

В.С. Грабчук

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

**Рекомендовано Міністерством аграрної політики України
як навчальний посібник для студентів аграрних вищих
навчальних закладів I–II рівнів акредитації зі спеціальності
5.06010101 “Будівництво та експлуатація будівель і споруд”**

**Київ
"Аграрна освіта"
2010**

УДК 69.04.539.537

*Гриф надано Міністерством аграрної
політики України (лист № 18-2-28/942 від
30.07. 2010 р.)*

Укладач **Грабчук В.С.**, викладач Будівельного коледжу
Житомирського НАЕУ

Рецензенти: **Гуцало В.Д.**, викладач Будівельного коледжу
Житомирського НАЕУ;
Конвалова В.М., викладач Немирівського коледжу
будівництва та архітектури Вінницького НАУ;
Швидка В.П., викладач Чернівецького коледжу
будівництва та архітектури Львівського НАУ

Опір матеріалів: Навчальний посібник / Грабчук В.С. – К.:
Аграрна освіта, 2010. – 283 с.

ISBN № 978-966-7906-70-2

Детально висвітлено основні відомості про види деформацій,
методи розрахунків елементів конструкцій та деталей машин на
міцність, жорсткість і стійкість.

Після кожного параграфа посібника наведені приклади
розв'язання типових задач з детальними поясненнями.

Призначений для використання студентами при вивченні
дисципліни “Опір матеріалів”.

Буде корисним для фахівців інженерно-технічних спеціаль-
ностей.

ISBN № 978-966-7906-70-2

© В.С. Грабчук, 2010

З М І С Т

<i>Передмова</i>	7
<i>Розділ I. Вступ</i>	8
§1. Завдання опору матеріалів	8
§2. Короткі відомості з історії розвитку опору матеріалів	10
§3. Одиниці вимірювання фізичних та механічних величин в опорі матеріалів	11
§4. Поняття про пружні та пластичні деформації. Зовнішні сили (навантаження) та їх класифікація	13
§5. Основні гіпотези та припущення щодо властивостей матеріалів та характеру деформацій. Характеристика геометрії елементів конструкцій	14
§6. Визначення внутрішніх сил. Основні види деформацій бруса	20
§7. Напряга	23
Питання для самоконтролю	24
<i>Розділ II. Осьовий розтяг та стиск</i>	25
§8. Внутрішні сили при розтязі та стиску. Нормальна напряга в поперечному перерізі бруса. Принцип Сен-Венана	25
§9. Деформації при осьовому розтязі та стиску. Закон Гука. Модуль поздовжньої пружності	30
§10. Поперечна деформація. Коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона)	36
§11. Механічні випробування матеріалів	38
§12. Поняття про наклеп. Явище повзучості. Релаксація	45
§13. Потенційна енергія деформації при розтязі (стиску)	47
§14. Допустима напряга для матеріалу. Коефіцієнт запасу міцності	50
§15. Розрахунки на міцність при розтязі та стиску	53
§16. Вплив власної ваги бруса на напряга	56
§17. Поняття про місцеві напруги (концентрація напруг)	61
§18. Поняття про статично невизначені системи при розтязі та стиску	63
§19. Температурні та монтажні (початкові) напруги в статично невизначених системах	66
Питання для самоконтролю	69
<i>Розділ III. Елементи теорії напруженого стану</i>	70
§20. Напруги в похилих (косих) перерізах при одноосному розтязі (стиску). Закон парності дотичних напруг	70

§21. Поняття про головні напруги	74
§22. Напруги в похилих перерізах при двоосному розтязі (стискові)	75
§23. Деформації при плоскому та об'ємному напруженому стані. Узагальнений закон Гука	78
§24. Питома потенційна енергія пружної деформації при складному напруженому стані	81
§25. Поняття про теорії міцності	83
Питання для самоконтролю	90
Розділ IV. Практичні розрахунки на зсув та зминання	91
§26. Деформація зсуву. Закон Гука для зсуву	91
§27. Зминання. Допустимі напруги на зминання та розрахунок ...	95
§28. Приклади розрахунку заклепкових, зварних з'єднань та дерев'яних сполучень	96
Питання для самоконтролю	107
Розділ V. Геометричні характеристики плоских перерізів	108
§29. Осьовий, полярний та відцентровий моменти інерції	108
§30. Залежність між моментами інерції при повороті осей	111
§31. Моменти інерції найпростіших перерізів	112
§32. Головні осі інерції та головні моменти інерції. Залежність між осьовими моментами інерції відносно паралельних осей	117
Питання для самоконтролю	122
Розділ VI. Згин прямого бруса	123
§33. Основні поняття та визначення	123
§34. Поперечна сила та згинальний момент	125
§35. Залежності між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження (теорема Д.І. Журавського)	127
§36. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів для різних видів завантаження простих балок	129
§37. Застосування теореми Д.І. Журавського та правила побудови і перевірки епюр поперечних сил та згинальних моментів	136
§38. Нормальні напруги при згині. Жорсткість перерізу бруса при згині	142
§39. Дотичні напруги при згині	150
§40. Епюри дотичних напруг для прямокутного та двотаврового поперечних перерізів	155
§41. Розрахунки на міцність при згині	159

§42. Напружений стан при поперечному згині. Головні площадки та головні напруги	162
§43. Лінійні та кутові переміщення при згині	167
§44. Визначення переміщень методом початкових параметрів ...	168
§45. Потенційна енергія деформації при згині	176
§46. Теорема про взаємність робіт	177
§47. Формула Мора для знаходження переміщень при згині. Правило Верещагіна. Формула Сімпсона	179
§48. Розрахунок балок на жорсткість	186
Питання для самоконтролю	191
Розділ VII. Кручення прямого бруса круглого перерізу	192
§49. Відомості про деформацію кручення прямого бруса круглого перерізу	192
§50. Крутний момент. Побудова епюри крутних моментів	193
§51. Напруги та деформації кручення	195
§52. Полярний момент опору для круга та кільця. Розрахунки валів на міцність та жорсткість	198
Питання для самоконтролю	202
Розділ VIII. Складний опір	203
§53. Косий згин. Нормальні напруги при косому згині. Рівняння нульової лінії	203
§54. Розрахунки на міцність при косому згині. Визначення прогинів	207
§55. Позацентровий стиск (розтяг) бруса великої жорсткості	212
§56. Ядро перерізу. Положення нульової лінії	220
Питання для самоконтролю	225
Розділ IX. Поздовжній згин	226
§57. Поняття про стійкість форми стиснених стержнів. Критична сила	226
§58. Формула Ейлера. Вплив кінцевих закріплень на величину критичної сили	228
§59. Критична напруга. Гнучкість стержня. Границі застосування формули Ейлера	232
§60. Розрахунок центрально стиснених стержнів на міцність за допомогою коефіцієнта поздовжнього згину	236
Питання для самоконтролю	242

<i>Розділ X. Основи розрахунку на дію динамічних навантажень. Поняття про дію повторно-змінних навантажень</i>	243
§61. Поняття про дію динамічних навантажень	243
§62. Розрахунки на міцність при динамічних навантаженнях	244
§63. Поняття про дію повторно-змінних навантажень	250
Питання для самоконтролю	254
<i>Розділ XI. Основи розрахунку за граничним станом</i>	255
§64. Основні поняття про методи розрахунку будівельних конструкцій	255
§65. Суть методу розрахунку за граничним станом	258
Питання для самоконтролю	269
Додатки	270
Література	282

ПЕРЕДМОВА

Для підготовки кваліфікованих кадрів будівельників з високим рівнем технічної підготовки необхідні знання з усіх дисциплін, що вивчаються, а особливо спеціальних. Базою для вивчення спеціальних дисциплін є опір матеріалів. Так як на даний час частина матеріалу з дисциплін повинна вивчатися студентами самостійно, потрібен підручник, або навчальний посібник, з яким студент міг би працювати самостійно. Автор, на основі багаторічного досвіду викладання цієї дисципліни, намагався подати матеріал в доступній формі, щоб він був зрозумілий і студенту стаціонару, і заочнику.

Після відповідних параграфів наведені приклади розв'язання типових задач з детальним поясненням.

Після кожного розділу наведені основні питання для самоконтролю знань.

В навчальному посібнику застосована тільки система одиниць СІ та права система координатних осей.

При написанні рукопису були частково використані матеріали із джерел, вказаних в кінці посібника в спискові літератури.

Розділ I. ВСТУП

§ 1. ЗАВДАННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Будівлі та споруди, машини та механізми в процесі експлуатації повинні бути надійними та міцними, недорогими, простими у виготовленні та монтажі.

Всі вони складаються з окремих елементів: конструкцій або деталей. Кожна з цих деталей або конструкція навантажена по-різному, знаходиться під впливом якогось виду деформації. Тому надійність роботи та довговічність всієї споруди залежить від правильного розрахунку кожного елемента на міцність, жорсткість та стійкість.

Під міцністю елемента конструкції будемо розуміти його неруйнування під дією заданого навантаження. Що мається на увазі під заданим навантаженням? Наприклад, якщо по пішохідному мосту пустити колону вантажних автомобілів, звичайно, цей міст зруйнується, так як абсолютно міцного в природі не існує, а тільки стосовно заданого навантаження.

Під жорсткістю конструкцій та деталей машин будемо розуміти здатність їх чинити опір деформаціям. Деформація, як нам відомо, це зміна форми та розмірів тіла під дією зовнішніх сил. Конструкція вважається жорсткою, якщо вона мало деформується під дією заданого навантаження.

Під стійкістю будемо розуміти здатність елементів конструкцій зберігати за весь час експлуатації ту форму, яка надана при виготовленні. Наприклад, якщо колона під дією стиску стала випуклою, це значить, що вона втратила стійкість.

Крім перелічених вище вимог до будівель і споруд ставлять ще вимогу **економічності** їх зведення.

Вимога міцності конструкцій іноді пов'язана з необхідністю збільшення поперечних розмірів їх елементів, що робить їх важкими, а це, в свою чергу, веде до великих витрат матеріалів, труднощів транспортування та монтажу. Тобто робить споруду не економічною. В подальшому ми побачимо, що в багатьох випадках підвищення міцності можна досягти застосуванням більш раціональної форми поперечного перерізу при одночасному зменшенні його розмірів, тобто його полегшенням. Таким чином, вимоги міцності та економічності не завжди суперечні і в більшості випадків можуть бути узгоджені. Тому ми можемо сказати, що основне завдання опору

матеріалів – розробка методів, що дозволяють підбирати надійні та найбільш економічні розміри поперечних перерізів елементів конструкцій, а також найбільш доцільну їх форму. Крім того, в опорі матеріалів часто доводиться розв’язувати обернену задачу – перевіряти достатність прийнятих розмірів існуючих конструкцій, тобто перевіряти їх на міцність, жорсткість та стійкість.

Наука, що займається створенням основ розрахунку елементів конструкцій та деталей машин на міцність, жорсткість та стійкість, називається опором матеріалів.

Опір матеріалів є одним із розділів будівельної механіки (в широкому значенні слова), що є сукупністю наук про методи розрахунку споруд на міцність, жорсткість та стійкість. Іншими її розділами є статика та динаміка споруд, теорія пружності та теорія пластичності. В перших двох розділах висвітлюються ті ж питання, що і в курсі “Опір матеріалів”, з тією різницею, що в опорі матеріалів розглядаються питання розрахунку окремих елементів конструкцій, а в статистиці та динаміці споруд – цілих систем або конструкцій.

Теорія пружності, не відрізняючись від опору матеріалів в змісті їх загальних завдань, розв’язує задачі більш загальним та точним методом. Мета цього методу – перевірка спрощених розв’язків опору матеріалів та розв’язування таких задач, що за своєю складністю не можуть бути розв’язані методами опору матеріалів. Тому для теорії пружності характерне застосування більш складного математичного аналізу.

При розв’язанні основного завдання опору матеріалів використовуються як дослід, так і теорія, які в цій науці тісно пов’язані між собою.

Досліди дають можливість вивчити механічні властивості та поведінку кожного матеріалу як в найпростіших, так і в більш складних умовах його роботи. Теорія дозволяє застосовувати та узагальнювати результати дослідів для створення методу розрахунку конструкцій, що знаходяться в будь-яких умовах роботи. Відповідність теорії з дослідом визначається широкою практикою, де перевіряються як теоретичні висновки, так і дослідні дані.

Висновки, отримані в опорі матеріалів, широко використовуються в багатьох спеціальних технічних дисциплінах. Без знання та застосування цих висновків неможливо спроектувати та побудувати ні однієї споруди, що відповідає сучасним вимогам. Звідси стає зрозумілим значення опору матеріалів як науки та її місце серед спеціальних технічних дисциплін, в яких практичні результати

базуються на висновках опору матеріалів. В свою чергу в опорі матеріалів для обґрунтування висновків та методів розрахунку користуються даними таких дисциплін як фізика, теоретична механіка, математика, матеріалознавство та інші.

§ 2. КОРОТКІ ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ РОЗВИТКУ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Вважають, що наука про міцність матеріалів виникла в XVII сторіччі після виходу книги великого італійського вченого Г.Галілея “Бесіди та математичні доведення двох нових галузей науки”(1638 р.), в якій були закладені основи опору матеріалів. Протягом наступних двох сторіч багато видатних математиків, фізиків, інженерів внесли великий вклад в розвиток теоретичних положень науки про міцність матеріалів: Я. Бернуллі було виведено та розв’язано рівняння зігнутої осі балки при згині; Р. Гуком відкритий закон про пряму залежність між навантаженням та деформацією; О. Кулоном розв’язана задача розрахунку підпірних стін; Л. Ейлером – про стійкість центрально стиснених стержнів та ін. Але ці положення, як правило, носили чисто теоретичний характер і не могли бути застосовані на практиці.

В XIX сторіччі в зв’язку з розвитком промисловості, транспорту, будівництва виникла потреба розробки методів розрахунку міцності матеріалів. Навьє та Коші отримали систему рівнянь для розв’язку просторової задачі ізотропного тіла; Сен-Венаном розв’язана задача косоного згину бруса довільного поперечного перерізу; Клапейроном розроблений метод розрахунку нерозрізних балок за допомогою рівняння трьох моментів; Брессом – методика розрахунку двошарнірних та безшарнірних арок; Максвеллом та Мором – методика визначення переміщень; Д.І. Журавському належить теорія розрахунку мостових ферм, а також формула для визначення дотичних напруг при згині; А.В. Годолін розробив методи розрахунку товстостінних циліндрів; Х.С. Головін зробив розрахунок кривого бруса; Ф.С. Ясінський розв’язав задачу про визначення критичних напруг при поздовжньому згині.

В XX сторіччі роль російських та українських вчених в області розрахунку будівельних конструкцій стала провідною. М.М. Криловим, І.Г. Бубновим та П.Ф. Панковичем була створена загальна теорія розрахунку конструкцій. І.Г. Бубнову та Б.Г. Галеркіну належить один із найефективніших сучасних методів розрахунку конструкцій, що

лежать на ґрунтовій основі. В працях вчених С.П. Тимошенко, О.М. Дінника, С.В. Сересена, В.В. Болотіна, В.З. Власова, О.А. Ільюшина, І.М. Рабіновича, О.Р. Ржаніцина, Ф. Смірнова, В.Г. Шухова та багатьох інших були розроблені нові напрями створення зручних методів розрахунку на міцність, стійкість та динамічну дію різних складних просторових споруд.

Вивчаючи та узагальнюючи досвід будівництва та експлуатації інженерних споруд, професори А.Ф. Лолейт, О.О. Гвоздєв, М.С. Стрелецький розробили нову, більш раціональну методика розрахунку несучих елементів будівельних конструкцій за граничним станом.

На сучасному етапі велика увага приділяється наближенню розрахункових схем та основних припущень з дійсними умовами експлуатації будівель та споруд. З цією метою проводяться дослідження щодо виявлення впливу на напружено-деформований стан конструкцій змінного характеру параметрів міцності матеріалу, зовнішнього впливу, нелінійного зв'язку напруги та деформацій, великих переміщень тощо. Розробка відповідних розрахункових методик проводиться з використанням спеціальних розділів математики. Всі сучасні методи розрахунку розробляються з широким застосуванням електронно-обчислювальної техніки. На даний час створено велику кількість стандартних програм, що дозволяють не тільки проводити розрахунки різних споруд, але і робити конструювання окремих елементів та виконувати робочі креслення.

§ 3. ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ТА МЕХАНІЧНИХ ВЕЛИЧИН В ОПОРІ МАТЕРІАЛІВ

Для вимірювання різних фізичних та механічних величин в опорі матеріалів прийнята міжнародна система одиниць, скорочено СІ (система інтернаціональна).

В систему СІ покладено шість основних одиниць, перші три з яких безпосередньо відносяться до опору матеріалів:

одиниця довжини – метр ($1m$)

одиниця маси – кілограм ($1kg$)

одиниця часу – секунда ($1c$)

Інші одиниці цієї системи є похідними; до них відносяться, наприклад, одиниці, що часто зустрічаються в опорі матеріалів: сила,

* Більш детальні відомості з історії розвитку опору матеріалів викладені в книзі професора С.П. Тимошенко “История науки о сопротивлении материалов”(Гостехиздат, 1957)

тиск (механічна напруга), момент сили тощо.

Механічну напругу в подальшому будемо називати просто напругою.

За одиницю сили прийнято ньютон (H) – сила, що надає тілу масою в 1 кг прискорення, що дорівнює 1 м/с^2 . Таким чином

$$1H = \frac{1\text{кг} \cdot 1\text{м}}{\text{с}^2}$$

За одиницю тиску (напруги) прийнято паскаль ($Па$); $1Па = \frac{H}{\text{м}^2}$

За одиницю моменту сили або пари сил – ньютон-метр ($H \cdot \text{м}$)

За одиницю роботи сили (W) прийнято джоуль (дж) – це абсолютна робота сили при переміщенні точки її прикладання в напрямку дії сили на відстань 1м , тобто $1\text{дж} = 1H \cdot 1\text{м}$. Потужність N виражається у ватах (вт), тобто $1\text{вт} = 1 \frac{\text{дж}}{\text{с}}$.

