{7}\cdot\frac{\sqrt{49-x^2}}{7} + C = \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7} - \frac{x\sqrt{49-x^2}}{2} + C$$

б) *Якщо зробити заміну змінної інтегрування за формулою* $t = \varphi(x)$, *тоді має місце рівність*

$$\boxed{\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \int f(t)dt}$$

Після знаходження більш простого інтеграла правої частини треба повернутись до змінної x, використовуючи рівність $t = \varphi(x)$.

Приклад 4. Знайти $\int x\sqrt{x-5}dx$

Розв'язання. Щоб позбутися квадратного кореня, позначимо $\sqrt{x-5} = t \Rightarrow x - 5 = t^2 \Rightarrow x = t^2 + 5 \Rightarrow dx = 2tdt$ Тому $\int x\sqrt{x-5}dx = \int (t^2+5)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int (t^4+5t^2)dt = 2\int t^4dt + 10\int t^2dt =$

$$= \frac{2t^5}{5} + \frac{10t^3}{3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5} + \frac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3} + C.$$

Рекомендації. Знаходження підстановки (заміни змінної), що значно спрощує заданий інтеграл потребує певних навичок.

Якщо підінтегральний вираз містить корінь вигляду $\sqrt{a^2-x^2}$, *то доцільно застосувати тригонометричну підстановку* $x = a\cos t$ *або* $x = a\sin t$.

Після вивчення способів інтегрування ірраціональностей та тригонометричних функцій доцільно систематизувати рекомендовані підстановки (заміни змінних).

8.4.3. Метод інтегрування частинами застосовується тоді, коли під інтегралом є добуток функцій, причому хоча би одна з них є трансцендентною (не степенева). Інтегрування частинами здійснюють за формулою:

$$\boxed{\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x)} \quad (3)$$

16[69]

Приклад 5. Знайти $\int x^2 \ell nx dx$

Розв'язання. Нехай $u = \ell nx, \quad dv = x^2 dx$. Тоді $du = \frac{1}{x}dx, \; v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ (взяли лише первісну)

За формулою інтегрування частинами (3) одержимо

$$\int x^2 \ell nx dx = \ell nx \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3}\ell nx - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ell nx - \frac{x^3}{9} + C =$$

$$= \frac{x^3}{3}\left(\ell nx - \frac{1}{3}\right) + C = \frac{x^3}{3}\left(\ell nx - \frac{1}{3}\ell ne\right) + C = \frac{x^3}{3}\ell n\frac{x}{\sqrt[3]{e}} + C$$

<u>Рекомендації до застосування методу інтегрування частинами.</u> *Спрощення заданого інтеграла методом інтегрування частинами можливе за рахунок диференціювання функції* $u(x)$.

Позначимо через P(x) - многочлен відносно x.

В інтегралах вигляду

$\int P(x)e^{ax}dx,$	$\int P(x)\sin ax \cdot dx,$	$\int P(x)\cos ax \cdot dx$

Треба обирати $\boxed{u(x) = P(x)}$, а залишену частину підінтегрального виразу позначати $dv(x)$.

В інтегралах вигляду

$\int P(x)\ell naxdx,$	$\int P(x)arctgax \cdot dx,$	$\int P(x)arc\sin ax \cdot dx,$

доцільно обрати $\boxed{dv(x) = P(x)dx}$, а залишену частину підінтегрального виразу треба позначити через $u(x)$.

8.5 ВПРАВИ

<u>Завдання 1</u>. Використовуючи правила інтегрування і таблицю інтегралів знайти інтеграли (результати перевірити диференціюванням):

1. $\int (5x^2 + 4x - 3)dx$ **2.** $\int (3x^{5/2} - \frac{2}{x} + 8 \cdot 7^x)dx$

3. $\int \left(2\cos x - \frac{3}{\cos^2 x} + 6^x\right)dx$ **4.** $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$

5. $\int \frac{5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x}dx$ **6.** $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$

7. $\int \left(2\ell^x - \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ **8.** $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$ **9.** $\int \frac{\sqrt{x} - x^3\ell^x + x^2}{x^3}dx$

<u>Завдання 2.</u> Знайти інтеграли методом безпосереднього інтегрування

1. $\int \frac{dx}{(2x-3)^2}$ **2.** $\int \sqrt[5]{(8-3x)^3}dx$ **3.** $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$

4. $\int \cos 2x dx$ **5.** $\int \sin\frac{x}{3}dx$ **6.** $\int \sin(2x+3)dx$

8. $\int 2^{3x+4}dx$ **9.** $\int \frac{dx}{3x-1}$

10. $\int sh5xdx$ **11.** $\int \frac{dx}{ch^2 2x}$ **12.** $\int \ell^{2x}dx$

<u>Завдання 3.</u> Знайти інтеграли із застосуванням вказаних підстановок (заміни змінної).

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ підстановка: $x = \sin^2 t$ **2.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}, \quad t = \sqrt{x+1}$;

3. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}, \quad \sin x = t$; **4.** $\int x(5x^2 - 3)dx, \quad t = 5x^2 - 3$

5. $\int \frac{dx}{e^x + 1}, \quad t = -\ell nt$; **6.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}, \quad x = \frac{1}{t}$.

<u>Завдання 4.</u> Методом підстановки (заміни змінної) знайти інтеграли

1. $\int x(2x+5)dx$ **2.** $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$ **3.** $\int \frac{(arc\sin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$ **5.** $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ **6.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

7. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **8.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}}$

<u>Завдання 5.</u> Знайти інтеграли методом інтегрування частинами

1. $\int x\cos 3xdx$ **2.** $\int xarctgxdx$ **3.** $\int x2^{-x}dx$

4. $\int xarc\sin xdx$ **5.** $\int xarctg3xdx$ **6.** $\int x^2\ell nxdx$

7. $\int 3^x\cos xdx$ **8.** $\int arctgxdx$

<u>Завдання 6.</u> Знайти інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен.

1. $\int \frac{3x+1}{x^2-6x+10}dx$ **2.** $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$ **3.** $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+5}dx$

4. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2+x-1}}dx$ **5.** $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+13}dx$ **6.** $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$

<u>Завдання 7.</u> Застосовуючи різні методи, знайти інтеграли:

1. $\int e^x\cdot\cos xdx$ **2.** $\int e^{\sqrt{x}}dx$ **3.** $\int (x^2-2x+3)\ell nxdx$

4. $\int \frac{arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}dx$ **5.** $\int \sin\sqrt[3]{x}dx$ **6.** $\int \frac{x^2arctgx}{1+x^2}dx$

8.6. Раціональні дроби та їх інтегрування.

8.6.1. Основні поняття.

<u>Означення 3.</u>Дріб називається раціональним, якщо його чисельник та знаменник є многочленами, тобто дріб має вигляд

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_ox^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n}{в_ox^m+в_1x^{m-1}+в_2x^{m-2}+...+в_{m-1}x+в_m}$$

де a_i та $в_к$ - коефіцієнти многочленів; i = 0, 1, ..., n; к = 0, 1, 2, ..., m.

Раціональний дріб називають *правильним, якщо найвищий показник степеня чисельника n менше відповідного степеня m знаменика.*

Дріб називають ***неправильним***, *якщо* $n\ge m$.

Неправильний раціональний дріб завжди можна звести до суми многочлена степеня n - m та правильного раціонального дробу, наприклад, шляхом ділення чисельника на знаменник за правилом ділення многочленів.

<u>Означення 4.</u> Найпростішими раціональними дробами 1 - 4 типів називають правильні дроби вигляду:

1. $\frac{A}{x-a}$ **2.** $\frac{A}{(x-в)^к}$ $(к\ge 2, ціле)$

3. $\frac{Dx+E}{x^2+px+q}$ $\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$ **4.** $\frac{Cx+F}{(x^2+rx+s)^l}$ $\left(l\ge 2, ціле, \ \frac{r^2}{4}-s<0\right)$

Умови $\frac{p^2}{4}-q<0$ та $\frac{r^2}{4}-s<0$ означають, що відповідні квадратні тричлени не мають дійсних коренів і не розкладаються на множники.

Правильний раціональний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n < m)$ ***можна представити у вигляді суми найпростіших дробів.*** Для цього треба розкласти знаменник $Q_m(x)$ на множники. Тоді кожному кореню знаменника $x = a$ кратності к в розкладі дробу відповідає сума к найпростіших дробів:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)}+\ldots+\frac{A_к}{(x-a)^к}$$

Кожному тричлену $x^2 + px + q$ знаменника $Q_m(x)$, що не розкладається на множники і має кратність к, в розкладі дробу відповідає сума:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_кx+C_к}{(x^2+px+q)^к}$$

Коефіцієнти A_1, $A_2,\ldots,A_к$, B_1, $B_2,\ldots,B_к$, C_1, $C_2,\ldots,C_к$ розкладу знаходять методом невизначених коефіцієнтів (привести дроби до загального знаменника і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x в чисельниках) або шляхом надання x певних значень в тотожності чисельників, одержаної після приведення дробів до загального знаменника.

Приклад 6. Представити дріб $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ у вигляді суми найпростіших дробів.

Розв'язання. Знаменник заданого дробу має корінь $x = -1$ кратності 3 та корінь $x = 2$ кратності 1. Тому заданий дріб можна представити у вигляді

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3}+\frac{A_4}{x-2} \qquad (*)$$

Приведемо праву частину рівності до загального знаменника, що дорівнює знаменнику лівої частини рівності. Тоді одержимо рівність чисельників:

$$x^2 + 2 = A_1(x + 1)^2 \cdot (x - 2) + A_2(x + 1) \cdot (x - 2) +$$
$$+A_3(x - 2) + A_4(x + 1)^3 \quad (**)$$

або $x^2 + 2 = (A_1 + A_4)x^3 + (A_2 + 3A_4)x^2 + (A_3 - A_2 - 3A_1 +$
$+ 3A_4)x + (- 2 A_3 - 2A_2 - -2A_1 + A_4)$

Коефіцієнти при x^3, x^2, x та x^0 в обох частинах рівності повинні бути рівними. Тому одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу:

$$\begin{cases} A_1 + A_4 = 0 \\ A_2 + 3A_4 = 1 \\ A_3 - A_2 - 3A_1 + 3A_4 = 0 \\ A_4 - 2A_3 - 2A_2 - 2A_1 = 2 \end{cases}$$

Це лінійна неоднорідна система 4 рівнянь з 4 невідомими.

Розв'язав цю систему, одержимо:

$$A_1 = -\frac{2}{9};\quad A_2 = \frac{1}{3};\quad A_3 = -1;\quad A_4 = \frac{2}{9}$$

Відмітимо, що коефіцієнти розкладу можна знайти шляхом надання x конкретних числових значень в рівності (**).

Отже, заданий правильний раціональний дріб прийме вигляд:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{-2}{9}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-2}$$

8.6.2. Інтегрування раціонального дробу

Нехай потрібно знайти $\int\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$

Якщо дріб неправильний, то його треба представити у вигляді суми многочлена M_{n-m} та правильного раціонального дробу $\dfrac{f(x)}{Q_m(x)}$, який треба представити у вигляді суми найпростіших раціональних дробів.

Інтеграли від найпростіших раціональних дробів виражаються через елементарні функції, а саме:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ell n|x-a| + C; \quad \int \frac{Bdx}{(x-a)^{\kappa}} = \frac{B}{(1-\kappa)(x-a)^{1-k}} + C$$

$$\int \frac{Dx+E}{x^2+px+q}dx = \frac{D}{2}\ell n\left|x^2+px+q\right| + \frac{2E-Dp}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Інтеграл від найпростішого раціонального дробу 4 типу шляхом інтегрування частинами зводять до інтеграла від найпростішого раціонального дробу третього типу або використовують метод Остроградського.

Знаходження інтеграла від раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ у випадку наявності кратних коренів знаменника $Q(x)$ можна здійснювати ***методом Остроградського*** за формулою

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{M_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{M_2(x)}{Q_2(x)}dx,} \quad (*)$$

де $Q_1(x)$- найбільший загальний дільник $Q(x)$ та похідної $Q'(x)$, $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$; $M_1(x)$ та $M_2(x)$- многочлени порядку на одиницю меншого порядку $Q_1(x)$ та $Q_2(x)$, відповідно, з невідомими коефіцієнтами.

Коефіцієнти многочленів $M_1(x)$ та $M_2(x)$ знаходять після диференціювання рівності (*) методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 7. Знайти $\int \frac{3x+2}{\left(x^3+1\right)^2}dx.$

Розв'язання. В заданому інтегралі знаменник дробу $Q(x) = \left(x^3+1\right)^2 = (x+1)^2\left(x^2-x+1\right)^2$

має один дійсний та пару комплексно спряжених двократних коренів.

Найбільшим загальним дільником $Q(x) = \left(x^3+1\right)^2$ та $Q'(x) = 2\left(x^3+1\right) \cdot 3x^2$ буде $Q_1(x) = x^3+1$.

Тому $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = \frac{\left(x^3+1\right)^2}{x^3+1} = x^3+1$ і формула (*) приймає вигляд:

$$\int \frac{3x+2}{\left(x^3+1\right)^2}dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}dx. \quad (**)$$

Шляхом диференціювання цієї рівності одержим

$$\frac{3x+2}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{(2Ax+B)\left(x^3+1\right) - \left(Ax^2+Bx+C\right) \cdot 3x^2}{\left(x^3+1\right)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1} (***)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів.

Після приведення правої частини (***) до загального знаменника в силу рівності дробів одержимо тотожню рівність чисельників

$$3x+2 \equiv Dx^5 + (E-A)x^4 + (F-2B)x^3 + (D-3C)x^2 + (2A+E)x + B + F$$

Коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах тотожності повинні бути рівними. Тому маємо:

при x^5: D=0; при x^4: E-A=0 $\Rightarrow$ E=A;

при x^3: F-2B=0 $\Rightarrow$ F=2B; при x^2: D-3C=0 $\Rightarrow$ C=0;

при x: 2A+E=3 $\Rightarrow$ 3A=3 $\Rightarrow$ A=1=E;

при x^0: B+F=2 $\Rightarrow$ 3B=2 $\Rightarrow$ B=$\frac{2}{3}$, F=$\frac{4}{3}$.

Підставимо знайдені коефіцієнти в рівність(**):

$$\int \frac{3x+2}{\left(x^3+1\right)^2}dx = \frac{x^2+\frac{2}{3}x}{x^3+1} + \int \frac{x+\frac{4}{3}}{x^3+1}dx$$

Підінтегральна функція інтеграла $\int \frac{x+\frac{4}{3}}{x^3+1}dx$ є правильним раціональним дробом, знаменник якого $x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$ має один дійсний корінь *x= -1* та пару комплексно спряжених коренів.

Розкладемо цей дріб на суму найпростіших раціональних дробів з використанням методу невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x+\frac{4}{3}}{x^3+1} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2-x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+\frac{4}{3}}{x^3+1} = \frac{A_1x^2 - A_1x + A_1 + B_1x^2 + B_1x + C_1x + C_1}{x^3+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{4}{3} \equiv (A_1+B_1)x^2 + (B_1+C_1-A_1)x + A_1 + C_1$$

$$\begin{matrix} \text{при } x^2: \\ \text{при } x: \\ \text{при } x^0: \end{matrix} \begin{cases} A_1+B_1=0 \\ B_1+C_1-A_1=1 \Rightarrow \\ A_1+C_1=\frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} A_1=-B_1; \\ \begin{cases} -2A_1+C_1=1 \Rightarrow \\ A_1+C_1=\frac{4}{3} \end{cases} \end{matrix}$$

$$3C_1=\frac{11}{3} \Rightarrow C_1=\frac{11}{9}; \qquad A_1=\frac{1}{9}; \qquad B_1=\frac{-1}{9}.$$

Отже, $\int \frac{x+\frac{4}{3}}{x^3+1}dx = \int\left[\frac{1}{9(x+1)} + \frac{-\frac{x}{9}+\frac{11}{9}}{x^2-x+1}\right]dx =$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{9}\int\frac{x-11}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{18}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx +$$

$$+\frac{7}{6}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{18}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{7}{3\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{(x-\frac{1}{2})\cdot 2}{\sqrt{3}} + C$$

Підставимо в (****) знайдений інтеграл і одержимо:

$$\int\frac{3x+2}{\left(x^3+1\right)^2}dx = \frac{3x^2+2x}{3\left(x^3+1\right)} + \ln\frac{|x+1|^{\frac{1}{9}}}{\left|x^2-x+1\right|^{\frac{1}{18}}} + \frac{7\sqrt{3}}{9}\,arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Приклад 8. Знайти $I=\int\frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx$

Розв'язання. Спочатку треба визначити вид підінтегральної функції. В заданому інтегралі підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом тому, що найвищий показник степеня x в чисельнику 3, а в знаменнику - лише 2.

Щоб представити неправильний дріб у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу, поділимо чисельник $x^3 + x + 2$ на знаменник $(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12$ за правилом ділення многочленів:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3+x+2 & x^2-7x+12 \\
 & \underline{x^3-7x^2+12x} & \overline{x+7+\dfrac{38x-82}{x^2-7x+12}} \\
- & 7x^2-11x+2 & \\
 & \underline{7x^2-49x+84} & \\
 & 38x-82 &
\end{array}
$$

Тому

$$I=\int\left(x+7+\frac{38x-82}{x^2+7x+12}\right)dx=\frac{x^2}{2}+7x+\int\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}dx \qquad (****)$$

Тепер правильний раціональний дріб представимо у вигляді суми найпростіших раціональних дробів:

$$\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}$$

Приведемо праву частину до загального знаменника і одержимо рівність чисельників: 38x - 82 = A(x - 4) + B(x - 3).

При x = 3 маємо: $38\cdot3-82=-A\Rightarrow A=82-114=-32$

При x = 4 маємо: $38\cdot4-82=B\Rightarrow B=152-82=70$

Отже $$\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=\frac{-32}{x-3}+\frac{70}{x-4}$$

Тому

$$\int\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}dx=\int\left(\frac{-32}{x-3}+\frac{70}{x-4}\right)dx=-32\ell n|x-3|+70\ell n|x-4|+C$$

Підставимо в рівність (****) і одержимо:

$$I=\frac{x^2}{2}+7x-32\ln|x-3|+70\ln|x-4|+C.$$

8.7. Інтегрування виразів, що містять ірраціональності

Розглянемо інтеграли вигляду:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{а) } \int R\left(x^{\alpha},x^{\beta},x^{\gamma}\right)dx \\ \text{б) } \int R\left((ax+в)^{\alpha},(ax+в)^{\beta},(ax+в)^{\gamma}\right)dx \\ \text{в) } \int R\left(x,\left(\dfrac{ax+в}{cx+d}\right)^{\alpha},\left(\dfrac{ax+в}{cx+d}\right)^{\beta},\left(\dfrac{ax+в}{cx+d}\right)^{\gamma}\right)dx,\end{array}}$$

де α, β, γ - дробові раціональні числа, R - раціональна функція вказаних аргументів. Наприклад, у випадку б) аргументів $(ax+в)^{\alpha},(ax+в)^{\beta},(ax+в)^{\gamma}$.

Вказані інтеграли зводяться до інтегралів від раціональної функції підстановками:

$$\boxed{\text{а) } x=t^q \quad \text{б) } (ax+в)=t^q \quad \text{в) } \left(\frac{ax+в}{cx+d}\right)=t^q,}$$

відповідно, де **q** найменший загальний знаменник дробів α, β та γ.

✧ **Приклад 9.** Знайти інтеграли:

а) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$ б) $\displaystyle\int\frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}dx$

Розв'язання. а) Заданий інтеграл представимо у вигляді

$$\int\frac{x^{1/6}dx}{x^{4/3}+x^{5/4}}$$

Найменшим загальним знаменником дробових показників степеня $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{3}$ та $\frac{5}{4}$ буде q = 12. Тому зробимо підстановку $x=t^{12}\Rightarrow dx=12t^{11}dt$.

Тоді

$$\int\frac{x^{1/6}dx}{x^{4/3}+x^{5/4}}=\int\frac{t^2\cdot 12t^{11}\cdot dt}{t^{16}+t^{15}}=12\int\frac{dt}{t^2(t+1)}=-12\int\frac{t^2-1-t^2}{t^2(t+1)}dt=$$

$$=-12\left[\int\frac{t-1}{t^2}dt-\int\frac{dt}{t+1}\right]=-12\left[\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t^2}-\int\frac{dt}{t+1}\right]=$$

$$=-12\left(\ell nt+\frac{1}{t}-\ell n(t+1)\right)+C=-12\left(\frac{1}{t}+\ell n\left|\frac{t}{t+1}\right|\right)+C=$$

$$=\ell n\left(\frac{t+1}{t}\right)^{-12}-\frac{12}{t}+C=\ell n\frac{\left(\sqrt[12]{x}+1\right)^{-12}}{x}-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+C$$

б) Зробимо підстановку $\frac{x+3}{x-3}=t^2$. Звідси визначимо x та dx

$$x+3=xt^2-3t^2\Rightarrow 3(1+t^2)=x(t^2-1)\Rightarrow x=\frac{3(1+t^2)}{t^2-1}$$

$$dx=\frac{6t(t^2-1)-3(1+t^2)\cdot 2t}{(t^2-1)^2}dt=\frac{-12t}{(t^2-1)^2}dt$$

Тому

$$\int\frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}dx=\int t^2\cdot t\frac{-12t}{(t^2-1)^2}dt=-12\int\frac{t^4}{(t^2-1)^2}dt$$

Останній інтеграл будемо знаходити методом інтегрування частинами: нехай $u=t^3$, $dv=\frac{t}{(t^2-1)^2}dt$, тоді $du=3t^2dt$, $v=\frac{-1}{2(t^2-1)}$. Отже,

$$\int\frac{t^4}{\left(t^2-1\right)^2}dt=\frac{-t^3}{2\left(t^2-1\right)}+\int\frac{3t^2dt}{2\left(t^2-1\right)}=\frac{-t^3}{2\left(t^2-1\right)}+$$

$$+\frac{3}{2}\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\frac{-t^3}{2(t^2-1)}+\frac{3t}{2}+\frac{3}{4}\ell n\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

Повертаючись від змінної t до змінної x, одержимо:

$$\int\frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}dx=\frac{(15-x)}{12}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}+\frac{3}{4}\ell n\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}\right|+C$$

8.8. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції

Спочатку розглянемо інтеграли від деяких класів тригонометричних функцій, а саме:

а) $\int R(\sin x,\cos x)dx$ **б)** $\int R(\sin x)\cos xdx$
в) $\int R(\cos x)\sin xdx$ **г)** $\int R(tgx)dx$,

де R(.) – раціональна функція відносно вказаного аргументу.

Для знаходження інтеграла вигляду **а)** треба застосувати *універсальну тригонометричну підстановку*

$$\boxed{tg\frac{x}{2}=t}\qquad(4)$$

і використати формули:

$$x=2arctgt;\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad(5)$$

✧ **Приклад 10.** Знайти інтеграл $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$

Розв'язання. Підінтегральна функція заданого інтеграла є раціональною функцією sinx та cosx. Тому застосуємо підстановку (4) та формули (5). Одержимо:

$$\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{\left(2arctgt+\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int 2arctgtdt+\int\frac{2t}{1+t^2}dt\qquad(6)$$

Методом інтегрування частинами знайдемо первісну

$$2\int arctgtdt = \left[\begin{array}{ll} u = arctgt \quad \Rightarrow & du = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ dv = dt \quad \Rightarrow & v = t \end{array}\right] = 2\left(tarctgt - \int \frac{tdt}{1+t^2}\right) =$$

$$= 2\left(tarctgt - \frac{1}{2}\ell n\left|t^2+1\right|\right) = 2tarctgt - \ell n\left|t^2+1\right|$$

Методом підстановки одержимо первісну

$$\int \frac{2tdt}{1+t^2} = \ell n\left|1+t^2\right|$$

Підставимо знайдені первісної в формулу (6). Тоді

$$\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx = 2tarctgt - \ell n\left|t^2+1\right| + \ell n\left|t^2+1\right| + C = 2tarctgt + C$$

Повертаючись до змінної інтегрування x = 2arctgt та $t = tg\dfrac{x}{2}$, одержимо $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx = xtg\frac{x}{2} + C$.

Для знаходження інтеграла вигляду **б)** треба зробити підстановку

$$\sin x = t \tag{7}$$

Тоді dt = cosxdx і інтеграл прийме вигляд: $\int R(t)dt$

Для знаходження інтеграла вигляду в) треба зробити підстановку

$$\cos x = t \tag{8}$$

Тоді інтеграл прийме вигляд: $-\int R(t)dt$

Для знаходження інтеграла вигляду г) треба зробити підстановку

$$tgx = t \tag{9}$$

Тоді $\displaystyle\int R(tgx)dx = \int R(t)\cdot\frac{dt}{1+t^2}$

Приклад 11. Знайти інтеграли

а) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$ б) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+tgx}$

Розв'язання. У випадку **а)** маємо:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{2+\cos x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\cdot\sin x\cdot dx,$$

тобто одержали інтеграл вигляду $\int R(\cos x)\sin xdx$.

Зробимо заміну cosx = t, тоді dt = - sinx x dx, а інтеграл прийме вигляд,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \frac{t^2-1}{t+2}dt = \int\left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt =$$

$$= \int tdt - 2\int dt + 3\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln(t+2) + C =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ell n(\cos x + 2) + C$$

У випадку б) підінтегральна функція є раціональною функцією відносно tgx. Тому зробимо заміну tgx = t. Тоді

$$x = arctgt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+tgx} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+t} = \int \frac{dt}{(t+1)(1+t^2)} \tag{10}$$

Представимо правильний раціональний дріб у вигляді суми найпростіших раціональних дробів:

$$\frac{1}{(t+1)(1+t^2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+D}{t^2+1} \Rightarrow 1 = A(t^2+1) + (Bt+D)(t+1)$$

При t = - 1 маємо: $1 = 2A \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}$;

17[69]

При $t=0$ маємо: $1 = A + D \Rightarrow D = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

При $t=1$ маємо:

$1 = 2A + 2B + 2D \Rightarrow 2B = 1 - 1 - 1 = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Отже

$$\int \frac{dt}{(t+1)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{-t+1}{t^2+1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t+1) - \frac{1}{4}\ln\left|1+t^2\right| + \frac{1}{2}arctgt + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ell n \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + arctgt\right) + C = \frac{1}{2}\left(\ell n \frac{tgx+1}{\sqrt{1+tg^2 x}} + x\right) + C$$

Для знаходження інтегралів вигляду

$\boxed{\int \sin kx \cos \ell x dx, \int \cos kx \cos \ell x dx, \int \sin kx \sin \ell x dx}$ де к та ℓ - дійсні числа ($k \neq \ell$), використовують наступні формули:

$$\sin kx \cdot \cos \ell x = \frac{1}{2}[\sin(k-\ell)x + \sin(k+\ell)x]$$

$$\cos kx \cdot \cos \ell x = \frac{1}{2}[\cos(k-\ell)x + \cos(k+\ell)x] \qquad (11)$$

$$\sin kx \cdot \sin \ell x = \frac{1}{2}[\cos(k-\ell)x - \cos(k+\ell)x]$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int \cos 3x \cdot \cos 9x dx$

Розв'язання.

$$\int \cos 3x \cos 9x dx = \frac{1}{2}\int [\cos(-6x) + \cos 12x] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 6x dx + \frac{1}{2}\int \cos 12x dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int \cos 6x d(6x) + \frac{1}{24}\int \cos 12x d(12x) = \frac{\sin 6x}{12} + \frac{\sin 12x}{24} + C$$

Для знаходження інтегралів вигляду

$\boxed{\int \sin^{2n} x \cdot dx, \quad \int \cos^{2n} x \cdot dx,}$ де $n > 0$ - ціле,

використовують формули:

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\ ; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}} \qquad \textbf{(12)}$$

Приклад 13. Знайти інтеграл $I = \int \cos^4 x dx$

Розв'язання.

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

Тому

$$I = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C$$

8.9 ВПРАВИ

Завдання 1. Представити у вигляді суми многочлена та найпростіших раціональних дробів

1. $\dfrac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}$; 2. $\dfrac{x^4-x^3-9x^2-10x-14}{x^2-2x-8}$;

3 $\dfrac{30x^5+90x^4+165x^3+341x^2+271x+30}{x^3+3x^2+2x}$;

Завдання 2. Розкласти на найпростіші дроби

1. $\dfrac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$ 2. $\dfrac{11x+40}{4(x-4)(x+2)}$ 3. $\dfrac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

4. $\dfrac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)}$ 5. $\dfrac{11x-4}{x^2+2x-8}$ 6. $\dfrac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}$

7. $\dfrac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}$

Завдання 3. Знайти інтеграли найпростіших раціональних дробів.

1. $\int\dfrac{dx}{x-3}$ 2. $\int\dfrac{dx}{2x-1}$ 3. $\int\dfrac{dx}{5-x}$ 4. $\int\dfrac{dx}{15-3x}$

5. $\int\dfrac{dx}{(x-2)^3}$ 6. $\int\dfrac{dx}{(x+3)^5}$ 7. $\int\dfrac{dx}{(2x-1)^4}$ 8. $\int\dfrac{dx}{(4-3x)^3}$

9. $\int\dfrac{dx}{x^2+3x+6}$ 10. $\int\dfrac{3x+4}{x^2+7x+14}dx$ 11. $\int\dfrac{2x-3}{x^2+x+5}dx$

12. $\int\dfrac{dx}{4x-9}$ 13. $\int\dfrac{dx}{x^2+4x+14}$ 14. $\int\dfrac{7x+4}{x^2+x+9}dx$

Завдання 4. Знайти інтеграли від раціональних дробів

1. $\int\dfrac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}dx$ 2. $\int\dfrac{x^2+x+12}{(x-3)(x-4)}dx$

3. $\int\dfrac{2x^4-x^3+5}{x^3-9}dx$ 4. $\int\dfrac{xdx}{1+x^3}$

Завдання 5. Знайти інтеграли

1. $\int\cos 3x\cdot\cos x dx$ 2. $\int\sin 5x\cdot\sin\dfrac{x}{2}xdx$ 3. $\int\sin\dfrac{3x}{4}\cdot\cos\dfrac{x}{4}dx$

4. $\int\sin^4 x\cos^3 xdx$ 5. $\int\cos^2 x\sin^5 xdx$ 6. $\int tg^4 xdx$

7. $\int tg^3 xdx$ 8. $\int 3\cos^2 xdx$ 9. $\int 6\sin^2 xdx$ 10. $\int\sin^4 xdx$

Завдання 6. Знайти інтеграли від функцій, що містять ірраціональність

1. $\int\dfrac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$ 2. $\int\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$ 3. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

4. $\int\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}dx$ 5. $\int\sqrt{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^3}dx$ 6. $\int\sqrt{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^3}dx$

Завдання 7. Знайти інтеграли методом Остроградського

а) $\int \frac{dx}{\left(x^3-1\right)^2}$; б) $\int \frac{x^4-2x^2+2}{\left(x^2-2x+2\right)^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{(x+1)^2\cdot\left(x^2+1\right)^2}$; г) $\int \frac{dx}{\left(x^4-1\right)^2}$.

Завдання8. Знайти інтеграли

а) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$; б) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x-1}$; г) $\int \sin^{10} x\cdot\cos^3 x dx$;

д) $\int \sin^9 x\cdot\cos^5 x dx$.

Розділ 9 **ВИЗНАЧЕНІ ТА НЕВЛАСТИВІ ІНТЕГРАЛИ**

9.1 Визначені інтеграли

9.1.1 Теоретичні відомості

Означення визначеного інтеграла

$$\int_a^в f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{,k})\Delta x_k \qquad (1)$$

де а - нижня межа, в - верхня межа інтеграла.

Теорема існування. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на скінченому відрізку [а, в] або обмежена і має скінчену кількість точок розриву на цьому відрізку, то границя інтегральної суми існує, тобто функція $f(x)$ інтегрована на [а, в].*

Основні властивості визначених інтегралів.

1. *Постійний множник А можна виносити за знак інтеграла*

$$\int_a^в Af(x)dx = A\int_a^в f(x)dx$$

2. *Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі інтегралів від кожного доданку*

$$\int_a^{в}[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)]dx=\int_a^{в}f_1(x)dx\pm\int_a^{в}f_2(x)dx\pm\ldots\pm\int_a^{в}f_n(x)dx$$

3. *Визначений інтеграл змінює свій знак на протилежний, якщо поміняти місцями межі інтегрування*

$$\int_a^{в}f(x)dx=-\int_{в}^{a}f(x)dx$$

4. *Визначений інтеграл з рівними межами дорівнює нулю*

$$\int_a^{a}f(x)dx=0$$

5. *Визначений інтеграл від більшої функції буде більшим:якщо*

$$f(x)<\varphi(x)\ \ \textit{при}\ \ x\in[a,\,в],\ \textit{то}\ \int_a^{в}f(x)dx<\int_a^{в}\varphi(x)dx$$

6. *Якщо m та M - найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на [a, в], то мають місце оцінки визначеного інтеграла*:

$$m(в-a)\le\int_a^{в}f(x)dx\le M(в-a)$$

7. *Якщо $f(x)$ неперервна [a, в], то на цьому відрізку знайдеться така точка ξ, що буде мати місце рівність*

$$\int_a^{в}f(x)dx=f(\xi)\cdot(в-a)$$

8. *Якщо $a<c<в$, то*

$$\int_a^{в}f(x)dx=\int_a^{c}f(x)dx+\int_c^{в}f(x)dx$$

при мові існування усіх цих інтегралів

Похідну визначеного інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі, знаходять за формулою:

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^{x}f(t)dt\right)'_x=f(x)\qquad\textbf{(2)}$$

9.1.2 Обчислення визначених інтегралів

Формула Ньютона-Лейбніца

$$\boxed{\int_a^{в}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{в}=F(в)-F(a)}\qquad\textbf{(3)}$$

Ця формула *вказує зв'язок визначеного інтеграла* $\int_a^{в}f(x)dx$ *з первісною* $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$ і спосіб обчислення визначених інтегралів.

Приклад 1. Знайти похідну інтеграла $\int_y^{9}x\sin 3x dx$ по змінній межі інтегрування.

Розв'язуння. У даному випадку змінною межею буде нижня межа інтеграла y. Щоб використати формулу (2) треба межі інтегрування поміняти місцями. Згідно властивості 3 визначених інтегралів маємо:

$$\int_y^{9}x\sin 3x dx=-\int_9^{y}x\sin 3x dx$$

Тепер за формулою (2) одержимо:

$$\left(-\int_9^{y}x\sin 3x dx\right)'_y=\left(y\cdot\sin 3y\right)$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_{\ell n2}^{\ell n8}\ell^{2x}dx$

Розв'язання. Заданий інтеграл будемо обчислювати за формулою Ньютона-Лейбніца (3). Спочатку знайдемо первісну методом безпосереднього інтегрування:

$$\int\ell^{2x}dx=\frac{1}{2}\ell^{2x}+C$$

Отже, первісна для підінтегральної функції $F(x)=\dfrac{\ell^{2x}}{2}$.

Тому

$$\int\limits_{\ell n2}^{\ell n8}\ell^{2x}dx=\frac{\ell^{2x}}{2}\Bigg|_{\ell n2}^{\ell n8}=\frac{1}{2}\left(\ell^{2\ell n8}-\ell^{2\ell n2}\right)=\frac{1}{2}\left(\ell^{\ell n64}-\ell^{\ell n4}\right)=\frac{1}{2}(64-4)=30$$

Обчислення визначених інтегралів **методом підстановки** (x = φ(t)) здійснюється за формулою:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt \qquad \textbf{(4)}$$

Нові межі інтегрування α та β знаходять так:

із рівності $x=\varphi(t)\Rightarrow\begin{cases}a=\varphi(\alpha)\Rightarrow & \alpha=\psi(a)\\ в=\varphi(\beta)\Rightarrow & \beta=\psi(в)\end{cases}$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_0^5 x\sqrt{4+x}dx$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної $t=\sqrt{4+x}$. Тоді $4 + x = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 4 \Rightarrow dx = 2tdt$.

Тепер знайдемо нові межі інтеграла:

із рівності $t=\sqrt{4+x}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\sqrt{4+0}=2\\ \beta=\sqrt{4+5}=3\end{cases}$.

Отже,

$$\int\limits_0^5 x\sqrt{4+x}dx=\int\limits_2^3(t^2-4)\cdot t\cdot 2tdt=\int\limits_2^3(2t^4-8t^2)dt=\left(\frac{2t^5}{5}-\frac{8t^3}{3}\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\frac{2\cdot 3^5}{5}-\frac{8\cdot 3^3}{3}-\frac{2\cdot 2^5}{5}+\frac{8\cdot 2^3}{3}==\frac{2}{5}(3^5-2^5)+\frac{8}{3}(2^3-3^3)=\frac{2}{5}\cdot 211-\frac{8}{3}\cdot 19=$$

$$=\frac{1266-760}{15}=\frac{506}{15}=33\frac{11}{15}$$

Обчислення визначених інтегралів ***методом*** ***інтегрування частинами*** здійснюють за формулою:

$$\boxed{\int\limits_a^в u(x)dv(x)=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^в-\int\limits_a^в v(x)du(x)} \qquad \textbf{(5)}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^4 x\ell^{-2x}dx$

Розв'язання. Підінтегральна функція заданого інтеграла є добутком степеневої і показникової функцій. Тому застосуємо метод інтегрування частинами.

Нехай $u=x,\quad dv=\ell^{-2x}dx.$

Тоді: $du=dx,\quad v=\int\ell^{-2x}dx=\dfrac{-\ell^{-2x}}{2}.$

Тепер за формулою (5) одержимо:

$$\int\limits_1^4 x\ell^{-2x}dx = x\cdot\left(\frac{-\ell^{2x}}{2}\right)\Bigg|_1^4+\frac{1}{2}\int\limits_1^4\ell^{-2x}dx=-2\ell^{-8}+\frac{\ell^{-2}}{2}-\frac{\ell^{-2x}}{4}\Bigg|_1^4=$$

$$=\frac{-2}{\ell^8}+\frac{1}{2\ell^2}-\frac{1}{4\ell^8}+\frac{1}{4\ell^2}=\frac{-9}{4\ell^8}+\frac{3}{4\ell^2}=\frac{3(\ell^6-3)}{4\ell^8}$$

9.1.3 Методи наближеного обчислення

Якщо відрізок інтегрування [а, в] поділити на n рівних частин довжиною $\Delta x=\dfrac{в-a}{n}$ і позначити через $\xi_к$ середню точку відрізку $[x_{к-1}, x_к]$, тоді наближене значення визначеного інтеграла можна обчислити за формулою:

$$\int\limits_a^в f(x)dx\approx\frac{в-a}{n}\left[f(\xi_1)+f(\xi_2)+...+f(\xi_n)\right], \qquad \textbf{(6)}$$

яку називають *формулою прямокутників*.

Якщо відрізок інтегрування поділити точками ділення

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_к < \ldots < x_{n-1} < x_n = в$

на n рівних частин довжиною $\Delta x = \dfrac{в-a}{n}$, тоді наближене значення інтеграла можна знайти за формулою:

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(в)}{2} + \sum_{к=1}^{n-1} f(x_к)\right], \qquad (7)$$

яку називають *формулою трапецій*. Точність $|R_n| \le \dfrac{(в-a)^3}{12n^2}\cdot \max|f''(x)|$, $x \in [a, в]$.

Якщо відрізок інтегрування [a, в] поділити на парну кількість рівних частин (n = 2m) і позначити $y_к = f(x_к)$, де $x_к = a + \Delta x \cdot к$ - точки ділення, к = 0, 1, 2, ..., 2m, тоді наближене значення визначеного інтеграла можна обчислити за формулою:

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в-a}{6m}\big(f(a)+f(b)+2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2m-2}))+$$
$$+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2m-1})\big), \qquad (8)$$

яку називають формулою Сімпсона або парабол. Точність цієї форму

$$|R_n| \le \frac{(в-a)^5}{180m^4}\cdot \max\left|f^{IV}(x)\right|, \quad a \le x \le в.$$

В усіх формулах при зростанні n Δx зменшується і права частина формули дає більш точне значення інтеграла.

✧ **Приклад 5.** Обчислити за формулою трапецій значення інтеграла $\int_0^1 \ell^{-x^2}dx$ з точністю до 0,01.

Розв'язання. Спочатку визначимо число n, яке забезпечує необхідну точність результату. Маємо:

$$f(x) = \ell^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2x\ell^{-x^2}; \quad f''(x) = 2\ell^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$$

На відрізку [0, 1] має місце оцінка $|f''(x)| \le 2$. Тому нерівність

$$\frac{(в-a)^3}{12n^2}\cdot|f''(x)| < 0{,}01 \quad \text{дає} \quad \frac{1\cdot 2}{12n^2} < 0{,}01 \Rightarrow n > \frac{10}{\sqrt{6}}$$

При n=5 остання нерівність виконується і це значення n задовольняє потрібну точність обчислення.

Знайдемо значення функції $f(x) = \ell^{-x^2}$ для аргументів $x_к$ від 0 до 1 з кроком $h = \dfrac{1-0}{5} = 0{,}2$:

$$f(o) = \ell^{-0} = 1; \quad f(1) = \ell^{-1} = 0{,}368;$$
$$f(x_1) = f(0{,}2) = \ell^{-0{,}04} = 0{,}961;$$
$$f(x_2) = f(0{,}4) = \ell^{-0{,}16} = 0{,}852; \quad f(x_3) = f(0{,}6) = \ell^{-0{,}36} = 0{,}698;$$
$$f(x_4) = f(0{,}8) = \ell^{-0{,}64} = 0{,}527.$$

Підставимо усі ці значення до формули трапецій (7). Тоді

$$\int_0^1 \ell^{-x^2}dx \approx 0{,}2\left(\frac{1+0{,}368}{2} + 0{,}961 + 0{,}852 + 0{,}698 + 0{,}527\right) =$$
$$= 0{,}2\cdot 3{,}722 = 0{,}74$$

9.1.4 ВПРАВИ

Завдання 1. Чи можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца до інтегралів

а) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ **б)** $\int_0^4 \frac{dx}{x-3}$ **в)** $\int_1^\infty x^3 dx$

Завдання 2. Знайти похідні інтегралів по змінній межі

а) $\int\limits_{\pi/6}^{x} t^5 \ell ntgtdt$ б) $\int\limits_{1}^{x} t^3 \sin\frac{t}{2}dt$ в) $\int\limits_{x}^{2} 3^u \cos 2udu$

г) $\int\limits_{0}^{y} t^5 3arc\sin 3tdt$

Завдання 3. Обчислити інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца

1). $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ 2). $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}dx$ 3). $\int\limits_{-3}^{-2}\frac{dx}{x^2-1}$

4). $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{x^2}{x^2+1}dx$ 5). $\int\limits_{\ell}^{\ell^2}\frac{dx}{x\ell nx}$ 6). $\int\limits_{1}^{\ell}\frac{\sin(\ell nx)}{x}dx$

7). $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}dx$ 8). $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ell^x}{1+\ell^{2x}}dx$ 9) $\int\limits_{o}^{8}(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$

10). $\int\limits_{0}^{\ell n2}\sqrt{\ell^x-1}dx$ 11). $\int\limits_{-1}^{2}x^2dx$ 12). $\int\limits_{1}^{2}(x^2-2x+3)dx$

13). $\int\limits_{1}^{3}\frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$ 14). $\int\limits_{0}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ 15). $\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos^2 xdx$

16). $\int\limits_{0}^{1}ch\alpha d\alpha$ 17). $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 18). $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}tgxdx$

Завдання 4. Обчислити інтеграли методом підстановки (заміни змінної)

1). $\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$ 2). $\int\limits_{1}^{4}\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ 3). $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{1+x^2}$

4). $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$ 5). $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}x\cdot\sqrt[3]{1+x^2}dx$ 6). $\int\limits_{2}^{10}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}$

Завдання 5. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами

1). $\int\limits_{0}^{1}arc\sin xdx$ 2). $\int\limits_{1}^{2}\frac{\ell nx}{x^5}dx$ 3). $\int\limits_{-1}^{1}x\ell^{-x}dx$

4). $\int\limits_{0}^{\pi/2}x\sin 2xdx$ 5). $\int\limits_{0}^{\pi/2}x\cos 2xdx$ 6). $\int\limits_{1}^{\ell}x\ell nxdx$

7). $\int\limits_{0}^{\ell}x^2\ell nxdx$ 8). $\int\limits_{1}^{\ell}\frac{\ell nx}{x^2}dx$ 9). $\int\limits_{0}^{1}arctgxdx$

10). $\int\limits_{0}^{\pi/5}x\cos 5xdx$ 11). $\int\limits_{0}^{\pi/6}x\sin 6xdx$ 12). $\int\limits_{0}^{\pi/6}x\cos 6xdx$

13). $\int\limits_{0}^{2}x\ell^{2x}dx$ 14). $\int\limits_{0}^{1}x\ell^{3x}dx$ 15). $\int\limits_{0}^{1}xarctgxdx$

Завдання 6. Знайти наближене значення інтеграла за формулою Сімпсона, поділивши проміжок інтегрування на 10 рівних частин

1). $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x}$ 2). $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ell^{x^2}\cos x}{1+x^2}dx$ 3). $\int\limits_{0,1}^{1,1}\frac{\ell^{2x^2}\cdot\sin 2x}{4+x^2}dx$

9.2 Невластиві інтеграли

9.2.1 Невластиві інтеграли з нескінченими межами інтегрування.

Невластиві інтеграли з нескінченими межами інтегрування визначають так:

$$\boxed{\int\limits_{a}^{\infty}f(x)dx=\lim_{в\to\infty}\int\limits_{a}^{в}f(x)dx} \tag{9}$$

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{в}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{в}f(x)dx} \tag{10}$$

Якщо границя правої частини рівності існує і скінчена, то відповідний невластивий інтеграл називають збіжним. Якщо границя не існує або дорівнює $\pm\infty$, то інтеграл називають розбіжним.

Невластивий інтеграл з двома нескінченими межами визначають так:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx} \quad \textbf{(11)}$$

де c - будь-яке число. Цей інтеграл буде збіжним, якщо обидва інтеграли правої частини рівності (11) - збіжні.

Приклад 6. Дослідити інтеграли

$$\textbf{а)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \textbf{б)} \int_{0}^{\infty} \cos x dx$$

Розв'язання. Спочатку інтеграл **а)** представимо у вигляді суми двох невластивих інтегралів, а потім за допомогою граничного переходу перейдемо до власних інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} +$$

$$+\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(arctgx\Big|_a^0\right) + \lim_{в\to\infty}\left(arctgx\Big|_0^в\right) =$$

$$\lim_{a\to-\infty}(arctg0 - arctga) + \lim_{в\to\infty}(arctgв - arctg0) =$$

$$= arctg0 - \lim_{a\to-\infty} arctga + \lim_{в\to\infty} arctgв - arctg0 == -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Отже, інтеграл а) збіжний і дорівнює π.

У випадку інтеграла **б)** маємо:

$$\int_{0}^{\infty} \cos x dx = \lim_{в\to\infty} \int_{0}^{в} \cos x dx = \lim_{в\to\infty}\left(\sin x\Big|_0^в\right) = \lim_{в\to\infty} \sin в$$

Але sinв при $в\to\infty$ не має границі тому, що sinв коливається від - 1 до +1.

Отже, інтеграл **б)** - розбіжний.

Збіжність або розбіжність невластивих інтегралів по нескінченому проміжку інтегрування можна визначити з використанням **порівняльних ознак.**

1. *Якщо функції* $f(x)$ *та* $\varphi(x)$ *для усіх* $x \in [a, \infty)$ *не приймають від'ємних значень і* $f(x) \le \varphi(x)$, *то інтеграл* $\int_a^\infty f(x)dx$ *збігається, якщо збігається інтеграл* $\int_a^\infty \varphi(x)dx$, *та* $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ *- розбіжний, якщо розбіжний* $\int_a^\infty f(x)dx$.

2. *Якщо при* $x\to\infty$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = c$,

де $c > 0$, $c \ne \infty$ *і* $f(x) \ne 0$ *для усіх достатньо великих x, то інтеграли* $\int_a^\infty f(x)dx$ *та* $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ *або обидва - збіжні, або обидва - розбіжні.*

3. Якщо функція $f(x)$ *є знакозмінною в проміжку* $[a, \infty)$ *і збігається інтеграл* $\int_a^\infty |f(x)|dx$, *то інтеграл* $\int_a^\infty f(x)dx$ *також буде збіжним.*

Зауваження. Для визначення збіжності або розбіжності заданого інтеграла із застосуванням порівняльних ознак часто використовують інтеграли:

18[69]

$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$, який <u>*збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$*</u>;

$\int\limits_0^{\infty}\ell^{-px}dx$, <u>*який збігається при $p > 0$ і розбігається при $p < 0$.*</u>

Приклад 7. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+3}}$

Розв'язання. Порівняємо заданий інтеграл з інтегралом

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{2/3}}$$

При $\varphi(x)=\frac{1}{x^{2/3}}$ та $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}}$ маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x^{2/3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2/3}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x^{2/3}}=1$$

Інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{2/3}}$ розбіжний, тому за другою порівняльною ознакою заданий інтеграл також розбіжний.

9.2.2 Невластиві інтеграли від необмежених функцій

Коли на обмеженому проміжку інтегрування [а, в] підінтегральна функція необмежено зростає, тобто $f(x)\to\pm\infty$ при $x\to a$ або при $x\to в$, або при $x\to c$, де $a<c<в$, тоді невласні інтеграли від необмеженої функції визначають так:

$$\boxed{\int\limits_a^{в} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{в} f(x)dx}$$

$$\boxed{\int\limits_a^{в} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a}^{в-\varepsilon} f(x)dx}$$

$$\boxed{\int\limits_a^{в} f(x)dx=\lim_{\varepsilon^1\to0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon'} f(x)dx+\lim_{\varepsilon''\to0}\int\limits_{c+\varepsilon''}^{в} f(x)dx,}$$

де ε, ε' та ε'' - додатні.

Якщо вказані границі існують, то відповідний інтеграл називають збіжним. Якщо будь-яка з границь не існує або дорівнює $\pm\infty$, то відповідний інтеграл називають розбіжним.

Приклад 8. Дослідити збіжність інтегралів

а) $\int\limits_0^{2}\frac{dx}{2-x}$, **б)** $\int\limits_{-1}^{3}\frac{dx}{5x^2}$

Розв'язання. У випадку інтеграла а) підінтегральна функція $\frac{1}{2-x}\to\infty$ при $x\to2$, тобто на правому кінці проміжку інтегрування. Згідно визначенню невластивого інтеграла такого виду маємо:

$$\int\limits_0^{2}\frac{dx}{2-x}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{2-x}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\ell n|2-x|\Big|_0^{2-\varepsilon}\right)=$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\ell n|2-2+\varepsilon|+\ell n2\right)=-\lim_{\varepsilon\to0}\ell n\varepsilon+\ell n2=\infty$$

Це означає, що інтеграл а) розбіжний.

Підінтегральна функція інтеграла б) необмежена при $x\to0$, тобто всередині проміжку інтегрування [-1, 3].

Згідно визначенню невластивого інтеграла такого виду маємо:

$$\int\limits_{-1}^{3}\frac{dx}{5x^2}=\lim_{\varepsilon'\to0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon'}\frac{dx}{5x^2}+\lim_{\varepsilon''\to0}\int\limits_{\varepsilon''}^{3}\frac{dx}{5x^2}=-\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon'\to0}\left(\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon'}\right)-$$

$$-\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon''\to 0}\left(\frac{1}{x}\Bigg|_{\varepsilon''}^{3}\right)=-\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon'\to 0}\left(\frac{-1}{\varepsilon'}+1\right)-$$

$$-\frac{1}{5}\ell im_{\varepsilon''\to 0}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\varepsilon''}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\ell im_{\varepsilon''\to 0}\frac{1}{\varepsilon'}-\frac{1}{15}+\ell im_{\varepsilon''\to 0}\frac{1}{\varepsilon''}=\infty$$

Отже, інтеграл **б)** розбіжний.

9.2.3 ВПРАВИ

Завдання 1. Обчислити або встановити розбіжність невластивих інтегралів з нескінченними межами інтегрування.

1. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}$ **2.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ **3.** $\int\limits_0^{\infty}\ell^{-x}dx$ **4.** $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{(x-3)^3}$

5. $\int\limits_0^{\infty}x^2\ell^{-x^3}dx$ **6.** $\int\limits_0^{\infty}\ell^{-2x}\sin 3x dx$ **7.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}$ **8.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{arctgxdx}{x}$

Завдання 2. Обчислити або встановити розбіжність невластивих інтегралів від необмеженої функції

1. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **2.** $\int\limits_0^1 x\ell nxdx$ **3.** $\int\limits_0^{1/\ell}\frac{dx}{x\ell n^2x}$

4. $\int\limits_1^{\ell}\frac{dx}{x\sqrt{\ell nx}}$ **5.** $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\ell nx}$ **6.** $\int\limits_3^5\frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$

7. $\int\limits_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$ **8.** $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$ **9.** $\int\limits_{-3}^2\frac{dx}{(x+3)^2}$

Розділ 10 Застосування визначених та невластивих інтегралів

10.1 Обчислення середніх значень функції

Середнім значенням μ функції $f(x)$ *на відрізку [а, в] називають число*

$$\boxed{\mu=\frac{1}{в-a}\int\limits_a^в f(x)dx} \qquad (1)$$

Приклад 1. Знайти середню довжину усіх додатних ординат еліпса.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$$

Розв'язання. З рівняння еліпса знаходимо, що додатні ординати еліпса будуть

$$y=\frac{в}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad x\in[-a,a]$$

Тому $\mu=\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}\frac{в}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{2в}{2a^2}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$

Зробимо підстановку: x = asint, dx = acostdt

При x = o маємо $0 = asint_н \Rightarrow t_н = \alpha = 0$

При x = a маємо $a = asint_в \Rightarrow t_в = \frac{\pi}{2}$

Одержимо:

$$\mu=\frac{в}{a^2}\int\limits_0^{\pi/2}a^2\cos^2 t dt=\frac{в}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=\frac{в}{2}\left[\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}\right]=$$

$$=\frac{в}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)=\frac{в\pi}{4}$$

10.2 Геометричні задачі

10.2.1 Обчислення площ плоских фігур

Обчислення площі криволінійної трапеції, що обмежена графіком функції $f(x)\geq 0$, відрізком [а, в] та лініями х = а і х = в, здійснюють за формулою:

$$\boxed{S=\int\limits_a^в f(x)dx} \qquad (2)$$

Якщо $f(x)\leq 0$ на [а, в], то

$$\boxed{S=\left|\int\limits_a^в f(x)dx\right|} \qquad (3)$$

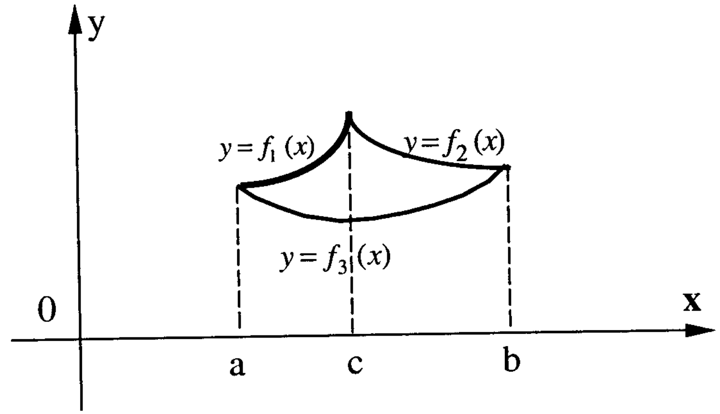
Якщо $f(x)$ на відрізку [а, в] декілька разів змінює свій знак, то

$$\boxed{S=\int\limits_a^в |f(x)|dx} \qquad (4)$$

Якщо плоска фігура обмежена лініями $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ і прямими $x=a$ та $x=в$, то при $f_1(x)\geq f_2(x)$ для усіх $x\in[a, в]$

$$\boxed{S=\int\limits_a^в [f_1(x)-f_2(x)]dx} \qquad (5)$$

Якщо плоска фігура обмежена зверху або знизу графіками декількох функцій (дивись, наприклад, малюнок 1), то для обчислення її площі треба розбити цю фігуру на частини паралельними осі Оу прямими так, щоб кожна частина була обмежена лише однією кривою як зверху, так і знизу.

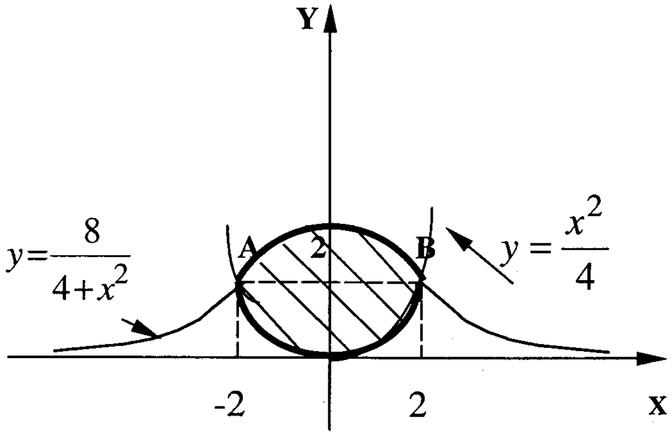


Мал. 1

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмежену кривими

$$y=\frac{8}{4+x^2} \quad \text{та} \quad y=\frac{x^2}{4}$$

Розв'язання. Перше рівняння є рівнянням Локона Аньєзі, а друге - рівняння параболи (дивись, мал. 2).



Мал. 2

Площу заштрихованої фігури будемо знаходити за формулою (5). Для цього спочатку знайдемо абсциси точок перетину A та B кривих.

Із рівностей $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ та $y=\dfrac{x^2}{4}$ одержимо:

$\dfrac{8}{4+x^2}=\dfrac{x^2}{4}\Rightarrow x^4+4x^2=32\Rightarrow x^4+4x^2-32=0$. Розв'язав це біквадратне рівняння одержимо $x_1=-2$, $x_2=2$.

Отже, формула (5) прийме вигляд:

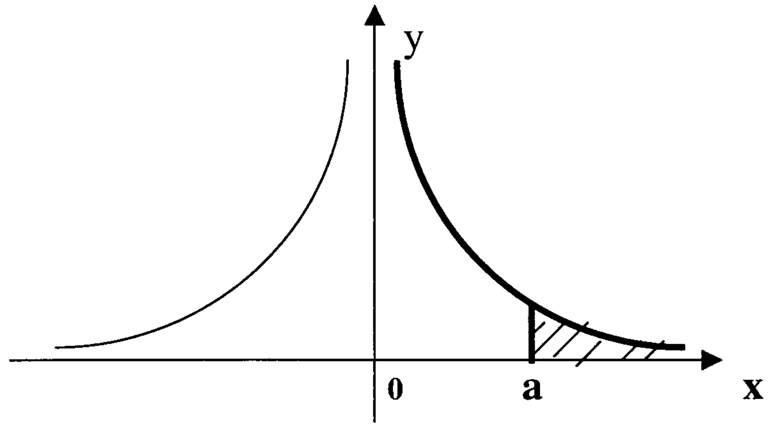
$$S=\int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{4+x^2}-\frac{x^2}{4}\right)dx=4arctg\,\frac{x}{2}\Bigg|_{-2}^{2}-\frac{x^3}{12}\Bigg|_{-2}^{2}=4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-\frac{1}{12}(8+8)=2\pi-\frac{4}{3}\ \text{(кв. одиниць).}$$

Приклад 3. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y=\dfrac{1}{x^2}$, x = a (a > 0) та віссю Ox

Розв'яння. На малюнку 3 заштрихована фігура, площу якої треба знайти. В даному випадку проміжок інтегрування буде [a, ∞), тому:

$$S=\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{в\to\infty}\int_a^{в}\frac{dx}{x^2}=\lim_{в\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\Bigg|_a^{в}\right)=\lim_{в\to\infty}\left(\frac{-1}{в}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}\ \text{кв. од.}$$



Мал. 3

10.2.2 Довжина дуги плоскої кривої, об'єм та площа поверхні тіла обертання.

Якщо плоска крива задана рівнянням $y=f(x)$, то довжину її дуги, що обмежена лініями x = a та x = в, знаходять за формулою:

$$\boxed{\ell=\int_a^{в}\sqrt{1+(y')^2}\,dx} \qquad \textbf{(6)}$$

Якщо дуга кривої задана параметрично, тобто у вигляді

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta,$$

Тоді довжина цієї дуги знаходиться за формулою:

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt \qquad (7)$$

✧ **Приклад 4.** Знайти довжину дуги лінії

$$y = 2\left(\ell^{x/4} + \ell^{-x/4}\right) \text{ від точки x = 0 до точки x = 4}$$

Розв'язання. Довжину лінії будемо шукати за формулою (6).

Маємо:

$$y' = 2\left(\ell^{x/4} - \ell^{-x/4}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\ell^{x/4} - \ell^{-x/4}\right);$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(\ell^{x/2} - 2 + \ell^{-x/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ell^{x/2} + 2 + \ell^{-x/2}\right) = \frac{1}{4}\left(\ell^{x/4} + \ell^{-x/4}\right)^2$$

$$\ell = \int\limits_0^4 \frac{1}{2}\left(\ell^{x/4} + \ell^{-x/4}\right)dx = 2\left(\ell^{x/4} - \ell^{-x/4}\right)\Big|_0^4 = 2\left(\ell - \ell^{-1}\right) \quad \text{один.}$$

довжини.

▼ **Зауваження.** Цей приклад можна розв'язати простіше, якщо перейти до гіперболічних функцій.

✧ **Приклад 5.** Знайти довжину дуги кривої

$$\begin{cases} x = \int\limits_1^t \dfrac{\cos z}{z}\,dz \\ \qquad\qquad\qquad 1 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ y = \int\limits_1^t \dfrac{\sin z}{z}\,dz \end{cases}$$

Розв'язання. В даному випадку дуга задана параметрично, причому x та y є функціями змінної верхньої межі інтеграла, межі змінної t відомі.

Довжину дуги будемо шукати за формулою (7). Маємо:

$$x_t' = \frac{\cos t}{t}, \quad y_t' = \frac{\sin t}{t}$$

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = \frac{\cos^2 t}{t^2} + \frac{\sin^2 t}{t^2} = \frac{1}{t^2}$$

$$\text{Тому } \ell = \int\limits_1^{\pi/2} \frac{dt}{t} = \ell nt\Big|_1^{\pi/2} = \ell n\frac{\pi}{2} \text{ одиниць довжини.}$$

Об'єм та площа поверхні тіла обертання

Якщо навколо осі Ox обертається криволінійна трапеція, що обмежена кривою $y = f(x)$, віссю Ox та прямими x = a і x = в, то об'єм тіла обертання знаходять за формулою:

$$\boxed{V = \pi\int\limits_a^в f^2(x)dx}, \qquad (8)$$

а площу поверхні обертання знаходять за формулою:

$$\boxed{S = 2\pi\int\limits_a^в f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx} \qquad (9)$$

✧ **Приклад 6.** Знайти об'єм і площу бокової поверхні параболоїда, який утворений обертанням параболи $y^2 = 8x$ навколо осі Ox і обмежен площиною x = 10.

Розв'язання. Об'єм параболоїда знаходимо за формулою (8):

$$V = \pi\int\limits_0^{10} 8x\,dx = 8\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{10} = 400\pi \text{ куб. одиниць.}$$

Площу бокової поверхні параболоїда визначимо за формулою (9):

$$y' = \frac{4}{y}, \quad (y')^2 = \frac{16}{y^2} = \frac{16}{8x} = \frac{2}{x}; \quad \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{2}{x}} = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$$

Тепер формула (9) приймає вигляд:

$$S = 2\pi\int_0^{10}\sqrt{8x}\cdot\sqrt{\frac{x+2}{x}}dx = 4\sqrt{2}\pi\int_0^{10}\sqrt{x+2}dx =$$

$$= 4\sqrt{2}\pi\cdot\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}\Big|_0^{10} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}\left(12^{3/2} - 2^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}(24\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \Rightarrow S = \frac{32\pi}{3}(6\sqrt{6}-1) \text{ кв. одиниць.}$$

10.3 **Фізичні задачі**

Якщо тіло рухається із змінною швидкістю V = V(t), то за час від t_o до T воно пройде шлях S, який знаходять за формулою:

$$\boxed{S = \int_{t_o}^{T} V(t)dt} \qquad (10)$$

Роботу A, що виконує змінна сила f(s) по переміщенню тіла із положення s=a в положення s=в, знаходять за формулою:

$$\boxed{A = \int_a^в f(s)ds} \qquad (11)$$

Масу m стержня, що розташований в проміжку [a, в] і має змінну густину $p(x)$, знаходять за формулою:

$$\boxed{m = \int_a^в p(x)dx} \qquad (12)$$

Якщо $q(x)$ - змінна густина електричного заряду, то *сумарний електричний заряд Q* в проміжку [a, в] знаходять за формулою:

$$\boxed{Q = \int_a^в q(x)dx} \qquad \textbf{(13)}$$

В теорії електричних ланцюгів інтеграли найчастіше використовують у таких випадках:

а) *напруга* $u_c(t)$ *на затисках лінійного ємкісного елемента зв'язана з прохідним через нього струмом* $i_c(t)$ *за* формулою:

$$\boxed{u_c(t) = \frac{1}{c}\int_0^t i_c(\tau)d\tau}$$

б) *струм* $i_L(t)$, що проходить через лінійний індуктивний елемент, зв'язан з напругою $u_L(t)$ на його затисках співвідношенням

$$\boxed{i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)d\tau}$$

в) *кількість електричної енергії*, розсіяної за час [τ_1, τ_2] на резисторному елементі, визначається за формулою:

$$\boxed{W = \int_{\tau_1}^{\tau_2} u(t)\cdot i(t)dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} Ri^2(t)dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G\cdot u^2(t)dt,}$$

де R і G - опір і провідність елемента, відповідно.

г) *середня активна потужність P за період T в ланцюгу змінного струму обчислюється за формулою:*

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_O^T u(t)\cdot i(t)dt,}$$

де $u(t)$ *та* $i(t)$ *- напруга та стум в електричному ланцюгу.*

д) *діючі значення напруги і струму електричних коливань знаходять за формулами:*

$$\boxed{V=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{O}^{T}u^2(t)dt}},\quad \boxed{I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{O}^{T}i^2(t)dt}},$$ де період $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{f}$,

f - частота коливань.

Отже, фізичний смисл визначеного інтеграла пов'язан із смислом підінтегральної функції.

Приклад 7. Знайти шлях, який пройде тіло за 15 сек. після початку руху, якщо швидкість його руху $V=\sqrt{1+t}$ м/сек.

Розв'язання. Шуканий шлях s знайдемо за формулою(10):

$$S=\int_0^{15}\sqrt{1+t}\,dt=\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\Big|_0^{15}=\frac{2}{3}(16^{3/2}-1)=\frac{2}{3}(16\cdot 4-1)=\frac{2}{3}\cdot 63=42 \text{ м}$$

10.4 Економічні задачі

Якщо V=(t), D(t) та П(t) - змінні витрати, доход та прибуток підприємства, то їх середнє значення за час від t_o до t_1 знаходять за формулами:

$$V_c=\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}V(t)dt;\quad D_c=\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}D(t)dt;\quad \Pi_c=\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}\Pi(t)dt \quad (14)$$

Якщо $V'(x)$, $D'(x)$ та $\Pi'(x)$- функції маргінальних (граничних) *витрат, доходу та прибутку* при реалізації x одиниць деяких виробів, тоді зміни витрат, доходу та прибутку при зростанні реалізації виробленої продукції від а до в одиниць обчислюють за формулами:

$$\boxed{V(в)-V(a)=\int_a^в V'(x)dx}, \qquad (15)$$

$$\boxed{D(в)-D(a)=\int_a^в D'(x)dx}, \qquad (16)$$

$$\boxed{\Pi(в)-\Pi(a)=\int_a^в \Pi'(x)dx}, \qquad (17)$$

відповідно.

Якщо витрати на виготовлення виробу зростають за законом $V=f(t)$, *то величина фактичного зв'язування обігових коштів при виготовлені виробу* обчислюється за формулою:

$$\boxed{S_{факт.}=\int_O^t f(x)dx} \qquad (18)$$

Умовна *величина зв'язування обігових коштів* (у випадку проплати усіх витрат в перший день) $S_{умов.}=t\cdot s$, де t - тривалість циклу виробництва, s - загальні витрати.

Коефіцієнт готовності виробу

$$\boxed{K=\frac{S_{факт.}}{S_{умов.}}} \qquad (19)$$

Приклад 8. Маргінальна функція прибутку фірми має вигляд

$$\Pi'(x)=23{,}5-0{,}01x$$

Знайти величину зростання прибутку фірми, коли реалізація виробів зростає з 1000 до 1500 одиниць.

Розв'язання. Величину зростання прибутку фірми знайдемо за формулою (17):

$$\int_{1000}^{1500}(23{,}5-0{,}01x)dx=(23{,}5x-0{,}01\cdot\frac{x^2}{2})\Big|_{1000}^{1500}=23{,}5\cdot 1500-0{,}005\cdot(1500)^2-$$

$$-23{,}5\cdot 1000+0{,}005\cdot(1000)^2=35250-11250-23500+5000=5500$$

Отже, прибуток зросте на 5500 гривень.

10.5 ВПРАВИ

Завдання 1. Знайти середні значення функцій на заданих проміжках

1. $f(x)=\sin^2 x,\quad [0,\quad 2\pi]$
2. $f(x)=\sin ax,\quad \left[0,\quad \dfrac{\pi}{a}\right]$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad [4,\quad 12]$
4. $f(x)=\cos(\omega t+\alpha)\cdot\cos(\omega t+\alpha+\varphi),\quad [0,\quad \infty]$
5. $f(x)=2x^2+1,\quad [0,\quad 1]$
6. $f(x)=3^x-2x+3,\quad [0,\quad 2]$

Завдання 2. Знайти площу плоскої фігури, що обмежена заданими лініями та проміжками.

1. $y=\sin x,\quad y=o,\quad [0,\quad \pi]$
2. $y=\sin x,\quad y=0,\quad [0,\quad 2\pi]$
3. $y=3x^2-6x,\quad x=4,\quad y=0,\quad [0,\quad 4]$
4. $y=2x^2+3x-9,\quad y=0$
5. $y=x^2+6x+15,\quad y=0$
6. $y=x^2,\quad x=1,\quad x=2,\quad y=0$
7. $y=\dfrac{x^2}{4},\quad x=2,\quad [0,\quad 2],\quad y=0$
8. $y=x^3-6x^2+11x-6,\quad y=0$
9. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{в^2}=1$
10. $y^2=8x$ та $x^2=8y$
11. $y=(x+2)^2,\quad y=4-x\quad y=0$
12. $y=\dfrac{a^2}{x},\quad x=1,\quad x=8,\quad y=0$
13. $y=\dfrac{1}{1+x^2},\quad y=0$
14. $y=x^{-1/3}\quad x=1,\quad y=0$
15. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\quad x=0\quad x=9$

Завдання 3.

1. Обчислити довжину дуги кривої $y=\dfrac{x^2}{2}-1$, яку відтинає вісь Ox.

2. Обчислити довжину дуги полукубічної параболи $y^2=x^3$ від початку координат до точки $M_0(4, 8)$.

3. Обчислити довжину дуги лінії $y=\ell nx$ від $x=1$ до $x=2$.

4. Обчислити довжину дуги лінії $y=\sqrt{x}$ від $x=0$ до $x=1$.

5. Знайти довжину дуги кривої $y=\ell^x$, що знаходиться між точками $A(0, 1)$ та $B(1, \ell)$.

6. Знайти довжину дуги кривої $x=\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{\ell ny}{2}$ між точками, для яких $y=1$ та $y=2$.

Завдання 4. Обчислити довжину дуги кривої, що задана параметрично.

1. $\begin{cases} x=R\cos^3\dfrac{t}{4} \\ y=R\sin^3\dfrac{t}{4} \end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$
2. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}\quad 0\le t\le \pi/2$
3. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$
4. $\begin{cases} x=2R\cos t-R\cos 2t \\ y=2R\sin t-R\sin 2t \end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$

Завдання 5.

1. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі Ox фігури, яка обмежена дугою кола $x^2+y^2=16$, що лежить у першому квадранті, та прямими $x=1$ і $x=3$.

2. Знайти об'єм еліпсоїда, що утворений обертанням еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{в^2}=1$ навколо осі Ox.

3. Знайти об'єм тіла обертанням навколо осі Ох фігури, що обмежена лініями xy=4, x=1, x=4, y=0.

4. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі Ох фігури, що обмежена лініями $x^2 - y^2 = 1$ та x = 3.

5. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі Ох фігури, що обмежена лініями $y = \frac{x}{2}, \quad x = 4, \quad x = 6, \quad y = 0.$

6. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі Ох фігури, що обмежена лінією $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

7. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі Оу фігури, що обмежена лініями: $y = \frac{x^2}{4}$, y = 1 та y = 5.

8. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі Оу фігури, що обмежена лініями: $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$.

<u>Завдання 6.</u> Знайти площу поверхні обертання навколо осі Ох

1. кола $x^2 + y^2 = R^2$;

2. дуги кубічної параболи $y = x^3$, $x \in \left[-\frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3}\right]$

3. лінії y = tgx, $x \in \left[0, \quad \frac{\pi}{4}\right]$

4. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}, \quad x \in [0, \quad a].$

<u>Завдання 7.</u> Знайти об'єм і площу поверхні тіла обертання навколо осі Ох фігури, яка обмежена вказаними лініями

1. $y^2 = 2px$, y = 0 та x = H; **2.** коло $x^2 + y^2 = R^2$.

<u>Завдання 8.</u> Розв'язати фізичні задачі:

1. Знайти шлях S, який пройде тіло із заданою швидкістю V(t) м/сек за вказаний час $t_{сек}$ від початку руху.

а) $V = (5t^2 - 3t)$; t = 4; **б)** $V = \sqrt{2t+3}$; $t = 3$;

в) $V = \sqrt{1+t}$; $t = 15$; **г)** $V = t\ell^{-0,01t}$; $t = 10$;

2. Точка осі Ох здійснює гармонічні коливання із швидкістю $V = V_0 \cos \omega t$, де V_0 та ω - сталі. Знайти закон коливання точки, яка при t=0 мала абсцису x=0.

3. Швидкість тіла, що кинуто вертикально угору з початковою швидкістю V_0 = 29,4 м/сек, визначається формулою $V = V_0 - gt$, де g = 9,8 м/сек^2 - прискорення сили тяжіння. На якій відстані від початкового положення буде знаходитися тіло через 5 сек. ?

4. Ракета піднімається вертикально угору. За рахунок зменшення її ваги при постійній силі тяги прискорення ракети зростає за законом $a(t) = \frac{A}{в - ct} (в - ct > 0)$. Знайти швидкість ракети $V(t)$ у будь-який момент часу t, якщо її початкова швидкість дорівнювала нулю.

Знайти висоту h, яку досягне ракета в момент часу $t = t_1$.

5. Знайти сумарний електричний заряд на [0, 8], якщо його густина $q(x) = 5x^{2/3}$.

<u>Завдання 9.</u> Знайти масу стержня довжини ℓ, якщо його густина $p(x)$

а) $\ell = 100 см, \quad p(x) = 2 + 0{,}001x^2$ г/см;

б) $\ell = 3 см, \quad p(x) = 5x^2$

<u>Завдання 10.</u> За законом Гука сила X кг, що розтягує пружину на x м, дорівнює X = кx, де к - коефіцієнт пропорційності.

Яку роботу треба здійснити, щоб розтягнути пружину на ℓ см, якщо сила 1 кг розтягує її на m см.?

а) ℓ **=6, m = 1;** б) ℓ **=10, m = 2;** в) ℓ **=5,** m = 1/2.

Завдання 11. Визначити напругу $u_c(t)$ на електричній ємкості, якщо, проходящий через цю ємкість струм, змінюється за законом: $i_c(t) = I_m \cdot (\sin \omega t + \ell^{-pt})$ (А), де $I_m = 0{,}01N$ (А); $\omega = 2\pi f$, $f = 400(15 - N)$ (Гц), p = 0,4N, c = N x 10^{-3} (Ф), N - номер варіанта.

Завдання 12. Визначити діюче значення напруги V, діюче значення струму I електричних коливань та середню активну потужність P за період T, якщо

$$u(t) = V_o + V_1 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{(В)},$$

$$i(t) = I_o + I_1 \cdot \sin(\omega t + \psi) \quad \text{(А)},$$

$$V_o = N(B), \quad V_1 = (5 - 0{,}4N) \quad \text{(А)}, \quad \omega = 2\pi f,$$

$$I_0 = 5(2N + 1)10^{-3} \text{ (А)}, \quad I_1 = (1 - 0{,}05N) \cdot 10^{-2} \text{ (А)},$$

$$f = 500N \quad \text{(Гц)},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}; \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad N \text{ - номер варіанта}$$

Завдання 13. Розв’язати економічні задачі (дивись [1], стор. 306-311

1. Задані функції $V'(x)$ та $D'(x)$ маргінальних (граничних) витрат та доходу вироблення та реалізації x одиниць продукції фірми. Знайти зростання загальних витрат та доходу при зростанні випуску та реалізації продукції від x_1 до x_2 одиниць, а також середнє значення витрат та доходу.

а) $V'(x) = 80 - 0{,}02x; \quad x_1 = 50, \quad x_2 = 100$

б) $D'(x) = 100 - 0{,}02x; \quad x_1 = 50, \quad x_2 = 100$

в) $V'(x) = 1200 - 0{,}04x; \quad x_1 = 100, \quad x_2 = 200$

г) $D'(x) = 1200 - 0{,}08x; \quad x_1 = 100, \quad x_2 = 200$

2. Для заданого рівняння кривої Лоренца $y = f(x)$ знайти коефіцієнт L нерівномірності розподілу прибуткового податку громадян держави (коефіцієнт Лоренца

$$L = 2\int_0^1 (x - f(x)dx).$$

а) $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}x;$ **б)** $y = 0{,}9x^2 + 0{,}1x;$

в) $y = \frac{15}{17}x^2 + \frac{2}{17}x$

3. Якщо відомі швидкості зміні з часом витрат $V'(t)$ та прибутку $D'(t)$ фірми, то оптимальний час прибутковості є розв’язок рівняння $V'(t) = D'(x)$ і за цей час прибутком фірми буде

$$P = \int_o^{t_1} [D'(t) - V'(t)]dt$$

Визначити оптимальний термін прибутковості фірми і її загальний прибуток за цей час для заданих $V'(t)$ та $D'(t)$.

а) $V'(t) = 7 + 3t^{2/3}, \; D'(t) = 23 - t^{2/3};$

б) $V'(t) = 5 + t^{2/3}, \; D'(t) = 17 - 2t^{2/3}.$

4. Тривалість циклу виготовлення мостового крана 48 діб, загальні витрати (за планом) 1.780.000 гривень. Витрати зростають за законом V = $3t^2$ + 100. Знайти коефіцієнт готовності крана.

а) через 15 діб; **б)** через 25 діб.

Розділ 11	Диференціальні рівняння

11.1. Загальні поняття

❒ **<u>Означення1.</u>Звичайними диференціальними рівняннями називають такі рівняння, які містять шукану функцію однієї змінної та її похідні або диференціали**

❒ **<u>Означення2.</u> Найвищий порядок похідної, що містить диференціальне рівняння, називають порядком диференціального рівняння.**

Наприклад, рівняння $x^3y' - 5y'' = 3\sin x$ - другого порядку; рівняння $y''' - x^2y^4 = 0$ - третього порядку; рівняння $y' + \dfrac{3}{\cos^2 x}y = 2\ell^{-x}$ та $x^3dy - xy^2dx = 0$ - першого порядку.

У загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку можна записати у вигляді

$$F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Відмітимо, що диференціальне рівняння n-го порядку може явно не містити аргументу x, шуканої функції y або її похідних до (n-1) порядку.

❒ **<u>Означення3.</u>Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називають функцію y, яка при підстановці її у рівняння перетворює рівняння у тотожність і залежить від аргументу x та n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, тобто має вигляд $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$.**

Загальний розв'язок диференціального рівняння може бути і не розв'язаним відносно y, тобто мати вигляд $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$.

В цьому випадку його називають загальним інтегралом диференціального рівняння.

❒ **<u>Означення 4.</u> Якщо у загальному розв'язку (інтегралі) диференціального рівняння замість довільних сталих записати фіксовані постійні числа, то одержаний розв'язок називають частинним розв'язком цього рівняння.**

Найчастіше сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ обирають не довільно, а так, щоб розв'язок рівняння задовольняв деяким початковим умовам.

Для знаходження n сталих треба задати n початкових умов.

❒ **<u>Означення 5.</u>Сумісне завдання диференціального рівняння та відповідної кількості початкових умов називають задачею Коші.**

Наприклад, для диференціального рівняння другого порядку задачу Коші можна записати у вигляді.

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'') = 0 \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \\ y'\big|_{x=x_0} = y_1 \end{cases}$$

В теорії звичайних диференціальних рівнянь можна виділити дві **основні задачі:**

1. *знаходження диференціального рівняння та початкових умов, які описують процес, що досліджується;*

2. розв'язування заданої задачі Коші або знаходження загального розв'язку (інтеграла) заданого диференціального рівняння.

✧ **Приклад 1. (Закон природного зростання).**Законом природного зростання називають такий закон, за яким швидкість зростання речовини пропорційна кількості речовини.

Треба знайти формулу для визначення кількості речовини у будь-який момент часу, якщо відомо, що у початковий момент кількість речовини дорівнювала y_0.

Розв'язання. Позначимо через y(t) шукану кількість речовини в момент t і побудуємо математичну модель закону природного зростання, тобто розв'яжемо першу основну задачу.

Згідно з механічним змістом похідної першого порядку закон природного зростання речовини можна записати увигляді

$$\frac{dy}{dt} = \kappa y \qquad \textbf{(1)}$$

де к > 0 - коефіцієнт пропорційності.

За умовою задачі повинна виконуватись рівність

$$y\big|_{t=t_o} = y_o \qquad \textbf{(2)}$$

Отже, математична модель закону природного зростання речовини є задача Коші для диференціального рівняння першого порядку вигляду (1) з початковою умовою (2).

Тепер розв'яжемо задачу Коші (1) - (2).

Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння (1):

$$\frac{dy}{dt} = \kappa y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \kappa dt \text{ або } d(\ell n y) = d(\kappa t)$$

Якщо диференціали двох функцій рівні, то функції можуть відрізнятись лише довільною сталою, тобто

$$\ell n y = \kappa t + C \Rightarrow y = \ell^{\kappa t + C} \quad \text{або} \quad y = \ell^C \cdot \ell^{\kappa t} \quad \textbf{(3)}$$

Формула (3) описує нескінчену кількість розв'язків задачі. Використовуючи початкову умову (2), одержимо:

$$y_0 = \ell^C$$

і формула (3) тепер прийме вигляд

$$y = y_o \ell^{\kappa t} \qquad (4)$$

Це і є шукана формула.

За законом природного зростання (4) зростає кількість живих клітин, кристалів, населення.

11.2 Диференціальні рівняння першого порядку.

11.2.1 Основні види рівнянь та їх розв'язування.

В практичній діяльності найчастіше використовуються диференціальні рівняння першого порядку наступних типів: з відокремленими змінними, з подільними змінними, однорідні, лінійні та Бернуллі.

Означення 6. Диференціальне рівняння першого порядку називають рівнянням з відокремленими змінними, якщо його можна привести до вигляду

$$\boxed{N(x)dx + M(y)dy = 0} \qquad (5)$$

В цьому рівнянні коефіцієнтом при dx є функція, яка залежить лише від x або стала величина, а коефіцієнт при dy - функція, яка залежить лише від y або стала величина.

Загальний розв'язок рівняння з відокремленими змінними знаходять шляхом його інтегрування, тобто за формулою:

$$\int N(x)dx + \int M(y)dy = C \qquad (6)$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$tgx \cdot dx + ctgy \cdot dy = 0$$

Розв'язання. Задано рівняння з відокремленими змінними тому, що коефіцієнтами при диференціалах dx та dy записані функції, які залежать лише від x та y, відповідно. Тому загальний розв'язок цього рівняння знайдемо шляхом інтегрування. Одержимо:

$$\int tgx \cdot dx + \int ctgy \cdot dy = C \Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = C \Rightarrow -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \int \frac{d(\sin y)}{\sin y} =$$

$$= C \Rightarrow -\ell n|\cos x| + \ell n|\sin y| = C \Rightarrow \ell n\left|\frac{\sin y}{\cos x}\right| = C \Rightarrow \left|\frac{\sin y}{\cos x}\right| = \ell^C \Rightarrow \sin y = \ell^C \cdot \cos x$$

при siny та cosx однакового знаку.

Остання рівність є загальним інтегралом заданого диференціального рівняння. Якщо розв'язати цю рівність відносно шуканої функції у, то одержимо загальний розв'язок у вигляді

$$y = arc\sin(\ell^{C} \cdot \cos x).$$

<u>Означення7.</u>Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$\boxed{\mathbf{N_1(x) \cdot N_2(y)dx + M_1(x)M_2(y)dy = 0}} \qquad \mathbf{(7)}$$

називають рівнянням з подільними змінними.

Загальний розв'язок такого рівняння знаходять шляхом зведення його до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{N_1(x)}{M_1(x)}dx + \frac{M_2(y)}{N_2(y)}dy = 0$$

і подальшим інтегруванням.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння.

$$2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0$$

Розв'язання. Для визначення типу заданого диференціального рівняння першого порядку запишемо його у такому вигляді:

$$\frac{3^x}{3^{2y}} \cdot \frac{dy}{dx} = -2^x \cdot 2^y \Rightarrow \frac{3^x}{3^{2y}}dy + 2^x \cdot 2^y dx = 0$$

Отже, задане рівняння має вигляд (7), тобто воно є рівнянням з подільним змінними. Приведемо це рівняння до вигляду рівняння з відокремленими змінними шляхом його ділення на $3^x \cdot 2^y$. Одержимо:

$$\frac{dy}{3^{2y} \cdot 2^y} + \frac{2^x \cdot dx}{3^x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{(9 \cdot 2)^y}dy + \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 0$$

Шляхом інтегрування одержимо:

$$\int 18^{-y}dy + \int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx = C \Rightarrow \frac{-18^{-y}}{\ell n 18} + \left(\frac{2}{3}\right)^x : \ell n\frac{2}{3} = C$$

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння буде

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ell n\frac{2}{3}} - \frac{1}{18^y \ell n 18} = C$$

Якщо розв'язати цю рівність відносно у, то одержимо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ell n\frac{2}{3}} - C = \frac{1}{18^y \cdot \ell n 18} \Rightarrow 18^y = \frac{\ell n\frac{2}{3}}{\ell n 18\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - C\ell n\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow y = \ell og_{18}\left(\frac{\ell n\frac{2}{3}}{\ell n 18\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - C\ell n\frac{2}{3}\right)}\right)$$

<u>Означення 8.</u> Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, яке можна звести до вигляду

$$\boxed{y' = f(x, y)}\ , \qquad \mathbf{(8)}$$

де функція $f(x, y)$ не змінюється при замінні x та y на tx та ty, тобто задовольняє умову

$$f(tx, ty) = f(x, y) \qquad \mathbf{(9)}$$

Однорідне диференціальне рівняння першого порядку шляхом підстановки

$$\boxed{u = \frac{y}{x}} \qquad \mathbf{(10)}$$

зводиться до рівняння з подільними змінними.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' = \frac{y}{x} + \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Розв'язання. Задано рівняння першого порядку однорідне тому, що воно має вигляд (8) і виконується умова (9):

$$\frac{ty}{tx} + \sin^2\left(\frac{ty}{tx}\right) = \frac{y}{x} + \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Застосуємо підстановку (10). Тоді

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u$$

Тому задане рівняння прийме вигляд

$$u' \cdot x + u = u + \sin^2 u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \sin^2 u \Rightarrow \frac{du}{\sin^2 u} = \frac{dx}{x}$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремленими змінними, інтегруючи його, знаходимо:

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} - \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow -ctgu - \ell n|x| = C \Rightarrow ctgu = -\left(C + \ell n|x|\right)$$

Підставимо замість u її значення $\frac{y}{x}$. Тоді загальний інтеграл заданого рівня має вигляд:

$$ctg\frac{y}{x} = -\left(C + \ell n|x|\right)$$

Якщо розв'язати цю рівність відносно шуканої функції y, то овдержимо загальний розв'язок:

y = x (π - *arcctg* (C+ ℓ n|x|))

<u>Означення 9.</u>Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, яке можна привести до вигляду

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)} \qquad \textbf{(11)}$$

Це рівняння містить y та y′ у першому степені.

Загальний розв'язок такого рівняння можна знайти за формулою:

$$\boxed{y = \ell^{-\int P(x)dx} \cdot \left(C + \int Q(x)\ell^{\int P(x)dx}dx\right)}, \qquad \textbf{(12)}$$

яка дуже часто використовується і тому її треба пам'ятати.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x \cdot y' + 3y = x^{-3}$$

Розв'язання. Задано диференціальне рівняння першого порядку. Це рівняння лінійне тому, що містить шукану функцію y та її прохідну y′ у першому степеню. Щоб одержати рівняння у вигляді (11) поділимо задане рівняння на x і одержимо:

$$y' + \frac{3}{x}y = x^{-4}$$

Маємо: $P(x) = \frac{3}{x}$; $Q(x) = x^{-4}$. За формулою (12) знаходимо загальний розв'язок:

$$y = \ell^{-\int\frac{3}{x}dx} \cdot \left(C + \int x^{-4} \cdot \ell^{\int\frac{3}{x}dx} dx\right) = \ell^{-3\ell n|x|} \cdot \left(C + \int x^{-4} \cdot \ell^{3\ell n|x|}dx\right) =$$

$$= \ell^{\ell n|x|^{-3}} \cdot \left(C + \int x^{-4} \cdot \ell^{\ell n|x|^3}dx\right) = \frac{1}{|x|^3} \cdot \left(C + \int x^{-4} \cdot x^3 dx\right) = \frac{1}{|x|^3}\left(C + \int\frac{dx}{x}\right) = \frac{1}{|x|^3}\left(C + \ell n|x|\right).$$

<u>Означення 10.</u> Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)y^n} \quad (n \neq 0, \quad n \neq 1) \qquad \textbf{(13)}$$

називають рівнянням Бернуллі.

Рівняння Бернуллі після ділення на y^n підстановкою

$$z = y^{-n+1} \qquad \textbf{(14)}$$

зводиться до лінійного диференціального рівняння відносно допоміжної функції z. Після знаходження функції z переходять до шуканої функції

Приклад 6. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' - \dfrac{4}{x} y = x\sqrt{y} \\ y|_{x=1} = 4 \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння Бернуллі

$$y' - \frac{4}{x} y = x \cdot y^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot y' - \frac{4}{x} \cdot \sqrt{y} = x$$

В даному випадку $n = \dfrac{1}{2}$, тому зробимо підстановку

$z = y^{1/2}$. Тоді $z' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'$ і рівняння прийме вигляд

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2}$$

Це лінійне диференціальне рівняння відносно функції z. За формулою (12) знаходимо:

$$z = \ell^{\int \frac{2}{x} dx}\left(C + \int \frac{x}{2} \ell^{-\int \frac{2}{x} dx} dx\right) = \ell^{2\ell nx} \cdot \left(C + \int \frac{x}{2} \ell^{-2\ell nx} dx\right) = x^2\left(C + \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2} dx\right) = x^2\left(C + \frac{1}{2}\ell nx\right)$$

Тепер перейдемо до шуканої функції y. Для цього замість z в останню рівність підставимо її значення $y^{1/2}$. Одержимо:

$$\sqrt{y} = x^2\left(C + \frac{1}{2}\ell nx\right) \Rightarrow y = x^4\left(C + \frac{1}{2}\ell nx\right)^2$$

загальний розв'язок заданого рівняння Бернуллі.

Використовуючи початкові умови задачі Коші при x = 1, одержимо:

$$4 = 1^4\left(C + \frac{1}{2}\ell n1\right)^2 \Rightarrow 4 = C^2 \Rightarrow C = \pm 2.$$

Підставимо ці значення C в загальний розв'язок рівняння Бернуллі і одержимо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ell n|x| \pm 2\right)^2.$$

11.2.2 ВПРАВИ

Завдання 1. Диференціальне рівняння першого порядку загального вигляду $(2 + x)y' + y^2 - 1 = 0$ привести до виду:

а) $y' = f(x, y)$; **б)** $dy = f(x, y)dx$; **в)** $dx = f(x, y)dy$;

г) $f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy = 0$; **д)** $f_1(x, y)dx = f_2(x, y)dy$;

е) $f_1(y)dy = f_2(x)dx$.

Завдання 2. Перевірити, чи буде:

а) функція $y = C\sqrt{1 + x^2}$ загальним розв'язком рівняння $(1 + x^2)y' - xy = 0$;

б) функція $y = 3\sqrt{1 + x^2}$ частинним розв'язком рівняння $\dfrac{1 + x^2}{y} dy - xdx = 0$, який відповідає початковій умові $y(\sqrt{3}) = 6$.

в) рівність $x^2 - Cy^2 + 1 = 0$ загальним інтегралом рівняння $xy = (1 + x^2)y'$.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку з відокремленими змінними:

1. $x^2dx + (y - 1)dy = 0$;

2. $(x - 1)^2dx + \text{tg}y\ x\ dy = 0$;

3. $\dfrac{x^2}{x^3 + 5} dx + \dfrac{y^2}{y^3 + 5} dy = 0$;

6. $\dfrac{dy}{5\sqrt{y}} = dx$

4. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=0$; 5. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{1+y^2}{y}dy=0$;

7. dy = adx; 8. $\frac{dy}{dx}=1-y^2$

Завдання 4. Привести задані рівняння до диференціальних рівнянь з відокремленими змінними:

1. $y' = 5$; **2.** $y' = x^3$; **3.** $xy' - y = 0$;
4. $xy' - 2x + 5 = 0$; **5.** $2st^2s'=1+t^2$; **6.** $v' = (2v + 1)ctgt$;
7. $y \cdot y' + x = 0$; **8.** $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$;
9. $y' = \frac{y-1}{x+1}$; **10.** $x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$;
11. $(1 + y^2)dx = xydy$ **12.** $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$.

Завдання 5. Знайти розв'язки задач Коші:

1. $(1 + y^2)dx = xydy$; $y(2) = 1$;
2. $dr + rtg\varphi \cdot d\varphi = 0$; $r(\pi) = 2$;
3. $y' \cdot \sin^2 x\ell ny + y = 0$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$;
4. $(1+t^2)s' = 3t^2 s$; $s(0) = 2$;
5. $v' + v\sin 2t = 0$; $v\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$;
6. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy=0$; $y(0) = 1$;
7. $y' = (2y+1)ctgx$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$;
8. $v'tgt - v = 1$; $v\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Завдання 6. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл однорідного диференціального рівняння

1. $\frac{xy'}{y} = \ell n\frac{y}{x}$; **2.** $xy' - \sqrt{x^2 - y^2} = y$;
3. $xy' - x\cos^2\frac{y}{x} = y$; **6.** $x^2y' = y^2 + xy$;
4. $y' = 1 + \frac{y}{x}$; **5.** $(x^2+y^2)dx=xyd$;
7. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\cdot y'$; **8.** $xy' = y + x\ell^{\frac{y}{x}}$

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

1. $y' + \frac{y}{x} = x^2$; **2.** $s' - \frac{2}{t}s = t^2 \cdot \ell nt$;
3. $y' - \frac{3}{x}y = x$; **6.** $xy' + 2y = \ell^{-x^2}$;
4. $y' + y \cdot tgx = \cos x$; **5.** $s' = \frac{s}{t} + t$;
7. $(1+t^2)s' - 2ts = (1+t^2)^2$ **8.** $ts' + s - \ell^{-t} = 0$

Завдання 8. Знайти загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

1. $y' + \frac{y}{x} = -y^2$; **2.** $(x-1)y' - y = y^2$; **3.** $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$;
4. $y' - \frac{1}{x}y = -y^2$; **8.** $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$;
5. $y' = xy - y^3\ell^{-x^3}$; **6.** $x^2y^2 \cdot y' + xy^3 = a^2$; **7.** $xy' - y^2 \cdot \ell nx + y = 0$;

<u>Завдання 9.</u> Визначити типи диференціальних рівнянь.

1. а) $(2x^2 + xy)y' = xy + y^2$ **;** **б)** $y' + 2xy = x\ell^{-x^2}$ **;**

2. а) $(x^2 - xy)y' + y^2 = 0$ **;** **б)** $y' \cdot \sqrt{1-x^2} + y = arc\sin x$ **;**

3. а) $y' + tgx \cdot y = \sin 2x$ **;** **б)** $xy' = y - 2\sqrt{xy}$ **;**

4. а) $(2x+1)y' + y = x$ **;** **б)** $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$

<u>Завдання 10.</u> Розв'язати задачі:

1. Відомо, що швидкість розпаду радію пропорційна кількості радію і за 1600 років розпадається половина первинної кількості. Кількість радію в початковий момент (t = 0) була x_o. Визначити:

а) через скільки років кількість радію буде складати 80% початкової кількості ?

б) який відсоток радію залишиться через 300 років ?