У зв'язку з тим, що одиниця сили порівняно невелика, прийнято кратні одиниці з префіксами: мега (M) і кіло (k), числове значення яких відповідно дорівнює 10^6 та 10^3 .

$$1 \text{ мегаНьютон (МН)} = 1H \cdot 10^6$$

$$1 \text{ кілоНьютон (кН)} = 1H \cdot 10^3$$

$$1 \text{ мегаПаскаль (МПа)} = \frac{1MH}{\text{м}^2}$$

З метою попередження можливих помилок при практичному використанні системи СІ треба відмітити, що термін “*вага*” часто неправильно застосовується для характеристики маси.

Як відомо, в системі СІ одиницею маси є кілограм (кг), а одиницею сили (зокрема і сили тяжіння, тобто ваги) – Ньютон (H).

У всіх випадках, коли мається на увазі кількість речовини, наприклад, витрати матеріалу на елемент конструкції, необхідно говорити про масу, що виражається в кілограмах (або тонах, грамах).

В тих випадках, коли необхідно визначити, наприклад, вантажопідйомність крану або навантаження на фундамент, слід говорити про силу ваги та виражати її в одиницях сили, тобто в Ньютонях.

§ 4. ПОНЯТТЯ ПРО ПРУЖНІ ТА ПЛАСТИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ. ЗОВНІШНІ СИЛИ (НАВАНТАЖЕННЯ) ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

В теоретичній механіці тверде тіло розглядається як абсолютно тверде, тобто таке, що зовсім не змінює своєї форми та розмірів під дією зовнішніх сил.

Така уява про тверде тіло хоч і є припущенням, але для теоретичної механіки воно прийнятне, так як задовольняє поставленим в ній завданням. В опорі матеріалів не можна розглядати тіла як абсолютно тверді, так як вони під дією зовнішніх сил змінюють свої розміри та форму.

Зміна розмірів та форми твердого тіла під дією зовнішніх сил називається деформацією.

Деформація називається **пружною**, якщо вона зникає після зняття навантаження; якщо деформація частково залишається, то вона називається **залишковою**, або **пластичною**.

Характер деформації та її величина пов'язані із структурною будовою матеріалу, з якого виготовлений даний елемент конструкції.

В будь-якому тілі між його частками діють внутрішні сили зв'язку, що забезпечують його існування як тіла. Зовнішні сили, що діють на нього, викликають додаткові внутрішні сили, які чинять опір деформації. В подальшому ці додаткові внутрішні сили, що чинять опір деформації та намагаються відновити початкову форму і розміри тіла, будемо називати просто **внутрішніми силами**.

Здатність тіл відновити свою початкову форму та розміри після закінчення дії навантаження називається пружністю.

В природі не існує абсолютно пружних тіл, але багато будівельних матеріалів (сталь, дерево та інші) в межах допустимих навантажень отримують досить малі залишкові деформації, і тому їх можна розглядати як пружні тіла.

Здатність тіл отримувати значні залишкові деформації, не руйнуючись, називається пластичністю.

Взагалі, всі матеріали мають пружно-пластичні властивості і від того які з них домінують в даних умовах, говорять, що матеріал пружний або пластичний.

Властивість матеріалу легко руйнуватися при ударних навантаженнях називається крихкістю.

Наприклад, сталь при низьких температурах (-50°C) є крихкою, а при високих температурах (+300°C) стає пластичною, при цьому

нести корисне навантаження вже не може. Тому при пожежах, дуже часто, в першу чергу руйнуються сталеві конструкції покриття будівель та споруд. До крихких матеріалів, що традиційно використовуються в будівництві, належать: бетон, цегла, скло, чавун та інші.

В теоретичній механіці розглядалось питання про зовнішні сили та їх класифікацію, тому детально на цьому питанні зупинитись не будемо. Додамо тільки те, що в опорі матеріалів під зовнішніми навантаженнями розуміють не тільки силові, що спричинені іншими тілами, але і теплові, що виникають від нерівномірного нагрівання конструкцій та деталей, а також дію на конструкції від осідання опор або переміщення окремих частин споруди.

§ 5. ОСНОВНІ ГІПОТЕЗИ ТА ПРИПУЩЕННЯ ЩОДО ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ ТА ХАРАКТЕРУ ДЕФОРМАЦІЙ. ХАРАКТЕРИСТИКА ГЕОМЕТРІЇ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Реальні матеріали, з яких виготовляють різні будівельні конструкції та деталі механізмів і машин – це досить складні та неоднорідні тверді тіла, що мають різні властивості. У процесі виробництва конструкцій та деталей в матеріалі виникають різні поверхневі та внутрішні дефекти, наприклад, раковини, тріщини, початкові внутрішні зусилля, спричинені нерівномірністю висихання, твердіння тощо.

Оскільки закономірності виникнення зазначених явищ встановити неможливо, то в опорі матеріалів приймають ряд гіпотез та припущень, які дають змогу не розглядати ці явища. В результаті об'єктом вивчення стає не саме реальне тіло, а його наближена модель.

Опір матеріалів – експериментально-теоретична наука, в якій досліді відводиться головне значення. На основі дослідів проводиться порівняння та уточнення теоретичних положень з дійсними явищами, що відбуваються в реальних деталях та конструкціях. По мірі накопичення нових експериментальних даних, створення більш загальних фізичних закономірностей механіки твердого тіла та розвитку математичних методів їх описання прийняті гіпотези та припущення змінюються – грубі та наближені відкидаються та вводяться більш загальні та вірогідні.

В даному курсі опору матеріалів, призначеному для початкового вивчення основ роботи будівельних конструкцій та деталей машин,

викладання проводиться на основі використання найбільш простих в математичному розумінні припущень та гіпотез, які з достатньою точністю для практичних цілей описують поведінку реальних споруд. В тих випадках, коли прийняті припущення та обмеження приводять до неправильних результатів, будуть зроблені спеціальні уточнення.

1. **Гіпотеза про відсутність початкових внутрішніх зусиль.** Згідно з цією гіпотезою припускають, що коли немає причин для деформації тіла (відсутність навантаження, зміни температури, просідання опор), то в усіх його точках внутрішні зусилля дорівнюють нулю. Отже, сили взаємодії між частинками ненавантаженого тіла до уваги не беруться.

2. **Припущення про однорідність матеріалу.** Фізико-механічні властивості матеріалу в різних точках можуть бути неоднаковими, наприклад, бетон складається із в'язучого, дрібного та крупного заповнювача, фізико-механічні властивості яких різні. В опорі матеріалів цими відмінностями нехтують, припускаючи, що матеріал в усіх точках тіла має однакові властивості.

3. **Припущення про безперервність матеріалу.** Згідно з цим припущенням вважається, що матеріал повністю заповнює об'єм конструкції або деталі, тобто без порожот, раковин, тріщин. В дійсності цегла, бетон, дерево мають ці вади. Припущення про безперервну будову матеріалу дозволяє виділити із будь-якої частини конструкції нескінченно малий елемент i , надаючи йому властивості матеріалу всієї конструкції, користуватися при дослідженні напружено-деформованого стану математичними методами аналізу нескінченно малих величин.

4. **Припущення про ізотропність матеріалу.** Це припущення передбачає, що матеріал тіла має однакові властивості в усіх напрямках навантаження. Багато матеріалів складаються з кристалів, в яких фізико-механічні властивості в різних напрямках істотно відрізняються. Проте, завдяки наявності в тілі великої кількості безладно розміщених кристалів, властивості всієї маси матеріалу в різних напрямках вирівнюються.

Припущення про ізотропність добре підтверджується практикою для більшості матеріалів і лише наближено для таких матеріалів, як камінь, пластмаси, залізобетон. Матеріали, які мають неоднакові властивості в різних напрямках, називаються анізотропними, наприклад, деревина має міцність вздовж волокон більшу, ніж поперек волокон.

5. *Припущення про ідеальну пружність матеріалу.* Ми вже говорили, що матеріали мають пружно-пластичні властивості. Так, ця гіпотеза передбачає, що в певних межах навантаження матеріал виявляє ідеальну пружність, тобто після зняття навантаження деформації повністю зникають.

6. *Припущення про лінійну деформацію тіл.* Згідно з цим припущенням, деформації тіл прямо пропорційні силам, які спричиняють ці деформації. Тобто, чим більше навантаження, тим більша деформація. Ця залежність має назву закон Гука.

7. *Припущення про те, що деформації малі в порівнянні з розмірами тіла.* Згідно з цим припущенням, деформації тіла і пов'язані з ними переміщення точок і перерізів дуже малі порівняно з розмірами тіла. На підставі цього змінами в розміщенні зовнішніх сил, спричинених деформацією, нехтують. Так, наприклад, не беруть до уваги зміщення Δz лінії дії сили F , показане на рис. 1. Тобто вважаємо, що тіло після деформації має початкові розміри.

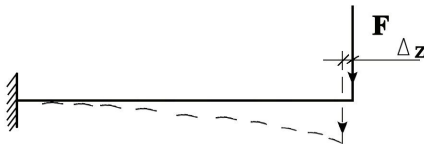


Рис. 1

8. Наслідком трьох останніх припущень про ідеальну пружність матеріалу, лінійну залежність між навантаженням та деформаціями і те, що деформації незначні в порівнянні з розмірами тіла, є **принцип незалежності дії сил**.

Згідно з цим принципом, результат від дії системи сил на тіло дорівнює сумі результатів від дії кожної сили на тіло. Тобто, в опорі матеріалів можна знаходити реакції переміщення перерізів (деформації) як алгебраїчну суму цих факторів від окремої дії зовнішніх сил незалежно від порядку їх прикладання до конструкції або споруди.

9. *Гіпотеза плоских перерізів.* Згідно з цією гіпотезою, поперечні перерізи, плоскі та нормальні до осі бруса до деформації, залишаються плоскими та нормальними до осі і після деформації.

В справедливості гіпотези плоских перерізів неважко впевнитися на наступному досліді.

Якщо на поверхні призматичного гумового бруса нанести лінії, паралельні та перпендикулярні до його осі (рис. 2, а), а потім

навантажити його, наприклад, силою F , то побачимо, що нанесені лінії і після деформації залишаються взаємно перпендикулярними, хоча відстань між ними зміниться (рис. 2, б). При цьому всі лінії, паралельні осі бруса, змістяться ближче до неї, а лінії, перпендикулярні осі, змістяться вниз, залишаючись паралельними їх початковому положенню.

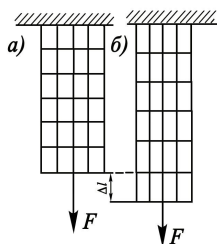


Рис. 2

Отже, задачі опору матеріалів, що розв'язуються з врахуванням перелічених гіпотез, є наближеними і не пояснюють деяких явищ, що протікають в деформованому тілі. В той же час перевірка результатів, отриманих на основі наближеної теорії опору матеріалів, підтверджує достатню їх точність для практичних цілей.

Успішне вивчення опору матеріалів в значній мірі залежить від ступеня засвоєння студентами основних законів та положень курсу теоретичної механіки, головним чином статички твердого тіла.

Але деякі положення, що застосовуються в статистиці твердого тіла при розв'язуванні задач на рівновагу тіл, не можуть бути застосовані в опорі матеріалів, де тверде тіло розглядається як пружне, а не абсолютне тверде. До таких положень відносяться наступні.

1. Перенесення сили вздовж лінії її дії.

В опорі матеріалів це не допускається, так як при цьому змінюється характер та величина деформації тіла.

Насправді стержень, зображений на (рис. 3, а), що розтягується силою F , прикладеною в точці A , отримає більше видовження, ніж після перенесення цієї сили в точку C (рис. 3, б). Крім того, в першому випадку деформується весь стержень, а в другому – тільки його частина (ділянка CB), ділянка CA зовсім не зазнає розтягу та переміщується як абсолютно тверде тіло.

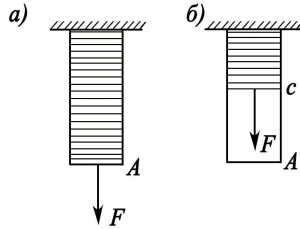


Рис. 3

2. *Заміна системи сил рівнодіючою* також недопустима в опорі матеріалів, так як змінює характер та величину деформації.

На рис. 4, а зображена проста балка з консолями, до кінців якої прикладені сили F , що згинають її випуклістю вгору. Якщо замінити ці сили рівнодіючою $R=2F$ (рис. 4, б), то деформація буде протилежною, тобто згин відбудеться випуклістю вниз.

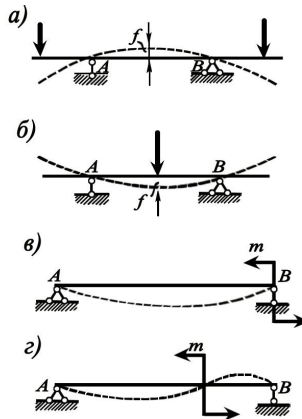


Рис. 4

На рис. 4, в показана балка з моментним навантаженням в точці B . Перенесення цього навантаження в інше місце також змінює характер деформації балки (рис. 4, г).

Зважаючи на це, перенесення сил вздовж лінії дії, перенесення пар сил в площині їх дії та заміну системи сил їх рівнодіючою допускається в опорі матеріалів тільки при визначенні опорних

реакцій статично визначених балок (тобто для балок, реакції яких можна знайти за допомогою тільки рівнянь рівноваги)

В опорі матеріалів вивчають головним чином брус, тобто такий елемент, один із вимірів якого (довжина) значно більший його поперечних розмірів (ширини та висоти). Брус може бути **прямим та кривим**. Утворення прямого бруса можна уявити собі переміщенням деякої плоскої фігури, наприклад прямокутника $CDEF$ вздовж прямої лінії AB (рис. 5, а) так, що його центр ваги завжди знаходиться на лінії AB , а площа фігури нормальна до цієї лінії. Лінія AB називається **віссю** бруса, а плоска фігура ($CDEF$) – його **поперечним перерізом**.

Брус, утворений переміщенням плоскої фігури вздовж деякої кривої лінії (рис. 5, б), називається **кривим брусом**. Вздовж своєї осі брус може мати постійний та змінний переріз. Цегляний або бетонний ступінчастий стовп (рис. 5, в) буде прикладом бруса змінного перерізу. До кривих брусів відносяться арки будівель та мостів, крюки, ланки ланцюга та інші.

Більшість складних конструкцій та споруд складаються із елементів, що мають форму прямого та кривого брусів.

Тонкий та довгий брус з прямою віссю прийнято називати в залежності від призначення **стержнем, стояком, колоною** (рис. 5, г)

Брус, що лежить на опорах, завантажений силами перпендикулярними або похилими до його осі, називається **балкою**.

Тіло, що має досить малу товщину в порівнянні з двома іншими вимірами, називається **пластиною** (рис. 5, ж) або **оболонкою** (рис. 5, з). Наприклад, стінки круглих залізобетонних резервуарів, баків, силосів тощо є оболонками, а їх плоске дно – пластинами.

Тіло, всі три розміри якого величини одного порядку, називається **масивом**, наприклад, фундамент під монумент, великий механізм, станок. Пластини, оболонки та масиви розглядаються в теорії пружності. Криві бруси та стержневі системи, що складаються із прямих та кривих брусів, вивчаються в курсі будівельної механіки.

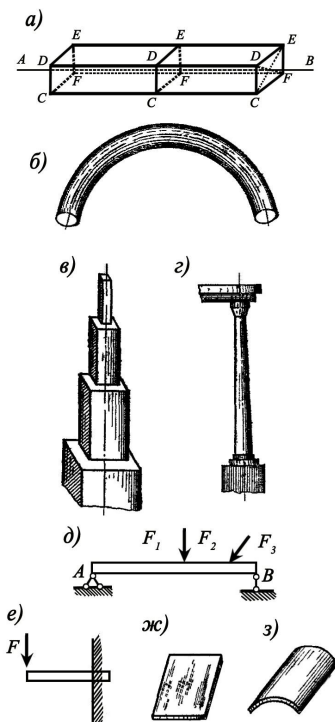


Рис. 5

§ 6. ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ СИЛ. ОСНОВНІ ВИДИ ДЕФОРМАЦІЙ БРУСА

Ми знаємо, що під дією зовнішніх сил в твердому тілі виникають внутрішні сили, що намагаються відновити його початкову форму та розміри. Величина внутрішніх сил із збільшенням деформації росте до тих пір, поки внутрішні сили не вичерпають себе, тобто не зможуть чинити опір зовнішнім силам. При цьому відбувається руйнування матеріалу. Тобто безпосередньою причиною руйнування матеріалу є внутрішні сили, які досягли своєї критичної величини. Тому для визначення міцності матеріалу потрібно знати величину внутрішніх сил. Для їх визначення в опорі матеріалів застосовують так званий *метод перерізів*, який лежить в основі

висновків опору матеріалів, що стосується внутрішніх сил. Сутність цього методу полягає в такому.

Уявимо собі прямий брус, що завантажений системою зовнішніх сил (рис. 6, а), в число яких входять як активні сили, так і реакції зв'язків. Треба знайти величину внутрішніх сил в довільному перерізі бруса, наприклад, в перерізі 1-1.