2. За законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. Визначити за який термін тіло з температурою 300^0, яке занурили в рідину з температурою 60^0, охолоне до 150^0. Відомо, що температура рідини практично не змінюється (велика кількість) і через 10 хвилин температура тіла дорівнювала 200^0.

3. Швидкість втрати електричного заряду ізольованого провідника внаслідок недосконалості ізоляції пропорційна заряду, що є, в даний момент.

В початковий момент провідник мав заряд 200 CGSE і за перші дві хвилини втратив 150 CGSE. Визначити, через скільки хвилин заряд провідника буде дорівнювати половині початкового.

4. Тіло рухається по прямій з постійним прискоренням а см/сек^2. В початковий момент t = 0 його швидкість v = v_0, а відстань від початку координат - s_o. Знайти закон руху.

5. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $M_o(2, 3)$ і має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної, розташований між координатами осями, поділяється навпіл в точці дотику.

6. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $M_o(2, 0)$ і має таку властивість, що відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має постійну довжину 2.

7. Знайти усі лінії, для яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис поділяється навпіл в точці перетину з віссю ординат.

11.3 Диференціальні рівняння другого порядку, що дозволяють знизити порядок.

11.3.1 Види рівнянь та способи їх розв'язування.

Диференціальні рівняння другого порядку, які розв'язують шляхом зниження порядку мають вигляд:

а) $\boxed{y'' = f(x)}$; **б)** $\boxed{F(x, y', y'') = 0}$;

в) $\boxed{F(y, y', y'') = 0}$

Рівняння а) розв'язано відносно похідної другого порядку і не містить шуканої функції y та її похідної y′.

Рівняння б) не містить явно шуканої функції y.

Рівняння в) не містить явно аргументу x.

Для розв'язування рівнянь **а)** та **б)** треба ввести допоміжну функцію

$$\boxed{p(x) = \frac{dy}{dx}}$$

Тоді $\boxed{y'' = \dfrac{dp}{dx}}$, тому рівняння зводяться до рівнянь першого порядку відносно функції р:

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = f(x) \quad \text{та} \quad F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0}$$

Після знаходження їх загального розв'язку треба замість р підставити $\dfrac{dy}{dx}$ і розв'язати одержане диференціальне рівняння першого порядку відносно шуканої функції у.

Приклад 7. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

а) $y'' = \sin 2x$; **б)** $xy'' + y' = 0$

Розв'язання. Використовуючи допоміжну функцію $p(x) = y'$, одержимо:

а) $\dfrac{dp}{dx} = \sin 2x \Rightarrow dp = \sin 2x \cdot dx \Rightarrow p = \int \sin 2x dx = \dfrac{-\cos 2x}{2} + C_1$

Підставимо замість р її значення $\dfrac{dy}{dx}$. Тоді одержимо диференціальне рівняння відносно шуканої функції у

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos 2x}{2} + C_1 \Rightarrow dy = \left(C_1 - \frac{\cos 2x}{2}\right)dx \Rightarrow$$

$$y = \int\left(C_1 - \frac{\cos 2x}{2}\right)dx = C_1 x - \frac{1}{4}\sin 2x + C_2$$

б) $xp' + p = 0$. Це диференціальне рівняння першого порядку відносно допоміжної функції р. Поділяючи змінні, одержимо:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-p}{x} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x} \Rightarrow \ell np = -\ell nx + \ell nC_1 \Rightarrow p = \frac{C_1}{x}$$

Тепер підставимо замість р її значення $\dfrac{dy}{dx}$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} \Rightarrow dy = C_1 \cdot \frac{dx}{x}$$

Інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок рівняння **б)**

$$y = \int C_1 \frac{dx}{x} = C_1 \ell n|x| + C_2$$

Отже, приклад розв'язано.

Для розв'язування рівняння **в)** треба ввести допоміжну функцію $\boxed{p(y) = \dfrac{dy}{dx}}$

Враховуючи, що у залежить від х і використовуючи правило диференціювання складної функції, одержимо, що

$$\boxed{y'' = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p\frac{dp}{dy}}$$

Тому рівняння в) прийме вигляд $F\left(y, p, \dfrac{dp}{dy} \cdot p\right) = 0$, тобто буде рівнянням першого порядку відносно допоміжної функції р(у).

Після розв'язування цього рівняння треба повернутись до шуканої функції у шляхом підстановки замість р її значення $\dfrac{dy}{dx}$ і розв'язування одержаного диференціального рівняння першого порядку відносно у.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0.$$

Розв'язування.

Задано диференціальне рівняння другого порядку, яке явно не містить аргументу х. Тому використуємо допоміжну функцію $p(y) = y'$ та $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

Після підстановки y' та y'' в задане диференціальне рівняння одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$p^2 + 2y \cdot p\frac{dp}{dy} = 0 \quad \text{або} \quad p\left(p + 2y\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

Звідси знаходимо:

1) p = 0. Тоді $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = C$, один із розв'язків;

2) $p + 2y\frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} = \frac{-p}{2y} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{-dy}{2y}$

диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними. Інтегруючи, знаходимо його розв'язок

$$\ell np = -\frac{1}{2}\ell ny + \ell nC_1 \Rightarrow \ell np = \ell n\frac{C_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$

Підставимо замість p її значення $\frac{dy}{dx}$ і одержимо диференціальне рівняння першого порядку відносно шуканої функції y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \sqrt{y} \cdot dy = C_1 dx \Rightarrow \int\sqrt{y}dy = C_1\int dx \Rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{y^3} = C_1x + C_2 \Rightarrow \sqrt{y^3} =$$

$= \frac{3}{2}(C_1x + C_2) \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{9}{4}(C_1x + C_2)^2}$ - загальний розв'язок заданого диференціального рівняння 2 порядку.

11.3.2 ВПРАВИ

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь

1. $y'' = 0$; **2.** $y'' = -1$; **3.** $y'' = \frac{1}{x}$;

4. $S'' = \frac{1}{t^2 + 1}$; **5.** $\frac{d^2r}{(d\varphi)^2} = \varphi\sin\varphi$ **6.** $xy'' = y'$;

7. $y'' = \ell nx$; **8.** $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$; **9.** $x^2 \cdot y'' + xy' = 1$

10. $xy'' = y' + 1$; **11.** $xy'' - y' = x^2 \cdot \ell^x$; **12.** $y'' - 2x(y')^2$;

13 $y \cdot y'' = (y')^2$; **14.** $y'' \cdot tgy = 2(y')^2$; **15.** $2y \cdot y'' = 1 + (y')^2$

16. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$

Завдання 2. Знайти розв'язки задач Коші:

1. $y'' = \sin x - 1, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$;

2. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ell n2}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$;

3. $xy'' = y', \qquad y(0) = y'(0) = 1$;

4. $S''(1+t^2) = 2ts', \quad S(0) = 1, \quad S'(0) = 3$;

5. $xy'' = x(y')^2 - y' = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1$;

6. $1 + (y')^2 = 2y \cdot y'', \quad y(1) = y'(1) = 1$;

7. $y'' \cdot y^3 = 1, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$;

8. $2y'' = 3y^2, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$;

9. $y'' = \ell^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

10. $2(y')^2 = y'' \cdot (y-1) \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$;

11.4 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Означення 11. Диференціальне рівняння другого порядку називається лінійним, якщо воно містить шукану функцію y та її похідні y' і y'' у першому степені, тобто може бути записаним у вигляді

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x),} \qquad (15)$$

де коефіцієнти рівняння а, в та с - сталі числа або функції х.

При $f(x) \neq 0$ рівняння називають *неоднорідними.* Вони використовуються при дослідженні вимушених коливань.

При $f(x) \equiv 0$ рівняння має вигляд

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0,} \qquad (16)$$

і називається лінійним *однорідним* диференціальним рівнянням другого порядку. Такі рівняння використовують при дослідженні вільних коливань.

Найчастіше потрібно знаходити загальний розв'язок лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами.

11.4.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами

Згідно теореми про загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку ***загальний розв'язок рівняння*** (16) має вигляд

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2,} \qquad (17)$$

де y_1 та y_2 - *лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (16), а C_1 та C_2 - довільні сталі.*

Для знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння ау″ + ву′ + су = 0 із сталими коефіцієнтами треба:

1. *скласти відповідне характеристичне рівняння*

$$ак^2 + вк + с = 0 \qquad (18)$$

шляхом заміни у″ на $к^2$, у′ на к і у на 1.

2. *розв'язати характеристичне рівняння за формулою:*

$$k = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a} \qquad (19)$$

3. *в залежності від значень коренів характеристичного рівняння записати загальний розв'язок заданого диференціального рівняння:*

а) *у випадку дійсних та різних коренів характеристичного рівняння*

$$y = C_1 \ell^{к_1 x} + C_2 \ell^{к_2 x}, \qquad k_1 \neq k_2;$$

б) *у випадку дійних рівних коренів характеристичного рівняння*

$$y = \ell^{кx}(C_1 + C_2 x), \qquad k_1 = k_2 = k;$$

в) *у випадку комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння*

$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta$, де

$$i = \sqrt{-1}, \quad \alpha = \frac{-в}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - в^2}}{2a}$$

загальним розв'язком буде:

$$y = \ell^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Приклад 9. Знайти загальні розв'язки рівнянь

а) 2у″ + у′ - у = 0; **б)** 4у″ + 4у′ + у = 0;

в) у″ + 2у′ + 5у = 0

Розв'язання. Задані лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, їх загальні розв'язки знайдемо з використанням коренів відповідних характеристичних рівнянь.

Рівняння а) відповідає характеристичне рівняння $2К^2 + К - 1 = 0$.

За формулою (19) знайдемо корені цього рівняння

$$k_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4};\quad k_1=\frac{1}{2},\quad k_2=-1$$

Одержали два дійсних різних кореня характеристичного рівняння, тому загальним розв'язком диференціального рівняння **а)** буде $y=C_1\ell^{x/2}+C_2\ell^{-x}$

Диференціальному рівнянню **б)** відповідає характеристичне рівняння

$$4k^2+4k+1=0.$$

За формулою (19) знайдемо корені цього рівняння

$$k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2},$$

Отже, характеристичне рівняння має два дійсних рівних кореня

$$k_1=k_2=\frac{-1}{2},$$

тому загальним розв'язком диференціального рівняння `**б)** буде

$$y=\ell^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)$$

Характеристичним рівнянням у випадку диференціального рівняння в) буде $K^2+2K+5=0$.

Корені цього характеристичного рівняння

$$k_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16(-1)}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i$$

комплексно спряжені, причому α = -1, β = 2, тому загальним розв'язком диференціального рівняння в) буде

$$y=\ell^{-x}(C_1 cos 2x+C_2\sin 2x)$$

11.4.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами

За теоремою про *__загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального__* рівняння n-го порядку загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку виду

$$\boxed{y''+py'+qy=f(x)}\tag{20}$$

має вигляд

$$\boxed{y=y_0+y_ч}\tag{21}$$

де y_o - *__загальний__* розв'язок відповідного лінійного однорідного *__рівняння__*

$$y''+py'+qy=0\tag{22}$$

а $y_ч$ *__- частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння__*.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння можна знайти __методом варіації довільних сталих.__

Для цього в загальному розв'язку $y = C_1y_1 + C_2y_2$ відповідного однорідного рівняння (22) замінити сталі C_1 та C_2 функціями незалежної змінної x, тобто шукати загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння (20) у вигляді:

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)y_2\tag{23}$$

Для визначення функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складають систему рівнянь

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x)\end{cases}\tag{24}$$

За правилом Крамера можна знайти єдиний розв'язок цієї системи

$$C_1'(x)=\frac{-y_2 f(x)}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}},\quad C_2'=\frac{y_1 f(x)}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}$$

Інтегруванням цих рівностей знаходять шукані функції

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)dx}{y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'} + C_1; \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)dx}{y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'} + C_2$$

Підставивши ці значення $C_1(x)$ та $C_2(x)$ в формулу (23), одержують загальний розв'язок рівняння (20) у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 \cdot y_2'} dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'} dx \quad \mathbf{(25)}$$

Усі величини правої частини цієї формули відомі.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x} \qquad (26)$$

Розв'язання. Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, яке будемо розв'язувати методом варіації довільних сталих. Запишемо відповідне однорідне рівняння $y'' + 4y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має корні $k_{1,2} = \pm 2i$, тому загальним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння буде:

$$y_o = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Отже, лінійно незалежні частинні розв'язки мають вид

$$y_1 = \cos 2x, \ y_2 = \sin 2x$$

Загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння (26) будемо шукати у вигляді

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x, \qquad (27)$$

де $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольняють умовам (24), тобто

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ C_1'(x)(-2)\sin 2x + C_2'(x)\cdot 2\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

За правилом Крамера знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -tg 2x;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-tg 2x}{2}; \qquad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2}$$

Останні рівності - диференціальні рівняння першого порядку відносно шуканих функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$. Інтегруванням цих рівнянь, знаходимо:

$$C_1(x) = -\int \frac{tg 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(\cos 2x)}{\cos 2x} = \frac{1}{4}\ell n|\cos 2x| + C_1;$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} + C_2;$$

Підставимо знайдені $C_1(x)$ та $C_2(x)$ в формулу (27) і одержимо загальний розв'язок заданого рівняння (26):

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ell n|\cos 2x| + \frac{x}{2}\sin 2x.$$

Метод варіації довільних сталих універсальний тому, що дозволяє знаходити загальний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із змінними та сталими коефіцієнтами. *У випадку сталих коефіцієнтів* диференціального рівняння (20) частинний розв'язок $y_ч$ можна знайти *методом невизначених коефіцієнтів*, використовуючи вид правої частини $f(x)$ рівняння. При цьому треба знати корні характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$ і керуватись наступними рекомендаціями:

1. *якщо* $f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, *тобто є многочлен з відомими коефіцієнтами* $a_o, a_1, \ldots, a_n$, *то частинний розв'язок* $y_ч$ *треба шукати у вигляді*

$$y_r = \begin{cases} Q_n(x) = в_o x^n + в_1 x^{n-1} + \ldots + в_{n-1}x + в_n & при \quad K_1 \neq 0, \quad K_2 \neq 0; \\ xQ_n(x) & при \quad K_1 = 0 \quad K_2 \neq 0; \end{cases}$$

причому коефіцієнти $в_0$, $в_1$, ..., $в_n$ многочлена $Q_n(x)$ знаходяться методом невизначених коефіцієнтів після підстановки $y_ч$, $y_ч'$ та $y_ч''$ в ліву частину заданого неоднорідного диференціального рівняння.

2. *якщо* $f(x) = \ell^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, *то частинний розв'язок* $y_ч$ *треба шукати у вигляді*

$$y_ч = \begin{cases} \ell^{\alpha x} \cdot Q_n(x) & при \quad K_1 \neq \alpha, & та \quad K_2 \neq \alpha; \\ x\ell^{\alpha x} \cdot Q_n(x) & при \quad K_1 = \alpha, & K_2 \neq \alpha; \\ x^2 \ell^{\alpha x} \cdot Q(x) & при \quad K_1 = K_2 = \alpha \end{cases}$$

3. якщо $f(x) = P_n(x)\cos\beta x$ або $f(x) = P_n(x)\sin\beta x$, то $y_ч$ треба шукати у вигляді

$$y_ч = \begin{cases} Q(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x & при \quad K_{1,2} \neq \pm i\beta; \\ x[Q_n(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x] & при \quad K_{1,2} = \pm i\beta, \end{cases}$$

де $Q_n(x)$ та $R_n(x)$ - многочлени n ступеня з невідомими коефіцієнтами.

Приклад 11. Знайти загальні розв'язки рівнянь

а) $y'' - 4y' = x^2 + 5$; **б)** $y'' - 4y' + 4y = x \cdot \ell^{2x}$;

в) $y'' - 4y' + 13y = 6 \cdot \sin 3x$

Розв'язання. Усі три задані диференціальні рівняння другого порядку, неоднорідні і мають сталі коефіцієнти. Тому для знаходження їх загальних розв'язків згідно формули (21) треба знайти для кожного з цих рівнянь загальний розв'язок y_o відповідного однорідного рівняння та частинний розв'язок

неоднорідного рівняння $y_ч$

а) Характеристичним рівнянням для однорідного рівняння $y'' - 4y' = 0$ буде $K^2 - 4K = 0 \Rightarrow K(K-4) = 0 \Rightarrow K_1 = 0$, $K_2 = 4$.

Отже, загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння буде

$$y_o = C_1\ell^{ox} + C_2\ell^{4x} = C_1 + C_2\ell^{4x}$$

Права частина неоднорідного рівняння а) за умовою $f(x) = x^2 + 5$. Корінь характеристичного рівняння $K_1 = 0$, тому згідно першої рекомендації $y_ч$ будемо шукати у вигляді

$$y_ч = x(в_0x^2 + в_1x + в_2) = в_0x^3 + в_1x^2 + в_2x \qquad (*)$$

Знайдемо коефіцієнти $в_0$, $в_1$ та $в_2$ методом невизначених коефіцієнтів.

Для цього знаходимо:

$$y_ч' = 3в_0x^2 + 2в_1x + в_2, \quad y_ч'' = 6в_0x + 2в_1$$

Підставимо $y_ч'$, $y_ч''$ в ліву частину рівняння а). Тоді

$$6в_0x + 2в_1 - 4(3в_0x^2 + 2в_1x + в_2) = x^2 + 5 \Rightarrow 6в_0x + 2в_1 - $$
$$-12в_0x^2 - 8в_1x - 4в_2 = x^2 + 5.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при одноковому степені x зліва та справа, одержимо:

$$x^2 : -12в_0 = 1 \Rightarrow в_0 = \frac{-1}{12};$$

$$x : 6в_0 - 8в_1 = 0 \Rightarrow в_1 = \frac{6в_0}{8} = \frac{6}{8}\cdot\left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{-1}{16};$$

$$x^0 : 2в_1 - 4в_2 = 5 \Rightarrow в_2 = \frac{2в_1 - 5}{4} = \frac{2\cdot\left(\frac{-1}{16}\right) - 5}{4} = \frac{-41}{32};$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в формулу (*) і одержимо:

$$y_ч = \frac{-1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{41}{32}x$$

Отже, загальним розв'язком диференціального рівняння

а) буде: $y = y_0 + y_ч = C_1 + C_2\ell^{4x} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} - \frac{41}{32}x;$

б) Характеристичним рівнянням для однорідного рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$ буде $k^2 - 4k + 4 = 0$. Корені цього рівняння дійсні та рівні $k_1 = k_2 = 2$.

Тому загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння має вид:

$$y_0 = \ell^{2x}(C_1 + C_2x).$$

Права частина неоднорідного рівняння б) за умовою $f(x) = x\ell^{2x}$. Згідно другої рекомендації частинний розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y_ч = x^2(в_0x + в_1)\ell^{2x} = \ell^{2x}(в_0x^3 + в_1x^2) \qquad (**)$$

Коефіцієнти $в_0$ та $в_1$ знайдемо методом невизначених коефіцієнтів. Знаходимо за правилом диференціювання добутку:

$$y'_ч = 2\ell^{2x}(в_0x^3 + в_1x^2) + \ell^{2x}(3в_0x^2 + 2в_1x) =$$
$$= \ell^{2x}\cdot\left[2в_0x^3 + (2в_1 + 3в_0)x^2 + 2в_1x\right]$$
$$y''_ч = 2\ell^{2x}\left[2в_0x^3 + (2в_1 + 3в_0)x^2 + 2в_1x\right] +$$
$$+ \ell^{2x}\left[6в_0x^2 + 2(2в_1 + 3в_0)x + 2в_1\right] \Rightarrow$$
$$y''_ч = \ell^{2x}\left[4в_0x^3 + (4в_1 + 12в_0)x^2 + (8в_1 + 6в_0)x + 2в_1\right]$$

Після підстановки $y_ч$, $y'_ч$ та $y''_ч$ в ліву частину рівняння б) і скорочення на ℓ^{2x} одержимо:

$$4в_0x^3 + (4в_1 + 12в_0)x^2 + (8в_1 + 6в_0)x + 2в_1 - 4\left[2в_0x^3 + (2в_1 + 3в_0)x^2 + 2в_1x\right] +$$
$$+ 4(в_0x^3 + в_1x^2) = x$$

Після приведення подібних будемо мати:

$$6в_0x + 2в_1 = x$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x : 6в_0 = 1 \Rightarrow в_0 = \frac{1}{6};$$
$$x^0 : 2в_1 = 0 \Rightarrow в_1 = 0$$

Підставимо знайдені коефіцієнти $в_0$ та $в_1$ в рівність (**).

Одержимо: $y_ч = \frac{1}{6}x^3 \cdot \ell^{2x}$

Отже, за формулою (21) загальним розв'язком диференціального рівняння б) буде:

$$y = y_0 + y_ч = \ell^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{6}x^3 \cdot \ell^{2x} = \ell^{2x}\left(\frac{x^3}{6} + C_2x + C_1\right).$$

в) В цьому випадку коренями характеристичного рівняння $k^2+4k+13=0$ будуть комплексні числа

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = -2 \pm 3i$$

Тому загальним розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння буде

$$y_0 = \ell^{-2x}(C_1 cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

Права частина неоднорідного рівняння в) задана у вигляді $f(x) = P_0(x)\sin 3x$, тому згідно рекомендації 3 частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y_ч = A\cos 3x + B\sin 3x \qquad (***)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A та B застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Для цього знайдемо $y'_ч$ та $y''_ч$:

$$y'_ч = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$$
$$y''_ч = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

Після підстановки $y_ч$, $y'_ч$ та $y''_ч$ в ліву частину заданого рівняння в) та приведення подібних одержимо рівність: $(4A + 12B)\cos 3x + (4B - 12A)\sin 3x = 6\sin 3x \Rightarrow$

21*

коефіцієнти при cosx та sin3x зліва та справа повинні бути рівними

$$4A+12B=0 \Rightarrow A=-3B$$

$$4B-12A=6 \Rightarrow 4B+36B=6 \Rightarrow 40B=6 \Rightarrow B=\frac{3}{20};\ A=\frac{-9}{20}$$

Підставимо знайдені А та В в формулу (***) і одержимо:

$$y_ч=\frac{-9}{20}cos3x+\frac{3}{20}\sin 3x$$

За формулою (21) одержуємо загальний розв'язок диференціального рівняння в):

$$y=\ell^{-2x}(C_1cos3x+C_2\sin 3x)-\frac{9}{20}\cos 3x+\frac{3}{20}\sin 3x \Rightarrow$$

$$y=(C_1\ell^{-2x}-\frac{9}{20})\cos 3x+(C_2\ell^{-2x}+\frac{3}{20})\sin 3x.$$

11.4.3 ВПРАВИ

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

1. $y''-4y'+3y=0;$ **2.** $y''-4y=0;$

3. $y''-4y'=0;$ **4.** $y''-8y'=0;$

5. $\frac{d^2s}{(dt)^2}+4\frac{ds}{dt}+4s=0;$ **6.** $y''+2y'+2y=0;$

7. $y''+4y'=0;$ **8.** $\frac{d^2r}{(d\varphi)^2}+\frac{r}{4}=0;$

9. $z''-z=0;$ **10.** $x''+6x'+9x=0;$

11. $y''+y=0;$ **12.** $y''+2y'+4y=0;$

13. $x''+5x'=0;$ **14.** $x''-16x=0;$

15. $y''-9y=0.$ **16.** $x''-7x'+10x=0;$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих.

1. $y''+4y'+4y=\frac{\ell^{-2x}}{x^3};$ **2.** $y''+4y=\frac{1}{\sin^2 x};$

3. $y''+4y'+4y=\ell^{-2x}\cdot \ell nx;$ **4.** $y''+2y'+y=\frac{\ell^x}{x};$

5. $y''+y=\frac{1}{\sin x};$ **6.** $y''-2y''+y=\frac{e^x}{\sqrt{4-x}};;$

7. $y''+2y'+y=\frac{\ell^{-x}}{x};$ **8.** $y''-2y'+y=\frac{\ell^x}{x^2+1};$

10. $y''+y=tgx;$ **9.** $y''-y=\ell^{2x}\cdot\cos\ell^x;$

Завдання 3. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь, використовуючи вигляд правої частини для знаходження частинного розв'язку.

1. $y''-4y'=x^2+5;$ **2.** $y''-7y'+12y=5;$

3. $y''-6y'+8y=10;$ **6.** $y''+6y'=8;$

4. $y''+4y=8;$ **5.** $y''-5y'=7;$

7. $y''-y'=3;$ **8.** $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-6x=2;$

10. $y''+2y'-3y=4\ell^{-x}.$ **9.** $y''+y'+y=3\ell^{2x};$

Завдання 4. Знайти розв'язок задачі Коші

1. $y''-4y'+3y=0,\quad y(0)=6,\quad y'(0)=10;$

2. $y''+4y'+29y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=15;$

3. $4y''+4y'+y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=0;$

4. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3{,}2;$

5. $y'' - y' = 2(1 - x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

6. $y'' - 2y' = \ell^x(x^2 + x - 3), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2;$

7. $y'' + y + \sin 2x = 0, \quad y(\pi) = y'(\pi) = 1,$

8. $y'' - 3y' = x^2 + 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \dfrac{70}{27};$

9. $y'' + 4y' = \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 1;$

10. $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

Завдання 5. Зробити аналіз вільних та вимушених коливань, що задовольняють рівняння

1. **а)** $my''(t) = -cy(t);$ **б)** $y''(t) + \dfrac{\mu}{m}y' + \dfrac{c}{m}y = 0,$

де m, c, μ - сталі додатні величини

2. **а)** $y''(t) + \kappa^2 y(t) = P\sin\omega t$ при відсутності сили опору; **б)** $y''(t) + 2\text{в}y'(t) + \kappa^2 y(t) = P\sin\omega t$ при наявності сили опору.

11.5 Системи диференціальних рівнянь

11.5.1 Основні поняття

В багатьох випадках потрібно визначати відразу декілька функцій, які зв'язані між собою декількома диференціальними рівняннями. Сукупність таких рівнянь називають системою диференціальних рівнянь.

Наприклад, рух точки масою m, радіус - вектор якої

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{\kappa}$$

під дією $\vec{F}$ за формулою Ньютона - Лейбніца описується рівнянням $m\vec{a} = \vec{F}$, яке у координатній формі має вигляд трьох диференціальних рівнянь руху:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \dfrac{dx}{dt}, \quad \dfrac{dy}{dt}, \quad \dfrac{dz}{dt}\right) \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \dfrac{dx}{dt}, \quad \dfrac{dy}{dt}, \quad \dfrac{dz}{dt}\right) \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z\left(t, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \dfrac{dx}{dt}, \quad \dfrac{dy}{dt}, \quad \dfrac{dz}{dt}\right) \end{cases}$$

Отже, маємо систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку відносно трьох шуканих функцій:
x = x(t),y = y(t), z = z(t).

Означення 12. Нормальною системою диференціальних рівнянь називають систему вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ --------------- \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad \textbf{(28)}$$

Відмітимо, що кожне рівняння цієї системи розв'язано відносно похідної першого порядку відповідної функції. Праві частини рівнянь не містять похідних шуканих функцій.

Розв'язком системи (28) називають сукупність функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$, які задовольняють кожному рівнянню цієї системи.

Системи диференціальних рівнянь другого, третього та більших порядків можна звести до нормальної системи шляхом введення нових шуканих функцій.

Теорема Коші (існування та єдиності розв'язку нормальної системи)

Нехай праві частини нормальної системи (28) функції $f_\kappa(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(k = 1,2,...,n)$ *неперервні в деякій області D* *за усіма змінними і мають в цій області неперервні частинні похідні* $\dfrac{\partial f\kappa}{\partial y_i}$ $(\kappa, i = 1,2,\dots,n)$. *Тоді для будь-яких значень* x_0, y_{10}, $y_{20},\dots$, y_{n0}, *що належать області D, існує єдиний розв'язок системи* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, *який задовольняє початковим умовам:*

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \dots,\ y_n(x_0) = y_{n0} \qquad (29)$$

<u>Для інтегрування нормальної системи (28) можна застосувати метод виключення невідомих, за яким задана система зводиться до одного диференціального рівняння n порядку відносно однієї шуканої функції.</u>

Для прикладу обмежимось системою двох рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases} \qquad (30)$$

Диференціюванням першого рівняння системи за змінною t одержимо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

Підставимо в цю рівність вираз $\dfrac{dy}{dt}$ із другого рівняння системи. Тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + (-2x - 5y)$$

Із першого рівняння системи знайдемо $y = \dfrac{dx}{dt} + 7x$ і одержимо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} - 2x - 5\left(\frac{dx}{dt} + 7x\right) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 37x = 0$$

Отже, задана нормальна система двох рівнянь з двома невідомими функціями звелась до однорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами відносно однієї шуканої функції x(t).

Використовуючи характеристичне рівняння, одержимо загальний розв'язок у вигляді

$$x(t) = \ell^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

Якщо продиференціювати цю рівність і підставити x та $\dfrac{dx}{dt}$ в перше рівняння системи, то знайдемо другу шукану функцію y(t) у вигляді

$$y = \ell^{-6t}\left[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\right]$$

Отже, загальний розв'язок нормальної системи двох рівнянь містить дві довільних сталих C_1 та C_2.

Аналогічно можна показати, що загальний розв'язок нормальної системи n диференціальних рівнянь містить n довільних сталих. Для відокремлення часткового розв'язку системи використовують початкові умови.

Для прикладу відокремимо із одержаного загального розв'язку системи (30) частковий розв'язок, що задовольняє початковим умовам

$$x(0) = 0; \quad y(0)=1 \qquad (31)$$

При заданих початкових умовах із виразів загального розв'язку x(t), y(t) одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення сталих C_1 та C_2:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ (C_2 + C_1)\cdot 1 + (C_2 - C_1)\cdot 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 1$$

Отже, шуканий частковий розв'язок має вид

$$x(t) = \ell^{-6t}\cdot \sin t, \quad y = \ell^{-6t}(\cos t + \sin t)$$

Нормальні лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами, які часто використовуються і мають вигляд

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ ----------------- \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad \mathbf{(32)}$$

розв'язують іншим методом - ***методом використання характеристичного рівняння системи***. При цьому методі частковий розв'язок системи (32) шукають у вигляді

$$x_1 = \alpha_1 \ell^{\kappa t}, x_2 = \alpha_2 \ell^{\kappa t}, \ldots, x_n = \alpha_n \cdot \ell^{\kappa t} \qquad (33)$$

Щоб ці функції були розв'язком системи, вони повинні задовольняти рівняння системи. Якщо підставити ці функції в рівняння системи і скоротити їх на множник $\ell^{\kappa t} \neq 0$, тоді одержимо алгебраїчну систему відносно невідомих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ та к:

$$\begin{cases} (a_{11} - \kappa)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \kappa)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ ---------------------- \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \kappa)\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (34)$$

Однорідна система (34) має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто при умові

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \kappa) & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \kappa) \ldots a_{2n} \\ ----- & ----- \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots (a_{nn} - \kappa) \end{vmatrix} = 0 \qquad (35)$$

Рівність (35) називається *характеристичним рівнянням системи (32).*

Це рівняння одержують використовуючи вид системи (32). Для цього:

1. *складають визначник, елементами якого є коефіцієнти системи (32), причому від елементів*

головної діагоналі визначника віднімається параметр к;

2. *одержаний визначник повинен дорівнювати нулю.*

Рівняння (35) є алгебраїчним рівнянням n степеня відносно параметра к. Серед коренів цього рівняння можуть бути дійсні різні значення, дійсні кратні, комплексні спряжені та комплексні кратні.

Для кожного значення κ_j (j = 1, 2, ..., n) характеристичного рівняння системи складають систему (34) і визначають відповідні коефіцієнти α_{ij} (i = 1, 2, ..., n).

Частковий розв'язок системи диференцальних рівнянь, що відповідає значенню кореня κ_j характеристичного рівняння одержують з використанням рівностей (33) у вигляді

$$x_{1j} = \alpha_{1j} \cdot \ell^{\kappa_j t},\ x_{2j} = \alpha_{2j} \cdot \ell^{\kappa_j t},\ \ldots,\ x_{nj} = \alpha_{nj} \cdot \ell^{\kappa_j t},\ j = 1,2,\ldots n.$$

Загальний розв'язок системи (32) записують у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = C_1 a_{11} \ell^{\kappa_1 t} + C_2 a_{12} \ell^{\kappa_2 t} + \ldots + C_n a_{1n} \ell^{\kappa_n t} \\ x_2 = C_1 a_{21} \ell^{\kappa_1 t} + C_2 a_{22} \ell^{\kappa_2 t} + \ldots + C_n a_{2n} \ell^{\kappa_n t} \\ x_n = C_1 a_{n1} \ell^{\kappa_1 t} + C_2 a_{n2} \ell^{\kappa_2 t} + \ldots + C_n a_{nn} \ell^{\kappa_n t} \end{cases} \qquad \mathbf{(36)}$$

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$$

Розв'язання. Задана нормальна лінійна система двох диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння має вид:

$$\begin{vmatrix} -2-\kappa & -3 \\ -1 & 0-\kappa \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \kappa^2 + 2\kappa - 3 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = -3; \kappa_2 = 1$$

Часткові розв'язки будемо шукати у вигляді

$$x_i = \alpha_i \ell^{\kappa_i t},\ y_i = \beta_i \ell^{\kappa_i t},\ i = 1,2$$

Система рівнянь (34) для визначення α та β при $\kappa_1 = -3$ приймає вид:

$$\begin{cases} -2-(-3)\alpha_1 - 3\beta_1 = 0 \\ -\alpha_1 + [0-(-3)]\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 3\beta_1 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\beta_1 = 0 \end{cases}$$

Остання система має нескінчену кількість розв'язків, оскільки друге рівняння є наслідком першого рівняння.

Візьмемо $\beta_1=1$, тоді $\alpha_1=3$.

Отже, кореню характеристичного рівняння $k_1=-3$ відповідає частковий розв'язок

$$x_1 = 3\ell^{-3t}, \quad y_1 = \ell^{-3t}$$

Система (34) для визначення α та β при $k_2 = 1$ має вид

$$\begin{cases} -3\alpha_2 - 3\beta_2 = 0 \\ -\alpha_2 - \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Якщо взяти $\alpha_2 = 1$, тоді $\beta_2 = -1$. Отже, кореню характеристичного рівняння $k_2 = 1$ відповідає частковий розв'язок

$$x_2 = \ell^t, \quad y_2 = -\ell^t$$

Тому загальним розв'язком заданої системи згідно (36) буде

$$\begin{cases} x(t) = 3C_1\ell^{-3t} + C_2\ell^t; \\ y(t) = C_1\ell^{-3t} - C_2\ell^t \end{cases}$$

▼ **Зауваження.** У випадку комплексних коренів характеристичного рівняння відповідні їм часткові розв'язки перетворюються за формулами Ейлера таким чином, як це робиться для одного лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами. Наприклад, для $K_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ треба часткові розв'язки перетворити за формулою:

$$\ell^{(\alpha \pm i\beta)t} = \ell^{\alpha t}(\cos \beta t \pm \sin \beta t)$$

11.5.2 ВПРАВИ

1. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь методом зведення до диференціального рівняння вищого порядку та методом використання характеристичного рівняння системи.

а) $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = -20x + 6y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = y - 7x \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$ е) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + y \\ z' = x + y \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$ д) $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + 4z \end{cases}$

2 Знайти розв'язок системи при заданих початкових умовах

а) $\begin{cases} x' + y' = y + \ell^t; \\ 2x' + y' = -2y + \cos t \end{cases}$ $x(o) = y(o) = 0.$

Рекомендація. Спочатку розв'язати систему відносно x' та y', а потім звести її до диференціального рівняння другого порядку відносно однієї функції.

б) $\begin{cases} x' = y - z; & x(o) = 1; \\ y' = x + y; & y(o) = 2 \\ z' = x + z; & z(o) = 3. \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0; & x(o) = 0; \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x - y + 2\ell^t = 0; & y(o) = 1. \end{cases}$

Розділ 12

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

12.1 Інтеграли по області, їх властивості, різновиди та деякі застосування

12.1.1 Визначення інтеграла

Нехай в замкненій області D задана функція $f(M), \quad M \in D$.

Область D довільним чином розіб'ємо на n частин $D_1, D_2, \ldots, D_n$ і в кожній частині візьмемо довільну точку: $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Позначимо через μ_i міру частини D_i, а через λ- максимальний діаметр частин $D_1, D_2, \ldots, D_n$, тобто $\lambda = \max d_i$.

Інтеграл по області D визначається як границя інтегральної суми за формулою

$$\int_D f(M)d\mu = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\mu_i \qquad (1)$$

Якщо інтеграл від функції $f(M)$ по області D існує, то ця функція зветься інтегрованою в області D.

<u>Достатньою умовою інтегрованості функції</u> в замкненій обмеженої області *<u>D є її неперервність</u>* в цій області.

12.1.2 Основні властивості інтеграла по області

Основні властивості інтеграла по області аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Вкажемо ці властивості

при умові інтегрованості відповідних функцій.

1. *Якщо область D розбити на дві області D_1 та D_2 без спільних внутрішніх точок, тоді*

$$\int_D f(M)d\mu = \int_{D_1} f(M)d\mu + \int_{D_2} f(M)d\mu$$

2. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.*

3. *Інтеграл по області D від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі від кожної з цих функцій:*

$$\int_D [f_1(M) \pm f_2(M) \pm \ldots + f_n(M)]d\mu = \int_D f_1(M)d\mu \pm \int_D f_2(M)d\mu \pm \ldots \pm \int_D f_n(M)d\mu .$$

4. Якщо $f(M) \le \varphi(M)$ у довільній точці $M \in D$, то виконується нерівність

$$\int_D f(M)d\mu \le \int_D \varphi(M)d\mu$$

5. $\left|\int_D f(M)d\mu\right| \le \int_D |f(M)|d\mu$

6. *Якщо підінтегральна функція $f(M) \equiv 1, \quad M \in D$, то інтеграл від такої функції по області D дорівнює мірі області*

$$\int_D d\mu = \mu(D) \qquad \textbf{(2)}$$

7. <u>Оцінка інтеграла по області</u>. Якщо $q \le f(M) \le Q$, то

$$q\mu(D) \le \int_D f(M)d\mu \le Q \cdot \mu(D)$$

8. Теорема про середнє. *Якщо $f(M)$ неперервна в замкненій області D, то в цій області знайдеться хоча б одна така точка M_0, що буде виконуватись рівність*

$$\int_D f(M)d\mu \equiv f(M_0) \cdot \mu(D)$$

12.1.3 Різновиди інтегралів по області

Інтегралам по області надають спеціальні назви і позначення в залежності від типу області.

Якщо областю інтегрування є дуга AB кривої L, то інтеграл називають <u>криволінійним інтегралом першого роду</u> і позначають так:

$$\int_{AB} f(M)d\ell .$$

Оскільки мірою лінійної множини є довжина, то під знаком інтеграла замість $d\mu$ пишуть $d\ell$. Якщо дуга AB - плоска і лежить в площині xOy, тоді точка M дуги AB має координати (x, y), тому

$$\int_{AB} f(M)d\ell = \int_{AB} f(x,y)d\ell \qquad (3)$$

Якщо дуга AB просторова, то $f(M) = f(x,y,z)$, тому

$$\int_{AB} f(M)d\ell = \int_{AB} f(x,y,z)d\ell \qquad (4)$$

Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напряму інтегрування:

$$\int_{AB} f(M)d\ell = \int_{BA} f(M)d\ell \qquad (5)$$

Якщо областю інтегрування буде деяка поверхня S, тоді інтеграл називають <u>поверхневим інтегралом першого роду</u> і позначa $\iint_S f(M)ds$.

Оскільки мірою поверхневої множини є площа, то під знаком інтеграла замість $d\mu$ пишуть ds. Два знаки інтеграла вказують, що інтегрування ведеться по двовимірній області. Якщо поверхня S не плоска, тоді $f(M) = f(x,y,z)$ і тому

$$\iint_S f(M)ds = \iint_S f(x,y,z)ds \qquad (6)$$

Якщо область інтегрування є плоскою поверхнею D, то $f(M) = f(x,y)$, $ds = dxdy$,

$$\iint_D f(M)ds = \iint_D f(x,y)dxdy \qquad (7)$$

Такий інтеграл називають подвійним інтегралом.

Інтеграл по просторовій області V називають <u>потрійним інтегралом</u> і позначають так:

$$\iiint_V f(M)dv$$

Оскільки $f(M) = f(x,y,z)$, $dv = dxdydz$, то існують і такі позначення потрійного інтеграла:

$$\iiint_V f(M)dv = \iiint_V f(x,y,z)dv = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \qquad (8)$$

Існують ще ***<u>криволінійні та поверхневі інтеграли другого роду,</u>*** які є різновидами інтеграла по орієнтованій області від вектор-функції.

Їх позначають так:

$$\int_{AB} \vec{f}(M)d\vec{\ell}, \quad \iint_S \vec{f}(M)d\vec{s}, \quad \iint_S \vec{f}(M)\cdot\vec{n}ds \qquad (9)$$

де $\vec{n}$ - нормаль до поверхні S.

Криволінійний інтеграл 2 роду змінює свій знак при зміні напряму інтегрування:

$$\int_{AB} \vec{f}(M)d\vec{\ell} = -\int_{BA} \vec{f}(M)d\vec{\ell}$$

Аналогічну властивість мають поверхневі інтеграли другого роду.

Оскільки різні сторони поверхні відповідають різним напрямкам нормалі, то інтеграли, у яких областями інтегрування є різні сторони поверхні S, відрізняються знаками.

12.1.4 Деякі застосування інтегралів по області

Геометричні застосування базуються на властивості 6 інтеграла по області.

Оскільки інтеграл по області від функції $f(M) \equiv 1$ дорівнює мірі області, то: довжину ℓ дуги AB знаходять обчисленням відповідного криволінійного інтеграла першого роду;

площу s поверхні S знаходять обчисленням поверхневого інтеграла першого роду;

площу плоскої області D ∈ xOy знаходять обчисленням подвійного інтеграла;

об'єм v просторової області знаходять обчисленням відповідного потрійного інтеграла.

Якщо підінтегральна функція $f(x,y)\geq 0$, то подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ дорівнює об'єму v циліндричного тіла, яке обмежене поверхнею $z=f(x,y)$, областю D та циліндричною поверхнею, направляючою лінією якої є межа області D, а її твірна - паралельна осі Oz.

Якщо $z=f(x,y)$ є рівняння гладкої поверхні S, D - проекція цієї поверхні на площину xOy, то площа s поверхні S визначається за формулою

$$s=\iint\limits_D \sqrt{1+[f_x'(x,y)]^2+[f_y'(x,y)]^2}\,dxdy \quad (10)$$

Тепер вкажемо деякі **фізичні** значення цих інтегралів.

Якщо підінтегральна функція $f(M)$ є густина маси, то інтеграл по області буде сумарною масою, що розподілена в цій області.

Якщо підінтегральна функція є густина електричного заряду, то інтеграл по області буде сумарним зарядом розподіленим в області.

Отже, в залежності від фізичного значення підінтегральної функції сумарну масу або сумарний електричний заряд, що розповсюджені на дузі AB, поверхні S, плоскої області D або просторової області V, знаходять обчисленням відповідного інтеграла.

Криволінійні інтеграли другого роду найчастіше використовуються для обчислення роботи змінної сили

$\vec{f}(M)$ на дузі AB.

Поверхневі інтеграли другого роду найчастіше використовують для обчислення потоку векторного поля $\vec{f}(M)$ через поверхню S за напрямом нормалі до поверхні $\vec{n}$.

Потрійні інтеграли використовуються для визначення електричної напружності $\vec{E}$ та її проекцій (E_x, E_y, E_z) в точці.

Статистичні моменти S_x та S_y матеріальної кривої AB відносно осей координат Ox та Oy знаходять за формулами:

$$S_x=\int\limits_{AB} y\rho(x,y)d\ell,\quad S_y=\int\limits_{AB} x\rho(x,y)d\ell\,, \quad (11)$$

де ρ(x, y) - густина розподілу маси кривої AB.

Координати центру ваги $C(x_c, y_c)$ кривої AB обчислюють за формулами:

$$x_c=\frac{1}{m}\int\limits_{AB} x\rho(x,y)d\ell,\quad y_c=\frac{1}{m}\int\limits_{AB} y\rho(x,y)d\ell, \quad (12)$$

де m - маса кривої AB.

Статистичні моменти S та моменти інерції просторового тіла V відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz знаходять за формулами:

$$\begin{aligned}
S_{xy}&=\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dv; & I_{xy}&=\iiint\limits_V xy\rho(x,y,z)dv;\\
S_{xz}&=\iiint\limits_V y\cdot\rho(x,y,z)dv; & I_{xz}&=\iiint\limits_V xz\rho(x,y,z)dv; \qquad \mathbf{(13)}\\
S_{yz}&=\iiint\limits_V x\cdot\rho(x,y,z)dv; & I_{yz}&=\iiint\limits_V yz\cdot\rho(x,y,z)dv;
\end{aligned}$$

а координати центру ваги $C(x_c, y_c, z_c)$ цього тіла знаходять за формулами:

$$x_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\cdot\rho(x,y,z)dv;$$

$$y_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y \cdot \rho(x,y,z)dv; \quad z_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z \cdot \rho(x,y,z)dv; \quad (14)$$

де m - маса тіла, ρ(x, y, z) - густина маси в точці M(x, y, z).

Аналогічно знаходять статистичні моменти і координати центру ваги плоскої області D.

12.2.1 Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Якщо дуга AB лежить в площині xOy і задана параметрично

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_A \le t \le t_B,$$

тоді $d\ell = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \cdot dt$ і криволінійний інтеграл першого роду обчислюють за формулою:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_{t_A}^{t_B} f[\varphi(t),\psi(t)] \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \cdot dt \qquad (1)$$

Якщо дуга AB лежить в площині xOy і задана виразом y = y(x), a ≤ x ≤ в, тоді

$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_a^в f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx \qquad (2)$$

Якщо дуга AB є просторовою і задана параметрично x = x(t), y = y(t), z = z(t), $t_A \le t \le t_B$, тоді

$$d\ell = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \cdot dt$$

і інтеграл обчислюють за формулою:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)d\ell = \int\limits_{t_A}^{t_B} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \cdot dt \quad (3)$$

Приклад 1. Знайти масу m, що розподілена з густиною $f(x,y) = y \cdot \sin x$ на верхній половині кола $x^2 + y^2 = \pi^2/4$.

Розв'язання. Використовуючи фізичне значення інтеграла по області, маємо

$$m = \int\limits_{AB} y \cdot \sin x d\ell.$$

Рівняння дуги AB (заданого півкола) можна записати у явному вигляді

$$y = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2}, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Оскільки $d\ell = \sqrt{1+[y'(x)]^2} \cdot dx = \dfrac{\pi \cdot dx}{2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - x^2}}$, то одержимо:

$$m = \int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} \cdot \sin x \cdot \frac{\pi \cdot dx}{2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - x^2}} = \frac{\pi}{2}(-\cos x)\Big|_0^\pi = \pi$$

(одиниць вимірювання).

12.2.2 ВПРАВИ

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_L \frac{d\ell}{x-y}$, де L - відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$ між точками A(0, -2) та B(4, 0).

б) $\int\limits_L x \cdot y d\ell$, де L - сторони прямокутника з вершинами A(0, 0), B(4, 0), C(4, 2), D(0, 2).

в) $\int\limits_L (x^2 + y^2)^m d\ell$, де L - коло: x = acost, y = asint.

г) $\int\limits_L \frac{z^2 d\ell}{x^2 + y^2}$, де L перший виток гвинтової лінії: x = acost, y = asint, z = at.

д) $\int\limits_L (x+y)d\ell$, де L - чверть кола: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, що лежить в першому октанті.

2. Знайти довжину дуги гвинтової лінії:

$$x = a\ell^t \cdot \cos t, \quad y = a\ell^t \cdot \sin t, \quad z = a\ell^t$$

від точки 0(0, 0, 0) до точки B(a, o, a).

3. Знайти масу чверті еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, що розташована в першому квадранті, якщо густина маси в кожній точці дорівнює ординаті цієї точки.