Площиною, перпендикулярною до осі бруса, уявно розріжемо його по даному перерізу та відкинемо одну із отриманих двох частин, наприклад, ліву (рис. 6, б). Завжди відкидають ту із частин, на яку діє більше зовнішніх сил, так як рівняння рівноваги для залишеної частини в цьому випадку будуть простішими. В цілому брусі між лівою та правою частинами бруса діють внутрішні сили, які утримують їх як ціле тіло. Відкинувши ліву частину бруса, покажемо внутрішні сили в перерізі, які діють зі сторони відкинутої частини. Ми не знаємо як вони прикладені в точках перерізу і чому вони дорівнюють, але ми можемо думати, що в точках поперечного перерізу зі сторони лівої відкинутої частини на праву діє система довільно розміщених сил в просторі. Ця система сил по відношенню до правої частини буде системою зовнішніх сил. Тобто, метод перерізів дає можливість внутрішні сили перевести в розряд зовнішніх сил. А з зовнішніми силами ми працювати вміємо. Права, залишена частина бруса, під дією заданих сил та внутрішніх сил, що діють зі сторони відкинутої лівої частини, знаходиться в рівновазі. Тому ми можемо застосувати умову рівноваги для всієї системи сил, що діє на праву частину.

Застосовуючи до залишеної правої частини бруса умову рівноваги, не можна знайти закон розподілу внутрішніх сил по перерізу, але можна визначити їх значення. Для цього спростимо систему внутрішніх сил, що діє в перерізі. Ми сказали, що ця система є системою довільно розміщених сил в просторі, яка в загальному випадку приводиться до головного вектора R та головного моменту M (рис. 6, в), які прикладемо в центрі ваги перерізу. Так як система сил розміщена в просторі, то головний вектор та головний момент теж якось розміщені в просторі, ми можемо розкласти їх на складові. Головний вектор – на три складові по осях x , y , z та головний момент – на три складових моменти відносно осей x , y , z (рис. 6, г). Ці складові будемо називати **внутрішніми силовими факторами**, що діють у перерізі бруса.

Кожен з цих силових факторів має окрему назву:

N – поздовжня сила;

Q_x , Q_y – поперечні сили;

M_x, M_y – згинальні моменти;
 M_k – крутний момент.

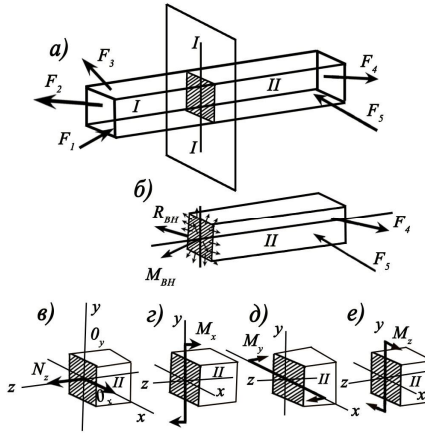


Рис. 6

Тобто в загальному випадку в поперечному перерізі бруса може виникнути шість силових факторів. Але на практиці всі шість силових факторів фактично виникнути не може. Частіше виникає один або два, рідше – три силові фактори. Кожен з силових факторів відповідає своєму виду деформації. Якщо в поперечному перерізі виникає тільки поздовжня сила N , то має місце деформація розтягу або стиску. Якщо в поперечному перерізі виникає поперечна сила Q_x або Q_y , то має місце деформація зсуву, якщо виникає згинальний момент M_x або M_y , і дуже часто Q_x або Q_y – має місце деформація згину. Якщо виникає крутний момент M_k – деформація кручення. В цих випадках деформації, що виникають, називають простими. Наприклад, внутрішня колона споруди працює на стиск, плита перекриття – на згин, заклепка – на зсув, карданний вал автомобіля – на кручення. Якщо в поперечному перерізі виникають декілька силових факторів, що відповідають різним видам деформації, то така деформація називається складною. Наприклад, сходишковий марш працює на стиск та на згин.

§ 7. НАПРУГА

Поряд з поняттям деформації одним з основних понять опору матеріалів є *напруга*. Напруга характеризує інтенсивність внутрішніх сил, які діють у перерізі.

В будь-якому перерізі тіла (рис. 7, а) на кожну елементарну площадку ΔA діє елементарна сила ΔF . Відношення величин сили ΔF до величини елементарної площадки ΔA виражає внутрішню силу, що віднесена до одиниці площі перерізу, яка називається середньою напругою на цій площадці, тобто:

$$p_{\text{сеп}} = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Якщо взяти границю цього відношення при зменшенні площадки ΔA до нуля, то отримаємо *напругу* в даній точці перерізу, тобто:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

Для випадку рівномірного розподілу внутрішніх сил по перерізу напругу можна знайти діленням внутрішньої сили (силового фактору) на всю площу перерізу, тобто

$$p = \frac{F}{A} \quad (1)$$

Таким чином, *напругою в будь-якій точці перерізу називається величина внутрішньої сили, що приходить на одиницю площі перерізу*. Тобто одиницею виміру напруги буде $\frac{H}{M^2}$. Напруга, як і сила,

має напрям, тобто вона є векторною величиною.

Треба мати на увазі, що через будь-яку точку тіла можна провести безліч перерізів, по-різному розміщених в просторі, при цьому напруги, що виникли в них, можуть бути різними. Тому, говорячи про напругу в даній точці, необхідно завжди вказувати площадку (переріз), по якій вона діє.

В загальному випадку напруга p складає з площадкою, що розглядається, деякий кут α (рис. 7, б).

Якщо розкласти напругу p по нормалі (перпендикуляру) до площадки ΔA і по напрямку перерізу, то отримаємо *нормальну напругу*, що діє перпендикулярно до даного перерізу, та *дотичну напругу*, що діє в площині перерізу. Напруга p називається *повною напругою* в даній точці. Нормальна напруга позначається грецькою

буквою σ (сігма); дотична – грецькою буквою τ (тау). Як видно з рисунка 7, б величини цих напруг будуть:

$$\sigma = p \cdot \sin \alpha, \quad \tau = p \cdot \cos \alpha$$

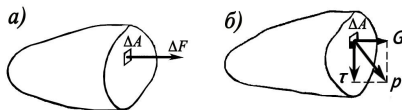


Рис. 7

Знаючи складові величини, можна знайти повну напругу:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (2)$$

Нормальні напруги при розтязі як сили, що чинять опір, прагнуть перешкодити віддаленню часток твердого тіла одна від одної, а в разі стиску – наближенню їх. Дотичні напруги також є силами опору та перешкоджають зсуву однієї частки твердого тіла відносно іншої.

Питання для самоконтролю

1. Які цілі та завдання науки про опір матеріалів?
2. Що вивчає наука про опір матеріалів?
3. Що називається деформацією тіла?
4. Що таке пружність тіла?
5. Яка деформація називається пружною та пластичною?
6. Які основні вимоги ставляться до будівель, споруд, машин та механізмів?
7. Які основні припущення прийняті в опорі матеріалів?
8. Які внутрішні сили можуть виникнути в поперечному перерізі бруса?
9. Які основні деформації можуть виникнути під дією зовнішніх сил?
10. В чому суть методу перерізів?
11. Що називається напругою та в яких одиницях вона вимірюється?
12. Які напруги називаються нормальними та дотичними?

Розділ II. ОСЬОВИЙ РОЗТЯГ ТА СТИСК

§8. ВНУТРІШНІ СИЛИ ПРИ РОЗТЯЗІ ТА СТИСКУ. НОРМАЛЬНА НАПРУГА В ПОПЕРЕЧНОМУ ПЕРЕРІЗІ БРУСА. ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА

Розглянемо перший із чотирьох видів простих деформацій – деформацію розтягу та стиску. Якщо зовнішні сили або їх рівнодіюча прикладені до осі бруса, то має місце деформація *осьового* розтягу або стиску. В подальшому будемо просто називати розтяг та стиск. Якщо зовнішні сили, що діють на брус, прикладені не по осі бруса, то деформація називається позацентровим розтягом або стиском. Це складний вид деформації, який ми розглянемо нижче.

На розтяг та стиск працює багато будівельних конструкцій та їх елементів. Наприклад, колони, фундаменти, сталеві канати баштових кранів, стержні кроквяних ферм та інші.

Розглянемо детальніше цей вид деформації на простих прикладах.

Прикладаємо до кінців бруса постійного поперечного перерізу по його осі дві сили, рівні за величиною та протилежні за напрямом (рис. 8, а). Очевидно, ці сили викличуть деформацію розтягу бруса, а якщо б вони діяли в протилежних напрямках, то викликали б деформацію стиску. Так як при розтязі довжина бруса збільшується, а при стисковій зменшується, то його укорочення будемо розглядати як від'ємне видовження. Це дасть нам можливість вивчати спільно розтяг та стиск і, отже, всі висновки, отримані для розтягу, застосовувати і до деформації стиску. Власну вагу бруса враховувати поки не будемо.

Для визначення внутрішніх сил в поперечних перерізах бруса застосуємо метод перерізів (див. § 6).

Перерізом 1-1 уявно розсікаємо брус на дві частини і одну із них, наприклад, праву, відкинемо (рис. 8,б). Дію відкинутої частини заміною внутрішніми силами пружності, які в даному випадку будуть нормальними (перпендикулярними) до перерізу, так як права частина бруса при розтязі намагається відірватись від лівої вздовж осі бруса. Рівнодіюча цих внутрішніх сил буде направлена по осі бруса протилежно силі F (із умови рівноваги двох сил) і дорівнює їй, тобто $N=F$. Рівнодіюча внутрішніх сил пружності в поперечному перерізі бруса при розтязі та стисковій називається поздовжньою силою та позначається N .

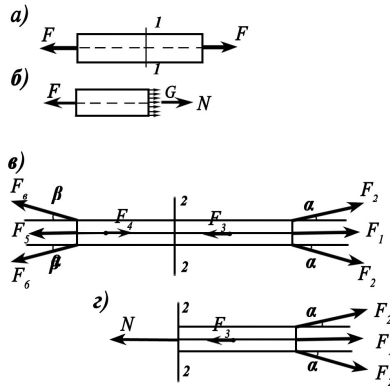


Рис. 8

Розглянемо більш загальний випадок роботи бруса на розтяг та стиск (рис. 8, в, г). Знайдемо поздовжню силу в довільному перерізі 2-2. Відкидаємо ліву відсічену частину, дію відкинutoї частини замінюємо внутрішньою силою N . Так як ми не знаємо куди буде направлена сила N , направляти її будемо завжди від перерізу залишеної частини. Домовимося цей напрямок вважати як додатний що відповідає розтягу, в протилежному випадку – від’ємний, що відповідає стиску.

Розглянемо рівновагу залишеної частини: $\sum X_i = 0$ маємо :

$$-N - F_3 + F_1 + F_2 \cos \alpha + F_2 \cos \alpha = 0, \text{ звідси}$$

$$N = -F_3 + F_1 + F_2 \cos \alpha + F_2 \cos \alpha, \text{ тобто}$$

поздовжня сила в довільному перерізі бруса дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх зовнішніх сил, що діють по одну сторону від перерізу на вісь бруса.

Поздовжню силу в довільному перерізі бруса будемо визначати за цим правилом. Знак поздовжньої сили будемо визначати за таким правилом: якщо зовнішня сила, що діє на відсічену частину бруса направлена від перерізу, то знак поздовжньої сили буде додатним, якщо до перерізу – від’ємним. Тобто F_3 направлена до перерізу, тому вона з мінусом, а F_1 – від перерізу, тому вона з плюсом і т.д. (рис. 8, г).

Ми сказали, що в перерізі 1-1 внутрішні сили направлені вздовж осі бруса (рис. 8, б). А як розподілені ці сили по перерізу? Рівномірно чи ні? Закон розподілення внутрішніх сил по перерізу встановлюється

на основі гіпотези плоских перерізів – гіпотези Я. Бернуллі (§5).

Якщо уявити, що брус складається із поздовжніх волокон, то на основі цієї гіпотези можемо зробити висновок, що волокна не тільки на поверхні бруса видовжуються на одну й ту саму величину, але і всередині бруса, тобто поздовжні деформації всіх волокон однакові. Це дає можливість зробити висновок, що внутрішні сили, що діють в кожній точці перерізу, однакові, тобто розподілені рівномірно, якщо вони розтягують волокна на однакову довжину.

Рівномірність розподілення внутрішніх сил дозволяє зробити висновок, що і напруги в перерізі розподілені рівномірно, тобто

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (3)$$

Наведені докази про рівномірне розподілення нормальних напруг по поперечному перерізу бруса проводились в припущенні, що зовнішнє навантаження, прикладене до кінця бруса, розподілене рівномірно. Розглянемо інші способи прикладання зовнішніх сил до кінців бруса, наприклад, у вигляді зосередженої сили або декількох зосереджених сил.

В цих випадках прикладання зовнішніх сил гіпотеза плоских перерізів біля місця прикладання цих сил недійсна. В місцях прикладання зосередженої сили переріз викривлюється, що призводить до появи великих місцевих напруг і деформацій. Але на деякій відстані, що приблизно дорівнює лінійному розміру поперечного перерізу, від місця прикладання зосередженої сили розподіл нормальних напруг по перерізу вирівнюється, наближаючись до рівномірного.

Швидке зменшення місцевих напруг при віддалені від місця прикладання зосереджених сил було досліджено Сен-Венаном та названо його ім'ям. Згідно з принципом Сен-Венана в перерізах, досить віддалених від місця прикладання зовнішніх сил, напруги не залежать від способу прикладання цих сил, а визначаються тільки їх рівнодіючою.

Вивчення закону розподілення напруг в місцях прикладання зовнішніх навантажень складають особливу задачу, що вивчається в курсі теорії пружності. Місцеві напруги виникають також в місцях стрибкоподібної зміни поперечних розмірів перерізу бруса – в ступінчастому брусі або в брусі з отвором. Про це в §15 даного розділу.

Дотичні напруги в будь-якій точці перерізів 1-1 та 2-2, очевидно, будуть дорівнювати нулю, так як внутрішніх сил, що лежать

в перерізі, немає. Всі внутрішні сили приводяться до однієї поздовжньої сили N .

Якщо на брус діє декілька зовнішніх сил, прикладених в різних точках по його осі, корисно будувати графіки, що називаються **епюрами** поздовжніх сил та нормальних напруг. Вони дають наочне уявлення про зміну величини поздовжніх сил та нормальних напруг в поперечному перерізі по довжині бруса.

Наведемо приклад побудови епюр N та σ .

Приклад 1. Для прямого бруса, що знаходиться під дією сил F_1 , F_2 (рис. 9), побудувати епюри поздовжніх сил N та нормальних напруг σ . Прийняти $F_1=150$ кН, $F_2=200$ кН, інші дані вказані на рисунку.

Розв'язок. Розбиваємо брус на окремі ділянки, границями яких є точки прикладання сил та місця зміни перерізу. Тобто брус має три ділянки навантаження, що позначені цифрами 1,2,3 (рис. 9, а).

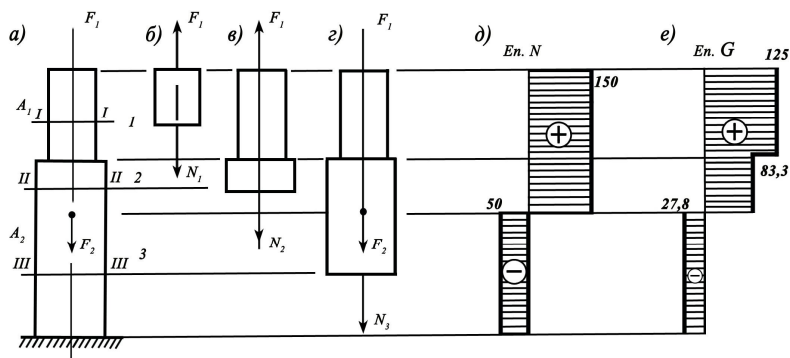


Рис. 9

Для визначення значень поздовжніх сил застосуємо метод перерізів. Проведемо переріз 1-1 та відкинемо нижню частину бруса (рис. 9, б). Дію відкинутої частини замінимо поздовжньою силою N_1 .

Якщо ми будемо відкидати нижню частину бруса, де знаходиться жорстка опора, то реакції опори можемо не знаходити, так як їх все одно будемо відкидати.

Знаходимо поздовжню силу N_1 в перерізі 1-1.

$$N_1 = F_1 = 150 \text{ кН}$$

Поздовжня сила в перерізі 1-1 буде додатна, так як сила F_1 направлена від перерізу 1-1.

Очевидно, що таке значення поздовжньої сили буде в будь-якому перерізі аж до перерізу, в якому прикладена сила F_2 , тобто в перерізі 2-2 (рис. 9, в)

$$N_2 = F_1 = 150 \text{ кН.}$$

На третій ділянці робимо переріз 3-3, відкидаємо нижню частину, та замінюємо її поздовжньою силою N_3 (рис. 9, г)

$$N_3 = F_1 - F_2 = 150 - 200 = -50 \text{ кН.}$$

Тепер знайдемо величини нормальних напруг в перерізах кожної ділянки бруса за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

На першій ділянці

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{150}{12} = 12,5 \text{ кН/см}^2 = 125 \text{ МПа.}$$

На другій ділянці

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{150}{18} = 8,33 \text{ кН/см}^2 = 83,3 \text{ МПа.}$$

На третій ділянці

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-50}{18} = -2,78 \text{ кН/см}^2 = -27,8 \text{ МПа}$$

σ_1 та σ_2 напруги розтягу, σ_3 – нормальні напруги стиску.

Для побудови епюр поздовжніх сил та нормальних напруг (рис. 9 д, е) проведемо осі, паралельні осі бруса, та відкладемо значення N та σ в довільному масштабі по перпендикулярах до вибраних осей. Додатні значення N та σ відкладаємо по одну сторону осі (наприклад, зліва), а від'ємні – по іншу.

Побудована еюра штрихується перпендикулярно до осі бруса. Кожна лінія штриховки – це величини N та σ в прийнятому масштабі.

Можна знаходити величини N та σ і будувати їх еюри, починаючи з нижньої ділянки бруса, але спочатку треба визначити реакції опори.

§9. ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ ОСЬОВОМУ РОЗТЯЗІ ТА СТИСКОВІ. ЗАКОН ГУКА. МОДУЛЬ ПОЗДОВЖНЬОЇ ПРУЖНОСТІ

Ми знаємо, що при розтязі довжина бруса збільшується, а його поперечні розміри зменшуються. При стисковій відбувається протилежне явище – довжина бруса зменшується, а поперечні розміри збільшуються.

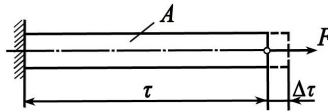


Рис. 10

Збільшення або зменшення довжини бруса в результаті розтягу або стиску називається абсолютною деформацією та позначається Δl і вимірюється в одиницях довжини (м) (рис. 10).

Величина абсолютного видовження або укорочування, що залежить від довжини бруса, не дає загальної уяви про значність поздовжньої деформації. Тому за характеристику деформацій розтягу або стиску приймається величина відносної деформації.

Відносним видовженням або укорочуванням називається відношення величини абсолютного видовження або укорочування до початкової довжини бруса:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (4)$$

Величина ε , отримана в результаті ділення двох величин, що мають розмірність довжини, є абстрактним числом. Її можна виразити також у відсотках :

$$\varepsilon \% = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100 = \varepsilon 100\%.$$

Ми вияснили, що вільний кінець бруса в результаті розтягу або стиску отримує якесь переміщення Δl (рис.10). Тобто кожний поперечний переріз теж переміщується на якусь величину. Для подальшого вивчення теорії опору матеріалів та розв'язку практичних задач важливо встановити взаємний зв'язок між лінійними переміщеннями та силами, що їх викликають (навантаженнями).

Досліди над розтягом та стиском брусів, виготовлених із різних матеріалів, показують, що поки навантаження на брус не досягло відомої границі, видовження його зростає прямо пропорційно величині навантаження та довжині бруса і обернено пропорційно площі поперечного перерізу. Крім того, встановлено, що величина видовження (укорочування) бруса залежить від пружних властивостей матеріалу, з якого він виготовлений. Перелічені залежності виражаються формулою

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{EA}, \quad (5)$$

де E – модуль поздовжньої пружності, що характеризує ступінь опору матеріалу пружній деформації. Чим більше E , тим менше пружна деформація, і навпаки. Добуток модуля поздовжньої пружності на площу поперечного перерізу EA називається **жорсткістю перерізу бруса** при розтязі (стискові).

Формула (5) – експериментальний вираз закону Гука і читається так:

абсолютне видовження (укорочування) прямо пропорційне величині навантаження та довжині бруса і обернено пропорційне модулю поздовжньої пружності та площі поперечного перерізу.

Тобто, чим більша розтягуюча або стискуюча сила та довжина бруса, тим більше його абсолютне видовження або укорочування. Але чим більша жорсткість перерізу, тим менше його абсолютне видовження або укорочування.

Якщо між двома перерізами брус має ступінчасту зміну поперечних перерізів або завантажений декількома зовнішніми поздовжніми зосередженими силами, то досліджувана ділянка ділиться на декілька, в межах яких постійні як внутрішня поздовжня сила, так і площа поперечного перерізу.

Переміщення визначається як алгебраїчна сума видовжень кожної окремої ділянки:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i$$

Результати розрахунку зображують у вигляді епюри поздовжніх переміщень перерізів бруса (приклад 4).

Зробимо деякі математичні перетворення. Розділивши обидві частини формули (5) на довжину бруса L , маємо:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{Fl}{EA l}$$

або

$$\varepsilon = \frac{F}{EA}, \quad (5')$$

беручи до уваги, що $\frac{F}{A} = \sigma$ та підставляючи в формулу (5'),

отримаємо інший, математичний, вираз закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (6)$$

тобто *нормальна напруга прямо пропорційна відносній поздовжній деформації*.

Із формули (6) маємо

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad (6')$$

тобто модуль поздовжньої пружності – це відношення нормальної напруги до відповідної їй відносного видовження (укорочування).

Наведемо значення модуля поздовжньої пружності для деяких матеріалів:

Таблиця 1

Найменування матеріалів	Модуль пружності E МПа
Сталь	$2 \cdot 10^5 - 2,2 \cdot 10^5$
Мідь	$1 \cdot 10^5$
Алюміній	$0,675 \cdot 10^5$
Алюмінієві сплави	$0,71 \cdot 10^5$
Чавун	$0,75 \cdot 10^5 - 1,6 \cdot 10^5$
Дерево вздовж волокон	$1 \cdot 10^4$
Дерево поперек волокон	$5 \cdot 10^2$
Бетон	$1 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^4$
Кам'яна кладка:	
з граніту	$9 \cdot 10^3$
з вапняку	$6 \cdot 10^3$
з цегли	$3 \cdot 10^3$
Склопластики	$0,18 \cdot 10^5 - 0,4 \cdot 10^5$

Так як в формулі (6) величина ε – абстрактне число, то вимірність модуля поздовжньої пружності буде такою, як і напруга, тобто E вимірюється в Н/м^2 або МН/м^2 (МПа). Величина модуля поздовжньої пружності визначається дослідним шляхом. Закон Гука можна виразити також графічно. Для цього по осі x відкладемо в

деякому масштабі величину відносної деформації ε , а по осі y – відповідну їй напругу σ (рис.11).

Тоді

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \text{ але згідно з формулою (6')}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{ маємо}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = E, \text{ тобто}$$

тангенс кута нахилу прямої OA до горизонту математично може бути представлений як модуль поздовжньої пружності.

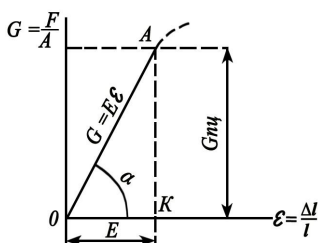


Рис. 11

Як видно з рис.11, чим більше кут α , тим більше модуль пружності E . Таким чином пряма пропорційність між напругою та відносною деформацією ε зображається прямою лінією OA , що графічно виражає закон Гука при лінійній деформації.

Але лінійна залежність між σ та E зберігається тільки до деякого граничного значення напруги, що відповідає ординаті KA , яка називається **границею пропорційності** $\sigma_{гнч}$. Звідси робимо висновок, що **закон Гука справедливий тільки до границі пропорційності**.

Приклад 2. Визначити абсолютне та відносне видовження стержня сталеної ферми із рівностороннього кута № 40×3 довжиною 3 м, що розтягується силою $F=40$ кН. Границя пропорційності для сталі $\sigma_{гнч}=200$ МПа. Модуль поздовжньої пружності $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Вагу стержня не враховувати.

Розв'язок. Спочатку з'ясуємо, чи можна застосовувати формулу (5) до даної умови задачі, тобто чи не перевищує дійсна напруга в

поперечному перерізі стержня границі пропорційності матеріалу. Площу перерізу стержня беремо із таблиці сортаменту сталі.

$$A=2,35\text{см}^2$$

Напруга в поперечному перерізі стержня

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{40}{2,35} = 17,02 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 170,2 \text{ МПа} < \sigma_{\text{нп}} = 200 \text{ МПа},$$

дійсна напруга не перевищує границі пропорційності. Тобто даний приклад можна розв'язувати за допомогою формули (5).

Визначаємо абсолютне видовження стержня:

$$\Delta l = \frac{Fl}{AE} = \frac{40 \cdot 300}{2,35 \cdot 2 \cdot 10^4} = 0,26 \text{ см},$$

де $F=40 \text{ кН}$

$$l=3\text{м}=300 \text{ см}, A=2,35 \text{ см}^2$$

$$E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}=2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$$

Величина відносного видовження

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,26}{300} = 0,00085 \text{ або у відсотках}$$

$$\varepsilon = 0,00085 \cdot 100\% = 0,085\%,$$

тобто видовження бруса під дією заданого навантаження складає 0,085% його початкової довжини.

Приклад 3. Визначити нормальну напругу в поперечному перерізі розтягнутого сталюго стержня довжиною 4 м, якщо його абсолютне видовження $\Delta l = 2 \text{ мм}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Розв'язок. Так як нам не відомі ні навантаження, ні площа перерізу стержня, то величину нормальної напруги визначаємо за формулою (6), для цього спочатку визначимо відносне видовження стержня

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,2}{400} = 0,0005, \text{ де } \Delta l = 2 \text{ мм} = 0,2 \text{ см}, l = 4 \text{ м} = 400 \text{ см}$$

Тоді величина нормальної напруги

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,0005 = 100 \text{ МПа} = 10 \text{ кН/см}^2$$

Приклад 4. Для ступінчастого бруса (рис. 12, а) побудувати епюру переміщень.

Розв'язок. Для цього бруса (рис. 9, д, е) вже були обчислені поздовжні сили та побудовані епюри N і σ , тому перейдемо безпосередньо до побудови епюри поздовжніх переміщень.

В даному випадку ступінчастий брус має три ділянки в межах яких побудовані N і σ .

Так як нижній кінець бруса має жорстку опору і не має переміщень, то відносно нього і будемо визначати переміщення всіх перерізів бруса.

Спочатку розглянемо третю ділянку довжиною l_3 . В довільному перерізі III-III його переміщення від стиску нижньої частини дорівнює:

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 Z}{EA_2} = \frac{\sigma_3 Z}{E}.$$

Із цього виразу видно, що закон зміни переміщень вздовж третьої ділянки буде лінійним. При $Z=0$ $\Delta l_3=0$; при $Z=l_3$, $\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = \frac{-27,8 \cdot l_3}{E}$ м. Ділянка III стиснута. Переміщення точки B дорівнює Δl_3 .

Ділянка 2. Переміщення довільного перерізу II-II довжиною Z дорівнює:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 Z}{EA_2} = \frac{\sigma_2 Z}{E}.$$

Закон зміни переміщень теж лінійний. При $Z=0$ $\Delta l_2=0$; при $Z=l_2$ $\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{83,3 \cdot l_2}{E}$.

Але переміщення точки C дорівнює сумі переміщень третьої та другої ділянок:

$$\Delta l_c = \Delta l_3 + \Delta l_2 = \frac{-27,8 \cdot l_3}{E} + \frac{83,3 \cdot l_2}{E}.$$

Ділянка 1. Переміщення довільного перерізу I-I довжиною Z дорівнює:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 Z}{EA_1} = \frac{\sigma_1 Z}{E}.$$

Закон зміни переміщень – лінійний. При $Z=0$ $\Delta l_1=0$, при $Z=l_1$ $\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{125 \cdot l_1}{E}$.

Переміщення точки D , тобто вільного кінця бруса, дорівнює сумі переміщень всіх ділянок:

$$\Delta l_d = \Delta l = \Sigma \Delta l_i = \frac{-27,8 \cdot l_3}{E} + \frac{83,3 \cdot l_2}{E} + \frac{125 \cdot l_1}{E} = \frac{-27,8 \cdot l_3 + 83,3 \cdot l_2 + 125 \cdot l_1}{E}.$$

За отриманими даними будемо епою розподовжніх переміщень

бруса (рис. 12, д).

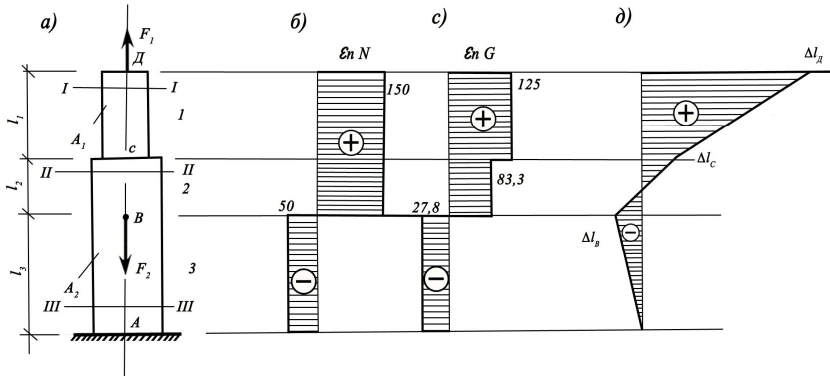


Рис. 12

§10. ПОПЕРЕЧНА ДЕФОРМАЦІЯ. КОЕФІЦІЄНТ ПОПЕРЕЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ (КОЕФІЦІЄНТ ПУАССОНА)

В результаті розтягу та стиску бруса поряд зі зміною його довжини відбувається зміна розмірів його поперечного перерізу. При розтязі вони зменшуються, тобто відбувається звуження поперечного перерізу, а при стисковій, навпаки, вони збільшуються, тобто відбувається його розширення.

Таким чином, щоб отримати загальну характеристику матеріалу, потрібно крім модуля поздовжньої пружності E знати ще і величину поперечної деформації, яка характеризує зміну його поперечного перерізу при розтязі або стискові.

Дослідами встановлено, що поперечні деформації при розтязі та стискові прямо пропорційні поздовжнім деформаціям.

Припустимо, що при стисковій стержня під дією сили F (рис.13), його абсолютне поперечне укорочування виявилось Δd . Якщо тепер поділити Δd на його початкову ширину d , будемо мати:

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta d}{d}$$

ϵ_1 – відносне поперечне укорочення. Відношення $|\frac{\epsilon_1}{\epsilon}|$ називається коефіцієнтом поперечної деформації і позначається грецькою буквою μ (мі), тобто:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right| \quad (7)$$

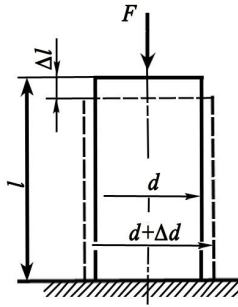


Рис. 13

Відношення відносної поперечної деформації до відносної поздовжньої деформації при розтязі та стискові, взяте за абсолютним значенням, називається **коефіцієнтом Пуассона**.

Таким чином, коефіцієнт Пуассона показує, яку частину складає поперечна деформація бруса від його поздовжньої деформації.

Дослідами встановлено, що для одного і того ж матеріалу величина μ постійна лише в межах закону Гука. Для різних матеріалів вона коливається від 0 до 0,5.

В таблиці 2 наведені значення μ для деяких матеріалів.

Таблиця 2

Матеріали	μ	Матеріали	μ
Сталь	0,25-0,33	Бетон	0,08-0,18
Чавун	0,23-0,27	Скло	0,25
Алюміній	0,26-0,36	Каучук	0,47
Камінь	0,16-0,34	Парафін	0,50
		Корок	0,00

Для практичних розрахунків для сталі приймається $\mu=0,3$.

Треба звернути увагу на наступне:

а) значення коефіцієнта Пуассона μ , так як і для модуля поздовжньої пружності E , є величиною сталою тільки для ізотропних

матеріалів;

б) для анізотропних матеріалів, наприклад, для дерева, скловолокнистих анізотропних матеріалів (СВАМ) та ін. ці величини для різних напрямків (вздовж та поперек волокон) різні.

Приклад. 5. Стальна зтяжка діаметром $d=2\text{см}$ розтягується силою $F=50\text{ кН}$. Визначити діаметр перерізу зтяжки після її деформації, якщо коефіцієнт Пуассона $\mu=0,25$ та $E=2\cdot 10^5\text{ МПа}$.

Розв'язок. 1. Знаходимо площу поперечного перерізу зтяжки :

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14\text{ см}^2$$

2. Визначаємо відносне видовження зтяжки за формулою (5'):

$$\varepsilon = \frac{F}{EA} = \frac{50}{2 \cdot 10^4 \cdot 3,14} \approx 0,0008$$

де $E=2\cdot 10^5\text{ МПа}=2\cdot 10^4\text{ кН/см}^2$

3. За формулою (7) знаходимо величину відносного поперечного звуження зтяжки:

$$\varepsilon_1 = \mu \cdot \varepsilon = 0,25 \cdot 0,0008 = 0,0002$$

4. Визначаємо величину абсолютного поперечного стиску:

$$\Delta d = \varepsilon_1 \cdot d = 0,0002 \cdot 2 = 0,0004\text{ см.}$$

5. Діаметр перерізу зтяжки після деформації

$$d_1 = 2 - 0,0004 = 1,9996\text{ см.}$$

З прикладу видно, наскільки незначна поперечна деформація, то при практичних розрахунках на розтяг або стиск її впливом на зміну поперечних перерізів елементів конструкцій можна знехтувати.

§11. МЕХАНІЧНІ ВИПРОБУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ

Для визначення механічних характеристик матеріалів, необхідних при розрахунках конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість, використовують різні дослідні машини та прилади, а також різні методи проведення самих випробувань. Найбільш поширеним видом випробувань матеріалів є випробування на розтяг та стиск статичним навантаженням. Такий вид випробувань просто здійснити і в той же час при розтязі та стискові особливо яскраво виявляються особливості матеріалу. Для отримання порівняльних результатів випробувань різних матеріалів із них виготовляють спеціальні зразки, форма та розміри яких визначаються стандартом.

При дослідженні металів на розтяг зразки виготовляють

круглого або прямокутного поперечних перерізів з розрахунковою довжиною:

$$l_0 = 10d = 200 \text{ мм (рис. 14)}$$

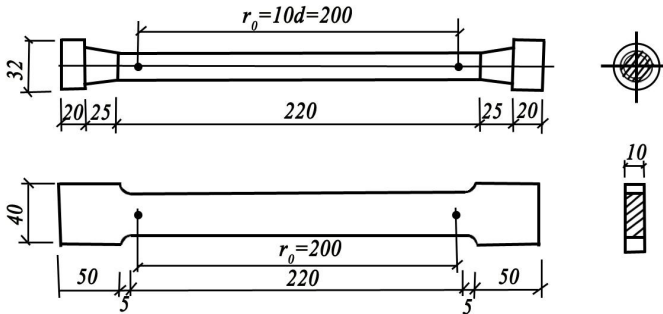


Рис. 14

Матеріали за їх механічними якостями можна розділити на дві групи: **пластичні та крихкі**. Пластичні матеріали руйнуються тільки після значної залишкової деформації, крихкі – при досить малих залишкових деформаціях. До пластичних матеріалів належать: маловуглецева сталь, мідь, бронза та ін.; до крихких – чавун, бетон, цегла, природний камінь та інші.