4. Обчислити сумарний електричний заряд, який розподілений з густиною $f(x,y) = y\cdot\ell^{-x}$ на дузі AB:

$$\begin{cases} x = \ell n(1+t^2) \\ y = 2arctgt - t + 3 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

12.3.1 Обчислення подвійних інтегралів

Якщо область D на площині xOy правильна в напрямку осі Oy (див. мал. 1а), то її аналітично можна описати нерівностями виду

$$\begin{cases} a \le x \le в; \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

і подвійний інтеграл зводиться до повторного за формулою:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^в \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо область D на площині xOy правильна в напрямку осі Ox (див. мал. 1б), то її аналітично можна описати нерівностями виду

$$\begin{cases} c \le y \le d; \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

і подвійний інтеграл зводиться до повторного за формулою:

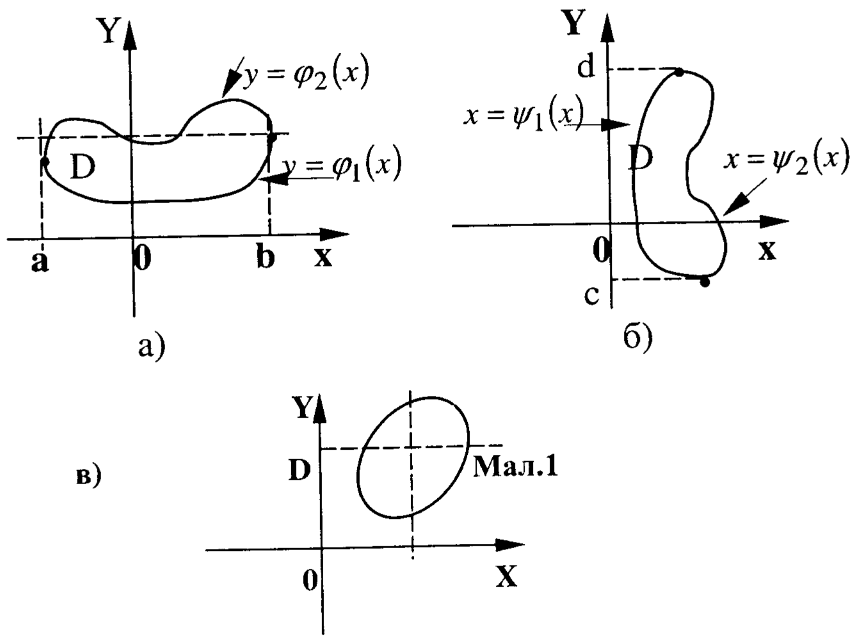
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy \qquad \textbf{(4)}$$

Якщо область D на площині xOy правильна в напрямі осі Oy і в напрямі осі Ox (див. мал. 1в), тоді мають місце рівності:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^в \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy, \qquad \textbf{(5)}$$

які означають, що подвійний інтеграл в цьому випадку можна обчислити за формулою (2) або (4).

Для обчислення повторного інтеграла треба спочатку за формулою Ньютона-Лейбніца знайти внутрішній інтеграл за відповідною змінною інтегрування, а потім обчислити зовнішній інтеграл за іншою змінною інтегрування.



Мал.1

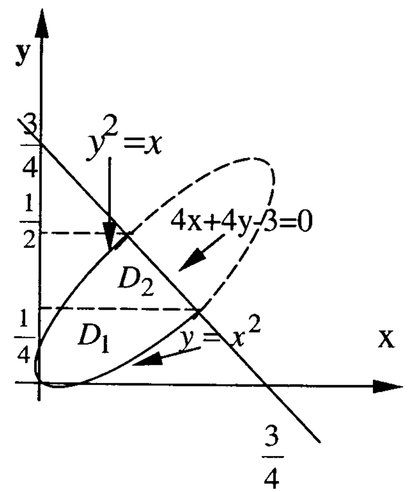
Приклад 2. Визначити сумарний заряд Q пластинки, що обмежена лініями $y = x^2$, $y^2 = x$, $4x + 4y - 3 = 0$, якщо щільність розподіленого поверхневого заряду $f(x, y) = 12xy$.

Розв'язання. Згідно фізичному значенню інтеграла по області маємо:

$$Q = \iint\limits_D 12xy \cdot dxdy$$

Область інтегрування D зображена на мал. 2. Щоб одержати аналітичний опис заданої пластинки у вигляді нерівностей (3) розіб'ємо D на дві частини D_1 та D_2 прямою $y = \frac{1}{4}$, яка проходить паралельно осі Ox через точку перетину заданої прямої і параболи $y = x^2$. Використовуючи властивості інтеграла по області отримаємо:

$$Q = 12 \iint\limits_{D_1} xydxdy + 12 \iint\limits_{D_2} xydxdy$$



Мал.2

З малюнка 2 одержуємо аналітичний опис областей:

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le y \le \frac{1}{4}; \\ y^2 \le x \le \sqrt{y}. \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} \frac{1}{4} \le y \le \frac{1}{2} \\ y^2 \le x \le \frac{3}{4} - y \end{cases}$$

Для цього в кожній області спочатку визначили сталі межі змінної y, а потім - нерівності для x шляхом визначення значень x, якщо рухатися через область за напрямом осі Ox.

Отже,

$$Q = 12 \int\limits_0^{1/4} \left[\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} xydx \right] dy + 12 \int\limits_{1/4}^{1/2} \left[\int\limits_{y^2}^{3/4 - y} xydx \right] dy = 12 \int\limits_0^{1/4} y \cdot \frac{1}{2} \left(x^2 \Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} \right) dy +$$

$$+12 \int\limits_{1/4}^{1/2} y \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 \Big|_{y^2}^{3/4 - y} \right) dy == 6 \int\limits_0^{1/4} \left(y^2 - y^5 \right) dy + 6 \int\limits_{1/4}^{1/2} \left(\frac{9}{16} y - \frac{3}{2} y^2 + y^3 - y^5 \right) dy =$$

$$= 6 \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{6} \right) \Bigg|_0^{1/4} + 6 \left(\frac{9}{32} y^2 - \frac{1}{2} y^3 + \frac{y^4}{4} - \frac{1}{6} y^6 \right) \Bigg|_{1/4}^{1/2} \approx 0{,}09 \text{ (од. зар.)}.$$

12.3.2. Заміна змінних в подвійному інтегралі

При заміні змінних: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ область D площини xOy відображається в область G площини uOv; елемент площини dxdy відобразиться в елемент площі $|I(u, v)|dudv$, де визначник

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

називають *функціональним визначником* або якобіаном, а його модуль називають коефіцієнтом спотворення області.

Отже, якщо функції φ (u, v) та ψ (u, v) неперервні в області G разом із своїми частинними похідними першого порядку, то має місце рівність

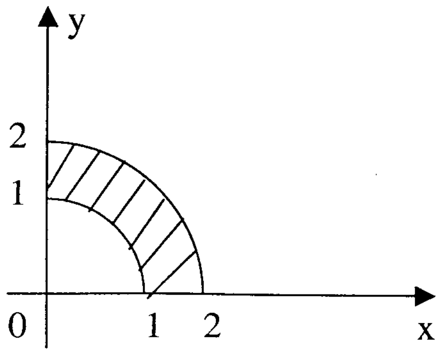
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G \left[f\left[\varphi(u,v),\psi(u,v)\right]\right]\left|I(u,v)\right|dudv$$

Часто для обчислення подвійних інтегралів використовують полярні координати: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тоді якобіан переходу $I(r, \varphi) = r$, а елемент площі $dxdy = rdrd\varphi$.

Перехід в подвійному інтегралі до полярних координат доцільно використовувати в тих випадках, коли підінтегральна функція залежить від $x^2 + y^2$ або від $arctg\,\dfrac{y}{x}$, а також у випадках, коли межа області D містить дуги кіл та промені, що виходять із початку координат.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \ell^{x^2+y^2}dxdy$, по чверті кільця $1\le x^2+y^2\le 4$, що лежить в першому квадранті.

Розв'язання. Область інтегрування D зобразимо на мал.3.



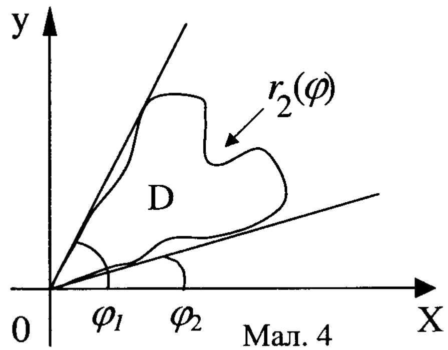
Мал. 3

Підставимо в нерівність $1\le x^2+y^2\le 4$, замість x та y їх значення $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Одержимо: $1 \le r \le 2$. Оскільки кільце лежить в першому квадранті, то $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Отже

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G \ell^{r^2}\cdot rdrd\varphi = \int_0^{\pi/2}\left[\int_1^2 r\ell^{r^2}dr\right]d\varphi = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\ell^{r^2}\Big|_1^2\right)d\varphi = \frac{\pi}{4}\ell\left(\ell^3-1\right)$$

Зауваження. При переході до полярних координат в подвійному інтегралі треба враховувати, що в точці O(0,0) якобіан дорівнює нулю. Так, для області D, що зображена на малюнку 4, перехід до повторного інтегралу приймає вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left[\int_0^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\right]d\varphi$$



Мал. 4

12.3.3 ВПРАВИ

1 Обчислити повторні інтеграли:

а) $\int_0^2\left[\int_0^1 (x^2+2y)dx\right]dy$; **б)** $\int_2^4\left[\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}\right]dx$; **в)** $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2dy}{1+y^2}$;

г) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} rdr$; **д)** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} r^2\sin^2\varphi dr$; **е)** $\int_1^2 dx\int_{1/x}^{x} \frac{x^2dy}{y^2}$;

2 Записати рівняння ліній, що обмежують області інтегрування заданих інтегралів та зобразити ці області:

а) $\int\limits_1^3\left[\int\limits_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy\right]dx$; **б)** $\int\limits_{-6}^{2}\left[\int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx\right]dy$; **в)** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$;

г) $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$; **д)** $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{10-y} f(x,y)dx$;

3 Перейти від подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ до повторного:

а) D - трикутник з вершинами 0 (0, 0), A (1, 0), B (1, 1).

б) D - трапеція з вершинами 0 (0, 0), A (2, 0), B (1, 1), C (0, 1).

в) D - паралелограм з вершинами A (1, 5), B (2, 4), C (2, 7), D (1, 5).

г) D - параболічний сегмент, що обмежений параболою $y = x^2$ та відрізком, який з'єднує точки параболи B (- 1, 2) та A (1, 2).

д) D - кругове кільце, що обмежене колами радіусів r = 1 та R = 3 із загальним центром 0 (0, 0).

4 Змінити порядок інтегрування

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$; **б)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^3}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$; **в)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy$;

5 Обчислити інтеграл $\iint\limits_D x dxdy$, якщо

а) D - трикутник з вершинами 0 (0, 0), A (1, 1) та B (0, 1);

б) D - обмежена прямою, що проходить через точки A (2, 0) та B (0, 2), і дугою кола з центром в точці C (0, 1), радіуса 1.

6 Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \ell^{x/y} dxdy$, де D - область, що обмежена лініями $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.

7 Обчислити $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, де D - область, що обмежена лініями $y = x^2/2$, $y = x$.

8 Використовуючи перехід до полярних координат, обчислити інтеграли:

а) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, D - півкруг радіуса a з центром в початку координат, що лежить вище осі Ox.

б) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ell n(1+x^2+y^2)dy$;

в) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy$, D - визначається нерівностями

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 1; \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

г) $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, D - частина кільця $\begin{cases} x^2+y^2 \ge 1; \\ x^2+y^2 \le 9 \\ y \ge \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \le x\sqrt{3} \end{cases}$

д) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$, D - круг $x^2+y^2 \le Rx$.

9 Застосування подвійних інтегралів

9.1 Обчислити об'єм тіл, обмежених поверхнями:

а) $z = x^2 + y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x = 4$, $y = 4$.

б) $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$; $3x + 2y = 12$; $x + y + z = 6$.

в) $z = x^2 + y^2$; $z = 0$; $y = 1$; $y = 2x$, $y = 6-x$.

г) $z = 9 - y^2$; $x = 0$; $y = 0$, $z = 0$; $3x + 4y = 12$ $(y \geq 0)$.

д) параболоїдом $z = x^2 + y^2$; циліндром $y = x^2$ і площинами $y = 1$ та $z = 0$.

9.2 Використовуючи подвійні інтеграли, знайти площу вказаних областей:

а) D обмежена лініями: $x = 0$, $y = 0$; $x + y = 1$;

б) D обмежена лініями: $y = x$; $y = 5x$; $x = 1$;

в) D обмежена параболами $y = \sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x}$ та прямою $x = 4$.

9.3 Знайти масу:

а) квадратної пластинки з стороною 2a, якщо густина матеріалу пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей, а на кутах квадрата густина дорівнює 1.

б) плоского кільця, що обмежене двома концентричними колами радіусів R та r (R > r), якщо густина матеріалу обернено пропорційна відстані від центра кіл. Густина на внутрішньому колі дорівнює 1.

9.4 Пластинка має форму прямокутного трикутника з катетами OB = a та OA = в, її густина в довільній точці дорівнює відстані точки до катета OA. Знайти статистичні моменти пластинки відносно катетів.

9.5 Визначити координати центра ваги області:

а) що обмежена кривою $y = \sin x$ та прямою, яка проходить через початок координат і вершину $A\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ синусоїди;

б) що обмежена параболами $y^2 = 4x + 4$ та $y^2 = - 2x + 4$.

12.4 Обчислення поверхневих інтегралів першого роду

12.4.1 Основні поняття

Обчислення поверхневих інтегралів можна звести до обчислення відповідних подвійних інтегралів.

Якщо S - незамкнена поверхня, яка задається рівнянням $z = q(x, y)$, а область D - проекція цієї поверхні на площину xOy, тоді

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f(x,y,q(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \quad (1))$$

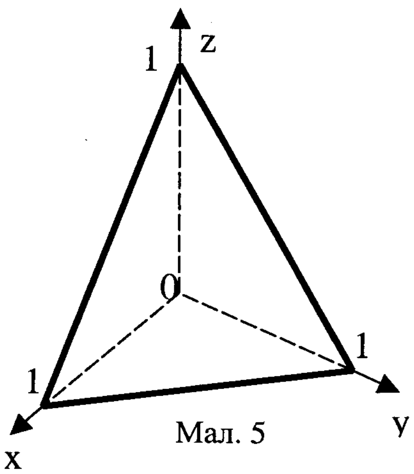
Якщо поверхня S замкнена, тоді її розбивають на дві незамкнені поверхні S_1 та S_2 так, щоб обидві вони проектувалися на одну область D площини xOy. Якщо рівнянням поверхні S_1 буде $z = q_1(x, y)$, а рівнянням поверхні S_2 буде $z = q_2(x, y)$, тоді

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{S_1} f(x,y,z)ds + \iint_{S_2} f(x,y,z)ds = \iint_D f(x,y,q_1(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial q_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)^2}\,dxdy +$$
$$+\iint_D f(x,y,q_2(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial q_2}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial q_2}{dy}\right)^2}\,dxdy.$$

Приклад 4. Обчислити $\iint_S xyzds$, де S - частина площини $x + y + z = 1$, яка лежить в першому октанті (мал. 5).

Розв'язання. В даному випадку рівнянням поверхні S буде $z = 1 - x - y$, її проекцією - областю D буде прямокутний трикутник обмежений лініями: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Поверхня S - незамкнена, тому за формулою (1) одержимо:



Мал. 5

$$\iint_S xyz\,ds = \sqrt{3}\iint_D xy\cdot(1-x-y)dxdy = \sqrt{3}\int_0^1\left[x\int_0^{1-x} y(1-x-y)dy\right]dx = \frac{\sqrt{3}}{20}$$

Приклад 5. Обчислити площу поверхні еліпсоїда обертання $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{\text{в}^2}=1$

Розв'язання. Згідно властивості інтеграла по області

$$s=\iint_S ds$$

де S є поверхня еліпсоїда, яку можна розбити на дві частини

$$S_1 : z = \text{в}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}}\,; \qquad S_2 : z = -\text{в}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}}\,.$$

Проекцією цих поверхонь на площину xOy буде круг D, який визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} -a \le x \le a; \\ -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$$

Використовуючи симетрію еліпсоїда, одержимо:

$$S = \iint_{S_1} ds + \iint_{S_2} ds = 2\iint_{S_1} ds\,.$$

Оскільки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\text{в}}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}}}\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\text{в}}{a^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}}}\text{, то}$$

$$s = 2\iint_D \sqrt{1+\frac{\text{в}^2}{a^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

Перейдемо до полярних координат в подвійному інтегралі

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad dxdy = rdrd\varphi; \quad D:\begin{cases} 0 \le r \le a; \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Тому

$$S = 2\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int_0^a \sqrt{1+\frac{\text{в}^2 r^2}{a^2(a^2-r^2)}}\cdot r\cdot dr = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a\text{в}^2}{\sqrt{a^2-\text{в}^2}}\cdot \ln\frac{a+\sqrt{a^2-\text{в}^2}}{\text{в}}$$

12.4.2 ВПРАВИ

1 Обчислити інтеграл $\iint_S (x+y+z)ds$, де S - поверхня куба $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$; $0 \le z \le 1$.

Рекомендація.

Шуканий інтеграл в 3 рази більше суми інтегралів по верхній та нижній граням куба.

2 Обчислити інтеграл $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$, де S – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3 Обчислити інтеграл $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}ds$, де S - бокова поверхня конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{в^2}=0 \quad (0 \le z \le в)$

4 Обчислити інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x+z+\frac{4}{3}y)ds$, де S - частина площини $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, що лежить в першому октанті.

б) $\iint\limits_S x^2y^2ds$, де S - півсфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

5 Знайти масу сфери, якщо поверхнева густинав кожній точці дорівнює квадрату відстані цієї точки від деякого фіксованого діаметра сфери. (Відповідь: $m=\frac{8}{3}\pi R^4$).

<u>**Рекомендація.**</u> Якщо зафіксувати будь-який діаметр сфери в площині z = 0, то поверхнева густина буде $R^2 - x^2 - y^2$.

12.5 Обчислення потрійних інтегралів

12.5.1 Основні поняття

Нехай V деяка просторова область, що обмежена замкненою поверхнею S. *Область V називають правильною за напрямом осі Oz, якщо вона має властивості:*

1 *будь-яка пряма, що паралельна осі Oz, перетинає поверхню S не більше ніж в двох точках;*

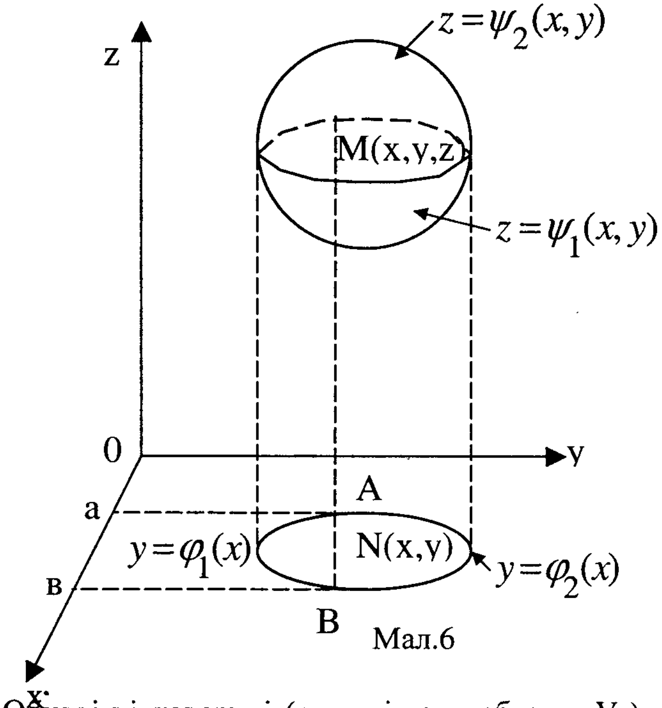
2 *уся область V проектується на площину xOy в правильну двовимірну область D.*

Аналогічно визначаються правильні тривимірні області за напрямами осей Ox та Oy.

Область V, яка правильна за напрямами усіх трьох координатних осей, називають правильною.

Правильними тривимірними областями є еліпсоїди, піраміди, призми та інші тіла.

Якщо тривимірна область V правильна, то обмежуючу її поверхню S можна розбити на дві частини: нижню - S_1, рівняння якої $z = \psi_1(x, y)$, та верхню S_2, рівняння якої $z = \psi_2(x, y)$ (див. мал. 6).



Мал.6

Обидві ці поверхні (отже, і сама область V) проектуються на площину xOy в правильну область D, межа якої точками A та B поділяється на дві криві з рівняннями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$. Позначимо довільну точку області V через M(x,y,z), а її проекцію на площину xOy - N(x,y,0).

При фіксованих x та y апліката z точки M, що знаходиться внутрі області V, може змінюватись від $\psi_1(x, y)$ до $\psi_2(x, y)$.

Якщо точка M пересувається внутрі області V, то точка N пересувається внутрі області D, а її координати (а тому і координати x, y точки M) повинні задовольняти нерівностям $\begin{cases} a \le x \le в; \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases}$

Отже, координати будь-якої точки $M \in V$ повинні задовольняти систему нерівностей

$$\begin{cases} \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y) \\ (x, y) \in D \end{cases} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a \le x \le в; \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \\ \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Системи (1) та (2) є аналітичним описом просторової області V.

Якщо функції $\psi_1(x, y)$ та $\psi_2(x, y)$ неперервні в замкненій області D площини xOy і область V описується системою виду (1), то обчислення потрійного інтеграла можна здійснити шляхом послідовного обчислення інтегралів меншої кратності за формулою:

$$\iiint_V f(x, y, z)dv = \iint_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy \qquad (3')$$

Якщо область V описується системою вигляд (2), то потрійний інтеграл обчислюють за формулою:

$$\iiint_V f(x, y, z)dv = \int_a^в \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dy \right] dz \qquad (4')$$

Ці формули найчастіше записують у вигляді:

$$\iiint_V f(x, y, z)dv = \iint_D dxdy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \qquad (3)$$

$$\iiint_V f(x, y, z)dv = \int_a^в dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz, \qquad (4)$$

відповідно.

Отже, аналітичний опис області V виду (2) дозволяє обчислення потрійного інтеграла звести до обчислення трикратного інтеграла, в якому: межі зовнішнього інтеграла - сталі; межі середнього інтеграла можуть залежати лише від змінної інтегрування зовнішнього інтеграла; межі внутрішнього інтеграла можуть залежати від змінних інтегрування середнього та зовнішнього інтегралів.

Для обчислення потрійного інтеграла в прямокутних координатах крім формул (3) та (4) часто використовують ще формули:

$$\iiint_V f(x, y, z)dv = \int_a^в dx \iint_{D_x} f(x, y, z)dydz \qquad (5)$$

$$\iiint_V f(x, y, z)dv = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z)dxdy \qquad (6)$$

$$\iiint_V f(x, y, z)dv = \int_\ell^q dy \iint_{D_y} f(x, y, z)dxdz, \qquad (7)$$

де $D_x(D_z, D_y)$ - перетин області V площиною, яка паралельна площині yOz (площинам xOy та xOz, відповідно) і проходить через довільну точку інтервалу (a, в) (інтервалу (c, d) та (ℓ, q), відповідно) - інтервалу зовнішнього інтеграла.

Ці формули часто спрощують обчислення потрійних інтегралів.

Приклад 6. Обчислити $\iiint_V z^2 dv$, де область V обмежена поверхнею обертання кривої $y = \sqrt{z}$ навколо осі Oz і площиною z = h (h > 0).

Розв'язування. Щоб одержати рівняння поверхні обертання заданої лінії навколо осі Oz, залишимо змінну z в рівнянні лінії $y=\sqrt{z}$ без зміни, а у замінимо на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Одержимо: $\pm\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z} \Rightarrow z=x^2+y^2$ - рівняння параболоїда обертання.

Проекцією області V на площину xOy буде круг

$$x^2+y^2=h.$$

Заданий потрійний інтеграл можна обчислити за різними формулами.

Для застосування формули (4) використовуємо аналітичний опис області інтегрування V:

$$\begin{cases} -\sqrt{h}\le x\le\sqrt{h} \\ -\sqrt{h-x^2}\le y\le\sqrt{h-x^2} \\ x^2+y^2\le z\le h \end{cases}$$

Тоді одержимо: $\iiint\limits_V z^2dv=\int\limits_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}dx\int\limits_{-\sqrt{h-x^2}}^{\sqrt{h-x^2}}dy\int\limits_{x^2+y^2}^{h}z^2dz$

Обчислення інтеграла за цією формулою приводить до громіздких викладок.

Тому застосуємо формулу (6):

$$\iiint\limits_V z^2dv=\int\limits_0^h z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy,$$

де D_z є перетин області V площиною, яка перпендикулярна до осі Oz і лежить на висоті z, причому $0\le z\le h$.

Перетин D_z буде кругом радіусом $R=\sqrt{z}$, що випливає із рівняння поверхні обертання $x^2+y^2=z$.

Внутрішній інтеграл

$$\iint\limits_{D_z}dxdy=\pi(\sqrt{z})^2=\pi z,$$

оскільки він дорівнює площі круга. Отже,

$$\iiint\limits_V z^2dv=\int\limits_0^h\pi\cdot z^3dz=\pi\cdot\frac{z^4}{4}\Bigg|_0^h=\frac{\pi h^4}{4}.$$

▼ **Зауваження.** Якщо область V - прямокутний паралелепіпед $\begin{cases} a\le x\le в; \\ c\le y\le d; \\ \ell\le z\le q. \end{cases}$ то формула (4) приймає вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\int\limits_a^в dx\int\limits_c^d dy\int\limits_\ell^q f(x,y,z)dz \qquad (8)$$

Якщо підінтегральна функція $f(x,y,z)$ неперервна в області V, то у формулі (8) змінні інтегрування x, y, z можна міняти місцями:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\int\limits_a^в dx\int\limits_\ell^q dz\int\limits_c^d f(x,y,z)dy=\int\limits_\ell^q dz\int\limits_a^в dx\int\limits_c^d f(x,y.z)dy$$

Якщо підінтегральна функція є добутком трьох функцій $f(x,y,z)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$, то трикратний інтеграл правої частини рівності (8) буде дорівнювати добутку трьох відповідних визначених інтегралів.

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_V\frac{dv}{(1+x+y+z)^3}$, якщо область V обмежена поверхнями $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y+z=3$.

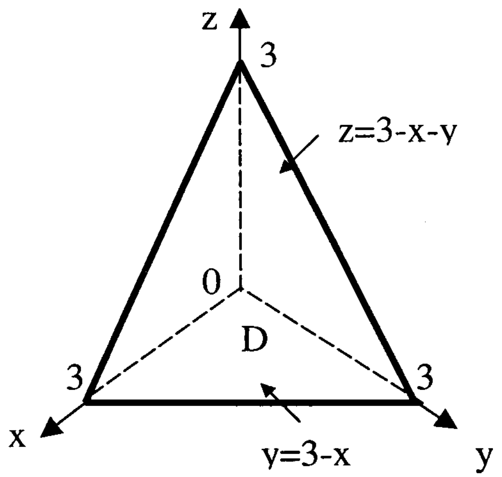
Розв'язання. Область інтегрування V зобразимо на мал. 7. Визначимо аналітичний опис заданої області V.

Для визначення меж змінної z проведемо через область V пряму, яка паралельна осі Oz.

Тоді одержимо: $O\le z\le 3-x-y$.

Для опису області D виберемо сталі межі зміни x: $O\le x\le 3$.

Тоді y буде змінюватись в межах: $O\le y\le 3-x$.



Мал.7

За формулою (4) перейдемо від заданого потрійного інтеграла до трикратного інтеграла:

Отже, область V має аналітичний опис:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3; \\ 0 \le y \le 3-x; \\ 0 \le z \le 3-x-y. \end{cases}$$

$$\iiint_V \frac{dv}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{3-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} \left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2}\Bigg|_{z=o}^{z=3-x-y} \right] dy =$$

$$= \frac{-1}{2}\int_0^3 dx \int_0^{3-x} \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right] dy = \frac{-1}{2}\int_0^3 \left[\frac{1}{16}\cdot y + \frac{1}{1+x+y}\Bigg|_{y=0}^{3-x}\right] dx =$$

$$= \frac{-1}{2}\int_0^3 \left(\frac{3-x}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{-1}{2}\left(\frac{3}{16}x - \frac{x^2}{32} + \frac{1}{4}x - \ell n|1+x|\right)\Bigg|_0^3 = \frac{-1}{2}\left(\frac{9}{16} - \frac{9}{32} + \frac{3}{4} - \ell n4\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{33}{32} - \ell n4\right) = \frac{1}{2}\ell n4 - \frac{33}{64} = \ell n2 - \frac{33}{64}$$

Приклад 8. Обчислити об'єм області, обмеженої еліпсоїдом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Розв'язання. Згідно властивості 6 інтеграла по області шуканий об'єм v області V знайдемо за формулою:

$$v = \iiint_V dv.$$

Область V обмежена знизу поверхнею $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2}}$,

а зверху поверхнею $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2}}$.

Область V проектується на площину xOy в область D, яка обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$.

Тому область V аналітично описується нерівностями:

$$\begin{cases} -a \le x \le a; \\ -в\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le в\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \\ -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}} \le z \le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}} \end{cases}$$

За формулою (4) одержимо:

$$v=\int_{-a}^{a}dx\int_{-в\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{в\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}}}dz=2c\int_{-a}^{a}dx\int_{-в\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{в\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}}dy$$

Для обчислення внутрішнього інтеграла зробимо підстановку

$$y=в\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\sin t\Rightarrow dy=в\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}cost\cdot dt$$

При такій підстановці t змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Одержимо:

$$v=2c\int_{-a}^{a}dx\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2 t}\cdot в\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot costdt=$$

$$=2\cdot вc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\cdot dt==\pi\cdot вc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi aвc.$$

Отже, об'єм еліпсоїда $v=\frac{4}{3}\pi aвc$.

Якщо а = в = с, то одержимо об'єм кулі $v=\frac{4}{3}\pi a^3$.

Приклад 9. Обчислити масу області V, якщо густина розподілу маси $\rho = 2xyz$, а область V є циліндром $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le h$.

Розв'язання. Згідно пункту 12.1.4 шукану масу m знайдемо за формулою:

$$m=\iiint_V \rho(x,y,z)dv$$

Будемо шукати масу чверті циліндра і одержаний результат помножимо на 4. Тоді

$$m=4\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int_0^h 2xyzdz=8\int_0^R xdx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy\int_0^h zdz=4h^2\int_0^R xdx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy=$$

$$=2h^2\int_0^R x(R^2-x^2)dx=\frac{h^2\cdot R^2}{2}.$$

12.5.2 Заміна змінних в потрійному інтегралі

Нехай система функцій

$$\begin{cases}x=x(\xi,\eta,\omega)\\ y=y(\xi,\eta,\omega)\\ z=z(\xi,\eta,\omega)\end{cases}$$

здійснює взаємно-однозначне відображення області V в системі координат (x, y, z) в область V_1 в системі координат (ξ, η, ω). Тоді перехід від змінних x, y, z до змінних ξ, η, ω в потрійному інтегралі здійснюється за формулою:

$$\iiint_V f(x,y,z)dv=\iiint_{V_1} f[x(\xi,\eta,\omega),y(\xi,\eta,\omega),z(\xi,\eta,\omega)]\cdot|I(\xi,\eta,\omega)|d\xi d\eta d\omega,\quad \textbf{(9)}$$

де |I(ξ, η, ω)| - якобіан перетворення елемента об'єму області, причому

$$I(\xi,\eta,\omega)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi}&\frac{\partial x}{\partial\eta}&\frac{\partial x}{\partial\omega}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi}&\frac{\partial y}{\partial\eta}&\frac{\partial y}{\partial\omega}\\ \frac{\partial z}{\partial\xi}&\frac{\partial z}{\partial\eta}&\frac{\partial z}{\partial\omega}\end{vmatrix}\qquad \textbf{(10)}$$

У випадку переходу до циліндричних координат $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ якобіан $I(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

У випадку переходу до сферичних координат $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ якобіан $I(ч,\theta,\varphi) = r^2\cdot\sin\theta$.

Приклад 10. Обчислити об'єм області, обмеженої еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{в^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Розв'язання. Знаходження об'єму v заданої області V за формулою

$$v = \iiint\limits_v dv$$

вимагає обчислити потрійний інтеграл. Цей інтеграл обчислено при розв'язанні прикладу 8.

Покажемо, що відповідна заміна змінних дозволяє ці обчислення значно спростити.

Зробимо заміну змінних: $x = ar\sin\theta\cos\varphi$, $y = вr\sin\theta\sin\varphi$, $z = cr\cos\theta$.

В цієї узагальненої сферичної системі координат (r, θ, φ) рівняння еліпсоїда приймає вид: $r = 1$. Тому область інтегрування V_1 визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1; \\ 0 \le \theta \le \pi; \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Якобіан переходу буде $I(r, \theta, \varphi) = авcr^2 \cdot \sin\theta$. Отже, за формулою (9) одержимо:

$$v = \iiint\limits_v dv = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} авcr^2 \sin\theta d\theta = авс\cdot\left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\right) = \frac{4\pi}{3}\cdot авс$$

12.5.3 ВПРАВИ

1 Обчислити інтеграли: **а)** $\int_0^a dx \int_0^в dy \int_0^c (x+y+z)dz$;

б) $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$; **в)** $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyzdz$

(*Відповідь*: а) $\dfrac{авс(a+в+c)}{2}$; б) 6; в) $\dfrac{a^6}{48}$)

2 Оцінити інтеграл $I = \iiint\limits_D (x+y+z)dv$, де D - куб:

$x \ge 1$; $y \ge 1$; $z \ge 1$; $x \le 3$; $y \le 3$; $z \le 3$.

(*Відповідь*: $24 < I < 72$).

3 Обчислити $I = \iiint\limits_D x^2y^2zdxdydz$,

де область D описується нерівностями: $\begin{cases} 0 \le x \le 1; \\ 0 \le y \le x; \\ 0 \le z \le xy. \end{cases}$

(*Відповідь*: $\dfrac{1}{110}$).

4 Обчислити інтеграл $\iiint\limits_V 3z^2 dv$,

де V - область, яка обмежена площинами $z = 0$ та $z = h$ і поверхнею обертання кривої $y = z^2$ навколо осі Oz.

(*Відповідь*: $\dfrac{3\pi h^5}{5}$).

5 Обчислити інтеграл $\iiint\limits_V xdxdydz$, де V - область, яка обмежена координатними площинами та площиною

2x + 2y + z - 6 = 0. (Відповідь: $\frac{27}{4}$).

6 Обчислити інтеграл $\iiint\limits_V 5xyzdv$, де V - область, яка обмежена поверхнями: $x = y^2$; $y = x^2$; $z = xy$ та $z = 0$.

(*Відповідь*: $\frac{1}{96}$).

7 Знайти об'єм тіла, яке обмежене поверхнями
$4z = x^2 + y^2$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 12$

(*Відповідь*: $v = \frac{8}{3}\pi \cdot (6\sqrt{3} - 5)$ куб. од.).

8 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями
$x^2 + y^2 + z^2 = 16$ та $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$.

Рекомендація: Спочатку використати формулу (3′). При обчисленні подвійного інтеграла перейти до полярних координат.

(*Відповідь*: $\frac{80}{3} \cdot \pi$ куб. од.).

9 Обчислити об'єм області, яка обмежена поверхнями:

а) сферою радіуса a**;** **б)** конусом з вершиною в центрі сфери і твірними, що нахилені до осі Oz під кутом α; **в)** двома площинами, які проходять через вісь Oz і утворюють з площиною xOz кути φ_1 та φ_2 ($\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$); **г)** площиною xOy.

Рекомендація: Розв'язування провести в сферичних координатах. Рівнянням сфери буде рівність r = a. Аналітичний опис області буде: $\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2; \\ \alpha \le \theta \le \frac{\pi}{2}; \\ 0 \le r \le a. \end{cases}$

(*Відповідь:* $v = \frac{a^3}{3} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \cos\alpha$ куб. од.).

10 Знайти масу частини кулі радіуса R, яка розташована в першому октанті і має в кожній точці густину рівну відстані цієї точки від площини xOy.

Рекомендація: густина розподілу маси ρ = z. Потрійний інтеграл обчислити переходом до сферичних координат.

(*Відповідь*: $m = \frac{\pi R^4}{16}$).

11 Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями:
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ та $3z = x^2 + y^2$.
Густина розподілу маси в кожній точці тіла: ρ = z.

(*Відповідь*: $m = \frac{13}{4}\pi$)

12 Обчислити об'єм частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 \le 4R^2$, яка лежить внутрі циліндра $x^2 + y^2 = R^2$.

Рекомендація: Перейти до циліндричних координат.

(*Відповідь:* $v = \frac{4}{3}\pi R^3(8 - 3\sqrt{3})$ куб. од.).

13 Обчислити об'єм області, яка обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = R^2$ та $z = x^2 + y^2$.

(*Відповідь:* $\frac{\pi R^4}{2}$ куб. од.).

14 Переходом до сферичних координат обчислити інтеграл

$\iiint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$ де D - куля радіуса R.

(*Відповідь*: πR^4).

15 Переходом до циліндричних координат обчислити

$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2 + y^2}\,dz$ (*Відповідь:* $\frac{8}{9}a^2$).

12.6 Невластиві інтеграли по області

12.6.1 Основні поняття

Інтеграли по області $\int\limits_D f(M)d\mu$ називають невластивими, якщо область інтегрування D необмежена або підінтегральна функція $f(M)$ необмежена в деяких точках M області інтегрування. Невластиві інтеграли по області можуть бути збіжними або розбіжними.

Випадок нескінченної області. Якщо функція $f(M)$ неперервна в нескінченій області D, то розглядають

$$\int\limits_D f(M)d\mu = \lim_{D_n \to D} \int\limits_{D_n} f(M)d\mu, \qquad (1)$$

де D_n - обмежена область така, що $D_n \subset D$ і $D_n \to D$, тобто D_n розширюється за довільним законом і містить довільну точку область D.

Якщо границя правої частини рівності (1) існує і не залежить від вибору області D_n, то відповідний невластивий інтеграл по області D називається збіжним. Якщо ця границя не існує або дорівнює нескінченності, то невластивий інтеграл називають розбіжним.

Якщо підінтегральна функція $f(M)$ невід'ємна в області D, то для збіжності невластивого інтеграла необхідно і достатньо, щоб границя правої частини рівності (1) існувала хоча би для одного вибору областей D_n.

Випадок розривної (необмеженої) функції. Якщо функція $f(M)$ неперервна в замкненій обмеженої області D за виключенням точки M_0, то розглядають

$$\int\limits_D f(M)d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon}(M)d\mu, \qquad (2)$$

де D_ε - область, яка одержується із області D шляхом видалення області діаметром ε, яка містить точку M_0.

Якщо границя правої частини (2) існує і не залежить від виду видалених областей діаметром ε, то відповідний невластивий інтеграл називається збіжним, в протилежному випадку - розбіжним.

Якщо $f(M) \geq 0$, то границя в (2) не залежить від виду видаленої області. В цьому випадку найчастіше видаляють окіл радіуса ε точки M_0.

Якщо в області інтегрування підінтегральна функція має розриви другого роду (стає необмеженою) на деякій лінії L або поверхні S, то ця особливість видаляється із області інтегрування, а потім видалена частина стягується до особливості.

Приклад 11. Дослідити збіжність інтеграла

$\iint\limits_D \ell^{-2(x^2+y^2)}dxdy$, де область D - площина xOy.

Розв'язування. Заданий інтеграл є невластивим подвійним інтегралом по необмеженій області D, підінтегральна функція невід'ємна. Позначимо через D_R - круг радіуса R з центром в початку координат. Тоді рівність (1) прийме вигляд:

$$\iint\limits_D \ell^{-2(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{D_R} \ell^{-2(x^2+y^2)}dxdy.$$

Обчислимо подвійний інтеграл по області D_R переходом до полярної системи координат:

$$\iint\limits_{D_R} \ell^{-2(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R \ell^{-2r^2}\cdot rdr\right)d\varphi = 2\pi\cdot\frac{1}{4}\left(1-\ell^{-2R^2}\right).$$

Отже, $\iint\limits_D \ell^{-2(x^2+y^2)}dxdy = \lim\limits_{R\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(1-\ell^{-2R^2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

***Відповідь*:** невластивий інтеграл - збіжний і дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 12. Дослідити збіжність інтеграла

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left[4-(x^2+y^2)\right]^{2/3}}$$

Розв'язання. Задано невластивий подвійний інтеграл по обмеженій області від функції, яка необмежена на колі $x^2 + y^2 = 4$ і невід'ємна.

Позначимо через D_ε круг радіуса $R = 2 - \varepsilon$ з центром в початку координат. Тоді за формулою (2) одержимо:

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{[4-(x^2+y^2)]^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{dxdy}{[4-(x^2+y^2)]^{2/3}}$$

Обчислимо подвійний інтервал по області D_ε переходом до полярних координат:

$$\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{dxdy}{\left[4-(x^2+y^2)\right]^{2/3}} = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{2-\varepsilon}\frac{rdr}{(4-r^2)^{2/3}}\right)d\varphi = 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2-\varepsilon}\frac{d(4-r^2)}{(4-r^2)^{2/3}}\right) =$$

$$= -\pi\cdot(4-r^2)^{1/3}\Big|_0^{2-\varepsilon} = -\pi\left[\left(4-(2-\varepsilon)^2\right)^{1/3} - 4^{1/3}\right] = \pi\left[4^{1/3} - \left(4\varepsilon-\varepsilon^2\right)^{1/3}\right]$$

Заданий інтеграл дорівнює

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left[4-(x^2+y^2)\right]^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\pi\left[4^{1/3} - \left(4\varepsilon-\varepsilon^2\right)^{1/3}\right] = 4^{1/3}\cdot\pi,$$

тому він збіжний.

Зауваження: 1. Якщо підінтегральна функція $f(M)\gtrless 0$ і $\int\limits_D |f(M)|d\mu < \infty$, то невластивий інтеграл по області $\int\limits_D f(M)d\mu$ називають абсолютно збіжним.

Для обчислення абсолютно збіжного інтеграла по області межі інтегралів можна визначати у будь-якій системі координат.

Якщо інтеграл по області абсолютно не збігається, то заміна змінних і переставлення порядку інтегрування потребують спеціального дослідження.

2. При дослідженні збіжності невластивих інтегралів по області часто застосовують порівняльні ознаки. Наприклад, якщо D є площиною, то для збіжності інтеграла $\int\limits_D f(M)d\mu$ істотно лише поведінка $f(M)$ для великих $r = \sqrt{x^2+y^2}$, тому потрібно використовувати інтеграл $\iint\limits_{r>r_0} r^{-p}\cdot dxdy$, який збігається $p > 2$ і розбігається при $p < 2$.

Аналогічно в тривимірному просторі інтеграл від r^{-p} на нескінченності збігається лише при $p > 3$.

При досліджені невластивих інтегралів по області від функції, яка необмежена в ізольованій точці M_0 області D часто використовують порівняння з інтегралами $\iint\limits_{r>r_0} r^{-p}\cdot dxdy$ на площині та $\iiint\limits_{r<r_0} r^{-p}dxdydz$ в просторі.

Перший із вказаних інтегралів збігається при $p < 2$, а другий - при $p < 3$.

Якщо особливості підінтегральної функції не ізольовані, то умову збіжності часто вдається одержати шляхом вибору такої системи координат, в якій координатні лінії проходять вздовж особливості.

12.6.2 ВПРАВИ

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^\infty \ell^{-(x+y)}dy$;   **б)** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{y^2} \ell^{\frac{x}{y}}dx$;

в) $\int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$ $(a>0)$.

2 Дослідити збіжність інтегралів:

а) $\iint\limits_D \ell n\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де область D: $x^2+y^2\le 1$;

б) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$, де область D: $|x|\le 1$; $|y|\le 1$;

в) $\iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, де область D: $x^2+y^2+z^2\ge 1$;

г) $\iiint\limits_D \dfrac{\ell n\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де область D:

$$x^2+y^2+z^2\le R^2.$$

Розділ 13 **ТЕОРІЯ ПОЛЯ**

13.1. Визначення полів та їх характеристики.

Теорія поля є важливим і перспективним розділом вищої математики, оскільки на кожну людину впливає космічне поле, поле тяжіння Землі, електричні та магнітні поля, біополя.

<u>Означення 1.</u> Фізичним полем називають частину простору або весь простір, в якому здійснюється фізичне явище.

Якщо деяка фізична величина в кожній точці області приймає певне значення, то тим самим задається поле цієї величини.

<u>Означення 2.</u> Якщо фізична величина в кожній точці області приймає певне числове значення, то поле називають скалярним.

Скалярне поле величини u в області D можна задати у вигляді скалярної функції.

$$u=u(M), M\in D,$$

областю визначення якої $\in D$.

<u>Означення 3.</u> Якщо фізична величина в кожній точці області приймає векторне значення, то її поле називають векторним

Векторне поле в області D задається вектор-функцією

$$\vec{a}=\vec{a}(M),\qquad M\in D$$

Якщо $D\in E_3$, то положення точки $M\in D$ визначається кординатами x, y, z. Тому скалярне поле задається скалярною функцією трьох зміних

$$u = u(x, y, z)$$

Векторне поле в тривимірному просторі визначається

$$\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$$

тобто трьома скалярними функціями-проекціями на відповідні осі координат.

Векторне поле називають *плоским*, якщо його можна задати у вигляд

$$\vec{a} = a_x(x, y)\vec{i} + a_y(x, y)\vec{j}$$

Основні характеристики скалярного поля:

1. *Поверхні (лінії) рівня визначають точки в яких функція приймає однакове значення.* Поверхні рівня скалярного поля $u = u(x,y,z)$ визначають рівнянням

$$u(x,y,z) = c \qquad (1)$$

Лінії рівня поля $u = u(x,y)$ визначають рівнянням

$$u = u(x,y). \qquad (1`)$$

2. *Похідна за напрямом $\vec{l}$ характеризує швидкість зміни поля в напрямку вектора $\vec{l}$*, її знаходять за формулою

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}, \qquad (2)$$

де $\cos\alpha = \frac{\ell_x}{|\vec{\ell}|}, \cos\beta = \frac{\ell_y}{|\vec{\ell}|}, \cos\gamma = \frac{\ell_z}{|\vec{\ell}|}$ – *напрямні косинуси* $\vec{\ell}$.

3. Градієнт скалярного поля $u = u(x, y, z)$ визначає напрям та величину найбільшої зміни поля в точці *M(x,y,z)*. Градієнт знаходять за формулою

$$\boxed{grad u \ (M) = \frac{\partial u}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}, \qquad (3)$$

а величина найбільшої швидкості зміни поля знаходиться за формулою

$$\boxed{|grad u \ (M)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}.$$

Напрям вектора gradu співпадає з напрямом нормалі $\vec{n}$ до поверхні $u(x, y, z) = c$ в точці *M*, оскільки

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\vec{n} \qquad (4)$$

Прикалад 1. Визначити поверхні рівня, похідну за напрямком $\vec{\ell} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ та градієнт поля $u = x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2$ в точці $M_0(1,1,1)$.

Розв`язання. Рівнянням поверхонь рівня заданого поля буде

$$x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = c,$$

тобто поверхнями рівня заданого поля будуть сфери з центром в точці *A (0;-1;2)* радіусом $r = \sqrt{c}$. Підставимо замість *x,y,z* кординати точки M_0, тоді одержимо

$$1 + (1+1)^2 + (1-2)^2 = c \Rightarrow c = 6$$

Отже, через точку M_0 проходить одна поверхня рівня, рівняння якої буде

$$x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 6$$

Знайдемо частинні похідні функції *u* в точці M_0:

$$u'_x(M) = 2x \Rightarrow u'_x(M_0) = 2;$$
$$u'_y(M) = 2(y+1) \Rightarrow u'_y(M_0) = 4;$$
$$u'_z(M) = 2(z-2) \Rightarrow u'_z(M_0) = -2.$$

За формулою (2) одержимо:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}} = 2\cos\alpha + 4\cos\beta - 2\cos\gamma.$$

Оскільки $\left|\bar{\ell}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6};$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

то $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{6}+6\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$

За формулою (3) знаходимо градієнт поля в точці M_0:

$grad u\ (M_0) = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Характеристики векторного поля

1.Векторною лінією поля $\vec{a}(M) = a_x(M)\vec{i} + a_y(M)\vec{j} + a_z(M)\vec{k}$ називають лінію, в кожній точці якої дотична співпадає з напрямом $\vec{a}(M)$.

Якщо кординати векторного поля неперервні разом із своїми похідними першого порядку в точці M_0, то через точку M_0 проходить лише одна векторна лінія.

Рівнянями векторних ліній будуть розв`язки диференціальних рівнянь

$$\boxed{\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}} \qquad (5)$$

2.Особливі точки векторного поля. Точку M_0 називають <u>*особливою точкою поля*</u> $\vec{a}(M)$, *якщо* $\vec{a}(M_0) = 0$ *або хоч би одна з проекцій цього поля має розрив в точці* M_0.

Найчастіше фізичні векторні поля мають неперервні проекції, а їх особливими точками є точки, де $\vec{a}(M_0) = 0$ і які називають точками спокою.

Точки спокою класифікують в залежності від виду векторних ліній в околі цих точок.

3. Потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню S характеризує різницю $\Pi = N_+ - N_-$, де N_+ - кількість векторних ліній поля, які проходять через поверхню S і мають однаковий напрям з нормалью $\vec{n}$ до цієї поверхні, а N_- - кількість векторних ліній поля, які мають протилежний напрям.

Потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню S визначають поверхневим інтегралом другого роду за формолою

$$\boxed{\Pi = \iint_S \vec{a}(M)d\vec{s}} \qquad (6)$$

де $d\vec{s} = \vec{n}(M)ds$, $\vec{n}(M)$ - нормаль до поверхні S в точці M.

4. <u>*Дивергенція*</u> *(розходження) векторного поля* $\vec{a}(M)$ *характеризує щільність потока поля через замкнему поверхню S в точці M*, яка знаходиться в області, що обмежена S.

Дивергенцію векторного поля $\vec{a}(M)$ обчислюють за формулою:

$$\boxed{div\,\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z}} \qquad (7)$$

Точки M, в яких $div\,\vec{a}(M) > 0$, називають джерелами векторного поля. Точки M, в яких $div\,\vec{a}(M) < 0$, називають точками стоку (стікання).

5. <u>*Роботу*</u> *P змінної сили* $\vec{F}(M)$ *при переміщенні точки* визначають криволінійним інтегралом другого роду за формулою:

$$\boxed{P = \int_{AB} \vec{F}(M)d\vec{\ell}} \qquad (8)$$

6. *<u>Циркуляція</u> С векторного поля $\vec{a}(M)$ характеризує обертальну спроможність поля* і її знаходять з використанням криволінійного інтеграла другого роду за формулою:

$$\boxed{C = \oint_L \vec{a}(M)d\vec{r}} \qquad (9)$$

де L- деякий замкнений контур, $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ - дифернціал радіуса-вектора точки $M \in L$.

7. *<u>Вихор</u> векторного поля $\vec{a}(M)$ є вектором, який характеризує поверхневу щільність циркуляції,* позначають $rot\,\vec{a}(M)$, визначають формулою:

$$\boxed{rot\,\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.}$$

Останню формулу можна записати у більш прийнятному для використання вигляді:

$$\boxed{rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}} \qquad (10)$$

Добуток символів частинних похідних та координат вектора треба розуміти як відповідні частинні похідні першого порядку відповідних функцій. Наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot a_y = \frac{\partial a_y}{\partial x}.$$

Приклад 2. Знайти векторні лінії, дивергенцію та вихорь поля $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$.

**Розв`язання.** Для знаходження рівнянь, векторних ліній заданого поля треба знайти розв`язки системи диференціальних рівнянь (5), які приймають вид:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow 1)\frac{dx}{2x} = -\frac{dy}{y}; 2)\frac{dx}{2x} = \frac{dz}{z}$$

Інтегруючи рівняння першого порядку з відокремленими змінними отримаємо сукупність ліній:

$$1)\frac{1}{2}\ln x = -\ln y + \ln c \Rightarrow \ln\left(\sqrt{x}\cdot y\right) = \ln c \Rightarrow$$

$$\sqrt{xy} = c \Rightarrow y = \frac{c_1}{x};$$

$$2)\frac{1}{2}\ln x = \ln z + \ln c_2 \Rightarrow \sqrt{x} = c_2 z \Rightarrow z^2 = c_3 x$$

Відмітимо, що початок координат є особливою точкою для заданого поля, оскільки при $x \to o$ і $c \neq 0$ маємо $y \to \infty$.

Дивергенцію поля знайдемо за формулою (7):

$$div\,\vec{a} = 2 - 1 + 1 = 2$$

Вихорь векторного поля знайдемо за формулою (10):

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x & -y & z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial 2x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(-\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial 2x}{\partial y}\right) = 0$$

13.2. Криволінійні та поверхневі інтеграли другого роду

13.2.1. Знаходження криволінійних інтегралів

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду (по орієнтовному контуру) зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

Дійсно, нехай контур інтегрування – дуга $\overset{\smile}{AB}$ є просторовою кривою, вектор-функції

$$\vec{a}(M) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k},$$

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz.$$

Тоді маємо

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \vec{a}(M)d\vec{r} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \left[a_x(x,y,z)dx + a_y(x,y,z)dy + a_z(x,y,z)dz\right] \quad (11)$$

Отже, за формулою (11) криволінійний інтеграл другого роду зводиться до криволінійного інтеграла першого роду, який, як відомо, зводиться до визначеного інтеграла - інтегрування ведеться від точки A до точки B.

Нехай дуга AB задана параметрично:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t); \\ y = \varphi_2(t); \; t_A \le t \le t_B; \\ z = \varphi_3(t). \end{cases}$$

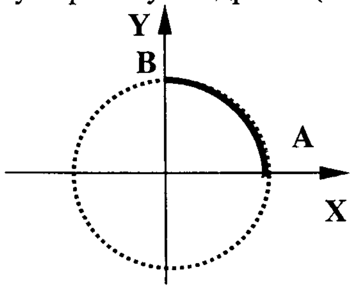
Тоді одержуємо:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \vec{a}(M)d\vec{r} = \int\limits_{t_A}^{t_B} \left[a_x(t)\varphi_1'(t) + a_y(t)\varphi_2'(t) + a_z(t)\varphi_3'(t)\right]dt. \quad (12)$$

Якщо дуга AB плоска і задана явним рівнянням $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то отримаємо:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \vec{a}(M)d\vec{r} = \int\limits_a^b \left[a_x(x, f(x)) + a_y(x, f(x)) f'(x)\right]dx. \quad (13)$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл від вектор-функції $\vec{a}(M) = 3x^2 y\vec{i} + 3xy^2\vec{j}$ вздовж дуги AB кола $x^2 + y^2 = a^2$, яка знаходиться у першому квадранті (мал. 1).



Мал.1

Розв'язання. Дуга AB в параметричній формі записується так: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. За формулою (12) отримаємо:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \vec{a}(M)d\vec{r} = \int\limits_0^{\pi/2} \left[3\cdot(a\sin t)^2 \cdot a\cos t \cdot a\cos t + 2a\sin t\cdot(a\cos t)^2\cdot(-a\sin t)\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left[3a^4\sin^2 t\cdot\cos^2 t - 2a^4\sin^2 t\cdot\cos^2 t\right]dt = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2}dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^4\pi}{16}.$$

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл від вектор-функції $\vec{a}(M) = x^3 y\vec{i} + 2(x^2 - y^2)\vec{j}$ вздовж кривої $y = x^2$ від точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$.

Розв'язання. В даному випадку дуга AB задана явно: $y = x^2$, $1 \le x \le 2$. Використовуючи формулу (13), отримаємо:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \vec{a}(M)d\vec{r} = \int\limits_1^2 \left[x^3\cdot x^2 + 2\left(x^2 - x^4\right)\cdot 2x\right]dx = \int\limits_1^2 \left[x^5 + 4x^3 - 4x^5\right]dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(4x^3 - 3x^5\right)dx = \frac{-33}{2}.$$

Зауваження 1. *Основна особливість криволінійних інтегралів другого роду полягає в їх залежності від орієнтування контуру інтегрування*, оскільки:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \vec{a}(M)d\vec{r} = -\int\limits_{\overset{\cup}{BA}} \vec{a}(M)d\vec{r}.$$

Тому інтеграл прикладу 4 при інтегруванні від точки В до точки А буде дорівнювати $\frac{33}{2}$.

13.2.2. Знаходження поверхневих інтегралів другого роду.

За означенням вказаних інтегралів маємо:

$$\iint_S \vec{a}(M)d\vec{S} = \iint_S \vec{a}(M)\vec{n}(M)dS, \quad (14)$$

де $\vec{n}$ - одиничний вектор нормалі до поверхні S.

Нехай

$$\vec{a}(M) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k},$$

$$\vec{n}(M) = \vec{i}\cos(n,x) + \vec{j}\cos(n,y) + \vec{k}\cos(n,z).$$

Тоді, використовуючи формулу скалярного добутку двох векторів у координатній формі, отримаємо:

$$\iint_S \vec{a}(M)\,d\vec{s} = \iint_S [a_x\cos(n,x) + a_y\cos(n,y) + a_z\cos(n,z)]\,ds. \quad (15)$$

Нехай поверхня S задана рівнянням $z = f(x,y)$ і D-проекція цієї поверхні на площину $x0y$. Тоді напрямні косинуси нормалі до поверхні S в точці $M(x,y,z)$ знаходять за формулами:

$$\cos(n,x) = \frac{\mp p}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

$$\cos(n,y) = \frac{\mp q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \quad (16)$$

$$\cos(n,z) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

де $p = z_x', q = z_y'$.

Верхній знак береться тоді, коли напрямок $\vec{n}$ утворює з віссю $0z$ гострий кут.

Враховуючи, що

$$ds = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy, \quad (17)$$

після підстановки (16) та (17) в (15), отримаємо:

$$\iint_S \vec{a}(M)d\vec{s} = \pm\iint_D [pa_x(x,y,f(x,y)) + qa_y(x,y,f(x,y)) - a_z(x,y,f(x,y))]dxdy \quad (18)$$

Отже, обчислення поверхневого інтеграла другого роду зведено до обчислення подвійного інтеграла.

Приклад 5. Обчислити потік векторного поля $\vec{r}(M)$ через верхню сторону нижньої півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

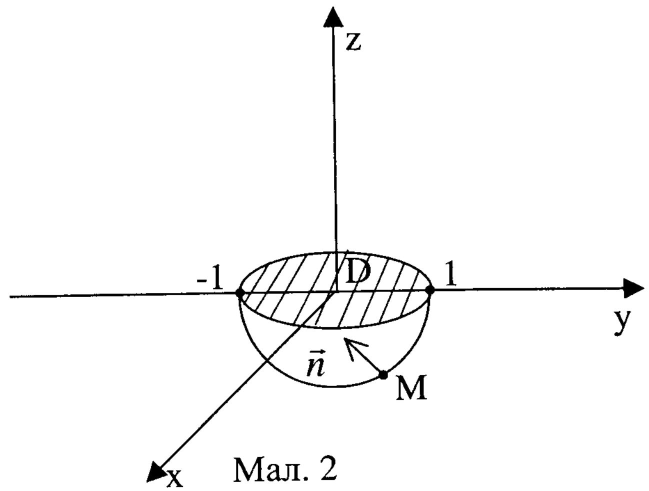
Розв'язання. Потік Π векторного поля $\vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхню S знаходимо за формулою:

$$\Pi = \iint_S \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)d\vec{s} \quad (19)$$

Рівнянням нижньої півсфери буде

$$z = -\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Її проекцією на площину $x0y$ буде круг $D: x^2 + y^2 \le 1$.



Мал. 2

Оскільки поверхня інтегрування S є верхньою стороною нижньої півсфери, то нормаль $\vec{n}(M)$ напрямлена так, як вказано на мал. 2, тобто є внутрішньою. Диференціюванням функції знайдемо:

$$p = z_x' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}};$$

$$q = z_y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Використовуючи формулу (18), отримаємо:

$$\Pi = -\iint\limits_D \left[\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{1-x^2-y^2} \right] dx\,dy.$$

Переходом до полярних координат

$$D: x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

і, враховуючи $dxdy = \rho d\rho d\varphi$, одержуємо:

$$\Pi = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left[\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\rho^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} + \sqrt{1-\rho^2} \right] \rho d\rho = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} =$$

$$= -2\pi \cdot \left(\frac{-1}{2} \int_1^0 t^{\frac{-1}{2}} dt \right) = -2\pi.$$

▼ **Зауваження 2.** Враховуючи, що

$\cos(n,x)ds = dydz$; $\cos(n,y)ds = dzdx$; $\cos(n,z)ds = dxdy$,

проекцію a_n вектора $\vec{a}$ на нормаль $\vec{n}$ знаходимо за формулою

$$a_n = a_x\cos(\overline{n},x) + a_y\cos(\overline{n},y) + a_z\cos(\overline{n},z),$$

Потік векторного поля $\vec{a}(M)$ можна обчислювати з використанням формули:

$$\boxed{\Pi = \iint\limits_S \vec{a}(M)d\vec{s} = \iint\limits_S a_n ds = \iint\limits_S [a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy].} \qquad (20)$$

13.3. Властивості векторних полів.

13.3.1. Соленоїдальність, потенціальність та безвихорність.

❐ **<u>Означення4.</u>Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається соленоїдальним в області D, якщо у будь-якій точці цієї області дивергенція векторного поля дорівнює 0, тобто якщо**

$$\mathrm{div}\vec{a}(M) = 0 \qquad (21)$$

Наприклад, поле електростатичної індукції $\vec{D}(M)$ є соленоїдальним в області, яка не містить зарядів, оскільки $div\,\vec{D}(M) = \rho(M)$, де $\rho(M)$ - об'ємна щільність електричного заряду, яка дорівнює 0 там, де заряду немає.

Поле магнітної напруженості, яке утворюється постійним струмом, є соленоїдальним в усьому просторі, оскільки div $\vec{H}(M) = 0$.

Якщо в деякій області D поле $\vec{a}(M)$ соленоїдальне, то в цій області відсутні джерела поля.

❐ **<u>Означення5.</u>Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається потенціальним в області D, якщо існує така скалярна функція, що вектор $\vec{a}(M)$ можна представити у вигляді градієнта цієї функції. Якщо цю скалярну функцію позначити через (-U(M)), знак мінус обирають із фізичних міркувань, то**

$$\vec{a}(M) = -grad\,U(M),\ M \in D; \qquad (22)$$

Функція $U(M)$ називається *потенціалом векторного поля* $\vec{a}(M)$.

Потенціал векторного поля $\vec{a}(M)$ визначають з точністю до сталої C, оскільки

$$\operatorname{grad}(U+C)=\operatorname{grad}(U)$$

Ця властивість дозволяє зробити потенціал рівним 0 у будь-якій заданій точці. Найчастіше значення потенціалу приймається рівним нулю на ∞.

Відмітимо, що різниця значень потенціалу у двох точках вже не залежить від сталої C, оскільки в різниці сталі взаємно знищуються.

Векторне поле $\vec{a}(M)$ може бути заданим за допомогою трьох скалярних функцій, які є проекціями вектора $\vec{a}(M)$ на декартові осі координат.

Якщо векторне поле $\vec{a}(M)$ потенціальне, то його можна задати однією скалярною функцією – потенціалом цього поля.

Криволінійний інтеграл по дузі АВ потенціального поля не залежить від шляху інтегрування.

<u>Означення 6</u>.Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається безвихорним в області D, якщо у будь-якій точці цієї області вихор векторного поля дорівнює 0, тобто

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0,\ M\in D \qquad (23)$$

Наприклад, поле електричної напруженості, яке утворюється точковим зарядом, є безвихорним у будь-якій області.

Поняття безвихорності та потенціальності поля є еквівалентними.

Дійсно, якщо поле $\vec{a}(M)$ є потенціальним, то

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=-\operatorname{rot} grad\, U(M)=0,$$

тобто поле $\vec{a}(M)$ буде і безвихорним.

Навпаки, якщо поле $\vec{a}(M)$ є безвихорним, то

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0.$$

Звідси випливає, що координати вектора $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial z};\ \frac{\partial a_x}{\partial z}=\frac{\partial a_z}{\partial x};\ \frac{\partial a_y}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial y}$$

Ці рівності дозволяють довести, що функція

$$U(x,y,z)=-\left[\int_{x_0}^{x}a_x(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y}a_y(x_0,y,z)dy+\int_{z_0}^{z}a_z(x_0,y_0,z)dy\right] \qquad (24)$$

є потенціалом векторного поля $\vec{a}(M)$, оскільки

$$-\operatorname{grad}U=\vec{a}(M),$$

(x_0,y_0,z_0) - довільна точка з області неперервності координат $\vec{a}(M)$.

13.3.2 Формули Остроградського – Гаусса, Стокса та Гріна

Сумарна потужність джерел векторного поля усередині замкненої поверхні S дорівнює потоку векторного поля через цю поверхню:

$$\iint_S \vec{a}(M)d\vec{s}$$

З іншої сторони, оскільки $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ - це щільність потужності джерел векторного поля, то сумарна потужність джерел в області V, яку обмежує поверхня S, буде дорівнювати потрійному інтегралові

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{a}(M)dv$$

Отже, одержали формулу

$$\iiint_V \operatorname{div}\,\vec{a}(M)dv=\iint_S \vec{a}\,d\vec{s}, \qquad (25)$$

яку називають формулою Остроградського-Гаусса.

Рівність (25) у скалярній формі має вигляд:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dv = \iint\limits_S \left[a_x \cos(n, x) + a_y \cos(n, y) + a_z \cos(n, z) \right] ds \qquad (26)$$

Відмітимо, що знаходження потока поля $\vec{a}(M)$ з використанням формули Остроградського-Гаусса значно спрощується.

Приклад 6. Обчислити потік поля $\vec{a}(M) = (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхню кулі одиничного радіуса з центром в початку координат.

Розв'язання. Шуканий потік Π заданого поля $\vec{a}(M)$ будемо обчислювати з використанням формули Остроградського-Гаусса.

Позначимо через V задану в умові кулю, а S – поверхню кулі. Тоді

$$\Pi = \iint\limits_S \vec{a}(M) d\vec{s} = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{a}(M)\, dv.$$

В заданому випадку

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(y-x)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1 = 3, \text{ тому}$$

$$\Pi = \iiint\limits_V 3dv = 3\iiint\limits_V dv$$

Згідно з геометричним змістом інтегралів по області останній інтеграл дорівнює об'єму заданої кулі $\frac{4}{3}\text{p} \cdot 1^3$.

Отже, шуканим потоком буде:

$$\Pi = 3 \cdot \frac{4}{3}\text{p} = 4\pi.$$

Теорема Стокса та формула Гріна.

Теорема Стокса. *Якщо в деякій області, яка містить гладку поверхню S та її межу L, проекції вектор-функції $\vec{a}(M)$ та їх частинні похідні першого порядку є неперервними функціями,* тоді має місце рівність:

$$\oint\limits_L \vec{a}(M)\, d\vec{r} = \iint\limits_S \operatorname{rot} \vec{a}(M)\, d\vec{s} \qquad (27).$$

Смисл рівності (27) в тому, що при виконанні умов теореми циркуляція поля $\vec{a}(M)$ вздовж замкненої лінії L, яка обмежує поверхню S, дорівнює потоку поля $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ через поверхню S.

Розглянемо частинний випадок теореми Стокса.

Нехай контур L обмежує плоску область D і система координат вибрана так, що D лежить в площині $x0y$.

Тоді $d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}dy$; $d\vec{s} = \vec{n}ds = \vec{k}ds$, оскільки нормаль $\vec{n}$ до довільної точки області D співпадає з напрямком осі $0z$.

Маємо:

$$\vec{a}(M)d\vec{r} = a_x(x, y)dx + a_y(x, y)dy,$$

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M)\, ds = \operatorname{rot}_z \vec{a}(M)\, ds = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy.$$

Підставимо ці вирази в рівність (27) і отримаємо:

$$\oint\limits_L \left[a_x(x, y)dx + a_y(x, y)dy \right] = \iint\limits_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy \qquad (28)$$

Якщо ввести позначення

$$a_x(x, y) = P(x, y); \qquad a_y(x, y) = Q(x, y)$$

і розглядати $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ як довільні функції (вектор – функція $\vec{a}(M)$ розглядалась з довільними проекціями), то (28) прийме вигляд

$$\boxed{\oint\limits_L \left[P(x, y)dx + Q(x, y)dy \right] = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy} \qquad (29)$$

Ця формула називається формулою Гріна. Вона описує зв'язок між подвійним інтегралом по плоскій області D з криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Приклад 7. Знайти потік вихору поля $\vec{a}(M) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через поверхню обертання $z = 2(1 - x^2 - y^2)$ обмежену площиною $z = 0$.

Розв'язання. Позначимо задану поверхню обертання – параболоїд через S. В перетині поверхні S та площини $z = 0$ знаходиться замкнена лінія L: $x^2 + y^2 = 2$, яка є межею поверхні S.

Потік Π поля $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ через поверхню S шукаємо за формулою:

$$\Pi = \iint\limits_S \operatorname{rot}\,\vec{a}(M)d\vec{s}$$

Застосовуючи формулу Стокса (27), отримаємо

$$\Pi = \oint\limits_L \vec{a}(M)d\vec{r} = \oint\limits_L [a_x dx + a_y dy + a_z dz]$$

В даному випадку лінія L плоска, тому

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}dy + 0 \cdot dz$$

$\vec{a}(M)d\vec{r} = ydx + zdy = ydx$, оскільки $z = 0$ на L.

Отже, одержали, що

$$\Pi = \oint\limits_L ydx,$$

де L – коло $x^2 + y^2 = 2$.

В параметричному запису лінія L:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\text{p}$$

Перейдемо від криволінійного інтеграла до визначеного:

$$\Pi = \oint\limits_L ydx = -\int\limits_0^{2\text{p}} \sqrt{2}\sin t \cdot \sqrt{2}\sin dt = -\int\limits_0^{2\text{p}} (1 - \cos 2t)dt = = -\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -2\pi$$

13.4.Оператори Гамільтона та Лапласа.

13.4.1. Оператор Гамільтона та правила його застосування.

Означення 7.Оператором Гамільтона називають символічний векторно-диференціальний оператор, який позначають знаком ∇ (набла) і визначають в декартовій системі координат рівністю

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \qquad (30)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти координатних осей.

Підкреслимо, що оператор ∇ є символічним вектором, тому він не може бути рівним, паралельним або перпендикулярним реальному вектору $\vec{a}(M)$.

Оператор ∇ часто використовується і навички його застосування значно полегшують вивчення багатьох дисциплін, особливо електротехніки.

Основні правила застосування оператора ∇.

1)Оператор ∇ діє на величини, які стоять за ним, і не діє на величини, які стоять перед ним.

Так, в запису $(\vec{a} \cdot \nabla)\varphi$ оператор ∇ діє на φ і не діє на $\vec{a}$. Іноді, щоб вказати величину, на яку не діє оператор ∇, у цій величини ставиться індекс, що вказує на необхідність розглядати цю величину як сталу. Наприклад, в запису $(\nabla \cdot \vec{a}_c) \cdot \varphi$ слід розуміти, що ∇ на $\vec{a}_c$ не діє, а на φ діє.

2)Добуток оператора ∇ на суму двох функцій обчислюють за формулою

$$\nabla(\varphi + \text{ш}) = \nabla\varphi + \nabla\text{ш}$$

3)Скалярний добуток оператора ∇ на суму двох векторів обчислюють за формулою

$$\nabla(\vec{a}+\vec{b})=\nabla\vec{a}+\nabla\vec{b}$$

4)Векторний добуток оператора ∇ на суму двох векторів обчислюють за формулою

$$\nabla\times(\vec{a}+\vec{b})=\nabla\times\vec{a}+\nabla\times\vec{b}$$

5)Добуток оператора ∇ на скалярну функцію φ дорівнює градієнту функції φ, оскільки

$$\nabla\varphi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\varphi=\frac{\partial}{\partial x}(\vec{i}\varphi)+\frac{\partial}{\partial y}(\vec{j}\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(\vec{k}\varphi)=\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\mathrm{grad}\varphi\Rightarrow$$

$$\nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi$$

Англійський математик Гамільтон помітив, що через скалярний та векторний добутки векторів ∇ та $\vec{a}(M)$ можна виразити характеристики векторного поля $\mathrm{div}\vec{a}(M)$ та $\mathrm{rot}\vec{a}(M)$ Дійсно,

$$\nabla\cdot\vec{a}=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\mathrm{div}\,\vec{a};$$

$$\nabla\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=\mathrm{rot}\,\vec{a}.$$

Маємо: $\mathrm{div}\,\vec{a}=\nabla\cdot\vec{a}$, $\quad$ $\mathrm{rot}\,\vec{a}=\nabla\times\vec{a}$

Отже,

1) для знаходження градієнта скалярного поля $u=u(x,y,z)$ потрібно оператор ∇ помножити на функцію u;
2) для знаходження дивергенції вектора $\vec{a}$ потрібно оператор ∇ скалярно помножити на вектор $\vec{a}$;
3) для знаходження вихору вектора $\vec{a}$ потрібно оператор ∇ векторно помножити на вектор $\vec{a}$.

Означення 8. **Процес знаходження характеристик** $\mathrm{grad}\,u$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$, $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ **називають операціями першого порядку** теорії поля.

Зауваження 3. *Для пояснення техніки використання оператора* ∇ *згадаємо правило диференціювання добутку двох функцій*

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \qquad (31)$$

Перший доданок правої частини отримується, якщо диференціювати добуток $u\cdot v$, вважаючи v сталою, а другий доданок – якщо при диференціюванні добутку $u\cdot v$ вважати множник u сталим.

Тому формулу (31) можна розуміти так:

$$(u\cdot v)'=(u\cdot v_c)'+(u_c\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

Коли диференціювання закінчено індекс c у відповідних величин можна зняти.

Аналогічним чином доцільно поступати при обчисленні результату дії оператора "набла" на добуток двох функцій або функції та вектора або добутку двох векторів

Приклад 8.

$$\mathrm{grad}(u\cdot v)=\nabla(u\cdot v)=\nabla(u\cdot v_c)+\nabla(u_c\cdot v)=$$
$$=v_c\cdot\nabla u+u_c\cdot\nabla v=v\cdot\mathrm{grad}u+u\cdot\mathrm{grad}v$$

Приклад 9.

$$\mathrm{div}(u\cdot\vec{a})=\nabla\cdot(u\cdot\vec{a})=\nabla(u_c\cdot\vec{a})+\nabla(u\cdot\vec{a}_c)=$$
$$=u_c\nabla\vec{a}+\vec{a}_c\nabla u=u\,\mathrm{div}\,\vec{a}+\vec{a}\,\mathrm{grad}\,u$$

Приклад 10.

$$\mathrm{rot}(u\cdot\vec{a})=\nabla\times(u\vec{a})=\nabla\times(u_c\vec{a})+\nabla\times(u\vec{a}_c)=$$
$$=u_c\nabla\times\vec{a}+\nabla u\times\vec{a}_c=u\,\mathrm{rot}\,\vec{a}+\mathrm{grad}\,u\times\vec{a}$$

Враховуючи властивість векторного добутку

$$\mathrm{grad}\,u\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\mathrm{grad}\,u),$$

одержуємо:

$$\mathrm{rot}(u\cdot\vec{a})=u\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a}-\vec{a}\times\mathrm{grad}\,u.$$

Приклад 11.

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}_c\times\vec{b}) + \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}_c)$$

Доданки правої частини цієї рівності є мішаними добутками трьох векторів ∇, $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями два поряд записаних множника, то добуток змінює знак. Тому

$$\nabla\cdot(\vec{a}_c\times\vec{b}) = -\vec{a}_c\cdot\nabla\times\vec{b} = -\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b};$$

$$\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}_c) = -\nabla\cdot(\vec{b}_c\times\vec{a}) = \vec{b}_c\cdot\nabla\times\vec{a} = \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a}$$

Отже, $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$

13.4.2. Оператор Лапласа.

Розглянемо скалярний добуток двох операторів “набла”:

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Означення 9. Оператор ∇^2 називається оператором Лапласа і найчастіше позначається символом Δ.

Оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (32)$$

значно спрощує запис диференціальних виразів і тому використовується досить часто, причому не тільки в декартових координатах, а і в циліндричних або сферичних координатах. Циліндричні координати виражаються через декартові координати за формулами:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};\ z = z$$

Щоб одержати вираз

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ (u = u(x, y, z))$$

у циліндричних координатах r, φ, z треба вважати, що $u = u(r, \varphi, z)$ і виразити $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ за правилами диференціювання складної функції.

Після досить громіздких викладок можна одержати оператор Лапласа у циліндричних координатах, оскільки

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (33)$$

13.4.3. Диференціальні операції другого порядку теорії поля.

Застосування диференціальних операцій першого порядку до диференціальних операцій першого порядку теорії поля називають операціями другого порядку.

В теорії поля існує три операції першого порядку:

$\operatorname{grad} u = \nabla u$ - векторна величина;

$\operatorname{div}\vec{a} = \nabla\cdot\vec{a}$ - скалярна величина;

$\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\times\vec{a}$ - векторна величина.

Оскільки до скалярного поля можна застосувати лише операцію знаходження градієнта, то до $\operatorname{div}\vec{a}$ можна застосувати лише операцію першого порядку й одержати

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} = \nabla\cdot\nabla\cdot\vec{a} = \nabla^2\cdot\vec{a} = \Delta\cdot\vec{a} = \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial z^2} \qquad (34)$$

До кожної векторної величини grad u та rot $\vec{a}$ можна застосувати дві операції першого порядку: дивергенцію та вихор. Одержимо:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla\cdot\nabla u = \nabla^2 u = \Delta u \qquad (35)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla\times\nabla u = (\nabla\times\nabla)u = 0, \qquad (36)$$

оскільки векторний добуток двох рівних векторів дорівнює 0.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0 \qquad (37)$$

оскільки в мішаному добутку є два рівних вектори.

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \begin{vmatrix} \nabla & \vec{a} \\ \nabla\cdot\nabla & \nabla\cdot\vec{a} \end{vmatrix} = \nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\cdot\vec{a} \qquad (38)$$

Оскільки $\nabla\cdot\vec{a} = div\vec{a}$, а за формулою (34) $\nabla\cdot(div\,\vec{a}) = grad\,div\,\vec{a}$,то (38) приймає вигляд:

$$rot\,rot\vec{a} = \nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = grad\,div\vec{a} - \Delta\vec{a} \qquad (39).$$

13.5 ВПРАВИ

1.Знайти векторні лінії заданого векторного поля:

a) $\vec{a}(M) = a\vec{i} + b\vec{j} + b\vec{k}$, де a, b, c - сталі;

b) $\vec{a}(M) = -ay\vec{i} + ax\vec{j} + b\vec{k}$;

c) $\vec{a}(M) = (y+z)\vec{i} - x\vec{j} - x\vec{k}$;

d) $\vec{a}(M) = x(y^2 - z^2)\vec{i} - y(z^2 + x^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$;

e) $\vec{a}(M) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$, ω - стала;

f) $\vec{a}(M) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} + h\vec{k}$, ω та h-сталі.

2.Обчислити дивергенцію та вихор заданого поля:

a) $\vec{a}(M) = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 5z\vec{k}$;

b) $\vec{a}(M) = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$;

c) $\vec{a}(M) = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$;

d) $\vec{a}(M) = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$;

e) $\vec{a}(M) = x(y^2 - z^2)\vec{i} - y(x^2 + z^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$.

3.Довести, що:

a) $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$;

b) $\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}$;

c) $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\operatorname{grad}\varphi$; $\quad \varphi = \varphi(x, y, z)$;

d) $\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) = \operatorname{grad}\varphi\times\vec{a} + \varphi\operatorname{rot}\vec{a}$, $\quad \varphi = \varphi(x, y, z)$;

e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$;

f) $\vec{n}\big(\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{n}) - \operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{n})\big) = \operatorname{div}\vec{a}$, $\quad \vec{a} = \vec{a}(M)$;

$\vec{n}$ - сталий одиничний вектор

4.Нехай $\vec{r}$ - радіус-вектор точки M . Обчислити:

a) $\operatorname{div}(a\vec{r})$, а-число;

b) $\operatorname{div}\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{a})$, $\vec{a}$ - сталий вектор;

5.Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int_L \left(y^2dx + x^2dy\right)$ для вказаного контуру L:

a) L - верхня половина еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, яку проходять за рухом годинникової стрілки;

b) L - дуга параболи $y = 4 - x^2$ у верхній півплощині, яку проходять за рухом годинникової стрілки;

c) L - відрізок $[-2,2]$ осі $0x$.

6.Обчислити циркуляцію заданого поля $\vec{a}(M)$ вздовж вказаного контуру:

a) $\vec{a}(M) = (x^3 - y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$, L - коло радіуса R з центром в початку координат;

b) $a(M) = \vec{r}$ - радіус-вектор; L - один виток AB гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$; A та B - точки, які відповідають значенню параметра 0 та 2π .

7)Обчислити криволінійні інтеграли:

a) $\int_{AB}(xydx + (y - x)dy)$, де AB є лінія $y = x^3$, $A(0,0)$, $B(1,1)$.

b) $\int\limits_{L} xdy$, де L - сторони трикутника, який обмежений осями координат та прямою $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, що проходять в додатному напрямку (область залишається зліва).

8.Обчислити поверхневі інтеграли другого роду:

a) $\iint\limits_{S} zdxdy$, де S - зовнішня сторона еліпсоїда

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

b) $\iint\limits_{S}\left(x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy\right)$, де S - зовнішня сторона півсфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, $(z\ge 0)$

c) $\iint\limits_{S}(yzdydz+xzdxdz+xydxdy)$, де S - зовнішня сторона тетраедра, обмеженого площинами: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$.

d) $\iint\limits_{S}\frac{y^2}{z}dxdy$, де S - верхня сторона нижньої півсфери радіуса R.

e) $\iint\limits_{S}\frac{x^2y^2}{z^2}dxdy$, де S - поверхня конуса $z^2=x^2+y^2$, обмежена площиною $z=h$.

9.Обчислити потік радіуса-вектора $\vec{r}(M)$ через повну поверхню циліндра, якщо його нижня основа лежить в площині $x0y$, центр основи знаходиться в початку координат, радіус основи R, висота циліндра H.

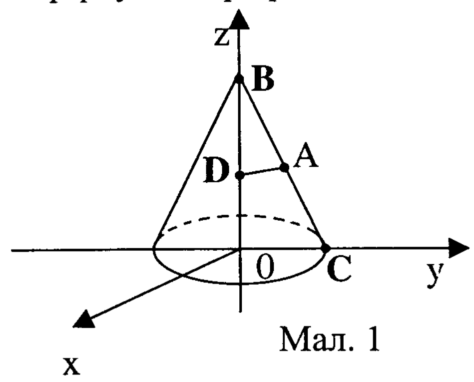
Рекомендація. Доцільно використати формулу

$$\Pi=\iint\limits_{S} r_n ds$$

і визначити проекцію r_n вектора $\vec{r}(M)$ на нормаль до кожної частини повної поверхні циліндра.

10.Визначити потік радіуса-вектора $\vec{r}(M)$ через поверхню конуса, вісь якого співпадає з віссю $0z$, висота –H, основа лежить в площині $x0y$ і має радіус R.

Рекомендація. Розв'язування доцільно провести з використанням формули Остроградського.



Мал. 1

Рівняння поверхні конуса:

$$z=H\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right),$$ оскільки $\frac{R}{H}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{H-z}$ (з подібності трикутників BOC та ABD, мал. 1).

11.Обчислити задані криволінійні інтеграли по контуру L, який проходить в додатному напрямі (обмежена область – зліва) безпосередньо і за формулою Гріна:

a) $\int\limits_{L}[(1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy]$, $L: x^2+y^2=R^2$;

b) $\int\limits_{L}\left[\left(xy+x+y\right)dx+\left(xy+x-y\right)dy\right]$, $L: x^2+y^2=ax$;

c) $\int\limits_{L}[(yx^2+e^x)dx+(xy^2+xe^y-2y)dy]$, L - довільна замкнена лінія, симетрична відносно початку координат.

12.Обчислити роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ при переміщенні точки із початку координат в точку $M(1,1)$:

a)по лінії $y = x$;

b)по лінії $y = x^2$;

c)по ламаній лінії, частини якої паралельні осям координат (2 випадки).

13.Використовуючи формулу Остроградського, обчислити інтеграли по вказаній поверхні S:

a) $\iint\limits_S (xzdxdy + xydydz + yzdxdz)$, де S - зовнішня сторона поверхні піраміди: $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

b) $\iint\limits_S (yxdxdy + xzdydz + xydxdz)$, де S - зовнішня сторона поверхні, розташованої в першому октанті і складеної з поверхонь $x^2+y^2=R^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=h$.

14.Перевірити, чи буде задане поле потенціальним та соленоїдальним. У випадку потенціальності поля ($\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0$) знайти його потенціал $U(x,y,z)$:

a) $\vec{F} = (2x+3yz)\vec{i} + (2y+3xz)\vec{j} + (2z+3xy)\vec{k}$;

b) $\vec{F} = (-3x+yz)\vec{i} + (-3y+xz)\vec{j} + (-3z+xy)\vec{k}$;

c) $\vec{a} = (2x-yz)\vec{i} + (2y-xz)\vec{j} + (2z-xy)\vec{k}$;

d) $\vec{a} = (2x-4yz)\vec{i} + (2y-4xz)\vec{j} + (2z-4xy)\vec{k}$;

e) $\vec{F} = (2x+2yz)\vec{i} + (2y+2xz)\vec{j} + (2z+2xy)\vec{k}$;

f) $\vec{a} = (4x+yz)\vec{i} + (4y+xz)\vec{j} + (4z+xy)\vec{k}$.

15.Обчислити потік заданого векторного поля через поверхню, яка вирізана координатними площинами із заданої площини P,

в тому напрямку нормалі, який утворює гострий кут з віссю $0z$:

a) $\vec{a} = 4z\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+z)\vec{k}$; P: $x-2y+2z-2=0$;

b) $\vec{a} = (2x-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$; P: $x-y+z-2=0$;

c) $\vec{a} = (2z+x)\vec{i} + (x-3z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$; P: $-3x+2y+4z=6$;

d) $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (2x+2z)\vec{k}$; P:3x-2y+2z-6=0;;

e) $\vec{a} = 4z\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3x+2z)\vec{k}$; P: $-2x+y+z=4$;

f) $\vec{a} = (2z-x)\vec{i} + (x+2z)\vec{j} + 3z\vec{k}$; P: $x+4y+z-4=0$.

16.Обчислити потік та циркуляцію постійного вектора $\vec{a}$ вздовж довільної замкненої кривої L.

17. Використовуючи формулу Гріна, обчислити:

a) $\oint\limits_L \left[2\left(x^2+y^2\right)dx + (x+y)^2 dy\right]$, де L - сторони трикутника з вершинами $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$, які проходять проти руху годинникової стрілки;

b) $\oint\limits_L \left(-x^2ydx + xy^2dy\right)$, де коло L: $x^2+y^2=R^2$, яке проходять проти руху годинникової стрілки.

18.Обчислити циркуляцію поля $\vec{a}(M) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вздовж

кола $L: \begin{cases} x = R\cos\alpha\cdot\cos t; \\ y = R\cos\alpha\cdot\sin t; \ (\alpha\text{ - стала}) \\ z = R\sin t, \end{cases}$

в напрямку зростання параметра t.

19.Використовуючи формулу Остроградського - Гаусса, обчислити потік векторного поля через вказану поверхню S:

a) $\vec{a}(M) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, S - зовнішня поверхня куба $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$;

b) $\vec{a}(M) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, S - зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$.

20. За теоремою Стокса обчислити циркуляцію поля: $\vec{a}(M) = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, прийнявши за поверхню S півсферу $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

21. Знайти потенціал гравітаційного поля , що утворене точкою з масою m, розміщеною в початку координат:
$\vec{a}(M) = \dfrac{m}{r^2} \cdot \vec{r}$.

Показати, що потенціал U задовольняє рівняння Лапласа $\Delta U = 0$.

22. Виразити з використанням оператора ∇:
a) вихор добутку $\varphi\vec{a}$; b) вихор $\varphi(r)\cdot\vec{r}$;
c) дивергенцію $\vec{a}\times\vec{b}$; d) вихор $\vec{a}\times\vec{b}$;
e) вихор градієнта скалярного поля.

23 Обчислити div $(\vec{a}\times\vec{r})$, де $\vec{a} = -y\vec{i} + z\vec{j} - x\vec{k}$; $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$, та grad div $(\vec{a}\times\vec{r})$.

Розділ 14 ЧИСЛОВІ РЯДИ

14.1. Загальні поняття. Необхідна ознака збіжності ряду.

<u>Числовим рядом</u> називають суму нескінченної кількості числових доданків і записують, викоористовуючи символ суми, так

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

Числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ називають членами ряду: a_1 - *перший член ряду,* a_2 *-другий член ряду, ...* a_n *- n-й або загальний член* ряду.

Ряд вважається заданим, якщо відомий загальний член a_n *як функція номера:* $\boxed{a_n = f(n).}$

Наприклад, загальним членом ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + ... \quad \text{буде} \quad a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Іноді задають декілька перших членів ряду і треба записати увесь ряд, тобто знайти його загальний член. При цьому загальний член ряду треба знаходити у вигляді функції простішого виду. Наприклад, при знаходженні загального члена ряду

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + ...$$

маємо: $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{2\cdot 2^2}$, $a_3=\frac{1}{3\cdot 2^3}$, $a_4=\frac{1}{4\cdot 2^4}$.

Кожен член ряду є дробом, чисельник якого дорівнює одиниці, а знаменник є добутком двох множників n та 2^n.

Тому загальним членом ряду буде $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$ і ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$.

Означення 1. Частковою сумою числового ряду (1) називають суму S_n перших n членів ряду:

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n.$$

Означення 2. Числовий ряд називають збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум S_n при $n\to\infty$, тобто

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}S_n=S} \qquad (2)$$

Якщо S *є сумою збіжного* ряду (1), то пишуть

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

Якщо границя часткових сум (2) не існує або дорівнює $\pm\infty$, то ряд називають розбіжним.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Розв'язання. Оскільки

$a_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то маємо:

$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\quad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$;

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}\Rightarrow S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$.

Отже, часткова сума заданого ряду має границю, яка дорівнює 1. Це означає, що цей ряд збіжний і його сумою буде 1.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+...$$

Розв'язання. Часткові суми заданого ряду мають вигляд $S_1=1$; $S_2=0$; $S_3=1$; $S_4=0$;...

Оскільки границя послідовності залежить від способу прямування n до нескінченності, то за означенням границі $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не існує і заданий ряд - розбіжний.

Часто використовують наступні числові ряди:

1.гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Цей ряд розбіжний;

2.ряд геометричної прогресії $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ з першим членом a та знаменником q. Цей ряд збігається при $|q|<1$; має суму $S=\frac{a}{1-q}$, а при $|q|\geq 1$ ряд - розбіжний;

3.узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Цей ряд *збіжний* при p>1, а при p≤1 - *розбіжний*.

Властивості збіжних числових рядів:

1.*якщо* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається і має суму S, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, *де с – стале число, також збігається і його сума дорівнює* cS.

2.*якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *збігаються і мають суми* S_1 *та* S_2 *відповідно,то ряд, отриманий почленним додаванням (відніманням)* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ також збігається і має суму $S = S_1 \pm S_2$

3.*якщо збігається ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *то і його залишок*

$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_n + ...$ *також збігається.*

З властивості 3 випливає, що на збіжність ряду не впливає відкидання або додавання довільної скінченної кількості його перших членів.

<u>**Необхідна ознака збіжності ряду**</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**:**

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = 0}$$

Якщо для заданого ряду ця умова <u>*не виконується*</u>, то цей <u>*ряд розбіжний*</u>.

Приклад 3. Дослідити збіжність рядів

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}.$$

Розв'язання. У випадку ряду $a)$ маємо:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Тому необхідна умова збіжності цього ряду виконується, але цей ряд розбіжний, оскільки

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n > \lim_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

У випадку ряду $b)$ маємо:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отже необхідна умова збіжності не виконується, тому ряд $b)$ розбіжний.

14.2. Достатні ознаки збіжності додатних числових рядів

14.2.1.Порівняльні ознаки

<u>***Перша ознака порівняння***</u>**.** Нехай треба дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (3)$$

Візьмемо відомий збіжний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (4)$$

Якщо члени (3) не перевищують відповідних

членів ряду (4):

$a_1 \le b_1$; $a_2 \le b_2$; $a_3 \le b_3$; ... ; $a_n \le b_n$; ... тоді

ряд (3) *збігається і його сума не перевищує суму ряду* (4).
<u>Друга ознака порівняння</u>. *Нехай треба дослідити збіжність ряду (3).Візьмемо відомий розбіжний числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (5)$$

Якщо члени ряду (3) не менше відповідних членів ряду (5):

$$a_1 \ge b_1;\quad a_2 \ge b_2;\ \ldots;a_n \ge b_n;\ldots,$$

то і ряд (3) розбіжний.

Приклад 4. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\ldots$$

Розв'язання. Розглянемо допоміжний ряд

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots$$

який є рядом геометричної прогресії із знаменником q=$\frac{1}{2}$ і тому збіжний. Оскільки члени заданого ряду не перевищують відповідних членів допоміжного ряду (їх знаменники більші), то за першою ознакою порівняння заданий ряд також збігається.

14.2.2 Ознака Даламбера

Якщо для додатного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D}, \qquad (6)$$

то при $D<1$ <u>*ряд збігається,*</u> а при $D>1$

<u>*ряд розбігається*</u>.

Зауваження 1. Якщо стала Даламбера $D=1$,то за цією ознакою неможливо визначити збіжності або розбіжності ряду.

Зауваження 2. *Ознака Даламбера використовується часто, особливо вона ефективна у випадках, коли загальний член ряду містить* $n! = 1\times2\times3\times\ldots\times n$.

Приклад 5. Дослідити збіжність рядів

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n n^5}; \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$$

Розв'язання. Застосуємо до кожного ряду

ознаку Даламбера.

$$a)D=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^5}:\frac{3^n}{2^n n^5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5}{2(n+1)^5}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^5=$$

$$=\frac{3}{2}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\right]^5=\frac{3}{2}>1.$$

Отже, ряд $a)$ розбігається.

$$b)D=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}}:\frac{2n-1}{3^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(2n-1)}=\frac{1}{3}<1.$$

Отже ряд $b)$ збіжний.

14.2.3. Радикальна ознака Коші.

Якщо для додатного числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ існує

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K,} \qquad (7)$$

то *при* $K<1$ *ряд збігається, а при* $K>1$ *ряд* розбігається.

▼ **Зауваження 3.** *Радикальна ознака Коші найчастіше використовується у випадках, коли загальний член ряду містить n в основі та в показнику степеня..*

Приклад 6. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Розв'язання. Знайдемо сталу Коші:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

За радикальною ознакою Коші заданий ряд збігається.

14.2.4 Інтегральна ознака Коші.

Нехай треба дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, де

$a_n=f(n)$. Розглянемо невластивий інтеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$, в

якому *підінтегральна функція одержана шляхом заміни аргумента n на аргумент x в функції f(n).*

Якщо невластивий інтеграл збігається, то числовий ряд також збігається. Якщо невластивий інтеграл розбігається, то числовий ряд також розбіжний.

Зауваження 4. *Інтегральна ознака Коші є найбільш сильною ознакою. Цю ознаку використовують у випадках, коли не працюють ознака Даламбера (D=1) та радикальна ознака Коші (K=1).*

Приклад 7. Дослідити збіжність узагальненого гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Оскільки

$a_n=\frac{1}{n^p}$, то $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Розглянемо невластивий інтеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^{1-p}}{1-p},\ p\neq 1\\ \ln x,\ p=1\end{array}\right|_1^b\Bigg\}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1},\ p>1,\\ \infty,\ p\le 1.\end{cases}$$

Отже, невластивий інтеграл та заданий ряд збіжні при p>1 і розбіжні при $p \le 1$.

14.3. Оцінка залишку додатного числового ряду.

Залишок r_n збіжного додатного числового ряду $r_n = S - S_n \Rightarrow |r_n| = |S - S_n|$ і абсолютна похибка заміни суми S частковою сумою S_n з точністю $\varepsilon > 0$ досягається при такому n, що $|r_n| < \varepsilon$. Для знаходження такого номера n використовують наступні твердження теореми про оцінку залишку ряду.

<u>Теорема.</u> *Якщо усі члени збіжного додатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *не перевищують відповідних членів другого збіжного додатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *то залишок* r_n *ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *не перевищує залишок* $\tilde{r}_n$ *ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Найчастіше в якості допоміжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ обирають ряд, залишок якого можна обчислити (наприклад, ряд геометричної прогресії).

Приклад 8. Оцінити r_3 ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n(n+1)}$.

Розв'язання. Кожен член заданого ряду менший відповідного члена ряду геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$,

тому $r_3 < \tilde{r}_3 = \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{5^4}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{500} = 0{,}002.$

14.4. Знакозмінні числові ряди.

<u>Означення 3</u>. Ряд називається знакозмінним, якщо він містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів. Ряд, члени якого по черзі мають додатний та від'ємний знаки, називають знакопочережнимим.

14.4.1. Поняття абсолютної та умовної збіжності ряду.

<u>Означення 4</u>. Знакозмінний ряд називають абсолютно збіжним, якщо збігається ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду.

<u>Означення 5.</u> Знакозмінний ряд називається умовно збіжним, якщо цей ряд збігається, а ряд із

абсолютних величин його членів розбігається.