Треба, усе ж таки, відмітити, що пластичність та крихкість не є незмінними властивостями того чи іншого матеріалу, так як один і той самий матеріал залежно від умов, в яких він знаходиться, може поводити себе як пластичний і як крихкий. Наприклад, "м'яка" сталь в деяких випадках складного навантаження, особливо при наявності надрізів, іноді поводить себе як крихкий матеріал, а при одноосному розтязі та при відсутності надрізів – як пластичний матеріал. Однакова сталь має хороші пластичні властивості при нормальній позитивній температурі, а при низькій (негативній) температурі вона набуває крихких властивостей. Камінь, бетон при одноосному стиску крихкий, а в деяких випадках складного опору можуть отримати значні пластичні деформації (особливо при тривалій дії навантаження). Таким чином, як ми вже казали, було б правильно говорити про крихкий та пластичний стан матеріалів.

Випробування матеріалу на розтяг. Зразок стандартної форми закріплюють кінцями в захвати розривної машини. Потім зразок розтягують поступово зростаючим навантаженням без поштовхів та

ударів. В процесі випробування послідовно відмічають величини навантажень та вимірюють відповідні їм видовження. Випробувальні машини обладнані спеціальними автоматичними пристроями, що викреслюють так звану **діаграму розтягу**, на якій по осі ординат відкладають величини навантажень, а по осі абсцис – величини абсолютних видовжень.

Для зручності порівняння результатів випробувань декількох зразків, діаграму розтягу перебудовують в інших координатах: по осі ординат відкладають напругу, а по осі абсцис – відносне видовження. Розглянемо характерну для пластичних матеріалів діаграму розтягу, побудовану в таких осях координат (рис.15, а).

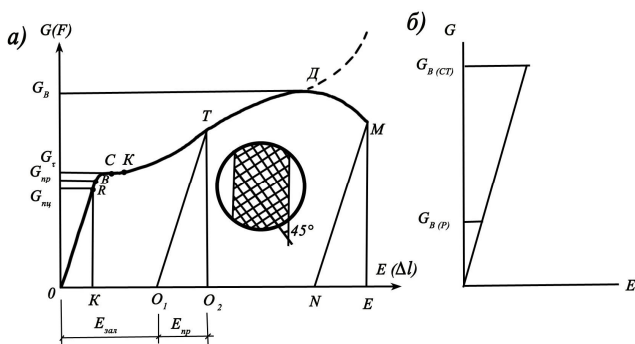


Рис. 15

В початковий момент, що відповідає початку координат діаграми, $\sigma=0$ та $\varepsilon=0$. При поступовому збільшенні навантаження стержень отримує видовження, яке зростає прямо пропорційно силі, що на діаграмі представлено прямою OA . Тобто, ця пряма графічно виражає закон Гука. Напруга, що відповідає крайній точці A прямої OA , називається **границею пропорційності** та позначається $\sigma_{нп}$.

При подальшому навантаженні зразка, тобто коли напруга стає більшою ніж $\sigma_{нп}$, діаграма починає відхилятися вправо. Це значить, що пряма пропорційність між σ та ε порушена і деформації ростуть швидше ніж напруга.

Якщо поступово розвантажити зразок, ми помітимо, що діаграма розвантаження співпадає з початковою ділянкою наванта. Тобто в матеріалі виникають тільки пружні деформації. Це буде відбуватись поки напруга не перевищить значення, що відповідає

точці В на діаграмі. Ця напруга називається *границею пружності* та позначається $\sigma_{пр}$. Границя пружності більшості матеріалів співпадає з границею пропорційності $\sigma_{пц}$ і тому їх вважають однаковими.

При подальшому навантаженні зразка діаграма швидко відхиляється вправо і, починаючи з деякої точки С, стає горизонтальною (або майже горизонтальною). При цьому відносні деформації зростають без збільшення напруги, тобто відбувається явище, що називається текучістю матеріалу. Напруга, що відповідає точці С на діаграмі, називається *границею текучості* та позначається σ_T . Горизонтальна ділянка СК на діаграмі називається площадкою текучості.

У деяких матеріалів на діаграмі розтягу немає площадки текучості, наприклад, у міді, алюмінію та ін. Для цих матеріалів вводиться поняття так званої умовної границі текучості $\sigma_{0,2}$, що дорівнює напрузі, при якій залишкові деформації складають 0,2%.

Явище текучості металів пов'язане зі зміною внутрішньої структури і є результатом зміщень іонів та атомів в ґратчастій структурі зерен ферриту і протікає, в основному, шляхом ковзання та двійникування. Якісна сторона явища текучості проявляється у вигляді сітки ліній на поверхні зразка. Ці лінії називаються лініями Людерса. Якщо поверхню зразка відполірувати до дзеркального стану, то після досягнення навантаження на зразок, що дорівнює границі текучості σ_T , дзеркальна поверхня зразка мутніє. При збільшеному зображенні помічаються лінії, що являють собою сітку з нахилом ліній 45° до осі зразка (рис. 15, а). Ці лінії є слідами ковзання шарів, по яких діють найбільші дотичні напруги.

Після закінчення процесу перебудови внутрішньої структури, природа якої ще не достатньо вивчена, метал набуває здатності знову чинити опір діючому навантаженню.

За площадкою текучості діаграма від точки С до точки Д являє собою полого криву, з якої видно, що деформації на цій ділянці хоча і ростуть зі збільшенням навантаження, але закону Гука вже не відповідають. Крім пружного видовження $\epsilon_{пр}$ зразок отримує ще значне залишкове видовження $\epsilon_{зал}$. Точка Д на діаграмі відповідає найбільшому значенню навантаження на зразок. Напруга, що відповідає цій точці, називається *границею міцності* матеріалу, тобто найбільшою із можливих для матеріалу напруг, віднесених до початкової площі перерізу зразка. Границя міцності позначається σ_B .

Після досягнення границі міцності характер відносних поздовжніх видовжень змінюється. Вони концентруються в одному

місці на невеликій довжині, де відбувається місцеве звуження зразка та утворюється так звана *шийка*, в межах якої відбувається розрив зразка (рис.16).

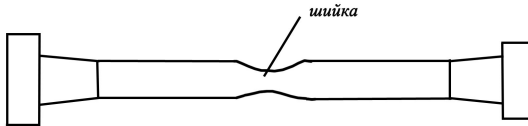


Рис. 16

Як видно з діаграми, матеріал руйнується при навантаженні меншому, ніж її найбільше значення, що відповідає точці *Д*. Тому здається правильно було б отримати границю міцності матеріалу діленням найбільшої величини сили на площу зразка в місці розриву. Але практично важливо знати, яке навантаження може витримати початкова площа перерізу, так як ми знаємо цей переріз тільки з креслення або з вимірів з натури.

Отже, ми встановили чотири характерні точки на діаграмі *A, B, C, D*, яким відповідають напруги відповідно $\sigma_{пц}$, $\sigma_{пр}$, σ_T , σ_B , які ми назвали :

$\sigma_{пц}$ – **границя пропорційності**. Це найбільша напруга, при якій зберігається пряма залежність між напругою та деформацією, тобто виконується закон Гука.

$\sigma_{пр}$ – **границя пружності**. Це найбільша напруга, при якій деформації, що виникають, тільки пружні, тобто вони повністю зникають після зняття навантаження.

σ_T – **границя текучості**. Це найбільша напруга, при якій деформації ростуть без збільшення навантаження.

σ_B – **границя міцності**. Це найбільша напруга, яка може виникнути в даному матеріалі.

Паралельно можна побудувати і дійсну діаграму розтягу, яка на рис. 15, а показана пунктирною лінією. В дійсній діаграмі напругу визначають за дійсною площею перерізу зразку в процесі його розтягу. Дійсна діаграма розміщується вище умовної діаграми. На початковому етапі навантаження дійсна діаграма практично співпадає з умовною і тільки після границі текучості відбувається збільшення напруги. Дійсною діаграмою користуються в металознавстві при визначенні характеристик пластичності матеріалів.

Якщо завантажити зразок до точки *T* на діаграмі, то повне видовження вимірюється абсцисою OO_2 . При розвантаженні зразка

графік розвантаження визначається лінією TO_1 , яка паралельна лінії OA , що виражає закон Гука. Отже, і за границею пропорційності пружні деформації пропорційні напрузі.

Таким чином, за границею пружності матеріалу повна деформація OO_2 складається із двох деформацій: пружної $\varepsilon_{пр}$ та залишкової $\varepsilon_{заль}$, тобто

$$\varepsilon_{повн} = \varepsilon_{пр} + \varepsilon_{заль}$$

Для оцінки ступеня пластичності матеріалу прийняті: відносне залишкове видовження δ при розриві (OO_3) та відносне залишкове звуження ψ , що визначається за наступними формулами (в %):

$$\delta = \frac{\Delta l_{заль}}{l} \cdot 100; \quad \psi = \frac{A - A_0}{A} \cdot 100,$$

де $\Delta l_{заль}$ – залишкове видовження при розриві;

l – початкова довжина зразка;

A_0 – площа перерізу в місці розриву зразка (в шийці);

A – початкова площа поперечного перерізу.

Більш пластичним буде той матеріал, у якого значення характеристик δ і ψ більші. Із діаграми розтягу видно, що величина δ тим більша, чим довша діаграма в напрямі осі абсцис, а величина ψ тим більша, чим довша ділянка DM діаграми (рис. 15, а).

Для звичайних сталей величина δ змінюється в межах від 8 до 28%, а ψ – від 30 до 70%.

При розтязі крихких матеріалів, наприклад, чавуну, до самого розриву спостерігаються незначні деформації, причому руйнування матеріалу відбувається раптово при дуже малих залишкових деформаціях, тому на діаграмі площадка текучості відсутня. Замість прямолінійної ділянки OA на діаграмі спостерігається скривлена лінія вже при низьких напругах (рис. 15, б). Тобто, для крихких матеріалів немає чіткої пропорційності між напругою та деформацією.

Границя міцності на розрив в більшості крихких матеріалів мала в порівнянні з їх границею міцності при стискові (рис. 15, б).

Вважається, що такі матеріали, як бетон та кам'яна кладка на розтяг працювати не можуть.

Випробування матеріалу на стиск. Явище стиску для більшості однорідних матеріалів в основному протікає так само, як і розтяг, тобто на початку матеріал поводить себе згідно із законом Гука, який залишається справедливим до деякої границі. При цьому в пластичних матеріалах має місце також текучість, але площадка текучості проявляється при цьому менш чітко.

Слід сказати, що явище рівномірного стиску можна спостерігати тільки у відносно коротких зразків. В довгих стержнях одноразово зі стиском може виникнути інше явище – поздовжній згин, що розглядається в розділі *X* даного посібника. Тому для отримання чистого стиску досліди проводять на зразках у формі кубу або невисокого циліндра.

Досліди показують, що явище чистого стиску спостерігаються у зразкові, довжина якого не перевищує п'ятикратної величини його меншого перерізу.

В табл. 3 наведені механічні характеристики основних будівельних матеріалів.

Таблиця 3

Найменування матеріалів	Границя текучості МПа	Границя міцності МПа
Сталь Ст. 3, Ст. 4	210–260	380–520
Сталь Ст. 5	260–280	500–620
Сталь 14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	330–380	470–520
Сталь 10ХСНД	370–400	510–540
Алюмінієві сплави:		
а) магнелії (алюм.+ магн.) Амг61-М	280 [$\sigma_{0,2}$]	390
б) авіалі (алюм.+ магн.+ кремн.) АВ-Т1 АД33-Т1	250 [$\sigma_{0,2}$]	300 270
в) дюралюміні (алюм.+ мідь+ магн.) Д1-Т Д16-Т	230 [$\sigma_{0,2}$]	380 430
Бетон (при стискові)	280 [$\sigma_{0,2}$]	7–50
Граніт		120–260
Піщаник	–	40–150
Вапняки	–	40–200
Цегла	–	8–30
Сосна вздовж волокон при розтязі	–	80–100
Те ж, при стискові	–	40–60
Дуб вздовж волокон при розтязі	–	100–120
Те ж, при стискові	–	50–70

§12. ПОНЯТТЯ ПРО НАКЛЕП. ЯВИЩЕ ПОВЗУЧОСТІ. РЕЛАКСАЦІЯ

Якщо розтягнути зразок за границю текучості, наприклад, до напруги, що відповідає точці T на діаграмі (рис. 15, а), а потім зняти навантаження, то отримуємо пряму TO_1 , паралельну OA . При цьому пружна частина деформації зникає, а залишкова деформація виразиться абсцисою OO_1 .

Якщо після цього знову завантажити зразок, то побачимо, що лінія повторного навантаження майже співпадає з лінією розвантаження, а границя пропорційності зростає.

Таким чином, границя пропорційності, що характеризується на діаграмі точкою A , буде тепер відповідати точці T . Отже, область пружних деформацій збільшується, і матеріал отримує здатність сприймати без залишкових деформацій більші навантаження, тобто можна сказати, що в результаті попередньої витяжки матеріалу за границю текучості його характеристики міцності зросли. При цьому, однак, пластичність матеріалу знижується.

Явище зміцнення матеріалу в результаті витяжки його за границю текучості називається наклепом.

Наклеп спостерігається і в результаті стиску його за границею текучості, наприклад, клепання коси. Ненаклепана коса швидко затупляється.

Це явище в одних випадках є корисним, а в інших – шкідливим. При розрізанні ножицями сталевих листів, їх краї, отримуючи наклеп, стають більш крихкими. При згині таких листів на краях можуть з'явитися тріщини, так як втративши свою пластичність, краї листів вже не можуть отримувати значних деформацій.

Те ж можна спостерігати при продавлюванні отворів в листах заклепочних з'єднань. Краї отворів, отримуючи наклеп, стають більш крихкими, ніж оточуючий метал. Тому видавлені отвори приходиться розсвердлювати, видаляючи крихку частину металу.

На практиці в багатьох випадках це явище є корисним. Наклепом зміцнюють матеріал ланцюгів різних типів, дріт сталевих канатів, електричний дріт тощо.

Але треба мати на увазі, що попередню витяжку матеріалу за границю текучості можна застосовувати в тих випадках, коли елемент працює тільки на розтяг. Якщо йому прийдеться працювати при змінних напругах розтягу та стиску, то наклеп є шкідливим.

Повзучість. У більшості матеріалів з підвищенням температури зменшується міцність і зростає пластичність. При високій температурі, починаючи з 300–400°C, метали при постійному навантаженні повільно, але безперервно деформуються. З підвищенням навантаження або температури швидкість деформації зростає. *Здатність матеріалів безперервно деформуватися при постійному навантаженні і високій температурі називається повзучістю.*

У вуглецевих сталях повзучість стає помітною при температурі вище 300°C, а при 800°C зростання деформації повзучості відбувається так швидко, що ці сталі стають абсолютно непридатними.

У деяких металів (свинець, алюміній, цинк та ін.), бетону, дерева, різних пластмас та інших матеріалів органічного походження повзучість спостерігається при кімнатній температурі.

Процес повзучості може протікати по-різному залежно від температури, напруги та опірності матеріалу. В одних випадках деформація може поступово з часом (багатьох днів або місяців) повністю припинитися. В інших випадках після повільного протікання ріст деформації прискорюється, що продовжується аж до руйнування матеріалу. Це руйнування у деяких матеріалів (зокрема у вуглецевих сталях) має характер пластичного. Інші матеріали руйнуються як крихкі.

При розрахунках на повзучість необхідно знати робочу температуру, строк експлуатації та максимально допустиму деформацію, яка виникає за цей строк в результаті повзучості.

Релаксація напруг. З явищами післядії і повзучості пов'язана так звана *релаксація напруг*. Якщо деформований стержень, наприклад, розтягнутий, закріпити так, щоб його видовження не змогло змінитися, то з часом в результаті післядії або повзучості в цьому стержні буде поступово зростати пластична деформація за рахунок зменшення пружної, у зв'язку з цим зменшиться сила натягу стержня і, відповідно, напруга.

Поступове зниження напруги при постійній деформації називається релаксацією напруги.

В результаті релаксації напруга болтів фланцевих та інших з'єднань, що працюють при високих температурах, з часом слабне. Для підтримки щільності таких з'єднань потрібно періодично підтягувати болти.

При звичайній температурі спостерігається послаблення затяжки гайок коліс вантажних автомобілів, що теж вимагає періодичної підтяжки цих гайок.

Релаксація напруги в металах набуває суттєвого значення при температурі, що викликає повзучість.

§13. ПОТЕНЦІЙНА ЕНЕРГІЯ ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ РОЗТЯЗІ (СТИСКОВІ)

У випадку статичного розтягу зразка розтягуюча сила F , яка повільно зростає від нуля до якогось значення, видовжує зразок на величину Δl і при цьому виконує роботу W . Ця робота акумулюється у деформованому зразку як потенційна енергія деформації W_{II} , причому, нехтуючи незначними втратами енергії (наприклад, тепловими) можна вважати, що

$$W = W_{II}$$

Якщо діаграма розтягу побудована в координатах $(F, \Delta l)$, то, як відомо з теоретичної механіки, площа діаграми виражає роботу деформації. До границі пропорційності робота виражається площею трикутника OAK (рис. 15, а). Отже, потенційна енергія пружної деформації стержня, що має довжину l і сталий поперечний переріз A при однаковій в усіх перерізах поздовжній силі $N=F$, дорівнюватиме

$$W_{II} = W = \frac{F \cdot \Delta l}{2}.$$

Але

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}, \quad (8)$$

тому потенційна енергія деформації розтягу до границі пружності

$$W_{II} = \frac{F \cdot F \cdot l}{2EA} = \frac{F^2 \cdot l}{2EA} \quad (8')$$

Виразивши потенційну енергію деформації до границі пружності через величину напруги і вважаючи $F = \sigma A$, отримаємо

$$W_{II} = \frac{\sigma^2 \cdot A \cdot l}{2E} \quad (9)$$

Повна робота, яка витрачається на руйнування зразка, виражається площею фігури $OADMN$ діаграми розтягу; площа трикутника NME відповідає роботі пружної деформації, що зникає під час розриву зразка.