Для виявлення умовної збіжності знакопочережного ряду використовують наступну ознаку.

<u>Ознака Лейбніца.</u> *Якщо абсолютні величини членів знакопочережного ряду монотонно спадають і границя абсолютної величини загальногочлена ряду дорівнює нулю при $n \to \infty$, то ряд збігається, причому його сума S не перевищує першого члена ряду.*

Цю ознаку коротко можна записати так

$$\left(\begin{array}{c} a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots, \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ - збіжний;} \\ S \le a_1 \end{array}\right)$$

Приклад 9. Дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n^2}; \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Розв'язання. Ряд $a)$ - знакозмінний, оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots.$$

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, складений з абсолютних величин членів ряду. Цей ряд є узагальненим гармонічним рядом з показником степеня P=2>1, тому він збіжний. Згідно означенню це означає, що ряд а) абсолютно збіжний.

Ряд $b)$ - знакопочережний. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, складений з абсолютних величин його членів розбігається, оскільки це гармонічний ряд. Це означає, що ряд $b)$ абсолютно не збігається.

Оскільки обидві умови ознаки Лейбниця для ряду $b)$ виконуються: $1) \frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots;$ $\quad 2) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$ то цей ряд збігається умовно.

14.4.2. Властивості збіжних рядів.

На абсолютно збіжні ряди переносяться усі властивості сум скінченної кількості доданків. Особливе значення має властивість перестановки: сума абсолютно збіжного знакозміннного ряду не змінюється від будь-якої перестановки скінченної множини його членів.

В умовно збіжному ряді не можна переставляти члени, оскільки у випадку їх перестановки може змінюватись сума ряду або утвориться розбіжний ряд.

14.4.3. Оцінка залишків.

Якщо знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно збіжний, то абсолютна величина його залишку $|r_n|$ не перевищує n-го залишку ряду, який складений з абсолютних величин членів заданого ряду.

Якщо знакопочережний ряд збігається за ознакою Лейбніца, то його n-й залишок r_n за абсолютною величиною не перевищує модуля першого з відкинутих членів, тобто

$$|r_n| \le |u_{n+1}|.$$

Приклад 10. Оцінити третій залишок ряду

$$\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n} + \ldots$$

Розв'язання. Заданий ряд - знакозмінний, оскільки sin1>0, sin2>0, sin3>0, sin4<0, sin5<0, sin6<0 sin7>0,… Для дослідження абсолютної збіжності заданого ряду розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{2^n}\right|$. Оскільки $\left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ геометричної прогресії збігається, то заданий знакозмінний ряд збігається абсолютно. Позначимо залишки: r_3 - заданого ряду; $\widehat{r}_3$ - ряду, складеного з абсолютних величин; $\widehat{\widehat{r}}_3$ - ряду геометричної прогресії. Тоді маємо:

$$|r_3| < \widehat{r}_3 \le \widehat{\widehat{r}}_3 \Rightarrow |r_3| \le \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Приклад 11. Обчислити з точністю до 0,01 суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}.$$

Розв'язання. Заданий знакопочережний ряд збігається за ознакою Лейбніца, тому

$$|r_n| \le |u_{n+1}| \le 0{,}01 \quad \text{або} \quad |r_n| \le \frac{1}{(2n+1)!} \le 0{,}01.$$

Остання нерівність виконується починаючи з n=2, оскільки $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$. Таким чином,

$$S \approx S_2 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow S \approx 0{,}83.$$

14.5 ВПРАВИ

1. Знайти загальний член ряду:

$a)\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots,$ $\qquad b)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots,$

$c)\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots,$ $\qquad d)\ \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \ldots,$

$e)\ \frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \ldots$

2. Записати перших 5 членів ряду та перевірити необхідну умову збіжності ряду:

$a)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2};$ $\qquad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1};$ $\qquad c)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}};$

$d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n;$ $\qquad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}};$ $\qquad f)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}.$

3.Дослідити збіжність ряду з використанням ознак порівняння: $a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$; $c)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n}$; $d)\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 7^n}$.

4.Дослідити збіжність ряду за ознакою Даламбера:

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$; $c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n}{2^n(3n+1)}$;

$d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$; $e)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{e^n}$; $f)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(3n+5)}$.

5.Дослідити збіжність ряду з використанням радикальної ознаки Коші:

$a)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+3}{3n-1}\right)^n$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{3n+1}\right)^{2n}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n$;

$d)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n^2+5}\right)^n$; $e)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{15n+1}\right)^n$.

6.Дослідити збіжність ряду за інтегральною ознакою Коші:

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$; $b)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; $c)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-3)^3}}$; $d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$;

$e)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n^2+1}$; $f)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$; $g)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

7.Дослідити збіжність ряду:

$a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$;

$d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$; $e)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; $f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$;

$g)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

8.Оцінити третій залишок рядів::

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n-5}$;

$b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n-1)^3}$;

$c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+n^2}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5n+4}$;

$d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-3)^2}$.

9. а)Дослідити збіжність суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{5^n}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-n}{5^n}$.

b) Дослідити збіжність різниці рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}.$$

10. Дослідити збіжність ряду

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\cdot\frac{n}{3^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{\ln 5^n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{n^2}}{n!}$.

Розділ 15 Функціональні та степеневі ряди

15.1. Функціональні ряди.

<u>Означення 1.</u> Ряд називається функціональним, якщо його члени є функціями, наприклад x, тобто ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

Наприклад, ряд

$$\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t+\ldots\frac{1}{n}\cos nt+\ldots$$

є фунціональним, причому його члени є функціями t, визначеними для усіх $t\in(-\infty;\infty)$.

Якщо x_0 є фіксованим числом, то при $x=x_0$ ряд (1) перетворюється в числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$, який може бути збіжним або розбіжним.

Якщо числовий ряд збігається, то точку x_0 називають точкою збіжності функціонального ряду (1). Якщо числовий ряд розбіжний, то x_0 називають точкою розбіжності функціонального ряду.

Означення 2. Сукупність усіх точок збіжності функціонального ряду називають областю його збіжності.

В області збіжності існує границя часткових сум функціонального ряду

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Ряд $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$ називають залишком ряду.

В області збіжності функціонального ряду

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x), \quad \text{де} \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Означення 3. *Функціональний ряд (1) називається правильно збіжним або мажорованим в проміжку* $[a,b]$, *якщо існує такий числовий додатний збіжний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *що абсолютні величини членів функціонального ряду для довільного* $x \in [a,b]$ *задовольняють співвідношенням.*

$$|u_n(x)| \le a_n, \qquad n = 1,2.3,\ldots$$

При цьому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *мажоруючим рядом.* для функціонального ряду (1).

Приклад 1. Визначити область збіжності ряду

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \ldots + \frac{1}{x^{2n}} + \ldots$$

Розв'язання. Члени ряду утворюють ряд геометричної прогресії з першим членом $\dfrac{1}{x^2}$ і знаменником $q = \dfrac{1}{x^2}$. Відомо, що такий ряд збігається для тих значень x, при яких $\dfrac{1}{x^2} < 1$.

Таким чином, заданий функціональний ряд збігається для усіх x, при яких $|x| > 1$. Отже, областю збіжності заданого ряду буде об'єднання $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

Розв'язання. Заданий ряд є правильно збіжним функціональним рядом для $x \in (-\infty,\infty)$, оскільки для усіх x

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \qquad n = 1,2,3,\ldots,$$

а додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ є узагальненим гармонічним рядом із показником степеня p=2>1

Із означення 3 випливає, що правильно збіжний в $(-\infty,\infty)$ функціональний ряд абсолютно збігається в усіх точках цього проміжку.

Властивості правильно збіжних функціональних рядів.

1. *Якщо члени правильно збіжного в проміжку* (a,b) *функціонального ряду неперервні, тоді його сума також неперервна функція в* (a,b).

Наслідок. *Якщо сума функціонального ряду* в деякому проміжку (c,d) *розривна*, то ряд в цьому проміжку буде *немажорованим.*

Зауваження 1. Існують функціональні ряди, які не мажоровані в проміжку, але збігаються в цьому проміжку до неперервної функції (наприклад, рівномірно збіжний в проміжку ряд неперервних функцій).

2. Якщо члени правильно збіжного в проміжку (a,b) функціонального ряду

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

неперервні в цьому проміжку, то ряд можна почленно *інтегрувати,* причому для довільних $x_1, x_2 \in (a,b)$ має місце рівність

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_1}^{x_2} u_n(x)dx \qquad (2)$$

3.Нехай *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *- правильно збіжний в* (a,b) і його члени мають неперервні похідні $u'_n(x)$ $(n = 1,2,3,...)$. Тоді для усіх $x \in (a,b)$ має місце рівність

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \qquad (3)$$

тобто *можна диференціювати під знаком суми.*

4.*Якщо правильно збіжний в* (a,b) *функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *помножити на обмежену в* (a,b) *функцію* $\varphi(x)$, то одержаний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x)u_n(x)$ *буде правильно збіжним* в (a,b).

Різновиди збіжності функціональних рядів

<u>Означення 4.</u> Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається до суми S(x) рівномірно в $[a,b]$, якщо

$$\max_{a\le x\le b}|S(x) - S_n(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Функціональний ряд збігається до суми $S(x)$ в середньому на проміжку $[a;b]$, якщо

$$\int_a^b |S(x) - S_n(x)|dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Функціональний ряд збігається до суми $S(x)$ на $[a;b]$ в середньому квадратичному, якщо

$$\sqrt{\int_a^b |S(x) - S_n(x)|^2 dx} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

<u>Зауваження 2.</u> Якщо фунціональний ряд збігається рівномірно на $[a,b]$, то він збігається і в середньому квадратичному, причому до однакової суми S(x).

<u>Ознака Вейєрштрасса</u>. Для рівномірної збіжності функціонального ряду достатньо його правильної збіжності.

15.2. Степеневі ряди.

<u>Означення 5.</u> Степеневим рядом називають ряд виду

$$\boxed{a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + ... + a_n(x-c)^n + ...,} \qquad (4)$$

де c та коефіцієнти ряду $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ - сталі.

При c=0 степеневий ряд має вигляд

$$\boxed{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...}. \qquad (5)$$

Ряд (4) називають рядом за степенями (x-c), а ряд (5) називають рядом за степенями x.

15.2.1. Область збіжності та властивості степеневих рядів

<u>Теорема Абеля</u>. *Якщо степеневий ряд (5):*

1)*<u>збігається при</u>* $x = x_0$, то він *<u>абсолютно збігається</u>* *<u>для будь-якого</u>* x*<u>, що задовольняє нерівності</u>* $|x| < |x_0|$;

2) *якщо ряд (5) розбігається при* $x = x_1$, *то він розбігається при* x *таких, що* $|x| > |x_1|$.

Означення 6. Додатне число R таке, що при $|x| < R$ степеневий ряд збігається, а при $|x| > R$ ряд розбігається, називають радіусом збіжності степеневого ряду.

Інтервал (-R;R) називають інтервалом збіжності цього ряду.

В кожній точці інтервалу збіжності степеневий ряд збігається абсолютно.

Областю збіжності ряду (5) є інтервал (-R;R), до якого, в залежності від конкретних випадків, можуть бути приєднані точки x=-R та x=R.

У випадку повного степеневого ряду (містить усі степені x) радіус збіжності ряду (5) можна знайти за формулою

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}} \qquad (6)$$

або за формулою

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}}. \qquad (7)$$

Якщо степеневий ряд не повний, тоді застосовують таку методику дослідження функціональних рядів: будують ряд з абсолютних величин та застосовують ознаку Даламбера.

Степеневий ряд вигляду (4) заміною $t = x - c$ зводиться до степеневого ряду за степенями t, знаходиться його радіус збіжності, а потім повертаються до змінної x і одержують: $-R < x - c < R \Rightarrow c - R < x < a + R$.

Приклад 3. Знайти інтервал збіжності ряду $a)$ та область збіжності ряду $b)$, якщо

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{5^n + 7^n}; \qquad b)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n}}{(n+1)2^{2n}}.$$

Розв'язання. Степеневий ряд $a)$ повний, тому його радіус збіжності можна знайти за формулою (6):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 7^{n+1}\left(\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} + 1\right)}{3^{n+1} \cdot 7^n\left(\left(\frac{5}{7}\right)^{n} + 1\right)} = \frac{7}{3}.$$

Інтервалом збіжності ряду $a)$ буде $\left(-\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Степеневий ряд $b)$ не повний, тому до ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^{3n}}{(n+1)2^{2n}}\right|$ застосовуємо ознаку Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|x^{3(n+1)}\right|\cdot(n+1)2^n}{\left|x^{3n}\right|\cdot(n+2)2^{2(n+1)}} = \frac{|x^3|}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \frac{|x^3|}{4}.$$

При $\frac{|x|^3}{4} < 1$ ряд збігається. Звідси випливає, що $R = \sqrt[3]{4}$, а інтервалом збіжності ряду буде $\left(-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}\right)$..

На кінцях інтервалу збіжності: при $x = -\sqrt[3]{4}$ ряд приймає вигляд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ і як гармонічний ряд, розбігається; при $x = \sqrt[3]{4}$ ряд приймає вигляд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ і за ознакою

Лейбниця збігається умовно.

Отже, областю збіжності ряду $b)$ буде $\left(-\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{4}\right]$, причому на правому кінці проміжку ряд збігається умовно.

Властивості степеневих рядів:

1. Степеневий ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

на інтервалі його збіжності $(-R;R)$ можна почленно диференціювати та інтегрувати, при цьому мають місце рівності:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

$$\int f(x)dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\ldots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots.$$

2.Якщо степеневий ряд має інтервал збіжності $(-R;R)$, а r -довільне додатне число, менше ніж R, то цей степеневий ряд правильно збіжний на $[-r;r]$.

3.Сума степеневого ряду є неперервною функцією в кожній точці його інтервалу збіжності.

4.Степеневі ряди всередині перетину їх інтервалів збіжності можна: почленно складати, множити за правилом множення многочленів, ділити ряд на ряд.

15.2.2.Розклад функцій в степеневі ряди та його застосування.

Щоб розкласти на інтервалі (c-R;c+R) нескінченно диференційовану функцію f(x) в ряд Тейлора

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\ldots \quad (8)$$

необхідно і достатньо, щоб на цьому інтервалі виконувалась умова

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}=0, \quad \text{де} \quad (c-R<Q<c+R) \quad (9)$$

Щоб розкласти на інтервалі (-R;R) нескінченно диференційовану функцію f(x) в ряд Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (10)$$

необхідно і достатньо виконання умови

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!}\cdot x^n=0, \quad \text{де } -R<Q<R \quad (11).$$

▼ **Зауваження 3.**Для використання умови (11) доцільно враховувати, що для довільного фіксованого x має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0 \quad (12)$$

В наближених обчисленнях найчастіше використовують наступні розклади, в яких змінна x замінена змінною u:

$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{21}+\frac{u^3}{3!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots; \qquad u\in(-\infty;\infty)\;; \quad (13)$$

$$(1+u)^m=1+mu+\frac{m(m-1)}{2!}u^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-n-1)}{n!}u^n+\ldots;|u|<1 \quad (14)$$

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\ldots+(-1)^nu^n+\ldots; \qquad |u|<1; \quad (15)$$

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}+\ldots; \qquad u\in(-1;1) \quad (16)$$

$$arctgu=u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{2n+1}+\ldots; \qquad |u|<1 \quad (17)$$

$$\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots; \qquad u\in(-\infty;\infty) \quad (18)$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \ldots; \qquad u \in (-\infty; \infty) \quad (19)$$

Приклад 4. Розкласти в степеневий ряд функцію e^{-x^2}.

Розв'язання. Нехай $-x^2 = u$, тоді $e^{-x^2} = e^u$ і, використовуючи (13), одержимо розклад

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots, \qquad (20)$$

який має місце для усіх $x \in (-\infty; \infty)$.

Розвинення функції в ряд Маклорена використовується для обчислення наближених значень функції та інтегралів.

Приклад 5. Обчислити $\ln(1,6)$, використовуючи 3 члена розкладу в степеневий ряд.

Розв'язання. Згідно рівності (16) при $u = 0,6 \in (-1;1)$ маємо:

$$\ln 1,6 = 0,6 - \frac{(0,6)^2}{2} + \frac{(0,6)^3}{3} - \frac{(0,6)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(0,6)^n}{n} + \ldots$$

Обмежуючись трьома членами розкладу згідно з умовою, отримаємо:

$$\ln 1,6 \approx 0,6 - \frac{(0,6)^2}{2} + \frac{(0,6)^3}{3} = 0,6(1 - 0,3 + 0,12) = 0,492.$$

Абсолютна величина похибки буде

$$|r_3| \le \frac{(0,6)^4}{4} = \frac{0,1296}{4} = 0,0324.$$

Приклад 6. Обчислити $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. В данному випадку первісну для

функції e^{-x^2} не можна виразити через елементарні функції. Тому розкладемо підінтегральну функцію в степеневий ряд за формулою (20)

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Цей ряд збігається для $x \in (-\infty; \infty)$, тому його можна почленно інтегрувати по довільному проміжку і, зокрема, на проміжку $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. Одержимо:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{1/3} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 27} + \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 3^7} + \ldots$$

Отже, шуканий інтеграл дорівнює сумі числового знакопочережного ряду. Окільки третій член цього ряду $\frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0,001$, а $\frac{1}{3 \cdot 27} = \frac{1}{81} > 0,001$, то з точністю до 0,001 згідно з ознакою Лейбниця отримаємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = 0,3333 - 0,0123 = 0,321.$$

15.3 ВПРАВИ

1. Знайти область збіжності ряду:

$a) \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$; $\quad b) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$; $\quad c) \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$;

$d) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; $\quad e) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; $\quad f) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$.

2.Знайти суму степеневого ряду, використовуючи почленне диференціювання або інтегрування:

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

$d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; $e)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$; $f)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$.

3.Розкласти функцію в степеневий ряд за степенями x та знайти інтервал збіжності розкладу:

$a)f(x)=xe^{-x^2}$; $b)f(x)=e^{x^2}$; $c)f(x)=\cos 2x$;

$d)f(x)=\cos^2 x$; e) $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$; $f)f(x)=\sqrt{1+\frac{x}{2}}$.

4.Обмежуючись двома членами розкладу функції в ряд Маклорена, знайти наближене значення та оцінити похибку:

$a)\cos 9°$; $b)\ln 1{,}1$; $e)e^{0,1}$;

$d)arctg\,0{,}2$; $e)\sqrt[4]{82}$; $f)\sqrt[5]{40}$.

5.Обчислити наближено інтеграл, взявши вказану кількість членів розкладу в ряд підінтегральної функції, та вказати похибку:

$a)\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx$ (3 члени); $b)\int_{0,1}^{\pi/4}\frac{\cos x}{x}dx$ (3 члени);

$c)\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (2 члени); $d)\int_{0,1}^{1}\frac{dx}{x}$ (6 членів);

$e)\int_0^{\sqrt{3}/2} x^3 arctgx\,dx$ (2члени).

Розділ 16 Гармонічний аналіз

16.1.Гармоніка та ортогональні системи функцій.

16.1.1. Різновиди та властивості гармонік.

Означення1. Дійсною гармонікою або просто гармонікою називають функції виду:

$$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi), \qquad (1)$$

де $A\geq 0, \omega, \varphi-$ деякі сталі. Число A називається амплітудою, ω- частотою, $\varphi-$початковою фазою гармоніки;

$$f(x)=a\cos\omega x+b\sin\omega x, \qquad (2)$$

де $a=A\sin\varphi$, $b=A\cos\varphi$;

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x), \qquad (3)$$

де n – ціле число.

Від гармоніки вигляду (2) можна перейти до вигляду (1), якщо прийняти

$$A=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \varphi=arctg\frac{a}{b}. \qquad (4)$$

Означення 2. Уявною гармонікою називають комплекснозначну функцію вигляду

$$\gamma(x)=Ce^{i\omega x}=C(\cos\omega x+i\sin\omega x), \qquad (5)$$

де $\omega-$деяка дійсна, $C-$комплексна стала. Число C називають амплітудою, $\omega-$частотою уявної гармоніки.

Дійсну гармоніку з частотою ω можна представити у вигляді суми двох уявних гармонік з частотами ω та $-\omega$ за формулою:

$$a\cos\omega x + b\sin\omega x = \frac{a-ib}{2}e^{i\omega x} + \frac{a+ib}{2}e^{-i\omega x} \qquad (6)$$

1) *Усі гармоніки періодичні функції з періодом*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (7)$$

2) *Сума декількох гармонік однакової частоти є гармонікою такої самої частоти, але із зміненими амплітудою та фазою.*

3) *Сума декількох гармонік з різними частотами, які знаходяться в раціональному відношенні, буде періодичною функцією. Якщо складаються гармоніки з частотами $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots n\omega$, то період функції їх суми дорівнює*

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

4) *Графік суми декількох гармонік суттєво відрізняється від графіка гармонік, що складаються.*

16.1.2. Ортогональні системи функцій.

<u>Означення 3.</u> Послідовність функцій

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \qquad (8)$$

називають ортогональною системою функцій на проміжку $[a,b]$, якщо будь-які дві функції цієї послідовності ортогональні на $[a,b]$, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k.$$

Дві комплекснозначні функції f(x) та g(x) називають

<u>*ортогональними*</u> на $[a,b]$, якщо

$$\int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx = 0.$$

Якщо кожну функцію ортогональної на $[a,b]$ послідовності функцій поділити на її норму, то одержимо <u>*ортонормовануну систему функцій.*</u>

Наприклад, якщо послідовність (8) ортогональна на $[a,b]$, то послідовність функцій

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

буде ортонормованою, оскільки

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{(\varphi_n, \varphi_n)} = \left[\int_a^b \varphi_n^2(x)dx\right]^{1/2}, \qquad \|\psi_n\| = 1.$$

<u>Означення 4</u>. Ортогональну на $[a,b]$ систему функцій називають повною, якщо не існує відмінної від нуля неперервної на $[a,b]$ функції ортогональної для усіх функцій цієї системи.

Зауваження 1. *Система функцій*

$$\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}, \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\cos\omega x, \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\sin\omega x, \ldots, \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\cos n\omega x, \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\sin n\omega x, \ldots \qquad (9)$$

ортогональна і повна на проміжку $[\alpha, \alpha+2\lambda]$,

де $\lambda = \dfrac{\pi}{\omega}$, $\alpha -$ довільне число.

Система функцій

$$1, e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}, e^{i2\omega x}, e^{-i2\omega x}, \ldots, e^{in\omega x}, e^{-in\omega x}, \ldots \qquad (10)$$

повна ортогональна на $[\alpha, \alpha+2\lambda]$, *де* $\lambda = \dfrac{\pi}{\omega}$.

Нехай скалярний добуток функцій f(x) та g(x) визначений рівністю

$$(f,g)_\rho = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, \qquad (11)$$

де $\rho(x)$ *визначена на* $[a,b]$ *невід'ємна функція, яку називають ваговою функцією.*

❒ **Означення 5.** *Функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *називають ортогональними на* $[a,b]$ *з вагою* $\rho(x)$, *якщо*

$$(f,g)_\rho = 0.$$

▼ **Зауваження 2.** Многочлени Чебишова $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$, $n = 0,1,2,...$ утворюють повну ортонормовану систему на проміжку $[-1,1]$ з вагою

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Многочлени Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}, n = 0,1,2,...$$

утворюють на $[-1,1]$ повну ортогональну систему функцій з вагою $\rho(x) \equiv 1$.

Многочлен Ерміта $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \dfrac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n}, n = 0,1,2,...$

утворюють повну ортогональну систему на $(-\infty,\infty)$ з вагою $\rho(x) = e^{-x^2}$.

▼ **Зауваження 3.** Ортогональні системи функцій можуть міститти нескінченну кількість елементів. Тому множину функцій, на якій визначений скалярний добуток, називають нескінченно-вимірним або гільбертовим простором. Теорія гільбертових просторів широко застосовується в різних

галузях математики, фізики та сучасної техніки.

16.1.3 ВПРАВИ

1.Знайти амплітуду та початкову фазу гармонік:
$a)\, f(x) = 3\cos 2x + 4\sin 2x;$ $b)\, f(x) = \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x;$
$c)\, f(x) = \sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x;$ $d)\, f(x) = 3\cos 5x + \sqrt{7}\sin 5x.$

2.Перетворити гармоніку завдання 1 у вигляді суми уявних гармонік.

3.Перевірити, чи буде квадрат амплітуди дійсної гармоніки дорівнювати сумі квадратів модулів амплітуд уявних гармонік.

4.Довести, що для скалярного добутку функцій використовується нерівність Буняковського:

$$|(f,g)| \le (f,f)\cdot(g,g).$$

5.Довести, що для функцій виконується нерівність Шварца

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|.$$

16.2.Ряди Фур'є.
16.2.1.Розклад функцій в ряд Фур'є.

Функція $f(x)$, *яка задовольняє умовам Діріхле:*

1)неперервна або має скінченну кількість точок розриву першого роду на $[a,b]$;

2)має в $[a,b]$ *скінченну кількість екстремумів, можна розвинути в ряд Фур'є* за будь-якою ортонормованою на $[a,b]$ системою функцій $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), ..., \psi_n(x), ...$, тобто представити у вигляді

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(x) \qquad (12)$$

Сума ряду правої частини цієї рівності дорівнює:

1) $f(x)$ в точках неперервності функції $f(x)$;

2) $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ в точках розриву $f(x)$.

Коефіцієнти розкладу (12) називають коефіцієнтами Фур'є функції і знаходять за формулами:

$$c_k=(f,\psi_k)=\int_a^b f(x)\psi_k(x)dx, \qquad k=0,1,3,... \quad (13)$$

Ці коефіцієнти задовольняють нерівність Бесселя

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k{}^2 \le (f,f) \qquad (14)$$

і забезпечують мінімальне відхилення за нормою часткової суми ряду $S_n(x)$ від функції $f(x)$, тобто

$$\|f(x)-S_n(x)\|=\min \qquad (15)$$

У випадку повної ортогональної системи функцій співвідношення (14) стає рівністю

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k{}^2=(f,f)=\|f\|^2, \qquad (16)$$

яку називають рівністю Парсеваля.

У випадку ортогональної на $[-\lambda,\lambda]$ тригонометричної системи функцій ряд Фур'є (12) приймає вид:

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x),} \qquad (17)$$

коефіцієнти Фур'є знаходять за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\cos n\omega x dx, && n=0,1,2,...\\ b_n&=\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\sin n\omega x dx, && n=1,2,3,...;\lambda=\frac{\pi}{\omega}.\end{aligned}} \qquad (18)$$

▼ **Зауваження 4.** Гармоніки правої частини рівності (17) мають загальний період $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\lambda$, тому їх сума також має період $T=2\lambda$.

Якщо f(x) задана лише на скінченному проміжку $[-\lambda;\lambda]$, то (17) буде розкладом періодичного продовження f(x) за межі цього проміжку.

Формулу (17) називають розкладом (розвиненням) функції f(x) на тригонометричні гармоніки в проміжку $[-\lambda;\lambda]$

Якщо ***функція f(x) парна*** на $[-\lambda;\lambda]$, то :

$$\boxed{b_n=0, n=1,2,..., \qquad a_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos n\omega x dx} \quad (n=0,1,..)$$

і розклад (17) приймає вид

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega x} \qquad (19)$$

Для ***непарної функції*** $f(x)$:

$$\boxed{a_n=0, n=1,2,..., \qquad b_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\sin n\omega x dx} \quad (n=1,2,3,..)$$

і розклад (17) приймає вид

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\omega x} \qquad (20)$$

Якщо функція f(x) задана тільки на $[0,\lambda]$ і задовольняє умовам Діріхле, то її можна продовжити на $[-\lambda,0]$ парним чи непарним чином і одержати її розклад в ряд за косинусами або за синусами відповідно.

✦ **Приклад 1.** Розкласти на тригонометричні гармоніки вказану функцію f(x) в заданому проміжку

$a)\, f(x)=x-1; \quad [1;3]; \qquad b)=f(x)=x, \quad [0,\pi]$

Розв'язання. $a)$ Функція $f(x)=x-1$ неперервна в (1;3) і має розриви при $x_1=1$ та $x_2=3$. Продовжимо f(x) періодично на всю числову вісь з періодом T=3-1=2. Тоді із рівності $T=2\lambda=2\Rightarrow\lambda=1,\quad \omega=\dfrac{\pi}{\lambda}=\pi.$

За формулами (18) знайдемо коефіцієнти Фур'є f(x):

$$a_0=\int_{-1}^{1}(x-1)dx=\left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_{-1}^{1}=0-\frac{4}{2}=-2;$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}(x-1)\cos n\pi x dx=\left[\begin{array}{ll} u=x-1 & \Rightarrow du=dx\\ dv=\cos n\pi x dx & \Rightarrow v=\dfrac{1}{n\pi}\sin n\pi x\end{array}\right]=$$

$$=\left.\frac{x-1}{n\pi}\sin n\pi x\right|_{-1}^{1}-\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\sin n\pi x dx=0-\frac{2}{n\pi}\sin n\pi+\left.\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\right|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{(n\pi)^2}(\cos n\pi-\cos n\pi)=0,\qquad n=1,2,...$$

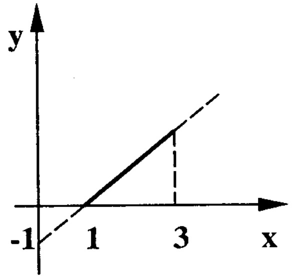
$$b_n=\int_{-1}^{1}(x-1)\sin n\pi x dx=\left[\begin{array}{ll} u=x-1 & \Rightarrow du=dx\\ dv=\sin n\pi x & \Rightarrow v=\dfrac{-1}{n\pi}\cos n\pi x\end{array}\right]=$$

$$=\left.(x-1)\frac{(-1)\cos n\pi x}{n\pi}\right|_{-1}^{1}+\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi x dx=0-\frac{2\cos n\pi x}{n\pi}+\left.\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\right|_{-1}^{1}=$$

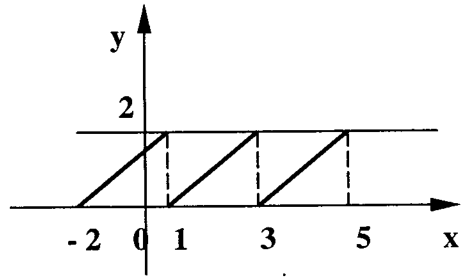
$$=-2(-1)^n\frac{1}{n\pi}+\frac{(\sin n\pi+\sin n\pi)}{(n\pi)^2}=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}.$$

Підставимо ці коефіцієнти у рівність (17) і одержимо

$$f(x)=x-1=-1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x.$$



Мал.1



Мал.2

Відзначимо, що одержаний ряд збігається і за межами проміжку (1;3). Там його сума дорівнює не заданій функції (вона зображена на мал. 1 пунктиром), а періодичній функції, яка зображена на мал.2. На кінцях проміжку сумою ряду буде $\dfrac{0+2}{2}=1.$

$b)$ Функція f(x)=x задана на $[0;\pi]$. В залежності від способу її продовження на $[-\pi;0]$ цю функцію можна розкласти в ряд Фур'є або за косинусами або за синусами кратних дуг.

Продовжуючи f(x) на $[-\pi;0]$ парним чином, одержимо:

$f(x)=|x|$ на $[-\pi,\pi],\quad \lambda=\pi,\quad \omega=\dfrac{\pi}{\lambda}=1;$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi;\qquad b_n=0,\qquad n=1,2,...$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\begin{cases}0, & n=2k;\\ \dfrac{-4}{(\pi n)^2}, & n=2k-1;\end{cases}$$

За формулою (19) отримаємо розклад заданої функції лише за косинусами на $[0,\pi]$:

$$f(x)=x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Продовжуючи задану функцію на $[-\pi,0]$ непарним чином, одержимо: $a_n=0,\quad n=0,1,2,\ldots;$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{\pi},\qquad n=1,2,\ldots$$

Тому, за формулою (20) отримаємо розклад:

$$f(x)=x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Розклад функції в ряд за уявними гармоніками на проміжку $[-\lambda,\lambda]$ має вигляд:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega x}, \qquad (21)$$

коефіцієнти якого знаходяться за формулою

$$c_n=\frac{1}{2\lambda}\int f(x)e^{-in\omega x}dx \qquad (22)$$

▼**Зауваження 5.** При знаходженні коефіцієнтів c_n часто використовують формули

$$e^{\pm i\omega n}=\cos\omega n\pm i\sin\omega n;\qquad e^{\pm i\pi n}=(-1)^n$$

✦ **Приклад 2.** Розкласти на уявні гармоніки в проміжку $[-1;1]$ функцію $f(x)=e^{-|x|}$.

Розв'язання. Маємо: $\lambda=1,\quad \omega=\pi.$ За формулою (22) знаходимо

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-|x|}e^{-in\pi x}dx=\frac{1-(-1)\ e^{-1}}{1+\pi^2n^2}\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

За формулою (21) одержимо шуканий розклад функції

на $[-1;1]$: $\qquad f(x)=e^{-|x|}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-1}}{1+\pi^2n^2}e^{in\pi x}.$

16.2.2 ВПРАВИ

1. Знайти коефіцієнти Фур'є функції $f(x)=e^x$ відносно:

a) многочлеів Лежандра $P_0(x),P_1(x),P_2(x)$ на $[-1;1]$;

b) многочленів Чебишова $T_0(x),T_1(x),T_2(x)$ на $[-1;1]$;

c) системи функцій 1, cosx, sinx на $[-\pi,\pi]$.

2. Знайти найменшу відстань до функції $f(x)=e^x$ від функції:

$a)\gamma_0P_0(x)+\gamma_1P_1(x)+\gamma_2P_2(x)$ на $[-1;1]$;

$b)\gamma_0+\gamma_1\cos x+\gamma_2\sin x$ на $[-1;1]$.

3. Розкласти на гармоніки у вказаних проміжках функції:

$a)\, f(x)=|x|,\quad [-1;1];\qquad b)\, f(x)=2x,\quad [0;1];$

$c)\, f(x)=e^x,\quad [-1;1];\qquad d)\, f(x)=10-x,\quad [5;15];$

$e)\, f(x)=x^2,\quad [0,2\pi];\qquad f)\, f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1;\\ 2-x, & 1<x<2.\end{cases}$

4. Вказані функції розкласти на гармоніки на $[-\pi,\pi]$, визначити суму ряду в точках розриву і на кінцях проміжку, побудувати графік заданої функції та суми відповідного ряду (також і зовні проміжку $(-\pi,\pi)$):

$a)\, f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0,\\ -1, & 0<x<\pi.\end{cases}\qquad b)\, f(x)=\begin{cases}2, & -\pi<x\le 0;\\ -2, & 0<x<\pi.\end{cases}$

$c) f(x)=\begin{cases}3, & -\pi<x\le 0;\\ -3, & 0<x<\pi.\end{cases}$ d-f) $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x\le 0;\\ bx, & 0<x<\pi.\end{cases}$

Розглянути випадки:

d) $a=b=1;$ e) $a=0, b=1;$ f) $a=1, b=0.$

5. Вказані нижче функції розкласти на $[0,\pi]$ в неповні ряди Фур'є за синусами та косинусами. Намалювати графіки функцій та графіки сум відповідних рядів в їх області існування:

$a) f(x)=x;$ $b) f(x)=x^2;$ $c) f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$

6.Розкласти на $[0,\pi]$ в ряд за синусами функцію $f(x)=\frac{\pi}{4}$. Використати цей розклад для знаходження сум

рядів: $a) 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots;$ $b) 1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\ldots;$

$c) 1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots$

7.Розкласти функцію y=sinx на $[0,\pi]$ в ряд за косинусами.

8.Перевірити, що система функцій

$$1, e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}, e^{2i\omega x}, e^{-2i\omega x}, \ldots, e^{in\omega x}, e^{-in\omega x}, \ldots$$

при $\omega=\frac{\pi}{\lambda}$ ортогональна на $[-\lambda,\lambda]$.

9.Визначити формули знаходження коефіцієнтів розкладу на уявні гармоніки для парних та непарних функцій.

10.Розкласти за уявними гармоніками на проміжках $a)[-1;1]$, $b)\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ функції y=sinx, y=cosx, y=$\frac{\pi}{4}$.

16.3. Перетворення Фур'є.

Якщо функція $f(x)$ задана на $(-\infty;\infty)$, задовольняє умовам Діріхле на кожному скінченному проміжку і умові

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty,$$

то в кожній точці x неперервності функції мають місце рівності:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega \qquad (23)$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)\cdot e^{-i\omega x}dx \qquad (24)$$

Праву частину рівності (24) називають перетворенням Фур'є або спектральною щільністю функції $f(x)$ і часто позначають так: $F(f)$ або $S(\omega)$.

Праву частину рівності (23) називають оберненим перетворенням Фур'є або розкладом функції $f(x)$ на уявні гармоніки з довільною частотою ω і позначають $F^{-1}(f)$ або $F^{-1}(S)$.

Оскільки $f(x)=F^{-1}(S(\omega))$, то можна показати, що $f(x)$ є оберненим перетворенням Фур'є своєї спектральної щільності.

У тригонометричній формі розклад $f(x)$ на гармоніки має вигляд

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega, \qquad (25)$$

де $$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx, \quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx \qquad (26)$$

Якщо функція $f(x)-$ парна, то (25) приймає вигляд

$$f(x)=\int_0^\infty A_k(\omega)\cos\omega x d\omega, \qquad (27)$$

де $$A_k(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx. \qquad (28)$$

Якщо функція $f(x)-$ непарна, то

$$f(x)=\int_0^\infty B_c(\omega)\sin\omega x d\omega, \qquad (29)$$

де $$B_c(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \qquad (30)$$

<u>Означення 6.</u> Функцію $A_k(\omega)$ називають косинус – перетворенннням Фур'є, а функцію $B_c(\omega)$ називають синус – перетворенням Фур'є функції $f(x)$.

Зауваження 5. В деяких підручниках та довідниках коефіцієнти в перетворенні Фур'є та в оберненому перетворенні Фур'є беруть рівними, тобто використовують формули:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \qquad (23')$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx, \qquad (24')$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty A_k(\omega)\cos\omega x d\omega, \qquad (27')$$

$$A_k(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int f(x)\cos\omega x dx, \qquad (28')$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int B_c(\infty)\sin\omega x d\omega, \qquad (29')$$

$$B_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int f(x)\sin\omega x dx. \qquad (30')$$

Отже, треба приділяти увагу визначенню коефіцієнтів перетворення Фур'є та оберненого перетворення Фур'є у літературі, яку використовуєте.

Зауваження 6. В точках розриву функції $f(x)$ в лівих частинах рівностей $(23),(23'),(26),(26'),(27),(27'),(29)$, та $(29')$ замість функції $f(x)$ треба писати середнє арифметичне її значень в точці розриву $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Зауваження 7. Якщо функція $f(x)$ визначена на $[0,\infty)$, то її можна довизначити на $(-\infty,0]$ парним або непарним чином і одержати представлення у вигляді $(27),(27')$ або $(29),(29')$ відповідно.

Зауваження 8. При знаходженні коефіцієнтів c_n часто використовують формули:

$$e^{\pm i\omega\cdot n}=\cos\omega n\pm i\sin\omega n,$$

$$e^{\pm i\pi\cdot n}=(-1)^n.$$

В загальному випадку

$$|c_n|=\sqrt{(\operatorname{Re}c_n)^2+(\operatorname{Im}c_n)^2}\ .$$

У випадку дійсних c_n

$$|c_n|=\operatorname{Re}c_n;$$

Якщо $\operatorname{Re}c_n=0$, тоді

$$|c_n|=\operatorname{Im}c_n.$$

Приклад 3. Знайти представлення функції $f(x)=e^{-ax}(a>0, x\geq 0)$, використовуючи її косинус та синус перетворення Фур'є.

Розв'язання. Функція задана і неперервна на $[0,\infty)$, задовольняє усім умовам Діріхле. За формулою (28')

$$A_K(\infty)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\omega^2}.$$

За формулою $(30')$ знайдемо її синус-перетворення Фур'є:

$$B_c(\infty)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Використовуючи формули $(27')$ та $(29')$ одержимо потрібні представлення:

$$e^{-ax}=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega; \qquad (x\geq 0)$$

$$e^{-ax}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega; \qquad (x>0)$$

Основні властивості перетворення Фур'є.

1. Лінійність. Перетворення Фур'є лінійної комбінації скінченної кількості функцій, що мають перетворення Фур'є, дорівнює такій самій алгебраїчній сумі перетворень Фур'є цих функцій:

$$F[\alpha_1 f_1(x)\pm\alpha_2 f_2(x)]=\alpha_1 F[f_1]\pm\alpha_2 F[f_2].$$

2. Властивість подібності. Якщо $f(x)$ має перетворення Фур'є $F[f]=\hat{f}(\omega)$, то функція $f(ax)$ має перетворення Фур'є $\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$, тобто із

$$F[f(x)]=\hat{f}(\omega)\Rightarrow F[f(ax)]=\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

3. Властивість зміщення. Якщо $F[f(x)]=\hat{f}(\omega)$, то

$$F[f(x+\tau)]=e^{i\omega\tau}\cdot\hat{f}(\omega).$$

4. Якщо функцію $f(x)$ продиференціювати за змінною x, то її перетворення Фур'є помножиться на $i\omega$.

5. Властивість диференціювання перетворення Фур'є. Якщо функція $f(x)$ задовольняє нерівність

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|x|^k\right)\cdot|f(x)|dx<\infty,$$

то існує похідна k-го порядку її перетворення Фур'є $\hat{f}(x)$, причому

$$\frac{d^k\hat{f}(\omega)}{(d\omega)^k}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot\frac{d^k\left(e^{-i\omega x}\right)}{(d\omega)^k}dx.$$

16.4. Амплітудно-частотні характеристики сигналів.

Нехай $f(x)$ задана на скінченному відрізку довжиною $2l$ і задовольняє умови Діріхле або періодична з періодом $T=2\ell$.

Числа $0;\pm\frac{\pi}{\ell};\pm\frac{2\pi}{\ell};\pm...;\pm\frac{n\pi}{\ell};\pm...$ *називають хвильовими числами, а їх сукупність називають частотним спектром сигналу* $f(x)$.

Сукупність модулів амплітуд уявних гармонік

$$|c_0|,|c_1|,|c_{-1}|,...,|c_n|,|c_{-n}|,...$$

або амплітуд дійсних гармонік

$$\frac{a_0}{2},\sqrt{a_1^2+b_1^2},...,\sqrt{a_n^2+b_n^2},...$$

називають амплітудним спектром сигналу $f(x)$.

Для вказаної функції $f(x)$ частотний та амплітудний спектри дискретні, тому залежність амплітуд від частот графічно зображується симетричними (відносно осі амплітуд) точками, а відповідний графік називають амплітудно - частотною характеристикою сигналу $f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ задана для $x \in (-\infty;\infty)$, задовольняє умовам Діріхле на скінченному проміжку і умові

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

тоді її частоти $\omega \in (-\infty;\infty)$, а амплітудами буде модуль спектральної щільності. Залежність амплітуд $|S(\omega)|$ від частот ω графічно зображується графіком неперервної симетричної функції.

Приклад 4. Розкласти на гармоніки функцію:

$$f(x)=\begin{cases} 1, \textit{якщо} & |x| \le 1; \\ 0, \textit{якщо} & |x| > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Ця функція задана на $(-\infty;\infty)$, задовольняє умовам Діріхле на довільному скінченному проміжку і задовольняє умові

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

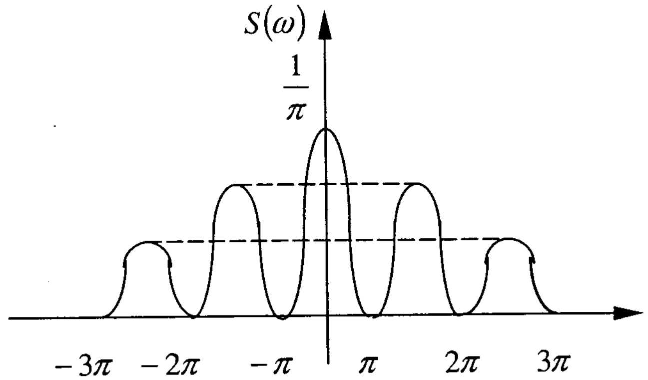
Отже вона може бути розкладена на гармоніки на $(-\infty;\infty)$. Знайдемо спочатку спектральну щільність $S(\omega)$ за формулою (24)

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(-1)}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi\omega}\cdot\frac{e^{-i\omega}-e^{i\omega}}{(-2i)}=\frac{\sin\omega}{\pi\omega}.$$

Тепер за формулою (23) отримаємо шуканий розклад:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega,$$

який вірний для усіх x, крім точок розриву $x=\pm 1$. Залежність амплітуд $|S(\omega)|$ від частот ω схематично можна зобразити графіком (див. мал.3).



Мал.3

16.5 ВПРАВИ

1. Чи можна стверджувати, що будь-яка неперервна функція, що "затухає" на нескінченності, тобто $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, задовольняє умові:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \,?$$

Привести контрприклад.

2. Впевнитись, що функція $f(x)=e^{-\alpha|x|}, (\alpha>0)$ задовольняє усім умовам теореми Діріхле. Знайти її спектральну щільність (перетворення Фур'є) та побудувати її графік.

3. Знайти перетворення Фур'є функції

$$a)\, f(t)=\begin{cases} e^{i\alpha\cdot t}, p<t<q; \\ 0, t<p, t>q. \end{cases} \qquad b)\, f(x)=\begin{cases} e^{-cx+i\alpha x}, x>0; \\ 0, \quad x<0; \end{cases} (c>0).$$

4. Знайти косинус- перетворення функції

$$a)\ f(x)=\begin{cases}1, 0<x<a;\\ 0, \quad x>a.\end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases}\cos x, 0<x<a;\\ 0, \quad x>a.\end{cases}$$

5.Знайти функцію, яка визначена на $(0;\infty)$ і косинус-перетворення Фур'є якої дорівнює

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin as}{s}.$$

6.Знайти синус- перетворення функції

$$f(x)=\frac{e^{-sx}}{x}.$$

7.Розкласти на уявні гармоніки і побудувати графік амплітудно-частотної характеристики сигналів:

$$a)\ f(x)=e^{-|x|}, \qquad x\in[-1;1]; \qquad b)\ f(x)=e^{-2|x|}, \qquad x\in[-3;3].$$

8.Для неперервного сигналу

$$f(t)=\begin{cases}0; & t\le 0;\\ t; & 0\le t\le 1/2\\ (1-t); & 1/2<t\le 1;\\ 0; & t>1.\end{cases}$$

Знайти перетворення Фур'є і побудувати графік амплітудно-частотної характеристики.

Розділ 17 Перетворення Лапласа та його властивості

17.1.Теоретичні відомості.

Перетворення Лапласа та його властивості є основою операційного числення, азбукою сучасної автоматики та телемеханіки. Вперше їх застосував в електротехнічних розрахунках англійський інженер-електрик О.Хевісайд.

Основна ідея операційного числення: між функцією дійсної змінної $f(t)$ (оригіналом) і функцією комплексної змінної F(p) (зображенням) встановлюється відповідність, яка дозволяє диференціювання та інтегрування оригіналу f(t) зводити до алгебраїчних операцій над зображенням F(p), тобто зводити розв'язок диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь до розв'язання алгебраїчних рівнянь.

Оригінали та зображення

Означення 1. Оригіналами називають функції f(t), які задовольняють умовам:

1)f(t) *визначена для усіх* $t\in(-\infty,\infty)$, *неперервна за виключенням можливо скінченної кількості точок розриву першого роду на кожному скінченному проміжку;*

2) $f(t)\equiv 0$ *при t<0 (фізичний процес, який описує f(t), починається в момент часу t=0);*

3)*існують такі числа M та* σ_0, *що*

$$|f(t)|\le Me^{\sigma_0 t} \qquad (1)$$

(σ_0 *– показник зростання функції f(t)).*

Якщо f(t) обмежена, то $\sigma_0 = 0$.

❐ **Означення 2. Зображенням Лапласа оригіналу називають функцію F(p) комплексної змінної** $p = \sigma + i\tau$, **яку визначають за формулою**

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t)dt \qquad \textbf{(2)}$$

Відповідність між оригіналом f(t) і функцією F(p) встановлюється за допомогою перетворення Лапласа і позначається так: $f(t) \to F(p), f(t) \Rightarrow F(p)$ або $f(t) \to L[f(t)]$.

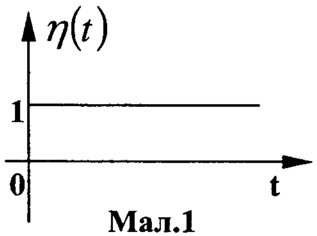
Математиками доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Для будь-якого оригіналу f(t) зображення F(p) визначено і є аналітичною функуцією в півплощині* $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Одинична функція Хевісайда та її зображення.