Діаграма розтягу, що наведена на рис. 15, характерна для м'якої сталі, що має здатність мати значні видовження. Такі матеріали, як ми знаємо, називаються пластичними. Таким чином, величина площі

діаграми характеризує важливу якість матеріалу: чим вона більша, тим більшу роботу потрібно затратити на його руйнування і тим пластичніший матеріал. Тобто, за діаграмою розтягу можна робити висновок про ступінь придатності матеріалу для тої чи іншої конструкції.

Це особливо важливо для конструкцій, що зазнають ударного навантаження, що передають значну кількість кінетичної енергії. Тому для виготовлення таких конструкцій застосовують пластичні матеріали.

Для того щоб мати уяву про величину затраченої роботи в межах пружності, не пов'язуючи її ні з довжиною зразка, ні з площею перерізу, прийняте поняття питомої роботи пружної деформації, що витрачається на одиницю об'єму робочої частини зразка, або, що теж саме, **питомої потенційної енергії**, що позначається U .

Для отримання питомої потенційної енергії U потрібно величину роботи W розділити на об'єм зразка, тобто

$$U = \frac{W}{Al} = \frac{F\Delta l}{2Al},$$

але

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA},$$

тому

$$U = \frac{F^2}{2EA^2}, \quad (10)$$

або, так як $\frac{F^2}{A^2} = \sigma^2$, де $\sigma \leq \sigma_{\text{пш}}$,

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (10')$$

Одиниця вимірювання питомої потенційної енергії – $\frac{Нм}{м^3}$, $\frac{МНм}{м^3}$.

Із формули (10) виходить, що при даній напрузі запас питомої потенційної енергії буде тим більшим, чим менший модуль пружності матеріалу. Звідси стає зрозумілим, чому гума, для якої величина модуля пружності незначна, є досить енергоємним матеріалом.

Практичне значення потенційної енергії деформації полягає в наступному. При розвантаженні пружного тіла за рахунок потенційної енергії виконується робота, тобто навантажене пружне тіло можна вважати акумулятором енергії. Тому вказана властивість пружних тіл

широко застосовується на практиці (пружини, амортизуючі пристрої, ресори та ін.)

Знаючи величину роботи зовнішніх сил та потенційної енергії, можна визначити переміщення точок стержневої системи.

Приклад 6. Стержнева система ABC (рис. 17, а), складається із двох однакових стержнів довжиною $l=1$ м і площею поперечного перерізу $A=2$ см², в точці C прикладена сила $F=50$ кН. Визначити вертикальне переміщення точки C . Модуль пружності матеріалу $E=2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha=60^\circ$

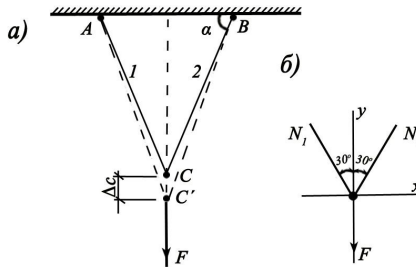


Рис. 17

Розв'язок. 1. Визначаємо зусилля в стержнях 1 і 2, вирізавши вузол C (рис. 17, б). Складаємо рівняння рівноваги.

$$1. \sum X_i = 0. -N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 30^\circ = 0$$

$$2. \sum Y_i = 0. N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 30^\circ - F = 0$$

$$\text{Із 1 знаходимо: } N_1 = N_2 = N$$

$$\text{Із 2 знаходимо: } 2N \cdot \cos 30^\circ = F, \quad N = \frac{F}{2 \cos 30^\circ}$$

2. Визначаємо потенційну енергію в обох стержнях за формулою (8):

$$W_{\text{п}} = 2 \frac{F^2 l}{2EA} = 2 \frac{N^2 l}{2EA} = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{F}{2 \cos 30^\circ} \right)^2 \frac{l}{EA} \right] = \frac{F^2 l}{4EA \cos^2 30^\circ}$$

3. Робота сили F на переміщенні Δ_C за формулою (8)

$$W = \frac{F \Delta_C}{2}$$

4. Прирівнявши W і $W_{\text{п}}$ визначаємо вертикальне переміщення точки C :

$$\frac{F\Delta_c}{2} = \frac{F^2 l}{4EA\cos^2 30^\circ}$$

або скоротивши обидві частини на $\frac{F}{2}$,

$$\Delta_c = \frac{Fl}{2EA\cos^2 30^\circ} = \frac{50 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,866^2} = 8,33 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,0833 \text{ см}$$

§14. ДОПУСТИМА НАПРУГА ДЛЯ МАТЕРІАЛУ. КОЕФІЦІЄНТ ЗАПАСУ МІЦНОСТІ

Для забезпечення надійної роботи будь-якої споруди та її довговічності необхідно, щоб кожна її складова частина була міцною за весь час експлуатації.

Тепер, коли ми познайомились з поняттями деформацій та напруги, можна більш розширити та уточнити поняття про міцність елемента конструкції. Очевидно, він буде міцним у тому випадку, якщо напруги у всіх його точках, що виникають під дією заданого навантаження, не будуть перевищувати величину, що забезпечують надійну, безаварійну роботу. *Напруги, що виникають в перерізах елементів конструкцій, під час їх експлуатації будемо називати робочою напругою.*

Крім того, деформації, що виникають під дією заданого навантаження повинні бути тільки пружними.

Тому **робочі напруги** у всіх частинах споруди не повинні перевищувати певної границі для того чи іншого матеріалу, тобто вони повинні бути значно меншими так званих небезпечних (граничних) напруг, якими є границя міцності σ_m для крихких матеріалів та границя текучості σ_t для пластичних матеріалів. А так як залишкові деформації виникають за границею пропорційності, то запобігаючи їх появі, робочі напруги в перерізах конструкцій повинні бути ще нижче границі пропорційності $\sigma_{пц}$ матеріалу.

Напруги, при яких нормальна експлуатація конструкцій неможлива, назвемо граничними напругами. Це границя текучості σ_t для пластичних матеріалів та границя міцності σ_B для крихких матеріалів.

Найбільшу напругу, яку можемо допустити в перерізах конструкцій для забезпечення їх нормальної експлуатації, назвемо допустимою напругою.

Вона позначається тою ж буквою, що і робоча напруга, але взята в квадратні дужки. Таким чином, величина допустимої напруги $[\sigma]$ повинна бути меншою за граничну напругу з якимсь запасом.

Число, що показує в скільки разів допустима напруга менша ніж гранична, називається коефіцієнтом запасу міцності та позначається буквою k або n .

Тобто, величина допустимої напруги для крихких матеріалів може бути виражена формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{k_1}, \quad (11)$$

а для пластичних матеріалів формулою

$$[\sigma]_p = [\sigma]_{ст} = \frac{\sigma_T}{k_2} \quad (12)$$

При виборі коефіцієнта запасу міцності, що є дуже відповідальною задачею, необхідно враховувати різні фактори, що впливають на його величину.

На величину коефіцієнта запасу міцності впливають: якість матеріалів, умови експлуатації конструкцій, технологія виробництва, характер навантаження, призначення будівель та споруд та ін. Наприклад, крихкі матеріали, що руйнуються раптово, повинні мати більший запас міцності, ніж пластичні матеріали, що руйнуються після значних деформацій. Для елементів, що працюють на статичне навантаження, коефіцієнт запасу міцності може бути менший, ніж для випадку динамічних навантажень.

Ступінь точності розрахунку також впливає на вибір коефіцієнта запасу міцності. При точному розрахунку коефіцієнт можна прийняти меншим, ніж у випадку наближеного розрахунку, або якщо не зовсім відомі значення сил, що діють на конструкцію.

Елементи конструкцій літака повинні, по можливості, бути легкими, що примушує зменшувати коефіцієнт запасу міцності. Це, в свою чергу, вимагає застосування точних методів розрахунку та матеріалів високої якості. Для капітальних споруд коефіцієнт запасу повинен бути більшим ніж для тимчасових.

Правильний вибір коефіцієнта запасу міцності пов'язаний також і з економічними питаннями, так як його величина визначає витрати матеріалу, а значить і вартість конструкцій. Перелічені приклади показують наскільки складне питання вибору коефіцієнта запасу міцності і тому дати загальні норми для всіх випадків неможливо. Потрібно керуватися загальними міркуваннями та досвідом,

накопиченим в результаті спостережень за роботою раніш виконаних аналогічних конструкцій.

В таблиці 4 і 5 наведені коефіцієнти запасу міцності та допустимі напруги для основних будівельних матеріалів.

Таблиця 4

Характеристика навантаження	Стан матеріалу	Орієнтовне значення, k
Статичне навантаження	Пластичний (по відношенню до σ_T)	1,4–2,0
	Крихкий (по відношенню до σ_B)	2,5–5,0
	Крихко-пластичний	1,6–2,5

Таблиця 5

Найменування матеріалів	Допустимі напруги	
	на розтяг, МПа	на стиск, МПа
1	2	3
Сталі ОС і Ст. 2	140	140
Сталь Ст. 3	160	160
Мідь	30–120	30–120
Алюміній	30–80	30–80
Дюралюміній	80–150	80–150
Чавун сірий у відливках	28–80	120–150
Сосна вздовж волокон	7–10	10–12
Сосна поперек волокон	–	1,5–2,0
Дуб вздовж волокон	9–13	13–15
Дуб поперек волокон	-	2,0–3,5
Кам'яна кладка	До 0,3	0,4–4,0
Цегляна кладка	До 0,2	0,6–2,5
Бетон (залежно від складу)	0,1–0,7	1–9

§.15. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ РОЗТЯЗІ ТА СТИСКОВІ

Для забезпечення надійності та довговічності будівель та споруд необхідно, щоб всі його елементи були міцними, жорсткими та стійкими. Чи відповідає конструкція цим вимогам – визначається розрахунком.

На даний час прийнято два методи розрахунку на міцність: *метод розрахунку за допустимими напругами* і *метод розрахунку за граничним станом*.

Перший метод (за допустимими напругами) застосовується для розрахунку елементів конструкцій, в яких за умовою експлуатації допустимі лише досить малі пружні деформації, наприклад, для деталей машин і механізмів.

Другий метод (за граничним станом) прийнятий для розрахунку елементів конструкцій цивільних та промислових будівель, а також для розрахунку інженерних споруд.

Хоча метод розрахунку за допустимими напругами не застосовується для розрахунку будівельних конструкцій, опір матеріалів ми будемо вивчати за цим методом, тому що цей метод дає можливість краще зрозуміти основні питання опору матеріалів. Метод розрахунку за графічним станом ми розглянемо окремо в розділі XI даного посібника.

Суть методу розрахунку за допустимими напругами полягає в тому, *щоб робочі напруги, що виникають в точках будь-якого поперечного перерізу елемента конструкції, не перевищували допустимої напруги для даного матеріалу*.

Тому умову міцності для розтягу або стиску бруса можна виразити наступною формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (13)$$

Тобто, *нормальна напруга в будь-якій точці поперечного перерізу бруса не повинна перевищувати допустимої напруги для матеріалу*.

Практичні розрахунки на розтяг та стиск зводяться до визначення однієї із невідомих величин, що входять в формулу 13, за двома відомими (величина $[\sigma]$ звичайно відома). За основною формулою розрахунку на міцність при розтязі або стискові можна виконувати три види розрахунків:

1. Перевірний розрахунок. При цьому виді розрахунку всі величини, що входять до формули (13) відомі. Потрібно перевірити, чи

відповідає робоча напруга умові міцності. Тобто формула цього розрахунку має вигляд основної формули (13)

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

2. Проектний розрахунок. При цьому виді розрахунку відомі навантаження (N) та матеріал $[\sigma]$. Потрібно визначити площу поперечного перерізу. Формула цього розрахунку має вигляд:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} \quad (13')$$

3. Знаходження допустимого навантаження. Для цього виду розрахунку відомі розміри перерізу (A) та матеріал ($[\sigma]$). Потрібно визначити, яке найбільше навантаження витримає конструкція. Формула цього розрахунку буде:

$$N \leq A \cdot [\sigma] \quad (13'')$$

Розрахунок вважається нормальним, якщо відхилення в значенні напруг не перевищує 5%. Більша перенапруга в перерізі недопустима з міркувань міцності, а більша недонапруга пов'язана з перевитратами матеріалу.

При цьому треба звернути увагу на те, що користуватися формулами (13-13'') при розрахунках на стиск можна тільки тоді, коли довжина бруса або стержня невелика в порівнянні з розмірами поперечного перерізу (див. §11).

Приклад 7. Підібрати поперечний переріз стержня ферми, що складається із двох сталних рівносторонніх кутів, якщо зусилля розтягу в цьому стержні $N=210$ кН.

Допустима напруга для сталі $[\sigma]=160$ МПа.

Розв'язок. За формулою (13) маємо:

$$A = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{210}{16} = 13,73 \text{ см}^2$$

де $[\sigma]=160$ МПа $=16$ кН/см²

За таблицями сортаменту приймаємо два рівносторонніх кути №70/5 з $A=2 \cdot 6,86=13,72$ см². Перевіримо напругу:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{210}{13,72} = 15,31 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < [\sigma] = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Недонапруга складає $\frac{16 - 15,31}{16} \cdot 100\% = 4,3\%$, що допустимо.

Приклад 8. На ростверк пальної основи (рис. 18) передається навантаження від споруди $F_1=2\text{МН}$ та підземної її частини $F_2=100\text{кН}$. Визначити необхідну кількість дерев'яних паль діаметром $d=22\text{см}$, якщо допустима напруга для їх матеріалу $[\sigma]=3\text{МПа}$.

Розв'язок. Знайдемо повне навантаження на палню основу:

$$N=F_1+F_2=2000+100=2100\text{кН},$$

$$\text{де } F_1=2\text{МН}=2000\text{кН}$$

Визначаємо несучу здатність однієї палі $N_{\text{п}}$ діаметром $d=22\text{см}$ (допустиме навантаження на палю) за формулою (13")

$$N_{\text{п}} \leq A[\sigma]=380,1 \cdot 0,3=114\text{кН}$$

$$\text{де } A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 22^2}{4} = 380,1 \text{ см}^2, \quad [\sigma]=3\text{МПа}=0,3\text{кН/см}^2$$

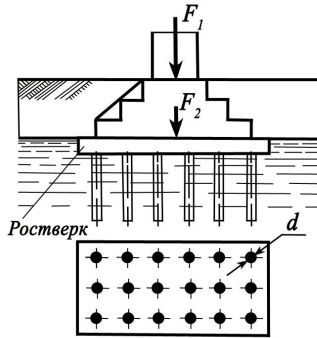


Рис. 18

Знайдемо потрібну кількість дерев'яних паль.

$$\frac{N}{N_{\text{п}}} = \frac{2100}{114} = 18,4 \text{ шт. прийmemo } 18 \text{ пал}.$$

Перевіримо напругу:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{2100}{380,1 \cdot 18} = 0,307\text{кН/см}^2$$

Перенапруга складає $\frac{0,307 - 0,3}{0,307} \cdot 100\% = 2,3\% < 5\%$, що

допустимо.

§16. ВПЛИВ ВЛАСНОЇ ВАГИ БРУСА НА НАПРУГУ

При визначенні зовнішніх сил, що діють на брус, ми до цього часу не брали до уваги дію власної ваги, вважаючи, що її вплив у порівнянні з величиною зовнішнього навантаження, невеликий. Але при розрахунках бруса великої довжини (штанги, канату, ланцюга), кам'яних стовпів, колон, стін, фундаментів та ін. не можна не враховувати їх власну вагу, тому що результати розрахунку можуть суттєво змінитися.

Виведемо формулу для визначення величини напруги з врахуванням власної ваги. Візьмемо призматичний стержень постійного перерізу, що жорстко утримується верхнім кінцем, який розтягується силою F , прикладеною до нижнього кінця (рис. 19). Позначимо довжину стержня l , площу поперечного перерізу A та об'ємну вагу матеріалу ρ . Визначимо власну вагу стержня:

$$P = \rho \cdot A \cdot l$$

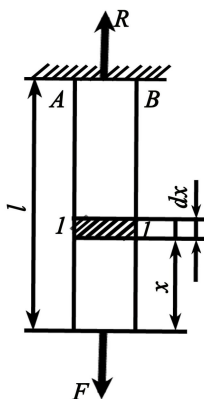


Рис. 19

Реакція жорсткого кріплення дорівнює сумі сил F та ваги стержня, тобто:

$$R = F + P$$

Звичайно, небезпечним перерізом стержня буде переріз AB в його кріпленні. В цьому перерізі виникає найбільша поздовжня сила, що дорівнює сумі сил F та його ваги P . Напруга в цьому перерізі

$$\sigma_{\max} = \frac{F + P}{A}$$

Знаючи, що $P = \rho l A$, можна записати

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{\rho l A}{A}$$

або

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \rho l \cdot \quad (14)$$

Тобто, умова міцності для стержня буде мати вид

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{F}{A} + \rho l \right) \leq [\sigma], \quad (15)$$

звідки потрібна площа перерізу

$$A \geq \frac{F}{[\sigma] - \rho l} \quad (16)$$

Тепер візьмемо довільний переріз стержня на відстані z від нижнього кінця та визначимо в ньому напругу тільки від власної ваги:

$$\sigma_z = \frac{\rho A z}{A} = \rho z \quad (17)$$

Звідси видно, що величина напруги в стержні постійного перерізу тільки від дії власної ваги не залежить від величини площі перерізу. Із цього рівняння видно також, що при деякій довжині напруга може досягнути величини границі міцності матеріалу σ_B , при якій стержень зруйнується від власної ваги.

Довжина, при якій стержень може зруйнуватися від дії власної ваги, може бути визначена за формулою

$$l_{\text{гран}} = \frac{\sigma_B}{\rho} \quad (18)$$

Аналогічно можна визначити найбільшу довжину, при якій в стержні від дії власної ваги виникають напруги, що дорівнюють допустимим:

$$l_{\text{max}} = \frac{[\sigma]}{\rho}$$

Для визначення видовження бруса тільки від дії власної ваги виділимо з нього елемент довжиною d_z (ис. 19). На нескінченно малій довжині цього елемента розтягуючу силу можна вважати постійною. Величина абсолютного видовження цього елемента визначається за формулою (5)

$$d(\Delta l) = \frac{\rho \cdot A \cdot z \cdot dz}{EA} = \frac{\rho}{E} \cdot z \cdot dz.$$

Інтегруючи цей вираз в межах від 0 до l , отримаємо видовження всього бруса:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\rho}{E} \cdot z \cdot dz = \frac{\rho}{E} \int_0^l z dz \Big|_0^l = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{\rho l^2}{2E}. \quad (19)$$

Формулу (19) можна представити в іншому вигляді, якщо замість ρl поставити $\sigma_z = \frac{P}{A}$:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{2EA} \quad (19')$$

Так як величина видовження бруса під дією сили F дорівнює $\frac{F \cdot l}{E \cdot A}$, то із формули (19') випливає, що видовження бруса від власної ваги вдвічі менше, ніж від сили, що дорівнює власній вазі та прикладеній до нижнього кінця бруса. Повне видовження бруса

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{EA} + \frac{P \cdot l}{2EA} \quad (19'')$$

При розрахункові сталених стержнів, що мають порівняно велику міцність, вплив власної ваги може виявитись тільки при дуже великій їх довжині: при малій довжині вагою їх можна нехтувати. Те ж саме можна сказати і про дерев'яні бруси.

Що стосується кам'яних та бетонних конструкцій, що мають меншу міцність, особливо при розтязі, то вплив власної ваги на величину напруги при звичайній масивності таких конструкцій виявляється вже при порівняно невеликій їх висоті. В цьому випадку стиснуті елементи з постійним перерізом будуть неекономічними, так як напруги, що дорівнюють допустимим, виникають тільки в одному перерізі – в основі стовпа, стіни. Перерізи вище основи звичайно недовантажені, тобто напруги в них значно менші, ніж допустимі.

Тому із економічних міркувань необхідно перерізи бруса, що лежать вище основи, зменшувати. Ідеальним був би брус, якби у всіх його перерізах виникали однакові напруги. Очевидно, що для цього брус повинен мати по довжині змінну площу поперечного перерізу, що змінюється безперервно, тобто він повинен мати вигляд, показаний на рис. 20, а. Такий брус називається **брусом рівного опору** при розтязі та стискові. При цьому він виявляється найекономічнішим завдяки найменшій вазі.

Надання боковим граням бруса криволінійного окреслення ускладнює та здорожчує роботу, тому йому надають наближену форму бруса рівного опору, роблячи його ступінчастим (рис. 20, б).

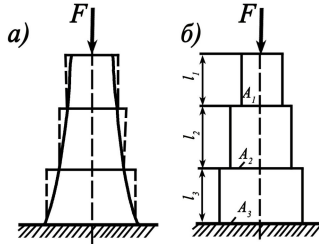


Рис. 20

Приклад 9. Визначити найбільшу напругу стиску та повне укорочення бетонної колони постійного перерізу висотою $l=10$ м від дії власної ваги, якщо об'ємна вага бетону $\rho=24 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^3}$, а його модуль поздовжньої пружності $E = 2 \cdot 10^4$ МПа.

Розв'язок. За формулою (17) визначимо найбільшу напругу в нижньому перерізі:

$$\sigma_z = \rho \cdot z = 24 \cdot 10 = 240 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^2} = 0,24 \frac{\text{MH}}{\text{м}^2} = 0,24 \text{ МПа}$$

де $z=l=10$ м.

За формулою (19) знайдемо абсолютне укорочення

$$\Delta l = \frac{\rho \cdot l^2}{2E} = \frac{24 \cdot 10^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^7} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ см}$$

Приклад 10. Цегляна стіна несе рівномірне навантаження $q=320 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}}$ (рис. 21). Визначити нормальну напругу в перерізі 1-1 (з врахуванням власної ваги стіни та фундаменту) та потрібну ширину b бутобетонного фундаменту. Об'ємна вага цегляної кладки $\rho_k=16 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^3}$, бутобетонної – $\rho_o=20 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^3}$. Допустима напруга для ґрунту $[\sigma]_{\text{гр}}=0,2 \text{ МПа}$

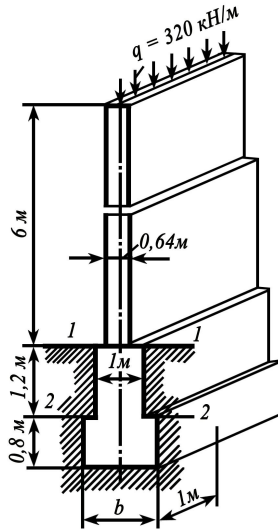


Рис. 21

Розв'язок. Розрахунок фундаменту та стіни виконуємо для довжини 1 м. Повна напруга в перерізі 1-1 складається:

$$\sigma_{1-1} = \frac{F}{A} + \rho_{\kappa} z = \frac{320}{0,64} + 16 \cdot 6 = 500 + 96 = 596 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^2} = 0,596 \text{ МПа},$$

де $F = q \cdot l = 320 \text{ кН}$, $A = 0,64 \cdot 1 = 0,64 \text{ м}^2$, $z = 6 \text{ м}$.

Знайдемо ширину підшови фундаменту. Навантаження на фундамент Q складається із F та ваги стіни P .

$$Q = F + P = 320 + 62,4 = 382,4 \text{ кН},$$

де $P = \rho_{\kappa} \cdot l_{\phi} \cdot A = 16 \cdot 6 \cdot 0,65 = 62,4 \text{ кН}$, $l_{\phi} = 6 \text{ м}$.

Робоча напруга під підшовою фундаменту

$$\sigma = \frac{Q}{A} + \rho_{\phi} \cdot l_{\phi} = \frac{382,4}{b \cdot 1} + 20 \cdot 2 = \left(\frac{382,4}{b} + 40 \right) \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^2}$$

За умовою міцності ґрунту (основи) на стиск, знаходимо ширину підшови фундаменту b

$$\frac{382,4}{b} + 40 \leq [\sigma]_{zp} = 200 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^2},$$

$$\text{звідси } b = \frac{382,4}{160} = 2,4 \text{ м}.$$

§17. ПОНЯТТЯ ПРО МІСЦЕВІ НАПРУГИ (КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУГ)

При розрахунках на осьовий розтяг або стиск бруса припускають, що він має постійний переріз по всій його довжині, в цьому випадку, як ми бачили, напруги розподіляються по ньому рівномірно (за винятком перерізів, що знаходяться в безпосередній близькості від точок прикладання зовнішніх сил). В брусах із змінним поперечним перерізом, але при поступовій його зміні за довжиною, розподіл напруг в перерізах також можна вважати рівномірним.

Якщо переріз різко змінюється внаслідок різного роду послаблень бруса отворами, вирізами, виточками, нарізкою тощо, то напруги по такому поперечному перерізу розподіляються нерівномірно. В цьому випадку вони різко зростають (концентруються) з країв отворів та вирізів. Приблизні епюри напруг (рис. 22) дають наочне уявлення про зміну останніх в послаблених перерізах.

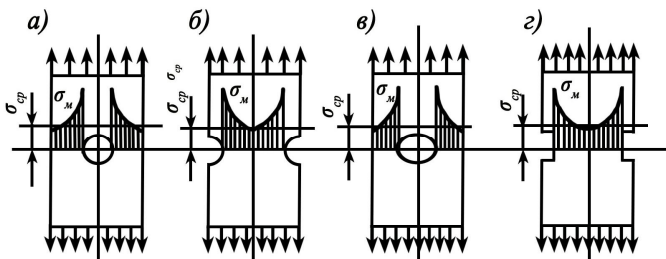


Рис. 22

Явище різкого підвищення напруг в послабленому перерізі бруса називається концентрацією напруг.

Результати теоретичних та експериментальних досліджень показують, що напруги концентруються лише на досить малій частині площі поперечного перерізу біля самого краю отвору або вирізу.

Отже, концентрація напруг – це явище, що має місцевий характер. Тому і напруги, що виникають у вказаних місцях поперечних перерізів, називаються місцевими напругами та позначаються σ_m .

Задача визначення величини найбільших місцевих напруг є досить важкою і розв'язується методами теорії пружності або дослідним шляхом.

Величина найбільшої місцевої напруги для випадку послаблення перерізу круглим отвором досить малого діаметру в порівнянні з

шириною смуги (рис. 22, а) приблизно складає

$$\sigma_m = 3\sigma_{\text{сер}}$$

для випадку послаблення вирізом (рис. 22, б)

$$\sigma_m = 2\sigma_{\text{сер}},$$

причому такий розподіл напруг по перерізу зберігається до того часу, поки найбільші напруги не перевищують границі пропорційності.

Якщо переріз бруса послаблений еліптичним отвором, у якого велика вісь перпендикулярна напрямку розтягуючих або стискаючих сил, то величина найбільшої місцевої напруги зростає ще більше, ніж при послабленні круглим отвором (рис. 22, в). У випадку співпадання напрямку великої осі еліпсу з напрямком сил найбільші місцеві напруги будуть хоча і більші середньої напруги по перерізу, але менші, ніж максимальні місцеві напруги при послабленні круглим отвором. Чим вужчий отвір, в цьому випадку, тим менша величина місцевої напруги.

В будівельних конструкціях подібні послаблення перерізів мають місце в стінах та фундаментах будівель, в яких залишають отвори для прокладання труб різного призначення (водопровідних, опалення, каналізаційних тощо) і гнізда для балок перекриття, ніші для приладів опалення та ін. (рис. 22, г). Для такого виду послаблень місцеві напруги мають найбільше значення.

Основним показником місцевих напруг є **теоретичний коефіцієнт концентрації напруг**.

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_m}{\sigma_{\text{сер}}},$$

величина якого залежить виключно від геометрії деталі.

Відносно впливу концентрації напруг на міцність деталі при статичному навантаженні необхідно сказати наступне.

Досліди показують, що в зразкові із пластичного матеріалу при статичному навантаженні напруги в місцях концентрації, досягнувши границі текучості, не підвищуються, в той час як в іншій частині перерізу ростуть. Таким чином, в послабленому перерізі створюються умови для вирівнювання напруги.

Тому для пластичних матеріалів концентрація напруг менш небезпечна, ніж для крихких, а при статичному навантаженні вона зовсім не впливає на їх міцність. Якщо на елемент конструкції з послабленим перерізом діє динамічне або повторно-змінне навантаження, що викликає в перерізах напругу різних знаків, то в цих випадках, не зважаючи на пластичність матеріалу, концентрація напруг істотно впливає на його міцність.

§ 18. ПОНЯТТЯ ПРО СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ ПРИ РОЗТЯЗІ ТА СТИСКОВІ

Визначення деформацій бруса при розтязі та стискові дає можливість встановити, як змінюються форми та розміри частин конструкцій в результаті дії зовнішніх сил. Звичайно ці зміни форми настільки незначні, що здавалося б утрачають практичне значення.

Однак є цілий ряд конструкцій, для яких розрахунки на міцність неможливі без вміння визначати деформації.

У всіх прикладах, які ми розглядали до цих пір, зусилля розтягу або стиску визначались із умови рівноваги твердого тіла. Такі задачі називають *статично визначеними*.

На практиці при визначенні зусиль в елементах конструкцій іноді буває недостатньо рівнянь статички, так як число невідомих зусиль виявляється більшим числа незалежних рівнянь статички.

Задачі, для розв'язку яких недостатньо рівнянь статички, називаються *статично невизначеними*.

Статично невизначені задачі розв'язуються додаванням до рівнянь рівноваги рівнянь, яких не вистачає, отриманих на основі деформацій системи. Рівняння деформацій відрізняються від рівнянь рівноваги. В них входять, крім зусиль і геометричних розмірів, ще і величини, що характеризують пружні властивості матеріалу, тобто модуль пружності матеріалу.

Так як передбачається, що матеріал будь-якого елемента конструкції пружний, тобто він поводить себе відповідно до закону Гука, завжди можна скласти рівняння, яких не вистачає. Так як характер таких задач досить різноманітний і для їх розв'язку не можна дати конкретних вказівок, придатних для кожного окремого випадку, покажемо на прикладах загальний метод розв'язку деяких статично невизначених задач.

В основному цей метод полягає в наступному:

- а) з'ясовують характер зусиль, які визначаються;
- б) складають можливі для даного випадку рівняння статички;
- в) складають недостатні рівняння переміщень з таким розрахунком, щоб загальна кількість рівнянь дорівнювала числу невідомих зусиль, що визначаються.

Приклад 11. Балка, яку можна вважати абсолютно жорсткою, має шарнірно нерухому опору та підтримується двома сталевими стержнями однакового поперечного перерізу (рис. 23, а).

Визначити із розрахунку на міцність площі поперечних перерізів сталених стержнів, якщо допустима напруга для сталі $[\sigma]=160 \text{ МПа}$, $F=50 \text{ кН}$.

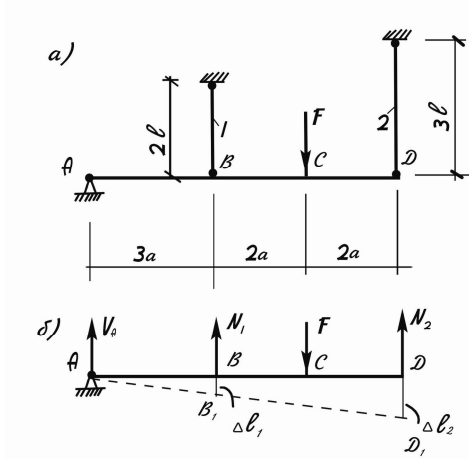


Рис. 23

Розв'язок. Об'єктом рівноваги є балка AD . Зв'язками для неї є шарнірно нерухома опора та стержні 1 і 2. Звільняємося від зв'язків (рис 23, б). Від вертикального навантаження в опорі A виникає тільки вертикальна реакція V_A . Складаємо рівняння рівноваги. Статика дає два рівняння рівноваги, а невідомих 3. Задача один раз статично невизначена.

$$1. \sum M_A = 0. -N_1 \cdot 3a + F \cdot 5a - N_2 \cdot 7a = 0$$

$$2. \sum Y_i = 0. V_A + N_1 - F + N_2 = 0$$

Так як балка вважається абсолютно жорсткою, то при деформації стержнів вона залишається прямолінійною і лише повернеться навколо шарніру A , як показано штриховою лінією на рис. 23, б.

Із подібності трикутників ABB_1 та ADD_1 , в яких сторони BB_1 та DD_1 є видовженням стержнів, тобто

$$BB_1 = \Delta l_1, \quad DD_1 = \Delta l_2$$

маємо

$$\frac{\Delta l_1}{3a} = \frac{\Delta l_2}{7a}$$

або скоротивши на a , отримаємо

$$7\Delta l_1 = 3\Delta l_2.$$

Це і є рівняння деформацій для нашої задачі. Виразивши видовження стержнів за формулою Гука (5), отримаємо

$$7 \frac{N_1 2l}{EA} = 3 \frac{N_2 3l}{EA},$$

звідки

$$14N_1 = 9N_2 \quad \text{або} \quad N_1 = \frac{9}{14} N_2 = 0,643 N_2$$

Підставивши це відношення в рівняння 1, отримаємо

$$0,643N_2 \cdot 3a + F5a - N_2 \cdot 7a = 0,$$

звідки знаходимо

$$N_2 = 49,30 \text{ кН},$$

тоді

$$N_1 = 0,643N_2 = 31,69 \text{ кН}$$

Як бачимо, більше зусилля виникає в стержні 2, а за умовою задачі площі поперечних перерізів стержнів однакові, тому потрібну величину площі знайдемо за умовою міцності стержня 2:

$$\sigma = \frac{N_2}{A} \leq [\sigma],$$

звідси

$$A \geq \frac{N_2}{[\sigma]}, \quad [\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2$$

$$A = \frac{49,30}{16} = 3,08 \text{ см}^2.$$

При цьому стержень 1 буде недовантаженим, напруги в його перерізах будуть нижчими за допустимі.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{31,69}{3,08} = 10,28 \text{ кН/см}^2 = 102,8 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Але зменшувати площу його перерізу не можна, бо якщо площі A_1 і A_2 будуть неоднаковими, то зусилля N_1 і N_2 будуть іншими, тобто весь розрахунок, пов'язаний з визначенням зусиль, втратить зміст.

§19. ТЕМПЕРАТУРНІ ТА МОНТАЖНІ (ПОЧАТКОВІ) НАПРУГИ В СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМАХ

При виготовленні конструкцій будівель та споруд неможливо забезпечити абсолютно точного виконання розмірів їх частин.

При їх складанні виникають додаткові (монтажні) напруги. Теж саме відбувається при неоднаковому нагріві частин конструкції.

В статично визначених системах не виникає таких додаткових напруг, так як опорні зв'язки не чинять опір зміні розмірів їх елементів.