Розглянемо одиничну функцію Хевісайда

$$\eta = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$



Мал.1

Ця функція визначена для усіх $t \in (-\infty; \infty)$, неперервна за винятком точки t=0, обмежена і задовольняє 1-3 умовам означення 1, отже є оригіналом.

Знайдемо її зображення Лапласа за формулою (2):

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\eta(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}dt = -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Таким чином: $\eta(t) \to \frac{1}{p}$, або $L[\eta(t)] = \frac{1}{p}$, або

$l(t) \Rightarrow \frac{1}{p}$, оскільки часто замість $\eta(t)$ пишуть $l(t)$.

▼ **Зауваження 1.** Функції

$$\eta(t)e^{\alpha t}, \eta(t)\sin t, \eta(t)\cos(t)$$

є оригіналами. Найчастіше їх позначають

$$e^{\alpha t}, \sin t, \cos t,$$

вважаючи, що при t<0 вони дорівнюють 0. Зображення цих функцій знайдемо пізніше.

17.2. Властивості зображень Лапласа.

1. Теорема про лінійність. *Якщо* $f_1(t) \to F_1(p), f_2(t) \to F_2(p)$ *і* $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$, *де* c_1 *та* c_2 *– сталі, то*

$$f(t) \to F(p) = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p),$$

тобто зображення лінійної комбінації оригіналів дорівнює відповідній лінійній комбінації їх зображень.

2. *Теорема зміщення.* *Якщо* $f(t) \to F(p)$ *і* p_0 *– довільне комплексне число, то* $e^{p_0 t} f(t) \to F(p - p_0)$ *для* p *таких, що* $\operatorname{Re} p > \sigma_0 + \operatorname{Re} p_0$, *тобто зміщення зображення на* p_0 *рівносильне множенню оригіналу на* $e^{p_0 t}$.

Використовуючи ці властивості, знаходять зображення деяких функцій:

1.Оскільки $\eta(t) \to \frac{1}{p}$, то за теоремою зміщення

$$e^{\alpha t}\eta(t)\to\frac{1}{p-\alpha} \qquad (3)$$

2.Оскільки

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}, \qquad \text{а} \qquad \cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2},$$

то використовуючи лінійність зображення і формулу (3), отримаємо:

$$\sin\omega t\to\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \qquad (4)$$

$$\cos\omega t\to\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad (5)$$

Застосовуючи теорему зміщення та формули (4), (5), отримаємо:

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t\to\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}, \qquad (6)$$

$$e^{-\alpha t}\cos\omega t\to\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}, \qquad (7)$$

3. <u>Теорема подібності</u>. *Якщо* $f(t)\to F(p)$, *то для довільного* $\alpha>0$

$$f(\alpha t)\to\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \qquad (8)$$

4.<u>Теорема запізнення</u>. *Якщо* $f(t)\to F(p)$ *і* $\tau>0$, то

$$f(t-\tau)\to e^{-p\tau}F(p). \qquad (9)$$

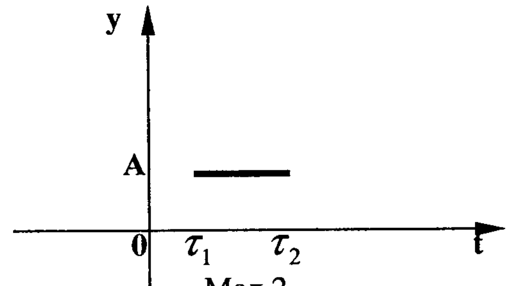
▼ **Зауваження 2.** Ця теорема особливо корисна при вивченні процесів, які здійснюються із запізненням.

Приклад 1. Знайти зображення функції $\eta(t-\tau)$.

Розв'язання. Оскільки $\eta(t)\to\frac{1}{p}$, то за формулою (9) маємо:

$$\eta(t-\tau)\to e^{-p\tau}\frac{1}{p}. \qquad (10)$$

Приклад 2.Знайти зображення імпульсу, який зображено на мал.2



Мал.2

Розв'язання. В данному випадку

$$f(t)=\begin{cases}A, & t\in[\tau_1,\tau_2], \quad \tau_1>0,\\ 0, & t\notin[\tau_1,\tau_2].\end{cases}$$

З мал.2 видно, що f(t) можна представити так: $f(t)=A\eta(t-\tau_1)-A\eta(t-\tau_2)$, тому

$$f(t)\to\frac{A}{p}e^{-p\tau_1}-\frac{A}{p}e^{-p\tau_2}=\frac{A}{p}\left(e^{-p\tau_1}-e^{-p\tau_2}\right)$$

5.<u>Теорема про диференціювання оригіналу</u>. *Якщо* $f(t)$ *n раз неперервно диференційовна на* $(0,\infty)$ *і функції* $f(t), f'(t),..., f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то із відповідності $f(t)\to F(p)$ випливає:

$$f'(t)\to pF(p)-f(+0)$$

$$f''(t) \to p^2F(p) - pf(+0) - f'(+0)$$

. . . .

$$f^{(n)}(t) \to p^nF(p) - p^{n-1}f(+0) - p^{n-2}f'(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0).$$

Зауваження 3. Якщо $f(0)=0$, то $f'(t) \to pF(p)$

6.Теорема про диференціювання зображення.

Якщо $f(t) \to F(p)$, *то*

$$(-t)f(t) \to F'(p)\,, \qquad (11)$$

тобто диференціювання зображення приводить до множення оригіналу на (-t).

Наслідок. Якщо $f(t) \to F(p)$, то $(-t)^n f(t) \to F^{(n)}(p)$.

Приклад 3. Знайти зображення функції t^n.

Розв'язування. Оскільки $\eta(t) \to \frac{1}{p}$, то застосовуючи послідовно формулу (11), отримаємо:

$$-t \to \frac{-1}{p^2} \quad \text{або} \quad t \to \frac{1}{p^2};$$

$$-t^2 \to \frac{-2!}{p^3} \quad \text{або} \quad t^2 \to \frac{2!}{p^3};$$

. . . .

$$t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}. \qquad (12)$$

Приклад 4. Знайти зображення Лапласа функції t^ne^{at}.

Розв'язання. Використовуючи теорему зміщення та формулу (12), отримаємо:

$$t^ne^{at} \to \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

7. Теорема про інтегрування оригіналу. *Якщо* $f(t) \to F(p)$, *то*

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{1}{p}F(p), \qquad (13)$$

тобто інтегрування оригіналу в межах від 0 до t відповідає діленню зображення на p.

Означення 3. Згорткою функцій $f(t)$ **та** $\varphi(t)$ **називається функція, яка визначається рівністю:**

$$\boxed{f(t)*\varphi(t) = \int_0^t f(t)\varphi(t-\tau)d\tau}$$

*Операція згортання позначається *.*

8. Теорема множення зображень. Якщо $f(t) \to F(p), \varphi(t) \to \Phi(p)$, то

$$f(t)*\varphi(t) \to F(p)\cdot\Phi(p), \qquad (14)$$

тобто зображення згортки дорівнює добутку зображень функцій, що згортаються.

Приклад 5. Знайти оригінал зображення

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$e^{-at} \to \frac{1}{p+a}, \qquad e^{-bt} \to \frac{1}{p+b},$$

то за теоремою множення зображень отримаємо:

$$e^{-at} * e^{-bt} \to \frac{1}{(p+a)(p+b)} \qquad (15)$$

Але за означенням згортки функцій маємо:

$$e^{-at} * e^{-bt} = \int_0^t e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}d\tau = e^{-bt}\int_0^t e^{-\tau(a-b)}d\tau =$$

$$= e^{-bt}\frac{e^{-\tau(a-b)}}{b-a}\Bigg|_0^t = \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

Тому (15) приймає вигляд:

$$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right) \to \frac{1}{(p+a)(p+b)}.$$

Отже, оригіналом заданого зображення буде функція

$$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

17.4.Визначення оригіналу за його зображенням Лапласа.

Найбільш загальною є наступна теорема.

<u>Теорема.</u> *Якщо F(p) аналітична в усій комплексній площині, за виключенням скінченної кількості особливих точок* a_k *і* $\lim\limits_{R\to\infty}\max\limits_{|p|=R}|F(p)|=0$, *тоді для усіх t>0 оригінал зображення F(p) знаходять за формулою:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dt = \sum_k \operatorname{Res}_{a_k} F(p)e^{pt}. \qquad (16)$$

Для розуміння та використання цієї теореми потрібно знати основи теорії функцій комплексної змінної і мати навички з цього розділу.

Дуже часто можна використовувати наступну більш просту теорему.

<u>Теорема (друга теорема розкладу Хевісайда)</u>.

Якщо зображення $F(p) = \dfrac{Q_m(p)}{P_n(p)}$ *– правильний нескоротний раціональний дріб, причому многочлен* $P_n(p)$ *має корені* a_k *кратності* r_k,

$k = 1,2,\ldots,s,$ $\quad (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_s = n)$, *тоді оригінал* $f(t)$ визначають за формулою:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{S}\frac{1}{(r_k-1)!}\cdot\lim_{p\to a_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left[(p-a_k)\cdot\frac{Q_m(p)}{P_n(p)}\cdot e^{pt}\right]. \qquad (17)$$

Якщо усі нулі многочлену $P_n(p)$ прості, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{Q_m(a_k)}{P_n'(a_k)}\cdot e^{a_k t}, \qquad (18)$$

де $P_n'(a_k)$ – значення похідної першого порядку многочлена $P_n(p)$ в точці a_k.

17.3 ВПРАВИ

1. Використовуючи означення, знайти зображення Лапласа функцій:

$a) f(t) = e^{2t};$ $\quad b) f(t) = \sin 3t;$ $\quad c) f(t) = e^{5t}.$

2. Знайти зображення Лапласа функцій:

$a) f(t) = t+2;$ $\quad b) f(t) = 3\sin 2t + e^{-2t}\ (t \ge 0);$

$c) f(t) = t^2\cos t;$ $\quad d) f(t) = t\sin 3t;$

$e) f(t) = \int\limits_o^t \tau\cdot\sin 3\tau d\tau;$ $\quad f) f(t) = \int\limits_0^t \tau^2\cos\tau d\tau.$

3. Використовуючи теорему запізнення оригіналу, знайти зображення функції:

$a) \sin\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right);$ $\quad b) e^{t-3}.$

4. Знайти зображення згорток:

$$a)\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau; \qquad b)\int_0^t (t-\tau)^2\cos 2\tau.$$

5. Знайти оригінал для функції:

$$a)F(p)=\frac{1}{p(p-1)(p^2+1)}; \qquad b)F(p)=\frac{1}{p^2+4p+5};$$

$$c)F(p)=\frac{1}{p^2+4p+3}.$$

6. Методами операційного числення знайти розв'язок задачі Коші:

$a)x''+2x'+5x=1-\eta(t-1), \quad x(0)=1, \quad x'(0)=0;$

$b)x''+4x=\sin t[1-\eta(t-\pi)], \quad x(0)=0, \quad x'(0)=1.$

$c)x''+3x'+2x=e^t; \quad x(0)=x'(0)=0.$

$d)x''-4x'+4x=8(t^2+e^{2t}+\sin 2t), \quad x(0)=x'(0)=0.$

$e)x^{IV}+2x''+x=t\sin t, \quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$

Розділ 18 Основи теорії функцій комплексної змінної

Основні поняття, теореми та формули теорії функцій комплексної змінної (ТФКП) знаходять чисельні застосування в багатьох галузях науки та техніки, зокрема, в електротехніц та в автоматичному керуванні.

Фундаментальні результати цієї теорії одержали українські математики: Остроградський М.В., Ващенко-Захарченко М.С., Єрмаков В.П., Бернштейн С.Н., Соколов Ю.Д., Смогоржевський О.С., Штокало Й.З., Кравчук М.П., Боголюбов Н.Н., Зморович В.А., Положій Г.М., Фільчаков П.Ф., Крейн М.Г., Дзядик В.К., Давидов М.О., Пахарева Н.О., Вірченко Н.О., Ляшко І.І., Чемерис В.С., Лаврик В.І., Дундученко Л.Є. та багато інших.

18.1. Форми запису комплексних змінних та дії з ними.

Для зручності використання коротко нагадаємо основні означення, правила та формули розділу 1 цього посібника.

<u>Комплексною змінною</u> називають упорядковану пару дійсних змінних (x, y), яку записують у вигляді

$$z = x + iy,$$

де *i уявна одиниця,* що задовольняє умові $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$.

Змінні x та y називають <u>дійсною та уявною</u> частинами змінної z, відповідно, і позначають так:

$$x = \operatorname{Re} z; \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Зокрема, $z = x + i0 = x -$ дійсна змінна;

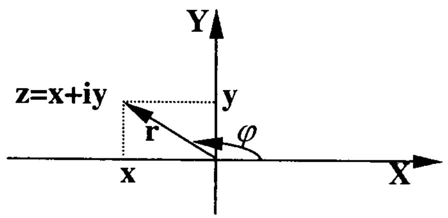
$z = 0 + iy = iy -$ чисто уявна змінна;

$z = 0 + i0 = 0 -$ нуль.

Комплексні змінні $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ *називають <u>рівними,</u> якщо рівні їх дійсні та уявні частини, тобто*

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

На площині з декартовою системою координат x0y *комплексну змінну* $z = x + iy$ *можна зобразити <u>точкою</u> M(x,y) або <u>радіус-вектором</u> цієї точки.* Тоді між точками площини і комплексними числами встановлюється взаємно однозначна відповідність. *Дійсні числа будуть зображуватись точками осі 0x, яку називають дійсною віссю, а чисто уявні числа - точками осі 0y, яку називають уявною віссю; точка* $z = 0 -$ початок координат, а площину x0y називають комплексною площиною C (Мал.1)..



Мал.1

Позначимо через r полярний радіус і через φ - полярний кут точки z. Тоді

$$\boxed{z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).} \qquad (1)$$

Числа r та φ називають <u>модулем</u> та <u>аргументом</u> комплексної змінної z і позначають

$$r = |z|, \qquad \varphi = Argz.$$

Модуль z визначають однозначно за формулою

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0,} \qquad (2)$$

а аргумент z приймає нескінченну кількість значень Argz, які відрізняються між собою на число кратне 2π.

Одне значення $Argz$ (позначається $\arg z$), що задовольняє умові $-\pi \leq \arg z \leq \pi$, називають головним. Тоді

$$\boxed{Argz = \arg z + 2\pi k, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

Головне значення $\arg z$ визначають рівностями

$$\arg z = \begin{cases} atctg\,\dfrac{y}{x}, & x > 0, y \geq 0; \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + 2\pi, & x > 0, y < 0; \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \leq 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Запис комплексної змінної у вигляді

$$\boxed{z = x + iy} \qquad (4)$$

називають *<u>алгебраїчною формою</u>* змінної z.
Запис вигляду

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \qquad (5)$$

називають *<u>тригонометричною формою</u>* змінної z.
Використовуючи *<u>формулу Ейлера</u>*

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,} \qquad (6)$$

Отримаємо *<u>показникову форму</u>* змінної z

$$\boxed{z = re^{i\varphi}} \qquad (7)$$

<u>Означення 1.</u> Комплексне число $a - ib$ **називається комплексно спряженим до числа** $z = a + ib$ і позначається $\bar{z}$, тобто

$$\bar{z} = a - ib \qquad (8)$$

У комплексно спряжених чисел z та $\bar{z}$ модулі рівні, аргументи відрізняються лише знаком. Числа z та $\bar{z}$ зображуються точками, які симетричні відносно дійсної осі.

<u>Означення 2</u>. Комплексне число $-z = -a - ib$ **називається протилежним комплексним числом до числа** $z = a + ib$.

Якщо $z \neq 0$, то число $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ називається *оберненим комплексним числом* до числа z.

Дії з комплексними числами.

<u>Додавання та віднімання</u> комплексних чисел, заданих в алгебраїчній формі $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюється за формулою

$$\boxed{z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_1) + i(y_1 \pm y_2)} \qquad (9)$$

Отже, *алгебраїчна сума двох комплексних чисел є комплексне число, дійсна та уявна частина якого дорівнює тій самій алгебраїчній сумі дійсних та уявних частин, відповідно.*

<u>Добутком</u> комплексних чисел, заданих в алгебраїчній формі, називається комплексне число

$$\boxed{z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1),} \quad (10)$$

яке *одержують за правилом множення многочленів з урахуванням, що* $i^2 = -1$.

<u>Ділення</u> комплексних чисел визначається як дія, обернена множенню. При діленні комплексних чисел в алгебраїчній формі *достатньо помножити чисельник і знаменник на число, комплексно спряжене до знаменника, а потім відокремити дійсну та уявну частини:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Якщо комплексні числа z_1 та z_2 задані в тригонометричній формі, то їх добуток знаходиться за формулою:

$$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),} \qquad (12)$$

а частки за формулою:

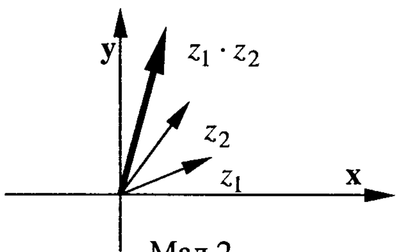
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right) \qquad (13)$$

Якщо комплексні числа задані у показниковій формі, то

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad (14)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (15)$$

З (12) та (13) випливає, що при множенні комплексного числа z_1 на z_2 вектор z_1 розтягується в $|z_2|$ раз і повертається на кут $\varphi_2=\arg z_2$ проти руху годинникової стрілки.



Мал.2

Зокрема, множення z на i зводиться до повороту вектора z на кут $\dfrac{\pi}{2}$ без розтягування. З формул (13) та (15) випливає, що при діленні комплексних чисел їх модулі діляться, а аргументи віднімаються.

Приклад 1. Знайти алгебраїчну форму суми

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{\bar{z}^2}, \qquad z\neq 0.$$

Розв'язання. Оскільки

$$z=x+iy, \qquad |z|^2=z\cdot\bar{z}=x^2+y^2, \text{ то}$$

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{\bar{z}^2}=\frac{\bar{z}^2+z^2}{(z\cdot\bar{z})^2}=\frac{(x-iy)^2+(x+iy)^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Піднесення до степеня та добування кореня.

Правило множення комплексних чисел поширюється на довільну кількість множників. Зокрема, якщо усі множники дорівнюють $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \qquad n=1,2,... \qquad (16)$$

Цю формулу називають формулою Муавра.

Добуття кореня n степеня із комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ здійснюють за формулою:

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad k=0,1,2,...,n-1 \qquad (17)$$

З цієї формули випливає, що *є n різних значень $\sqrt[n]{z}$. Кожному із цих n значень відповідає точка комплексної площини. Усі ці точки лежать на колі радіуса $\sqrt[n]{|z|}$ з центром в початку координат і поділяють коло на n рівних частин.*

Відзначимо, що у випадку задання комплексного числа z у показниковій формі $z=re^{i\varphi}$ маємо:

$$z^n=r^ne^{in\varphi}; \qquad \sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}}; \qquad k=0,1,...,n-1 \qquad (18)$$

18.1.2. Область на комплексній площині.

<u>Означення 3.</u> Областю на комплексній площині називають множину D таких точок:

1) *разом з кожною точкою M із D цій множині належить і достатньо малий круг з центром в точці M;*
2) *довільні дві точки D можна з'єднати ламаною лінією, усі точки якої належать D.*

<u>Приклади.</u> Сукупність точок, які задовольняють рівності $|z| = 9$, є колом $x^2 + y^2 = 81$ з центром в початку координат і радіусом 9.

Сукупність точок, які задовольняють нерівність $\operatorname{Im} z < 0$, є нижньою півплощиною, а $\operatorname{Re} z > 0$ – правою півплощиною.

<u>Означення 4.</u> *Сукупність точок z, які задовольняють нерівність $|z - a| < \rho$, називається ρ – околом точки a* (він складається із точок, які лежать в середині круга з центром в точці a і радіусом ρ).

Точкою межі області D (межовою точкою) називають точку, в околі якої є як внутрішні, так і зовнішні точки множини D.

Сукупність межових точок області D називають межею D і позначають $\dot{D}$ або ∂D. Область D з обмежуючою її межею називається замкнутою областю і позначається $\overline{D}$. Отже $\overline{D} = D \bigcup \partial D$.

<u>Означення 5.</u> *Якщо область D обмежена однією лінією, то вона називається однозв'язною. Якщо область D обмежена декількома лініями, то вона називається багатозв'язною.*

<u>Означення 6.</u> *Напрям обходу межі області D називається додатним, якщо при цьому обході область знаходиться зліва.*

18.1.3 ВПРАВИ

1. Які існують форми запису комплексного числа? За якими формулами здійснюється перехід від однієї форми запису до іншої?

2. Знайти модуль та аргумент комплексних чисел:

$a)1;\quad b)-3;\quad c)2i;\quad d)-i;\quad e)\pm1\pm i;\quad f)\pm1\pm i\sqrt{3}.$

3. Представити у показниковій формі комплексні числа:

$a) z=-3;\quad b) z=-1;\quad c) z=-1-\sqrt{3}i;\quad d) z=-2+5i.$

4. Довести рівності:

$a) z+\overline{z}=2\operatorname{Re} z;\quad b) z-\overline{z}=2i\operatorname{Im} z;\quad c) |\overline{z}|=|z|.$

5. Знайти усі значення коренів:

6.

$a)\sqrt[5]{i};\quad b)\sqrt[3]{1-i};\quad c)\sqrt[3]{4};\quad d)\sqrt[3]{2-5i};\quad e)\sqrt[5]{-4+3i};$

$f)\sqrt[4]{1}.$

6. Обчислити:

$a)\left(\sqrt{3}-3i\right)^6;\quad b)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4;\quad c)\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{50};\quad d)\left(\sqrt{3}+i\right)^6$

7. Які лінії задані рівнянням:

$a)|z-z_0|=r,\quad r>0;\quad b)|z+c|+|z-c|=2a;$

$a>c$ – дійсні числа;

$c)\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\omega}\right)=\frac{1}{2},\quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\omega}\right)=-\frac{1}{4},\quad$ *де* $\quad \omega=x+2yi;$

$d)\operatorname{Im} z^2=2.$

Зобразити відповідні області на комплексній площині.

18.2.1. Послідовності комплексних чисел та їх границі.

<u>Означення 7.</u> Послідовністю комплексних чисел $\{z_n\}$ називається вираз вигляду

$$z_1, z_2, z_3, ..., z_n ... \qquad (19)$$

де $z_1, z_2, z_3, ..., z_n ...$ - комплексні числа.

Щоб вказати послідовність комплексних чисел, треба вказати закон, за яким для кожного n можна визначити відповідний член послідовності $\{z_n\}$.

<u>Означення 8</u>. Число z_0 називається границею послідовності (19), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon)$, що для усіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність:

$$|z_n - z_0| < \varepsilon$$

Границю послідовності $z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...$ позначають так:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \qquad (20)$$

Якщо $z_n = x_n + iy_n$, а $z_0 = x_0 + iy_0$, то існування границі послідовності рівносильне існуванню двох границь:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Послідовність $\{z_n\}$, яка має скінченну границю, називають збіжною.

<u>Приклад 2.</u> Послідовність $z_n = \dfrac{2n+13}{n} + i\dfrac{n-1}{3n}$

збігається , оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+13}{n} = 2;$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n} = \frac{1}{3}.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 2 + \dfrac{1}{3}i.$

<u>Приклад 3.</u> Послідовність $z_n = n - \dfrac{3}{n}i$ розбігається,

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty.$

18.2.2. Функції комплексної змінної.

<u>Означення 9.</u> Якщо кожному значенню $z \in D \subset C$ відповідає за законом відповідності f хоча б одне значення $w \in G \subset C$, то w називають функцією від z і позначають $w = f(z)$.

Якщо кожному значенню $z \in D$ відповідає <u>одне значення</u> $w \in G$, то функція називається <u>однозначною;</u> якщо деяким значенням $z \in D$ відповідає <u>більше одного значення</u> $w \in G$, то функція є <u>многозначною.</u>

Область D незалежної змінної $z = x + iy$ називають <u>областю визначення функції</u> $w = f(z)$, область $G = \{w : w = f(z),\ z \in D\}$ називають <u>областю значень</u>

функції $f(z)$. Якщо покласти $z = x + iy$, а $w = u + iv$, то задання функції комплексної змінної $w = f(z)$ рівносильне заданню двох функцій двох дійсних змінних

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y),$$

де $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) -$ упорядкована пара дійсних функцій. Найчастіше відкладають значення z на одній площині $(x0y)$, а значення w на іншій площині $(u0v)$.

Функцію комплексної змінної $f(z)$ можна записати і в тригонометричній формі:

$$f(z)=|f(z)|\cdot(\cos\arg f(z)+i\sin\arg f(z))$$

Функцію комплексної змінної $f(z)$ можна розглядати як оператор відображення області визначення D в область значень G.

<u>Означення 10</u>. *Функцію $z=f^{-1}(w)$ (відображення $D=f^{-1}(G)$) називають оберненою до функції $w=f(z)$.*

<u>Означення 11.</u> *Однозначну функцію $w=f(z)$ називають однолистою в області D, якщо для*

$$z_1,z_2\in D,\qquad z_1\neq z_2\Rightarrow f(z_1)\neq f(z_2).$$

Взаємно-однозначні функції $w=f(z)$ та $z=f^{-1}(w)$- однолисті.

Однолиста функція $w=f(z)$ здійснює взаємно однозначне відображення області D на $G=f(D)$.

Функцію $w=f(z)$ називають обмеженою в області D, якщо існує таке число $N>0$, що $|f(z)|<N$ для усіх $z\in D$.

18.2.3. Границя та неперервність функції комплексної змінної.

<u>Означення 12</u>. Число w_0 називається границею функції $f(z)$ в точці $z_0\in D$, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що виконується нерівність:

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon$$

для усіх z із δ - околу точки z_0, тобто $|z-z_0|<\delta$.

Позначається так: $$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0. \qquad (21)$$

Означення границі функції комплексної змінної не відрізняється від означення границі дійсної змінної, тому усі теореми про границі та нескінченно малі величини залишаються в силі і в цьому випадку.

Отже, якщо однозначні функції $f_1(z)$ та $f_2(z)$ в точці $z_0\in D$ мають границі, то в цій точці мають границі і такі функції:

$$f_1(z)\pm f_2(z);\qquad f_1(z)\cdot f_2(z);\qquad \frac{f_1(z)}{f_2(z)}\ \left(\lim_{z\to z_0} f_2(z)\neq 0\right).$$

Якщо існує границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$, то функція $f(z)$ обмежена в колі точки z_0.

<u>Означення 13.</u> Однозначна функція $f(z)$ називається неперервною в точці z_0, якщо вона визначена в точці z_0 і в її околі та виконується рівність

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0).$$

Для неперервності функції $f(z)$ в точці $z_0=x_0+iy_0$ необхідно і достатньо, щоб дійсна $u(x,y)$ та уявна $v(x,y)$ частини функції були неперервні в точці (x_0,y_0).

<u>Означення 14.</u> Функція $f(z)$ називається неперервною в області D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Неперервні функції комплексної змінної мають такі властивості, як і неперервні функції дійсної змінної. Зокрема, якщо $f(z)$ неперервна в замкненій області $\overline{D}$, то вона обмежена за модулем $|f(z)|$ на цій області.

18.2.4. Основні трансцендентні функції.

1)**Показникову функцію** e^z для комплексної змінної $z = x + iy$ визначають співвідношенням:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

2)Функцію, обернену до показникової, називають **логарифмічною** і позначають:

$$w = Lnz.$$

Якщо $w = u + iv$, то

$$e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}.$$

Оскільки $e^w = z$, то

$$\left|e^w\right| = e^u = |z| \Rightarrow u = \ln|z|, \qquad v = Argz.$$

Отже,

$$Lnz = \ln|z| + iArgz$$

або

$$Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (22)$$

Головним значенням логарифма числа z називають значення, яке відповідає головному значенню аргументу z

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \qquad (23)$$

Приклад 4. Знайти $\ln(1+i)$ та $Ln(1+i)$..

Розв'язання. Оскільки $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

$\arg(1+i) = arctg\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$, то, використовуючи формули (23) та (22), знаходимо:

$$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4};$$

$$Ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$$

Пример 5. Знайти $\ln(-4)$ та $Ln(-4)$.

Розв'язання. Оскільки

$$|-4| = 4, \qquad \arg(-4) = \pi,$$

тому

$$\ln(-4) = \ln 4 + i\pi;$$

$$Ln(-4) = \ln 4 + i(\pi + 2\pi k), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$$

Відзначимо, що дійсна функція $\ln x$ для $x \le 0$ не існує.

3)Для довільного комплексного z можна визначити

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

З цих формул видно, що функції $\sin z$ та $\cos z$ періодичні з періодом 2π.

Функція $\cos z$ - парна, а $\sin z$ - непарна. Мають місце звичайні тригонометричні співвідношення:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1; \qquad \sin 2z = 2\sin z\cos z.$$

4)**Гіперболічні функції** визначають рівностями:

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \qquad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \qquad thz = \frac{shz}{chz}; \qquad cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Мають місце тотожності:

$$shz = -i\sin z; \qquad chz = \cos iz.$$

18.2.5 ВПРАВИ

1)Знайти границі послідовностей:

$$a)z_n = \frac{n-3}{2n} + i\frac{2n+1}{4n+9}; \qquad b)z_n = \frac{n-1}{3n} + i\frac{n-5}{3n+7};$$

$$c)z_n = \frac{3}{n} + i\frac{3n^2+5}{4n^3+9}.$$

2)Знайдіть дійсну та уявну частину функцій:

$$a)w = z^2; \qquad b)w = |z|; \qquad c)w = \bar{z}; \qquad d)w = \frac{1}{z};$$

$$e)w = z^2 + z - 2.$$

3)Знайти: $a)\ln i$ та Lni; $b)\ln(-1)$ та $Ln(-1)$;
$c)\ln\left(1+i\sqrt{3}\right)$ та $Ln\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

4)Доведіть, що:

$$a)Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2; \qquad b)Ln\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}Lnz.$$

5)Знайти дійсну та уявну частину функцції:

$$a)w = z^3; \qquad b)w = \frac{z-1}{z+1}; \qquad c)w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

6)Знайти образи точок z_0 для вказаних відображень:

$$a)w = z^2; \quad z_0 = i; \qquad b)w = \frac{\bar{z}}{z}, \quad z_0 = 2+3i.$$

7)В яку лінію відображується коло $|z| = \sqrt{2}$ функцією $w = z^2$?

8)Визначити, на які лінії площини W відображаються функцією $w = \frac{1}{z}$ задані лінії площини z:

$$a)|z| = \frac{1}{2}, \qquad b)\arg z = \frac{\pi}{4}; \qquad c)\operatorname{Re} z = 0.$$

9)В яких точках функція $w = \frac{z-c}{(z^2-a)(z+b)}$. не буде неперервною?

18.3. Диференційовність та аналітичність функції.

18.3.1. Диференціювання функції комплексної змінної

Нехай функція $w = f(z)$ визначена в точці z та її околі. Якщо аргумент $z = x+iy$ одержить приріст $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, то функція також одержить приріст

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z).$$

❐ <u>**Означення 15**</u>. **Похідною однозначної функції $w = f(z)$ в точці z називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли $\Delta z \to 0$ і позначають**

$$\frac{dw}{dz} = \frac{df}{dz} = w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Функція, яка має в точці $z \in D$ похідну $f'(z) \neq \infty$, називають диференційовною в точці.

Функція $f(z)$, диференційовну в кожній точці $z \in D$, називають диференційовною в області D.

Визначення похідної функції комплексної змінної повністю співпадає з відповідним означенням для функції дійсної змінної. Тому основні правила диференціального числення поширюються і на однозначні функції комплексної змінної:

1)якщо $f(z)=const$, то $f'(z)=0$;

2)якщо $f(z)$ – диференційовна функція в точці $z\in D$, $c=const\in C$, то $(cf(z))'=c\cdot f'(z)$;

3)якщо $f_1(z)$ та $f_2(z)$ диференційовні в точці $z\in D$, то в цій точці

$$(f_1(z)\pm f_2(z))'=f_1'(z)\pm f_2'(z);$$

$$(f_1(z)\cdot f_2(z))'=f_1'(z)\cdot f_2(z)+f_1(z)\cdot f_2'(z);$$

$$\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)'=\frac{f_1'(z)\cdot f_2(z)-f_1(z)\cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)},\qquad f_2(z)\neq 0.$$

4)якщо $w=f(z)$ диференційовна в точці $z\in D$, $\xi=\varphi(w)$ диференційовна в точці $w\in G$, то похідна складної функції $\xi=\varphi(f(z))$ дорівнює $\xi'=\varphi_w'(w)\cdot f_z'(z)$.

Відзначимо, що вимога існування $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ і її незалежності від способу прямування Δz до нуля накладає на функцію $f(z)$ значно більше обмежень в порівнянні з випадком функції дійсної змінної, оскільки Δz може прямувати до нуля лише в двох напрямках $(\Delta x>0,\Delta x<0)$, а Δz може прямувати до нуля по довільному шляху, зокрема за будь-яким із нескінченної множини променів.

Тому диференційовні функції комплексної змінної мають декілька важливих властивостей, які не мають місця для диференційовних функцій дійсних змінних. Зокрема,

нижче буде приведена формула Коші, з якої випливає, що із існування $f'(z)$ в точці z_0 (і в околі) випливає ування похідних усіх порядків $f''(z), f'''(z),\ldots$ і розклад функції $f(z)$ в степеневий ряд в точці z_0.

Умови диференційовності функції комплексної змінної.

Теорема 1. *Для того, щоб однозначна функція*

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

була диференційовна в точці $z=x+iy$, *необхідно і достаньо, щоб дійсні функції* $u(x,y)$ *і* $v(x,y)$ *були диференційовні в точці* (x,y) *і виконувались умови Коші-Рімана (Даламбера-Ейлера):*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.}\tag{24}$$

Наслідок. Для знаходження похідної $f'(z)$ функції $f(z)=u+iv$ можна використовувати формулу

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\ \ (25)\ \text{або}\ \ f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\qquad (25')$$

Зауваження1. В 1933 році російський математик Д.Е.Мельников довів теорему 1 при менш обмежених умовах: функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ лише неперевні в точці (x,y).

Приклад 6. Перевірити умову Коші-Рімана для фу89нкції $w=z^3$ і визначити її область диференційовності.

Розв'язання. Представимо задану функцію w в алгебраїчній формі:

$$w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2 y - y^3\right) \Rightarrow$$
$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2; \quad v(x,y) = 3x^2 y - y^3.$$

Звідси знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Умови (24) виконані в усіх точках площини, тому функція $w = z^3$ диференційовна на усій площині.

Приклад 7. Визначити область диференційовності функції

$$w = z \cdot \operatorname{Re} z.$$

Розв'язання. Знайдемо функції u та v:

$$w = z \operatorname{Re} z = (x+iy) \cdot x = x^2 + ixy \Rightarrow$$
$$u(x,y) = x^2; \quad v(x,y) = xy.$$

Тепер знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Отже, умови (24) виконуються лише в точці (0,0), тому функція $w = z \cdot \operatorname{Re} z$ диференційовна лише в точці $z = 0$.

Зауваження 2. Модуль $|f'(z_0)|$ є сталий коефіцієнт розтягу (стиску) довжин усіх дуг γ_k при відображенні їх функцією $w = f(z)$ на дугу відповідних кривих Γ_k. Головне значення $\arg f'(z_0)$ дорівнює куту, на який обертається крива γ_k в точці z_0 при відображенні її функцією $w = f(z)$.

18.3.2. Аналітичність функції.

Означення 16. Якщо однозначна функція $f(z)$ диференційовна в точці z і в деякому її околі, то її називають аналітичною в точці z.

Однозначну функцію $f(z)$, диференційовну в усіх точках $z \in D$, називають аналітичною в області D.

Означення 17. Точку $z \in D$, в якій однозначна функція $f(z)$ аналітична, називають правильною точкою функції $f(z)$; протилежному разі – особливою точкою.

Відмітимо, що функція $f(z)$ аналітична в точці $z = \infty$, якщо функція $\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналітична в точці $\xi = 0$.

Умови Коші-Рімана (24) називають ще умовами аналітичності функції.

Приклад 8. Визначити область аналітичності функції:

$$a) w = \bar{z}; \quad b) w = e^z.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання умов (24)

$$a) w = \bar{z} = x - iy \Rightarrow u = x; \quad v = -y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0; \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$, перша умова Коші – Рімана не виконується. Тому функція $w=\overline{z}$ не аналітична.

$$b)w=e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)\Rightarrow$$
$$u=e^{x}\cos y; \qquad v=e^{x}\sin y.$$

Тому
$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y;$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\sin y; \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y.$$

Умови (24) виконуються, тому функція e^{z} аналітична на усій площині.

За формулою (25) маємо:

$$(e^{z})'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y=e^{z}.$$

Властивості аналітичних функцій:

1)*Сума, різниця, добуток та частка (при умові нерівності нулю знаменника) двох аналітичних функцій, а також складна функція, утворена із двох аналітичних функцій, є аналітичними функціями;*

2)*Якщо функція $f(z)=u+iv$ є аналітичною в області D, то її дійсна та уявна частини є спряженими гармонічними функціями в області D, тобто*

вони задовольняють рівнянням Лапласа

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}=0, \qquad \frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}}=0$$

і зв'язані умовами Коші – Рімана.

Отже, якщо відома дійсна частина $u(x,y)$ аналітичної функції $f(z)$, то можна визначити функцію $f(z)$ з точністю до постійного доданка, розв'язавши систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.\end{cases} \qquad (26)$$

Приклад 9. Визначити функцію $f(z)$, якщо
$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)=x^{2}-y^{2}+x.$$

Розв'язання. В данному випадку система (26) має вигляд

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}=2y,\\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x+1.\end{cases}$$

З першого рівняння одержимо рівність:,
$$v=\int 2y\,dx=2xy+\varphi(y), \qquad (27)$$

де $\varphi(y)$ – поки що довільна функція y.

Продиференцюємо останню рівність по y:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + \varphi'(y).$$

Порівняння цієї рівності із другим рівнянням системи дає

$$\varphi'(y) = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y + c.$$

Таким чином, (27) приймає вид: $v = 2xy + y + c$. Отже,

$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + c) = \left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) + (x + iy) + ic =$$
$= z^2 + z + c_1$, де $c_1 = ic$ – довільна стала.

18.3.3. Електростатичний смисл аналітичної функції.

Нехай в області D на площині задано електростатичне поле (поле вектора напруженості)

$$\vec{E} = E_x(x, y)\vec{i} + E_y(x, y)\vec{j}.$$

Потенціалом поля $\vec{E}$ називають функцію $v(x, y)$, яка задовольняє умовам

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -E_x; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -E_y.$$

Якщо область D немає зарядів, тоді в усіх точках D

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) = 0,$$

тобто потенціал $v(x, y)$ є гармонічною функцією в області D.

<u>Означення 18.</u> Функцію комплексної змінної

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

де $u(x, y)$ **– гармонічна функція спряжена до** $v(x, y)$, **називають *комплексним потенціалом поля*** $\vec{E}$

Комплексний потенціал f(z) є аналітичною функцією в області D.

Дійсну частину $u(x, y)$ *комплексного потенціалу називавають силовою функцією поля* $\vec{E}$ *, а її лінії рівня* $(u(x, y) = c)$ *називають силовими лініями. Лінії рівня функції* $v(x, y)$ $(v(x, y) = c)$ *називають еквіпотенціальними лініями поля* $\vec{E}$.

Силові та еквіпотенціальні лінії поля утворюють ортогональну сітку в області D.

Введення комплексного потенціалу поля $\vec{E}$ дозволяє застосовувати добре розроблену техніку теорії функції комплексної змінної для дослідження проблем електротехніки.

18.3.4 ВПРАВИ

1.Довести, що функції:

$a) w = \operatorname{Re} z$; $\quad b) w = \operatorname{Im} z$; $\quad c) w = |z|$.

не диференційовні в жодній точці площини.

2.Знайти точки розриву функції $w = \arg z$.

3.Визначити, які із заданих функцій мають похідну:

$a) w = z^2$; $\quad b) w = \operatorname{Re} z$; $\quad c) w = \bar{z}$; $\quad d) w = z \cdot \bar{z}$.

4.Знайти коефіцієнт розтягу т а кут повороту відображення $w = \sin z$ в точці $z_0 = 0$.

5.Визначити аналітичність функцій

$$a)w = ze^z; \qquad b)w = \bar{z} \cdot z^2; \qquad c)w = \sin 3z.$$

6.Знайти аналітичну функцію $f(z) = u + iv$ за її відомою дійсною частиною:

$$a)u = x^2 - y + 2x; \qquad b)u = x^2 - y^2 + xy.$$

7.Знайти усі гармонічні функції вигляду $u = \varphi(x^2 + y^2)$

<u>**Відповідь**</u>: $u = C \cdot \ln(x^2 + y^2) + C_1$.

8.Знайти комплексний потенціал електростатичного поля $\overline{E} = -2(x\bar{i} + y\bar{j})$, силові та еквіпотенціальні лінії цього поля.

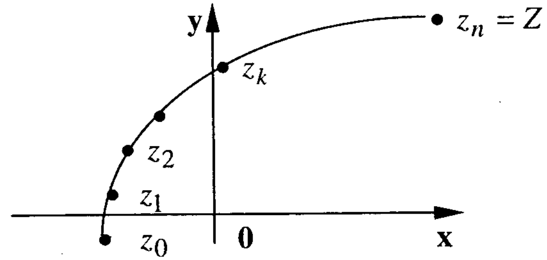
9.Знайти довжину і напрям вектора напруженості $\overline{E}$ електростатичного поля, силові та еквіпотенціальні лінії поля за заданим комплексним потенціалом:

$$a)w = \frac{i}{z}; \qquad b)w = z + \frac{1}{z}.$$

18.4. Інтегрування функцій комплексної змінної.

18.4.1. Означення та властивості інтеграла.

Нехай в комплексній площині задана деяка спрямна (має скінченну довжину) дуга С, на якій визначена функція $f(z)$. Межові точки С позначимо z_0 та Z і тим самим на С встановлюємо орієнтацію. Поділимо криву С довільним чином на n частин точками ділення $z_0, z_1, z_2, ..., z_k, ...z_n. = Z$ (див.мал.3)



Мал.3.

На кожній маленькій дузі z_k, z_{k+1}. візьмемо довільну точку $z_k \le \xi_k \le z_{k+1}$, $k = 0,1.2,...n-1$, позначимо $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Складемо інтегральну суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k.$$

<u>**Означення 19.**</u> **Якщо існує границя вказаної нтегральної суми при $\lambda = \max|\Delta z_k| \to 0$ незалежна від способу ділення дуги С на частини і вибору точки ξ_k в кожній частині, то її називають інтегралом від функції $f(z)$ комплексної змінної по дузі С і позначають**

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k. \qquad (28)$$

Якщо С – кусково-неперервна крива, $f(z)$ – неперервна функція, то інтеграл (28) існує.

Обчислення інтеграла (28) зводиться до обчислення криволінійних інтегралів від дійсних функцій дійсних змінних.

Нехай $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$, тоді $dz=dx+idy$

$$f(z)dz=(u+iv)(dx+idy)=(udx-vdy)+i(vdx+udy).$$

Отже,

$$\int_C f(z)dz=\int_C[u(x,y)dx-v(x,y)dy]+i\int_C[v(x,y)dx+u(x,y)dy] \quad (29)$$

З цієї формули випливає, що на інтеграли від функції комплексної змінної поширюються звичайні властивості криволінійних інтегралів від дійсних змінних.

Якщо дуга C задана параметрично

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t_0\le t\le T,$$

причому $z_0=x(t_0)+iy(t_0)$, $Z=x(T)+iy(T)$, тоді

$$\int_C f(z)dz=\int_{t_0}^{T} f(z(t))\cdot z'(t)dt. \quad (30)$$

✧ **Приклад 10.** Обчислити $\oint_{C_\rho}\frac{dz}{z-z_0}$, де C_ρ – коло з центром в точці z_0 та радіусом ρ (обхід проти руху годинникової стрілки).

Розв'язання. Рівняння кола з центром в точці z_0 та радіусом ρ має вигляд $|z-z_0|=\rho$, або в параметричній формі $z=z_0+\rho e^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

За формулою (30) отримаємо:

$$\oint_{C_\rho}\frac{dz}{z-z_0}=\int_0^{2\pi}\frac{i\rho\cdot e^{i\varphi}}{\rho\cdot e^{i\varphi}}d\varphi=i\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi i.$$

Отже $$\int_{C_\rho}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i. \quad (31)$$

Відзначимо, що заданий інтеграл не залежить від радіуса кола.

18.4.2. Інтегральні теореми Коші.

Теорема 2. Теорема Коші (для однозв'язної області). *Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, тоді інтеграл від функції $f(z)$ по будь-якому замкненому контуру C, який належить D, дорівнює нулю.*

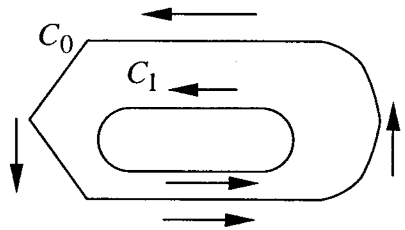
Теорема 3. Теорема Коші (для багатозв'язної області). *Якщо функція $f(z)$ аналітична в D і неперервна в $\overline{D}$, то інтеграл від неї вздовж межі області, яку обходять так, що весь час область D залишається зліва, дорівнює нулю.*

Наслідок. Нехай $f(z)$ аналітична в двозв'язній області, яка обмежена контурами C_0 та C_1. Тоді за теоремою 3:

$$\oint_{C_0} f(z)dz-\oint_{C_1} f(z)dz=0 \quad \text{або}$$

$$\oint_{C_0} f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz, \quad (32)$$

де контури C_0 та C_1 обходять проти руху годинникової стрілки (мал.4).



Мал.4

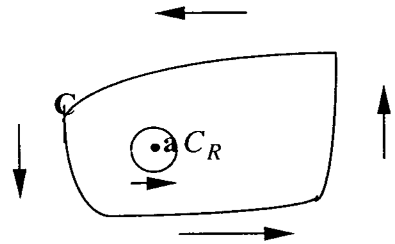
Приклад 11. Обчислити інтеграл

$$\oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n}.$$

Розв'язання. Нехай n – ціле і від'ємне. Тоді функція $f(z)$ аналітична на усій площині і заданий інтеграл дорівнює нулю по будь-якому замкненому контуру.

Якщо контур С не охоплює точку $z=a$ і $n \geq 0$, то $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n}$ аналітична в області, обмеженій контуром С і тому заданий інтеграл в цьому випадку також дорівнює нулю.

Нехай тепер контур С охоплює точку a і обхід здійснюють проти годинникової стрілки. Тоді згідно з наслідком теореми Коші, інтеграл не залежить від виду контуру інтегрування і в якості нового контуру C_R можна взяти коло радіуса R з центром в точці a (див.мал.5)



Мал.5

Оскільки рівнянням кола C_R буде:
$z-a=\mathrm{Re}^{i\varphi}$, $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\quad dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$, то отримаємо:

$$\oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint\limits_{C_R} \frac{dz}{(z-a)^n}\int\limits_0^{2\pi} \frac{Ri\cdot e^{i\varphi}}{R^n\cdot e^{i\varphi n}}d\varphi = \frac{i}{R^{n-1}}\cdot\frac{1}{(1-n)\cdot i}\cdot e^{i(1-n)\varphi}\Bigg|_0^{2\pi} = 0,$$

якщо $n \neq 1$. При $n=1$ за формулою (31)

$$\oint\limits_{C_R} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

18.4.3. Інтегральні формули Коші.

Якщо функція $f(z)$ аналітична всередині однозв'язної області D і на межі C, то для довільної внутрішньої точки z області D має місце рівність

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi, \qquad (33)$$

яку називають інтегральною формулою Коші.

Формула Коші (33) дозволяє знаходити значення аналітичної функції всередині області, якщо відомі її значення на межі області.

Наслідок. Якщо дві функції $f(z)$ та $g(z)$, аналітичні всередині замкненого контура C і на самому контурі, мають однакові значення на точці C, то вони мають однакові значення всередині області, обмеженої C. Це твердження узагальнено так: якщо дві функції, аналітичні в однозв'язній області D, мають однакові значення на деякій дузі, що лежить в D, то вони співпадають в усій області D. Цю властивість аналітичних функцій називають властивістю єдності.

Теорема 4. Якщо функція $f(z)$ аналітичні в області D і неперервна в $\overline{D}$, то в кожній точці області D існують похідні цієї функції усіх порядків, причому

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \qquad (34)$$

Відзначимо, що формули (33) та (34) грають суттєву роль в багатьох дослідженнях, зокрема в обчисленнях інтегралів від $f(z)$.

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int\limits_C \frac{e^z dz}{z(z+5i)}$, де C – коло радіуса 1 з центром в точці 0.

Розв'язання. Функція $f(z) = \frac{e^z}{z+5i}$ аналітична всередині круга, обмеженого колом C. За формулою Коші (33) отримаємо:

$$\int\limits_C \frac{e^z dz}{z(z+5i)} = \int\limits_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{e^0}{5i} = \frac{2}{5}\pi.$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int\limits_C \frac{e^z dz}{(z+2)^4}$, якщо точка $z = -2$ знаходиться всередині області, обмеженої контуром C.

Розв'язання. Застосуємо формулу (34) при $n = 3$ (оскільки $n + 1 = 4$), $f(z) = e^z$, тоді

$$f^{(3)}(-2) = \frac{3!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^z dz}{(z+2)^4} \Rightarrow \int\limits_C \frac{e^z dz}{(z+2)^4} = \frac{2\pi i e^{-2}}{3!} = \frac{\pi}{3} e^{-2} i.$$

18.4.4 ВПРАВИ

1) Знайти інтеграли: $a)\int\limits_C \operatorname{Re} z dz$, якщо C – відрізок, який з'єднує точки 0 та 1+i.

$b)\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz$; $\qquad c)\int\limits_0^i z \sin z dz$.

2) Обчислити інтеграл $\int\limits_C (1 + i - 2\overline{z}) dz$ по заданих C $a)$ пряма лінія, яка з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$; b) парабола $y = x^2$; c) ламана лінія $z_1 z_3 z_2$, де $z_1 = 0$; $z_2 = 1 + i$; $z_3 = 1$.

3) Обчислити $\int\limits_C z \operatorname{Im} z dz$, де:

а) C-відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1 + i$;

$b)C$ – коло $|z|=1$, яке обходять в напрямку проти руху годинникової стрілки;

c)C – ламана, яка вказана в прикладі 2.c).

4)Обчислити задані інтеграли по контуру $\gamma:|z|=2$, використовуючи інтегральну формулу Коші:

$$a)\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^2-4z+3};\qquad b)\oint_{\gamma}\frac{dz}{z\left(z^2+2\right)};\qquad c)\oint_{\gamma}\frac{z-1}{(z+1)\left(z^2+9\right)}dz.$$

5)Обчислити інтеграл $I=\oint_{C}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$, якщо:

$$a)C:|z-2|=1;\qquad b)C:|z|=1;\qquad c)C:|z-6|=1.$$

6)Обчислити інтеграли:

$$a)\int_{|z-1|=3/2}\frac{e^{z^2}}{z(z+1)}dz;\quad b)\int_{|z+1|=1/2}\frac{e^{z}}{z(z+1)}dz;\quad c)\int_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz.$$

7)Обчислити інтеграл $a)\int_{|z|=3}\frac{z^2}{z-2i}dz.$

8)Обчислити інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{C}\frac{zdz}{\left(z^2-1\right)(z-i)}$, де

$$a)C:|z-1|=1;\qquad b)C:|z-i|=1.$$

9)Обчислити $\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{C}\frac{e^{z}}{z(z-1)^3}dz$; якщо:

a)точка z=0 лежить всередині, а точка z=1 зовні контура C;

b)точка z=1 лежить всередині, а точка z=0 зовні контура C;

c)точка z=0 та z=1 лежать всередині контура C.

18.5. Числові, функціональні та степеневі ряди.

18.5.1. Ряди з комплексними числами.

Ряд, складений з комплексних чисел

$$z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n+\ldots \qquad (35)$$

називають <u>*збіжним*</u>, *якщо існує границя при* $n\to\infty$ *його часткової с умин*

$$S_n=z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n=\sum_{k=1}^{n}z_k$$

Цю границю називають сумою ряду і позначають так:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

Якщо $z_k=x_k+iy_k$, то

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}z_k=\sum_{k=1}^{n}(x_k+iy_k)=\sum_{k=1}^{n}x_k+i\sum_{k=1}^{n}y_k.$$

Отже, *ряд з комплексними членами збігається тоді і тільки тоді, коли збігаються ряди* $\sum_{r=1}^{\infty}x_k$ *та* $\sum_{r=1}^{\infty}y_k$ *з дійсними членами.*

Якщо збігається ряд

$$|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|+\ldots,$$

складений з модулів членів ряду (35), то ряд (35) також збігається і називається абсолютно збіжним.

Таким чином, збіжність числових рядів з комплексними членами досліджується з використанням відомих ознак збіжності числових рядів з дійсними членами (додатних або знакозмінних).

18.5.2. Функціональні та степеневі ряди.

Ряд функцій комплексної змінної

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots$$

називають функціональним рядом.

Сукупність z, для яких усі члени ряду визначені і ряд збігається, називають областю збіжності функціонального ряду.

Якщо для усіх z області визначення D функціонального ряду

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots \quad (36)$$

існують числа a_n такі, що

$$|f_n(z)|\le a_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний, то функціональний ряд (36) називають правильно збіжним.

Правильно збіжні на множині D функціональні ряди комплексної змінної абсолютно збіжні в кожній точці $z\in D$ і мають, наприклад, такі властивості:

1)Якщо члени ряду (36) неперервні на дузі Г і ряд правильно збігається на Г, то його сума $S(z)$ неперервна

на Г і ряд (36) можна почленно інтегрувати по дузі Г, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Gamma} f_n(z)dz=\int_{\Gamma} S(z)dz.$$

2)Якщо члени правильно збіжного в області D функціонального ряду (36) є аналітичними функціями в D, то сума $S(z)$ цього ряду також аналітична функція в області D і ряд (36) можна почленно диференціювати в області D скільки завгодно раз.Зокрема

$$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z) \qquad (37)$$

Частинним випадком функціональних рядів комплексної змінної z є степеневі ряди вигляду

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad (38)$$

$$a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_n z^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n. \qquad (39)$$

Сума $S(z)$ степеневого ряду (38) є аналітичною функцією в крузі збіжності $|z-z_0|<R$. На колі $|z-z_0|<R$ можуть знаходитися як точки збіжності, так і точки розбіжності ряду.

Степеневі ряди можна почленно інтегрувати по будь-якій дузі, яка належить кругу збіжності.

Ряд (38) заміною $z-z_0=\xi$ зводиться до ряду вигляду (39).

Радіус збіжності R ряду (39) знаходять за формулою

Даламбера

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (40)$$

або за формулою Коші

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (41)$$

Приклад 14. Визначити круг збіжності ряду

$$\frac{3z}{1} - \frac{(3z)^2}{2} + \frac{(3z)^3}{3} - \dots$$

Розв'язання. Радіус збіжності заданого ряду знайдемо за формулою (40)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n}{n}}{\frac{3^{n+1}}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n(n+1)}{3^{n+1}n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}.$$

Отже, заданий ряд при $|z| < \frac{1}{3}$ збігається, а при $|z| > \frac{1}{3}$ розбіжний. При $|z| = \frac{1}{3}$ заданий ряд приймає вигляд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots,$$

тобто є числовим знакозмінним рядом, який збігається умовно.

18.5.3 ВПРАВИ

1. Знайти область збіжності ряду:

$a)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$; $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$; $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$; $\quad d)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}[(n-1)z\ ]^{n-1}$.

2. Визначити круг аналітичності суми ряду:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}$; $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{n-1}$.

18.5.4. Розклад в ряд Тейлора.

Аналітичну функцію $f(z)$ в кожній внутрішній точці її області аналітичності D можна розкласти в ряд Тейлора за формулою

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \qquad (42)$$

радіус збіжності якого дорівнює відстані від точки a до найближчої до a особливої точки (точки, де функція $f(z)$ не є аналітичною).

Якщо функція $f(z)$ розкладається в степеневий ряд в околі точки $z = a$

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad (43)$$

то цей ряд буде її рядом Тейлора, коефіцієнти якого знаходять за формулами:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - a} = f(a)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \qquad n = 1,2,...$$

Якщо в розкладі (43)

$$c_0 = c_1 = c_2 = ... = c_{m-1} = 0, \qquad c_m \neq 0,$$

то точку a називають m кратним нулем функції $f(z)$.

В околі точки a, яка є m кратним нулем функції $f(z)$, функцію можна представити у вигляді

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \quad \text{де}$$

$\varphi(z) = c_m + c_{m-1}(z-a) + ... + c_n(z-a)^{n-m} + ...$ є аналітичною функцією в точці a і $\varphi(a) = c_m$.

Найчастіше використовують наступні розклади функцій комплексної змінної в ряд Тейлора

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ...$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + ...$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot z^n, \qquad |z| < 1$$

$$shz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \qquad chz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Приклад 15. Знайти ряд Тейлора функції

$$f(z) = \frac{1}{z-3} \quad \text{в околі} \quad z_0 = 1.$$

Розв'язання. Перетворення

$$\frac{1}{z-3} = \frac{-1}{2-(z-1)} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}}$$

дозволяє розкласти $\left(1 - \frac{z-1}{2}\right)^{-1}$ як суму нескінченної геометричної прогресії $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n}$ із знаменником $\frac{|z-1|}{2} < 1$.

Тому $\frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$.

Круг збіжності цього розкладу $|z-1| < 2$. Точка $z = 3 \in \{|z-1| = 2\}$ є особливою точкою функції $f(z)$, яка лежить на колі круга збіжності.

18.5.5 ВПРАВИ

1)Розкласти в ряд за степенями z функції:

$a)\cos^2 z;\quad b)e^{3z};\quad c)sh\frac{z}{2};\quad d)\ln(2+z).$

2)Знайти ряд Тейлора функції $f(z)=\frac{1}{z-4}$ в околі точки $z_0=1$.

3)Довести формулу Ейлера

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y.$$

використовуючи розклади $e^{iy},\sin y$ та $\cos y$.

18.6. Ряди Лорана.
18.6.1. Теоретичні відомості.

Аналітична в кільці $0\le r<|z-z_0|<R$ функція $f(z)$ в усіх точках кільця розкладається в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad (44)$$

коефіцієнти якого обчислюють за формулами

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}\qquad n=0,\pm1\pm2,...;(45)$$

де $\gamma-$будь-яке коло з центром в точці z_0, що лежить всередині кільця.

Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n$ називають головною частиною ряду Лорана. Він збігається в усіх точках частини площини, що лежить поза внутрішнім колом кільця $|z-z_0|>r$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ називають правильною частиною ряду Лорана. Цей ряд є степеневим рядом Тейлора, що збігається в усіх точках всередині круга, обмеженого зовнішнім колом кільця $|z-z_0|<R$.

Кільце $0\le r<|z-z_0|<R$ є перерізом областей збіжності правильної і головної частин ряду Лорана. В усіх точках кільця збіжності ряд Лорана абсолютно збіжний.

Ряд Лорана можна почленно інтегрувати по будь-якому колу, концентричному до кіл, що обмежують кільце збіжності, його можна диференціювати почленно скільки завгодно (n) раз всередині кільця збіжності.

Розкладання аналітичної функції $f(z)$ в кільці $0\le r<|z-z_0|<R$ в ряд Лорана - єдине.

Деякі способи розкладання функцій в ряд Лорана.

Формула (45) знаходження коефіцієнтів ряду Лорана недостатньо зручна для обчислення. В багатьох випадках треба розкласти в ряд Лорана дробово-раціональні функції. В цих випадках розкладання в ряд Лорана зводиться до розкладання в ряд геометричної прогресії функцій вигляду:

$$\frac{A_k}{(z-z_k)^{m_k}}.$$

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 16. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в областях:

$a)|z|<1;\quad b)1<|z|<2;\quad c)(|z|>2.)$

Розв'язання. Розкладаючи задану функцію на елементарні дроби, отримаємо

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}. \qquad (46)$$

Кожен дріб будемо розкладати в ряд геометричної прогресії у відпловідних областях.

$a)|z|<1:$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{-1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right), \qquad \left|\frac{z}{2}\right|<\frac{1}{2};$$

$$\frac{-1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

Підставимо ці розклади в (46) і отримаємо ряд Лорана вигляду:

$$f(z)=\frac{-1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)+\left(1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{4}\right)z+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n+\ldots$$

Отже,

$$c_n=1-\frac{1}{2^{n+1}}, \qquad n=0,1,2,\ldots; \qquad c_{-n}=0, \qquad n=1,2,..$$

$b)1<|z|<2:$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{-1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right), \qquad \frac{1}{2}<\left|\frac{z}{2}\right|<1;$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right), \qquad \frac{1}{2}<\left|\frac{1}{z}\right|<1;$$

Тому за формулою (45) одержуємо ряд Лорана вигляду:

$$f(z)=\frac{-1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^{n+1}}+\ldots\right)$$

Тепер при $n=0,1,2,\ldots$ маємо: $c_n=\frac{-1}{2^{n+1}}$; при $n=-1,-2,\ldots$ маємо $c_n=-1$ або $c_{-n}=-1$ при $n=1,2,\ldots$

$c)|z|>2:$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\ldots+\frac{2^n}{z^n}+\ldots\right), \qquad \left|\frac{2}{z}\right|<1;$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right), \qquad \left|\frac{1}{z}\right|<1.$$

Отже,

$$f(z)=\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\ldots+\frac{2^n}{z^{n+1}}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^{n+1}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\ldots+\frac{2^n-1}{z^{n+1}}+\ldots$$

Тут $c_n=0$, при $n=0,1,2,\ldots;\ c_{-n}=2^n-1$, при $n=1,2,\ldots$

18.6.2 ВПРАВИ

1)Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=\frac{1}{(z^2-1)}$ в кільці $0<|z-1|<2.$

2)Знайти ряд Лорана функції $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ в областях:

$$a) 0<|z-1|<1; \qquad b) |z-1|>1.$$

3) Знайти ряд Лорана функції $f(z)=e^{1/z}$ в кільці точки $z_0=0$.

4) Знайти ряд Лорана в околі точки $z_0=3$. функцій:

$$a) f(z)=\cos\frac{1}{z-3}; \quad b) f(z)=\cos\frac{z}{z-3};$$

$$c) f(z)=\sin\frac{z}{z-3}.$$

Рекомендація. При розв'язанні прикладів $b)$ та $c)$ використати тригонометричні формули:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

5)Розкласти в Лорана в околі точки z=0 функції:

$$a)\frac{\sin z}{z^2}; \quad b) z^3\cdot e^{1/z}; \quad a)\frac{1}{z-2}; \quad a)\frac{1}{z(1-z)}.$$

18.7. Особливі точки та інтегральні лишки аналітичних функцій.

18.7.1. Класифікація ізольованих особливих точок.

Особливу точку z_0 однозначної аналітичної функції $f(z)$ називають ізольованою, якщо в її околі $0<|z-z_0|<R$ функція $f(z)$ не має інших особливих точок.

В околі $0<|z-z_0|<R$ ізольованої особливої точки z_0 функціія $f(z)$ розкладається за формулами (45) та (46).

Для класифікації ізольованих точок використовують ряд Лорана.

Особливу точку z_0 аналітичної функції $f(z)$ називають усувною (правильною), якщо в околі $0<|z-z_0|<R$ точки z_0 ряд Лорана функції $f(z)$ має лише правильну частину, тобто

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Особливу точку z_0 називають полюсом, порядка m, якщо ряд Лорана для функції $f(z)$ в околі z_0 має лише m членів головної частини ряду

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad c_{-m}\neq 0,$$

Число m називають порядком (кратністю) полюса.

При $m=1$ *точку* z_0 *називають простим полюсом.*

Особливоу точку z_0 називають істотно особливою, якщо ряд Лорана функції $f(z)$ в околі z_0 має головну частину, тобто приймає вигляд (44).

Тип особливих точок аналітичної функції $f(z)$ можна визначити, не розкладаючи функцію в ряд Лорана, за допомогою наступних ознак.

Ознаки особливих точок.

Ознака правильної особливої точки: Нехай функція $f(z)$ аналітична в околі $0<|z-z_0|<R$ точки z_0. Тоді, щоб z_0 була *правильною точкою* функції $f(z)$, необхідно і достатньо, *щоб існувала скінченна границя*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=a. \qquad (47)$$

Приклад 17. Довести, що для функції

$$f(z)=\frac{e^{3z}-e^{5z}}{\sin 2z}$$

точка $z=0$ є правильною особливою точкою.

Доведення. Використовуючи правило Лопіталя, знаходимо

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{3z}-e^{5z}}{\sin 2z}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{z\to 0}\frac{3e^{3z}-5e^{5z}}{2\cos 2z}=\frac{3-5}{2}=-1.$$

Отже, $z=0$ є усувною (правильною) точкою заданої $f(z)$.

Ознака полюса: *Для того, щоб z_0 була полюсом $m-$го порядку аналітичної функції $f(z)$ в околі $z=z_0$, необхідно і лостатньо, щоб вона була нулем порядку m функції $\frac{1}{f(z)}$.*

Приклад 18. Визначити порядок полюса функції

$$f(z)=\frac{1}{z-\sin z}.$$

Розв'язання. Знайдемо порядок нуля функції $z-\sin z$ в точці 0:

$$z-\sin z=z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-..\right)=\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+..$$

Отже, точка $z=0$ є нулем кратності 3, тому задана $f(z)$ має в точці $z=0$ полюс третього порядку.

Ознака істотно особливої точки. *Точка z_0 буде істотно особливою точкою аналітичної функції $f(z)$, якщо $\lim_{z\to z_0} f(z)$ не існує.*

Приклад 19. Визначити тип особливої точки $z_0=1$ в околі $0<|z-z_0|<\infty$ функції $f(z)=\sin\frac{1}{z-1}$.

Розв'язання. Границя функції $\sin\frac{1}{z-1}$ не існує, оскільки залежить від способу прямування $z\to 1$.

Можна розв'язати цей приклад і так: ряд Лорана функції

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot(z-1)^{2n+1}}$$

має лише головну частину. Тому $z_0=1$ є істотно особливою точкою функуції $f(z)$.

Зауваження. Нехай точка $z=\infty$ буде ізольованою для функції $f(z)$. Коло $|z|=R<\infty$ є межею околу точки $z=\infty$. Розглянемо функцію $\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ в околі $0<|\xi|\le\frac{1}{r}<R$ ізольованої точки $\xi=0$. Функція $\varphi(\xi)$ в околі точки $\xi=0$. розкладається в ряд Лорана. За допомогою оберненого відображення $z=\frac{1}{\xi}$ дістаємо ряд Лорана функції $f(z)$ в околі $z=\infty$, оскільки

$$\varphi(\xi)=\phi\left(\frac{1}{z}\right)=f(z).$$

Приклад 20. Розкласти в ряд Лорана в околі точки $z=\infty$ функцію $f(z)=e^{\frac{z}{z+1}}$.

Розв'язання. Функція $f(z)$ має особливу точку $z=-1$. Функцією $z=\dfrac{1}{\xi}$ перетворимо окіл $|z|>1$ точки $z=\infty$ функції $f(z)$ в окіл точки $\xi=0$ функції $\varphi(\xi)=e^{\frac{1}{\xi+1}}$.

Оскільки $\lim\limits_{\xi\to 0}\varphi(\xi)=\lim\limits_{\xi\to 0}e^{\frac{1}{1+\xi}}=e,$

то точка $\xi=0$ - правильна точка функції $\varphi(\xi)$, тому $z=\infty$ - правильна точка функції $f(z)$.

Знайдемо розклад функції $\varphi(\xi)$ в степеневий ряд в околі $\xi=0$: $\varphi(0)=e;$

$$\varphi'(\xi)=\frac{-1}{(1+\xi)^2}\cdot e^{\frac{1}{1+\xi}}\Rightarrow\varphi'(0)=-e;$$

$$\varphi''(\xi)=\left(\frac{2}{(1+\xi)^3}-\frac{1}{(1+\xi)^2}\right)\cdot e^{\frac{1}{1+\xi}}\Rightarrow\varphi''(0)=+e;$$

$$\varphi'''(0)=7e;\qquad \varphi^{(n)}=17e,\ldots$$

Звідси $\varphi(\xi)=e\left(1-\xi+\dfrac{1}{2}\xi^2+\dfrac{7}{6}\xi^3+\dfrac{17}{24}\xi^4+\ldots\right)\Rightarrow$

$$f(z)=e\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{7}{6z^3}+\frac{17}{24z^4}+\ldots\right),$$

тобто $f(z)$ розкладається в околі точки $z=\infty$ в головну частину ряду Лорана.

18.7.2. Інтегральні лишки аналітичних функцій.

Одним з найбільш важливих застосувань теорії аналітичних функцій є обчислення криволінійних, визначених та невласних інтегралів за допомогою лишків.

Означення 20. Інтегральним лишком або просто лишком однозначної аналітичної функції $f(z)$ в її ізольованій точці z_0 називають коефіцієнт c_{-1} при $\dfrac{1}{z-z_0}$ у ряді Лорана в околі цієї точки і позначають

$$\underset{z_0}{res}\, f(z)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma} f(\xi)d\xi, \qquad (48)$$

де γ – замкнений контур, всередині якого знаходиться точка z_0 і не має інших ізольованих особливих точок функції.

Із означення лишків випливає, що лишок в правильній особливій точці дорівнює нулеві.

Обчислення лишків функції в полюсах.

Нехай функція $f(z)$ має в точці a полюспершогопорядку, тоді

$$\underset{a}{res}\, f(z)=c_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z). \qquad (49)$$

Якщо $f(z)=\dfrac{g(z)}{\varphi(z)}$, причому $g(z)$ та $\varphi(z)$ аналітичні функції в околі точки a і $g(a)\neq 0$, $\varphi(z)$ має в точці a

однократний нуль (тобто $\varphi(a)=0,\quad \varphi'(a)\neq 0$), тоді точка a є полюсом першого порядку функції $f(z)$, тому за формулою (49) одержуємо:

$$\underset{a}{res}\, f(z)=\frac{g(a)}{\varphi'(a)} \qquad (50)$$

Нехай тепер $f(z)$ має в точці a полюс порядку m,

тоді $c_{-1}=\underset{a}{res}\, f(z)=\dfrac{1}{(m-1)!}\cdot\lim\limits_{z\to a}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m\cdot f(z)\right]$ (51)

Приклад 21. Обчислити лишок функції $\dfrac{z+1}{z^2+4}$ відносно її полюсів.

Розв'язання. Оскільки знаменник z^2+4 має два однократних нулі в точках $2i$ та $-2i$, то задана функція має полюси першого порядку в цих точках. Застосовуючи формулу (50), отримаємо:

$$\underset{2i}{res}\frac{z+1}{z^2+4}=\left.\frac{z+1}{2z}\right|_{z=2i}=\frac{2i+1}{4i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i;$$

$$\underset{-2i}{res}\frac{z+1}{z^2+4}=\left.\frac{z+1}{2z}\right|_{z=-2i}=\frac{-2i+1}{-4i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i;$$

Приклад 22. Знайти лишок функції $\dfrac{1}{\left(z^2-1\right)^3}$ відносно полюса $z=1$.

Розв'язання. Функція $\left(z^2-1\right)^3=(z-1)^3(z+1)^3$ має в точці $z=1$ полюс третього порядку, оскільки знаменник $\left(z^2-1\right)^3$ має в цій точці трикратний нуль.

Потрібний лишок знайдемо за формулою (51) при $m=3$:

$$\underset{1}{res}\frac{1}{\left(z^2-1\right)^3}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-1)^3\cdot\frac{1}{(z-1)^3\cdot(z+1)^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(-3)(-4)(z+1)^{-5}=\frac{12}{2}\cdot\frac{1}{32}=\frac{3}{16}.$$

18.7.3 ВПРАВИ

1) Знайти усі особливі точки заданих функцій і визначити їх тип:

$a)\dfrac{e^z-1}{z}$; $b)\dfrac{1}{z^4}$; $c)e^{1/z^2}$; $d)\cos\dfrac{1}{z}$; $e)\cos\dfrac{1}{z+1}$;

$f)z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$; $g)\dfrac{1}{z^2\left(z^2-9\right)}$; $h)\dfrac{z+2}{z(z-1)^3(z+2)}$.

2) Визначити типи особливих точок $z=\infty$ заданих функцій:

$a)\dfrac{z^2+4}{e^z}$; $b)\sqrt{(z-1)\cdot(z-2)}$; $c)e^{1/z^2}$;

$d)\dfrac{1}{\cos z}$; $e)\sin\dfrac{1}{1-z}$.

3) Знайти лишки в усіх особливих точках заданих функцій:

$a)\dfrac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}$; $b)\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+4}$; $c)\dfrac{chz}{\left(z^2+1\right)(z-3)}$;

33[69]

$$c)\frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2};\qquad e)z^2\cdot\sin\frac{1}{z^2};\qquad f)z^2\cdot e^{1/z};$$

$$g)\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)};\qquad h)\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}.$$

18.7. Обчислення інтегралів з використанням лишків.

18.8.1. Основна теорема про лишки.

Якщо функція $f(z)$ неперервна на межі C області D і аналітична всередині цієї області за виключенням скінченної кількості ізольованих точок $a_1, a_2, ..., a_n,$ тоді

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{a_k}{res}\, f(z) \qquad (52)$$

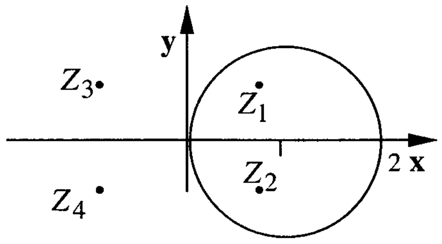
Теорема про лишки дозволяє звести обчислення інтегралів по замкненених контурах до обчислення лишків.

Приклад 23. Обчислити інтеграл $\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$, де C – коло $x^2+y^2=2x$, яке обходять однократно в додатному напрямку.

Розв'язання. Спочатку зведемо рівняння кола C до канонічного вигляду:

$$x^2+y^2=2x, \Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1.$$

Отже, C є коло з центром в точці (1;0) і радіусом 1 (мал.6)



Мал.6

Функція $\frac{1}{z^4+1}$ має однократні полюси в точках

$$z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}, \qquad k=0,1,2,3,... \quad \text{тобто}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi 4}{} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};\quad z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

Всередині контура C знаходяться дві особливі точки підінтегральної функції z_1 та z_2, тому за основною теоремою про лишки маємо:

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\underset{z_1}{res}\frac{1}{z^4+1} + \underset{z_2}{res}\frac{1}{z^4+1}\right) \qquad (53)$$

Знайдемо потрібні лишки, поклавши $g(z) = g(a) = 1$:

$$\underset{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{res}\frac{1}{z^4+1}=\left.\frac{1}{\left(z^4+1\right)^{1}}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}=$$

$$=\frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}=\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}(-3)}=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{8}(1+i);$$

$$\underset{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}{res}\frac{1}{z^4+1}=\left.\frac{1}{\left(z^4+1\right)^{1}}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}=$$

$$=\frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}=\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}3}=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}(-1+i).$$

Підставимо знайдені лишки в рівність (53) і отримаємо:

$$\oint\limits_C\frac{dz}{z^4+1}=2\pi i\left[\frac{-\sqrt{2}}{8}(1+i)+\frac{\sqrt{2}}{8}(-1+i)\right]=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

18.8.2. Застосування лишків до обчислення невластивих інтегралів.

Нехай функція $f(z)$ задовольняє умовам:

1)функція $f(z)$ аналітична у верхній півплощині $(\operatorname{Im} z>0)$ за виключенням скінченної кількості особливих точок $a_1,a_2,\dots,a_n$, що лежать у верхній частині півплощини $(\operatorname{Im} a_k>0,\quad k=1,2,\dots,n)$;

2) $\max|z|\cdot|f(z)|=0$ при $|z\to\infty|$

Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\underset{a_k}{res}f(z).\qquad(54)$$

Приклад 24.Обчислити $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$ який має дві особливі точки $z_1=2i$ та $z_2=-2i$, причому у верхній півплощині лежить лише полюс другого порядку $z_1=2i$.

Оскільки $\lim\limits_{|z|\to\infty}\max|z|\cdot\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}=0,$

то за формулою (54) знаходимо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}=2\pi i\cdot\underset{2i}{res}\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}=2\pi i\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+2i)^2}\right)=$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to 2i}\frac{-2}{(z+2i)^3}=-4\pi i\cdot\frac{1}{(4i)^3}=\frac{\pi}{16}.$$

В операційному численні доводиться обчислювати інтеграли виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \cdot f(x)dx \qquad \text{при} \quad p > 0.$$

Часто це вдається зробити за допомогою леми Жордана.

Лема Жордана. *Якщо функція $f(z)$ у верхній півплощині $(\operatorname{Im} z > 0)$ прямує до нуля рівномірно відносно $\arg z$ при $|z| \to \infty$, то для будь-якого додатного числа* p:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{ipz} \cdot f(z)dz = 0, \qquad (55)$$

де C_R – півколо радіуса R, яке знаходиться у верхній півплощині.

Теорема 5. *Якщо $f(z)$ аналітична у верхній півплощині за виключенням скінченної кількості точок $a_1, a_2, ..., a_n$ і $\max|f(z)| \to 0$ при $|z| \to \infty$, тоді для довільного p>0*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \cdot f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{a_k}{res}\, e^{ipz} f(z) \quad (56)$$

Наслідок. Якщо в лівій частині рівності (56) замінити e^{ipx} через $\cos px + i\sin px$ за формулою Ейлера, то отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos px \cdot f(x)dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin px \cdot f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{a_k}{res}\, e^{ipz} f(z) \quad (57)$$

або

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos px \cdot f(x)dx = \operatorname{Re}\left[\ 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{a_k}{res}\, e^{ipz} f(z)\ \right] \qquad (58)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin px \cdot f(x)dx = \operatorname{Im}\left[\ 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{a_k}{res}\, e^{ipz} f(z)\ \right] \qquad (59)$$

▼ **Зауваження.** Якщо $f(z)$ - раціональна функція, то для існування інтегралів (58) та (59) необхідно, щоб дріб був правильним і знаменник не мав дійсних коренів.

Приклад 25. Обчислити інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^2 + 4x + 8} dx.$$

Розв'язання. Функція $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 4z + 8}$ аналітична у верхній півплощині за виключенням точки $z_1 = -2 + 2i$, задовольняє усім умовам теореми 5, тому за формулою (59) одержуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^2 + 4x + 8} dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i \cdot \underset{-2+2i}{res} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 4z + 8}\right]$$

Знайдемо потрібний лишок відносно полюса першого порядку:

$$\underset{-2+2i}{res}\frac{ze^{iz}}{z^2+4z+8}=\frac{(-2+2i)e^{i(-2+2i)}}{2(-2+2i)+4}=$$

$$=\frac{1}{2i}(-1+i)e^{-2}(\cos 2-i\sin 2)=\frac{e^{-2}}{2i}[-\cos 2+\sin 2+i(\cos 2+\sin 2)]$$

Отже,

$$2\pi i\cdot\underset{-2+2i}{res}\frac{ze^{iz}}{z^2+4z+8}=\pi e^{-2}[-\cos 2+\sin 2+i(\cos 2+\sin 2)]$$

Візьмемо уявну частину виразу, що стоїть справа. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot\sin x}{x^2+4x+8}dx.=\pi e^{-2}(\cos 2+\sin 2)$$

18.8.3 ВПРАВИ

1)Обчислити:

$a)\int_C\frac{z^3}{2z^4+1}dz,$ де C – коло $|z|=1;$

$b)\int_C\frac{z}{(z-1)^2(z-3)}dz,$ де $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1;$

$c)\int_C\frac{1}{z^4+1}dz,$ де $C:x^2+y^2=4x;$

$d)\int_{|z|=3}\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz,$

$t)\int_C\frac{z+1}{z^2+2z-3}dz,$ де $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1.$

2)Обчислити невластиві інтеграли:

$a)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx;$ $b)\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx;$ $c)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2-2x+10}dx;$

$a)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx;$ $a)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}dx$ $(a>0);$

$c)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx;$

18.9. Ознаки аргументу та максиму модуля.

Ознака аргументу. Нехай функція $f(z)$ не має нулів і особливих точок на замкненому контурі Г і має всередині Г скінченну кількість особливих точок - полюсів. Тоді різниця між кількістю нулів та кількістю полюсів функції $f(z)$ всередині контуру Г дорівнює кількості обертів, які описує вектор, що з'єднує початок координат з точкою

$w = f(z)$, при однократному обході точкою z контуру Г в додатному напрямку. При цьому кожен нуль і кожен полюс зараховують стільки разів, яка їх кратність.

Ознака максимуму модуля. Якщо функція $f(z) \neq const$ неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{D}$ і аналітична у внутрішніх точках $\overline{D}$, то її модуль досягає найбільшого значення на межі області $\overline{D}$.

▼ **Зауваження.** Якщо функція $f(z)$ задовольняє в області $\overline{D}$ вказаним вище умовам і не має нулів в $\overline{D}$, то її модуль досягає найменшого значення на межі $\overline{D}$.

18.10. Поняття конформного відображення.

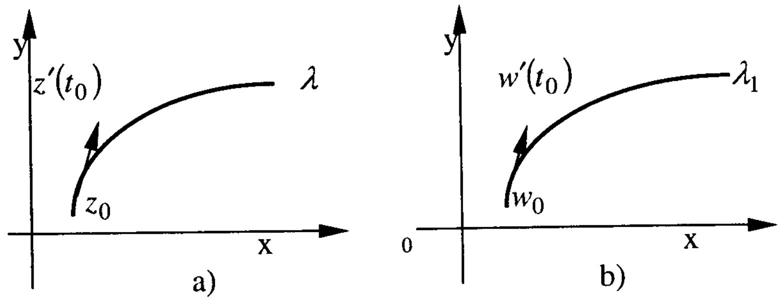
Функція комплексної змінної $w = f(z)$ здійснює відображення множини точок М z площини (області визначення $f(z)$). Якщо множина M_0 точок z - площини переходить в множину N_0 точок $w-$ площини, то кажуть, що множина N_0 є образом множини M_0 при відображенні $w = f(z)$.

Розглянемо деякі відображення, що здійснюються аналітичними функціями.

Нехай $w = f(z)$ аналітична в точці z_0, $f'(z_0) \neq 0$, $f'(z_0) = re^{i\alpha}$. З'ясуємо геометричний зміст чисел r та α. Проведемо через точку z_0 дотичну. Якщо крива λ задана параметричним рівнянням

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{і} \quad z_0 = z(t_0) = x(t_0) + iy(t_0),$$

то напрям дотичної до λ в точці z_0 задається вектором $(x'(t_0); y'(t_0))$ або комплексним числом $z'(t_0)$. (мал.7)



Мал.7

Функція $w = f(z)$ переводить криву λ в деяку криву λ_1 через на $w-$ площині з параметричним рівнянням $w = w(t) = f(z(t))$, яка проходить через точку $w_0 = f(z_0)$ (мал.7b).

Напрям дотичної до λ_1 в точці w_0 задається комплексним числом $w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(z_0)$. Маємо

$$Arg w'(t_0) = Arg z'(t_0) + \alpha,$$

звідси випливає: аргумент α похідної $f'(z_0)$ дорівнює куту, на який повертається дотична до усіх кривих в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$.

Зокрема, якщо дві криві λ та λ_2, що проходять через точку z_0, мають між собою кут φ, то кут між їх образами τ_1 та τ_2 на w - площині також дорівнює φ, причому збігається напрям відліку.

Маємо:

$$r = |f'(z_0)| = \left| \lim_{z \to z} \frac{w - w_0}{z - z_0} \right| = \lim_{z \to z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}$$

Величина $\dfrac{|w-w_0|}{|z-z_0|}$ вказує величину розтягування проміжку $[z_0;z]$ при відображенні $w=f(z)$, тому $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{|w-w_0|}{|z-z_0|}$

називають коефіцієнтом розтягування в точці z_0. Оскільки границя не залежить від напрямку $z\to z_0$, то коефіцієнт розтягування r однаковий за усіма напрямами, що виходять з точки z_0. -лінійної функції.

2)Нехай задані три точки z_1,z_2,z_3 на $z-$площині і три

Означення 21. Відображення $z-$площини (або частини цієї площини) в $w-$площину, яке задовольняє умовам:

1) зберігає кути і напрямки їх відліку;

2) розтягує однаково (в малому околі) за усіма напрямками, називають конформним відображенням.

Отже, відображення, яке здійснюється аналітичною функцією $w=f(z)$ з відмінною від нуля похідною, є конформним відображенням.

В багатьох застосуваннях функцій комплексної змінної потрібно знаходити функцію $w=f(z)$, яка задовольняє конформне та взаємнооднозначне відображення заданої на $z-$площині області D на її образ - область D_1 $w-$площини.

При цьому дуже важливим є наступне правило:

Нехай знайдено конформне відображення $w=f(z)$, при якому межа ∂D області D переходить в межу ∂D_1

області D_1. Якщо при переміщенні точки z по межі ∂D в додатному напрямку відносно області D (область D залишається зліва від межі) **її образ w переміщується по межі ∂D_1 в додатному напрямку відносно області D_1, тоді область D переходить в області D_1 при цьому відображенні.**

Часто використовуються наступні твердження:

1)дробово-лінійна функція

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d-\text{комплексні сталі})$$

переводить будь-яке коло в коло або пряму – також в коло або пряму.

Цю властивість називають круговою властивістю дробово точки w_1,w_2,w_3 на $w-$ площині. Тоді існує єдина дробово-лінійна функція, яка переводить z_1,z_2,z_3 відповідно в w_1,w_2,w_3 і визначається формулою:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

І.ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
НАВЧАЛЬНОЇ ПРОГРАМИ
ДИСЦИПЛІНИ
"ВИЩА МАТЕМАТИКА"

№№ розд. і тем	Назва розділів та їх зміст
1.0	**Вступ до курсу.** Характерні риси вищої математики та її роль в НТП. Література. Форми контролю. Вхідний контроль. Система координат.
1.	**Алгебра(лінійна, векторна та комплексних чисел)**
1.1	Алгебра комплексних чисел.
1.2	Визначники та їх властивості. Визначники 2,3 та n-го порядків. Мінори, алгебраїчні доповнення. Розв'язання СЛАР за правилом Крамера.
1.3	Дії з матрицями.Різновиди матриць.Алгебраїчна сума та множення на число.Множення матриць. Визначення та знаходження оберненої матриці та рангу матриць. Знаходження власних векторів та значень матриці.
1.4	Система алгебраїчних рівнянь. Різновиди систем. Теорема Кронекера-Капеллі. Розв'язування систем матричним методом та методом Гаусса і Гаусса-Жордана.
1.5	Векторна алгебра. Визначення та способи задання векторів, координати вектора. Дії з векторами у геометричній та координатній формах. Розклад вектора за базисом.
2.	**Основи аналітичної геометрії**
2.1	Предмет та метод аналітичної геометрії. Основні та найпростіші задачі. Поняття рівняння лінії, поверхні.

1	2
2.2	Різновиди рівняння прямої та площини. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої. Умови паралельності та перпендикулярності.
2.3	Криві лінії на площині.
2.4	Рівняння площини та прямої в просторі. Кут між прямою та площиною. Відстань від точки до площини. Знаходження точки перетину прямої і площини.
2.5	Поверхні другого порядку. Рівняння конічних, циліндричних поверхонь та поверхонь обертання.
	Математичний аналіз
3	Вступ до аналізу. Змінні, послідовності, функції.
3.1	Способи задання функції. Нескінченно малі та нескінченно великі величини, їх властивості. Визначення, властивості та знаходження границь. Властивості неперервних функцій. Класифікація розривів.
3.2	Диференціальне числення функцій однієї змінної. Визначення похідної, її геометричний зміст. Правила диференціювання. Таблиця похідних. Похідні функцій заданих неявно та параметрично. Монотонність, угнутість, повне дослідження функції. Похідні вищих порядків. Диференціали та їх застосування до наближених обчислень.
3.3	Диференціальне числення функції багатьох змінних. Частинні похідні, повний диференціал, градієнт функції, похідна за напрямом. Визначення та знаходження екстремуму, найбільшого та найменшого значень функції двох змінних в області. Невизначений інтеграл. Означення та властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів, правила та методи інтегрування. Інтегрування раціональних дробів, ірраціональностей, виразів, що містять

1	2
	тригонометричні функції.
	Поняття про інтеграли, що не можна виразити через елементарні функції.
3.5	Визначені та невластиві інтеграли. Означення та властивості інтеграла. Теорема існування. Методи обчислення визначених інтегралів. Різновиди невластивих інтегралів, дослідження їх збіжності. Застосування інтегралів до обчислення геометричних та фізичних задач.
3.6	Кратні інтеграли. Означення, влативості та різновиди інтегралів по області їх застосування до геометричних, фізичних та електротехнічних задач. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду, повторних, подвійних, трикратних та потрійних інтегралів. Заміна змінних у подвійних та потрійних інтегралах. Різновиди невластивих інтегралів по області, дослідження їх збіжності.
4.	**Звичайні диференційні рівняння.**
4.1	Основні поняття та задачі теорії диференційних рівнянь. Теорема існування розв'язку диференційного рівняння першого порядку.
4.2	Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку (з подільними змінними, однорідних, лінійних, Бернуллі).
4.3	Розв'язування рівнянь, які дозволяють знизити порядок.
4.4	Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку, влативості розв'язків, теореми про структуру загальних розв'язків ЛОДР та ЛНДР. Визначник Вронського.
4.5	Знаходження загальних розв'язків ЛОДР та ЛНДР із сталими коефіцієнтами.
4.6	Розв'язування систем диференціальних рівнянь (нормальної та лінійної із сталими коефіцієнтами)

1	2
	Ряди
5.1	Поняття числового ряду, часткової суми, суми, збіжності, розбіжності. Необхідна умова збіжності ряду. Гармонійний та геометричної прогресії ряди.
5.2	Достатні ознаки збіжності додатних числових рядів.
5.3	Знакопочережні ряди, види їз збіжності. Ознака Лейбніца.
5.4	Функціональні та степеневі ряди, їх область збіжності. Теорема Абеля.
5.5	Розклад функції в стетпеневий ряд та його застосування до наближених обчислень.
5.6	Розклад в ряд Фур'є функції з періодом 2л, 2L, заданих на [a,b], [0,L] , парних та непарних. Ряд Фур'є в комплексній формі.
5.7	Інтеграл та перетворення Фур'є.
5.8	Амплітудно-частотні характеристики періодичних та неперіодичних функцій.
6.	**Основи теорії поля**
6.1	Харатеристики скалярного та векторного полів.
6.2	Знаходження інтегралів по орієнтованій області.
6.3	Формули Остроградського, Гріна, Стокса та їх застосування.
6.4	Застосування операторів Гамільтона і Лапласа до операцій першого та другого порядків.
7.	**Основи теорії функцій комплексної змінної**
7.1	Дії з комплексними змінними та області в комплексній площині.
7.2	Послідовність та функції комплексної змінної, їх границі та неперервність.
7.3	Диференціювання та аналітичність.
7.4	Інтегрування. Теореми та формули Коші.
7.5	Ряди (числові, Тейлора, Лорана).
7.6	Класифікація ізольованих особливих точок.Поняття та

1	2
	знаходження лишків.
7.7	Обчислення інтегралів з використанням основної теореми про лишки.
8.	**Заключення. Огляд розділів навчальної програми та шляхи подальшого самостійного вдосконалення математичних знань.**

2. Список літератури

1. Барковський В.В., Барковська Н.В., Основи елементарної математики, - К., НАУ, 1999, 236 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Математика для економістів, -К., НАУ, 1997, 397 с.
3. Барковський В.В., Барковська Н.В., Вища математика для економістів, -К., ЦУЛ, 2002, 400 с.
4. Барковський В.В., Барковська Н.В., Вища математика. Ряди, гармонічний аналіз, перетворення Лапласа, теорії поля та функцій комплексної змінної,-К, ВАТ, "Книжкова друкарня наукової книги", 2002, 200с.
5. Берман Г.Н., Сборник задач по курсу математического анализа, -М., "Наука," 1972, 416 с.
6. Блудова Т.В., Мартиненко В.С., Теорія функцій комплексної змінної, -К., "Просвіта", 2000, 472 с
7. Валєєв К.Г., Джалладова І.А., Лютий О.І., Макаренко О.І., Овсієнко В.Г., Вища математика, НМП для самостійного вивчення дисципліни, -К., КНЕУ, 1999, 394 с.
8. Валєєв К.Г., Джалладова І.А., Вища математика, ч. І, -К., КНЕУ, 2001, 546 с
9.Грималюк В.П., Мартиненко В.С., Бойчук О.П., Вища матиматика (конспект лекцій, 1семестр) -К., КПІ, 1993, 240 с.
10. Демидович Б.П., Задачи и упражнения по математическому анализу,- М., "Наука", 1974, 472 с.

11. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа, ч.1., - М. "Наука", 1971, 509 с; ч.2, - М. "Наука", 1972, 447 с.
12. Клетник Д.В., Сборник задач по аналитической геометрии, - М., "Наука", 1972, 240 с
13. Кривуца В.Г., Імітаційне маделювання та прогнозування,- К., НАУ, 2000,205с.
14. Кривуца В.Г., Довгий О.С., Економіко-математичне моделювання, -К.,Либідь, 2001,201с.
15. Кривуца В.Г, Барковський В.В., Булгач В.Л., Математичні методи обробки сигналів до задач теорії зв'язку,-К,ДУІКТ, 2003, 128с.
16. Поддубний Г.В., Романовский Р.К., Математический анализ для радиоинженеров, - М., Изд-во МОСССР, 1976, 344 с.
17. Постников М.М., Аналитическая геометрия, - М., "Наука", 1979, 385 с
18. Цубербиллер О.Н., Задачи и упражнения по аналитической геометрии,- М., "Наука", 1966, 336 с.

3. Деякі відомості з елементарної математики

3.1. Модуль дійсного числа та його властивості

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

$$|-a| = |a|; \qquad |a|^2 = a^2;$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|};$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|; \qquad |a-b| \geq |a| - |b|.$$

3.2 Формули скороченого множення

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b);$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

3.3. Означення та властивості степеня

$a^0 = 1; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in N;$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad a^x : a^y = a^{x-y};$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \qquad (ab)^n = a^n \cdot b^n;$

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, m, n \in N, n \neq 1;$

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ або $\left(a^{1/k}\right)^{1/n} = a^{1/nk};$

3.4. Логарифми

$\log_a b = x \Rightarrow b = a^x$

Основна логарифмічна тотожність:

$a^{\log_a \varphi(x)} = \varphi(x);$

$\log_a 1 = 0; \qquad \log_a a = 1;$

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, \qquad c > 0, c \neq 1;$

$\log_c a + \log_c b = \log_c (ab);$

$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b};$

$\log_c a^m = m \log_c a;$

3.5. Раціональні рівняння

$1) ax \pm b = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{b}{a};$

$2) ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ б

$a \neq 0; \quad a, b, c, -$ *числа.*

$3) x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$

4) Теорема Вієта

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, & \text{якщо } x_1, x_2 \text{ корені} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; & \text{рівняння } ax^2 + bx + c = 0. \end{cases}$

3.6. Розклад на множники

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2);$$

3.7. Прогресії

<u>***Арифметична:***</u> $a_n=a_1+d(n-1);$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n;$$

<u>***Геометрична:***</u> $b_n=b_1q^{n-1};$

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q};$$

якщо $|q|<1,$ *то*

$$S=\lim_{x\to\infty}S_n=\frac{b_1}{1-q}.$$

3.8. Формули тригонометрії

3.8.1. Функції одного аргумента

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad tg\alpha\cdot ctg\alpha=1;$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1+ctg\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

3.8.2. Формули додавання

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

3.8.3. Формули подвійного та половинного аргументу:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}.$$

3.8.4. Перетворення суми функцій в добуток:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

3.8.5. Перетворення добутків функцій:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta));$$

3.8.6. Тотожності пониження степеня:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);\qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

3.8.7. Формули зведення та значень тригонометричних функцій

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$tg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0
$ctg\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

u	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$
$\sin u$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos u$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
tgu	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$
$ctgu$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$

Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В.

"Вища математика. Практикум."

Навчальний посібник

Керівник видавничих проектів — Р.О. Пляшко
Комп'ютерний набір — Я. Антошко, Т.І. Лавриненко
Комп'ютерна верстка — Т.І. Лавриненко

Підписано до друку 31.03.03. Формат 60x84 1/16.
Друк офсетний. Гарнітура Times New Roman Cyr.
Умовн. друк. арк. 31.6. Умовн. вид. арк. 33.9.

Видавництво "Центр Навчальної Літератури"
вул. Електриків, 23, м. Київ, Україна, 04176
т. 451-65-95, 416-20-63, т./ф. 416-04-47
e-mail: Centr-1@inbox.ru, Marketing@uabook.com,
Office@uabook.com, SBA@uabook.com, Meteor@uabook.com
Офіційний сайт: www.cul.com.ua