Температурні і монтажні напруги в статично невизначених системах визначаються так само, як і при розрахунку на силові навантаження.

Розглянемо вплив температури на напруги та деформації в статично невизначених системах. Нехай сталевий брус AB постійного перерізу жорстко закріплений двома кінцями (рис. 24) при температурі t_1 , яка зростає до t_2 . Величина зміни температури

$$t = t_2 - t_1$$

Якби один кінець бруса був вільним, то під дією температури відбулось би видовження бруса на якусь величину. Але так як обидва кінці бруса жорстко закріплені, в опорах виникнуть реакції, від яких в свою чергу з'являються напруги в перерізах бруса. Ці напруги будуть стискуючими, якщо температура підвищується (рис. 24, а), і розтягуючими, якщо температура знижується (рис. 24, б)

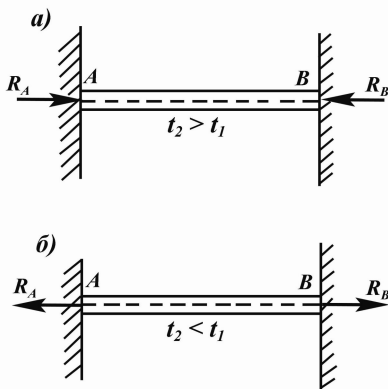


Рис. 24

Напруги в перерізах бруса, що виникають від дії температури, називаються температурними напругами.

Для визначення величини напруг в перерізах бруса уявно відкинемо одну із опор, наприклад, праву (рис. 24), тоді брус видовжиться на величину

$$\Delta l_t = \alpha t l,$$

де α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу бруса. Реакція R_B викличе укорочування бруса на величину

$$\Delta l_R = \frac{R_B \cdot l}{EA}.$$

Так як за абсолютним значенням переміщення

$$\Delta l_t = \Delta l_R, \text{ то } \alpha t l = \frac{R_B l}{EA},$$

а розділивши обидві частини на l , отримаємо величину відносної деформації

$$\alpha t = \frac{R_B}{EA},$$

звідки

$$R_B = \alpha \cdot t \cdot E \cdot A,$$

тоді величина температурної напруги

$$\sigma_t = \alpha \cdot t \cdot E \tag{20}$$

Формула (20) справедлива лише для випадку, коли брус має постійний переріз і жорстке закріплення кінців при рівномірній зміні температури по всій довжині стержня.

В будівельній практиці слід уникати створення таких умов роботи елементів конструкцій, при яких вони отримували б температурні напруги. Якщо цього неможливо уникнути, то необхідно доводити до мінімуму їх величину за допомогою спеціальних пристроїв (створення температурних швів, зазорів тощо).

Приклад 12. Жорсткий брус підтримується трьома стержнями (рис. 25) однакової довжини $l=3$ м, площею перерізу A . При складанні конструкції виявилось, що стержень CD є коротшим проектної довжини на величину $\delta=1,5$ мм, тому він встановлений з початковою напругою $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Потрібно визначити напругу в перерізах стержнів.

Розв'язок. Щоб закріпити стержень CD до жорсткого бруса, потрібно його розтягнути на величину Δl_2 , при цьому стержні AB і KL стискуються на величину Δl_1 . Після цього брус займе нове положення,

показане на рис. 25 штриховою лінією.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$1. \Sigma M_C = 0. \quad -N_1 \cdot a + N_3 \cdot a = 0, \text{ звідки } N_1 = N_3;$$

$$2. \Sigma Y_i = 0. \quad -N_1 + N_2 - N_3 = 0, \text{ звідки } N_2 = 2N_1,$$

так як площі перерізів однакові, то

$$\sigma_2 = 2\sigma_1$$

Із рис. 25 видно, що

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta$$

або

$$\frac{\sigma_1 \cdot l}{E} + \frac{\sigma_2 \cdot l}{E} = \delta,$$

звідки

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{E\delta}{l}.$$

Виразивши σ_2 через σ_1 , отримаємо

$$3\sigma_1 = \frac{E\delta}{l},$$

звідки

$$\sigma_1 = \frac{E\delta}{3l} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,0015}{3 \cdot 3} = 33,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 2\sigma_1 = 66,7 \text{ МПа}$$

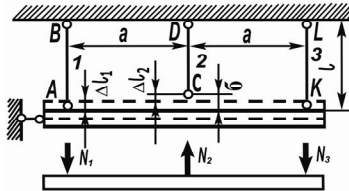


Рис. 25

Величина зусиль і напруг в стержнях залежить від величини зазору δ , тобто зусилля і напруги можна штучно регулювати. Можна, наприклад, вибрати величину зазору такою, щоб напруги в стержнях були знижені до потрібної величини або щоб вони були у всіх стержнях однакові.

Питання для самоконтролю

1. В чому суть гіпотези плоских перерізів?
2. Що називається абсолютною та відносною деформаціями? Їх одиниці вимірювання.
3. Що називається деформацією розтягу (стиску)?
4. Сформулюйте закон Гука; як він виражається математично?
5. Що характеризує модуль поздовжньої пружності матеріалу та його одиниця вимірювання?
6. В яких межах застосовується закон Гука?
7. Які напруги виникають в поперечному перерізі бруса при розтязі (стискові)?
8. Що є основними механічними характеристиками матеріалу?
9. Чим характеризуються пластичні властивості матеріалів?
10. Дати визначення допустимої напруги та коефіцієнта запасу міцності.
11. Які фактори впливають на вибір величини допустимої напруги та коефіцієнта запасу міцності?
12. За яким законом розподіляються нормальні напруги по поперечному перерізу?
13. Що таке концентрація напруг?
14. Що називається наклепом?
15. В чому полягає умова міцності при розтязі та стискові?
16. Що називається статично невизначеною системою?
17. Що таке температурні та монтажні напруги?

Розділ III. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

§ 20. НАПРУГИ В ПОХИЛИХ (КОСИХ) ПЕРЕРІЗАХ ПРИ ОДНООСНОМУ РОЗТЯЗІ (СТИСКОВІ). ЗАКОН ПАРНОСТІ ДОТИЧНИХ НАПРУГ

В попередніх параграфах, перевіряючи міцність розтягнутого або стиснутого стержнів, ми визначали напругу тільки по перерізу, перпендикулярному до його осі. Але правильно оцінити небезпеку, що загрожує міцності стержня, можна лише знаючи його напружений стан, а це потребує вміння знаходити напруги не тільки в перерізі, перпендикулярному до його осі, але і в будь-якому.

Вище (див. §7) було сказано, що через будь-яку точку тіла можна провести безліч довільно розміщених перерізів (площадок), причому напруги по ним в цій точці в загальному випадку будуть різними.

Щоб визначити напружений стан в даній точці, необхідно встановити закон зміни напруги залежно від напрямку площадки .

Під умовним терміном *“напружений стан в точці”* розуміють сукупність нормальних та дотичних напруг, що діють по безлічі площадок, які проходять через дану точку.

Осьовий розтяг (стиск) є найпростішим видом деформації тіла, при якому напружений стан всіх його точок однаковий і може бути названим *однорідним напруженим станом*. В загальному ж випадку напружений стан в тілі неоднорідний, так як він змінюється від точки до точки і тому по кожному перерізу тіла напруги розподіляються нерівномірно.

Розглянемо напруги, що виникають при осьовому розтязі або стискові в косих перерізах, тобто не перпендикулярних до його осі. Це дозволить виявити загальну картину напруг, що виникають в перерізах, отримати залежності для визначення напруг, що виникають по будь-якій площадці, і визначити, під яким кутом розміщені ті перерізи, в яких напруги досягають максимальних значень.

Візьмемо прями́й брус (рис. 26, а), що розтягується силою F , та визначимо напруги в ньому по похилому (косому) перерізу, що складає з поперечним перерізом кут α .

Зовнішня нормаль (перпендикуляр до цього перерізу) складає з віссю бруса також кут α . Цей кут відкладається в напрямку проти

годинникової стрілки від лінії дії сили F до нормалі до площини похилого перерізу (рис. 26, б).

Розсічемо уявно брус перерізом 2-2, відкинемо верхню його частину і замінимо дію відсіченої частини внутрішніми силами, паралельними осі бруса та розподіленими рівномірно по всьому перерізу. Рівнодіюча цих сил буде дорівнювати силі F .

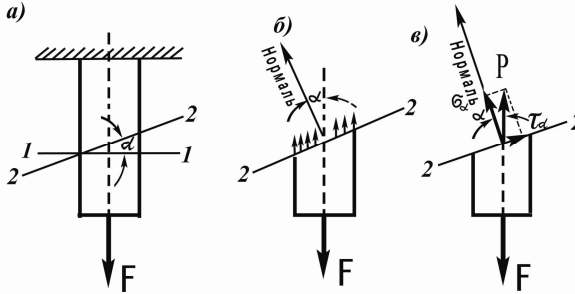


Рис. 26

Якщо позначити площу поперечного перерізу 1-1 через A , то площа похилого перерізу 2-2

$$A_{\alpha} = \frac{A}{\cos \alpha},$$

а повна напруга в перерізі :

$$p = \frac{F}{A_{\alpha}} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A} = \sigma \cdot \cos \alpha.$$

Величина p залежить від кута α : чим менше кут α , тим більше напруга p .

При $\alpha=0$ переріз 2-2 співпадає з перерізом 1-1, $\cos \alpha=1$, тоді $p = \frac{F}{A} = \sigma$, тобто в цьому випадку повна напруга дорівнює осьовій нормальній напрузі.

При збільшенні кута α до 90° $\cos \alpha=0$, тоді $p=0$, тобто по площадках, паралельних осі бруса, повна напруга, а значить і нормальна напруга, дорівнює нулю.

Розкладемо повну напругу p на складові в площині 2-2 і перпендикулярно до неї (рис. 26, в). Складова, що нормальна до площадки 2-2 – це **нормальна напруга** по похилій площадці, а

складова, що діє в площадці 2-2, – *дотична напруга*.

Величина нормальної напруги:

$$\sigma_{\alpha} = p \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha,$$

а величина дотичної напруги:

$$\tau_{\alpha} = p \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

або остаточно:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, \quad (21)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (22)$$

Із отриманих формул (21), (22) маємо, що обидва види напруг по похилому перерізу залежать від величини кута α .

Із збільшенням кута α нормальна напруга σ_{α} зменшується, а дотична напруга τ_{α} при заміні кута α від 0 до 90° спочатку зростає від нуля (при $\alpha=0$) до найбільшого свого значення (при $\alpha=45^{\circ}$):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2 \cdot 45^{\circ} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 90^{\circ} = \frac{\sigma}{2},$$

а потім із збільшенням кута α від 45° дотична напруга зменшується і при $\alpha=90^{\circ}$ стає рівною нулю:

$$\tau = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2 \cdot 90^{\circ} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 180^{\circ} = 0.$$

Таким чином, найбільші нормальні напруги виникають по площадках, перпендикулярних до осі бруса, а найбільші дотичні напруги – по площадках, розміщених під кутом 45° до осі бруса і дорівнюють половині осьової нормальної напруги, тобто

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}. \quad (23)$$

По площадках, паралельних осі бруса (при $\alpha=90^{\circ}$), $\sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha} = 0$, тобто в поздовжніх перерізах бруса не виникають ні нормальні, ні дотичні напруги. Звідси виходить, що *між продольними волокнами розтягнутого або стисненого бруса не виникає ні взаємного натискання, ні відриву*.

В будь-якому похилому перерізі бруса будуть виникати одночасно обидва види напруг: нормальні та дотичні.

Тепер визначимо напругу по перерізу 3-3, перпендикулярному перерізу 2-2 (рис. 27, а, б). Нормаль до площадки 3-3 складає з віссю бруса кут $\alpha_1 = 270^{\circ} + \alpha$.

Для визначення нормальної та дотичної напруг по площадці 3-3 застосуємо формули (21) і (22). Підставивши в них значення кута $\alpha_l = 270^\circ + \alpha$, отримаємо

$$\sigma_{3-3} = \sigma \cos^2 \cdot (270^\circ + \alpha) = \sigma \cdot \sin^2 \alpha.$$

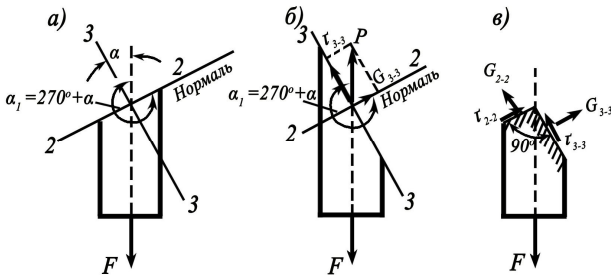


Рис. 27

Дотичні напруги

$$\tau_{3-3} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2 \cdot (270^\circ + \alpha) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

або остаточно

$$\sigma_{3-3} = \sigma \cdot \sin^2 \alpha,$$

$$\tau_{3-3} = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Порівнюючи формули (21), (22) з отриманими, можна зробити наступні висновки:

- величини нормальних напруг по двох будь-яких взаємно перпендикулярних перерізах різні, але їх сума постійна і дорівнює осьовій нормальній напрузі, тобто

$$\sigma_{2-2} + \sigma_{3-3} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha + \sigma \cdot \sin^2 \alpha = \sigma \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \sigma;$$

- дотичні напруги по двох будь-яких взаємно перпендикулярних перерізах рівні за величиною, але протилежні за знаком

$$\tau_{2-2} = -\tau_{3-3} \quad (24)$$

Тобто, якщо уявити брус розрізаним перерізами 2-2 і 3-3 (рис. 27, в), то дотичні напруги по них або сходяться до вершини прямого кута, або розходяться від неї. Це положення, справедливе не тільки у випадку розтягу або стиску, але і для інших деформацій, при яких виникають дотичні напруги, називається **законом парності**

дотичних напруг. Він читається так: дотичні напруги в двох взаємно перпендикулярних площадках дорівнюють одна одній за величиною і направлені або до ребра перетину цих площадок, або від ребра.

§ 21. ПОНЯТТЯ ПРО ГОЛОВНІ НАПРУГИ

В попередньому параграфі ми встановили, що при осьовому розтязі та стискові в похилих перерізах виникають нормальні та дотичні напруги. Також встановлені і такі перерізи бруса, в яких дотичні напруги відсутні. Ці перерізи або перпендикулярні до осі бруса, або паралельні.

Площинки, на яких дотичні напруги відсутні, називаються *головними площадками*, а нормальні напруги, що діють на цих площадках, називаються *головними напругами*. Тобто, це нормальні напруги σ .

В теорії пружності доводиться, що через будь-яку точку тіла можна провести три взаємно перпендикулярні площинки, по яких діють головні напруги. Ці напруги можуть мати різні значення.

Тому в будь-якій точці тіла завжди можна виділити елементарний кубик так, що його грані будуть головними площадками, отже, матеріал цього кубика буде розтягуватися або стискуватися трьома головними напругами, що діють на його гранях.

Залежно від числа діючих в точці головних напруг розрізняють три види напруженого стану: *одноосний*, або *лінійний* (рис. 28, а) напружений стан, коли одна із трьох головних напруг не дорівнює нулю: $\sigma_1 \neq 0$, а інші дорівнюють нулю: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; *двоосний*, або *плоский* (рис. 28, б) напружений стан, коли дві із трьох головних напруг не дорівнюють нулю: $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, а третя дорівнює нулю: $\sigma_3 = 0$; *трьохосний*, або *об'ємний* (рис. 28, в) напружений стан, коли три головних напруги не дорівнюють нулю.

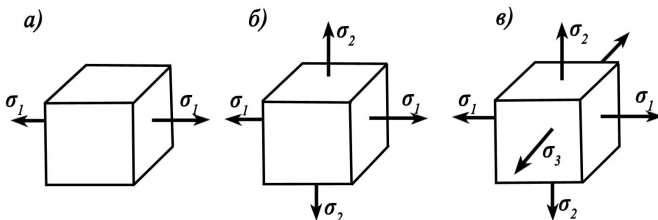


Рис. 28

При цьому вважається, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

З лінійним напруженим станом ми познайомилися при вивченні осьового розтягу або стиску бруса. В цьому випадку в поперечних перерізах бруса виникала тільки одна головна напруга σ_1 , а дві інші дорівнюють нулю.

Плоский напружений стан виникає, наприклад, в плитах, що спираються по периметру, покриттях будівель у вигляді куполу або оболочок, стінок та дна резервуарів та ін.

Об'ємний напружений стан виникає в масивних спорудах, до яких відносяться масивні гідротехнічні споруди, ґрунтові основи будівель і споруд та ін.

§22. НАПРУГИ В ПОХИЛИХ ПЕРЕРІЗАХ ПРИ ДВООСНОМУ РОЗТЯЗІ (СТИСКОВІ)

Для перевірки міцності матеріалу при плоскому напруженому стані потрібно знайти найбільші значення нормальних та дотичних напруг.

Уявимо собі прямокутний паралелепіпед, на бокові грані якого діють головні напруги σ_1 і σ_2 (рис. 29). Ці напруги будемо вважати розтягуючими. На фасадних гранях елемента ніяких напруг немає, тобто третя головна напруга дорівнює нулю.

Якщо одна із напруг σ_1 , σ_2 або обидві будуть стискуючими, то в подальші формули прийдеться вводити значення відповідної напруги зі знаком мінус та змінювати нумерацію головних напруг.

Так, якщо одна із головних напруг буде розтягуючою, а друга стискуючою, то першу треба назвати σ_1 , а другу σ_3 ; якщо обидві напруги будуть стискуючими, то меншу за абсолютним значенням треба назвати σ_1 , а більшу σ_3 .

Знайдемо величину нормальної та дотичної напруг в похилому перерізі 3-3, нормаль до якого утворює з напрямком 1-1 кут α_1 , а з напрямком 2-2 – кут α_2 .

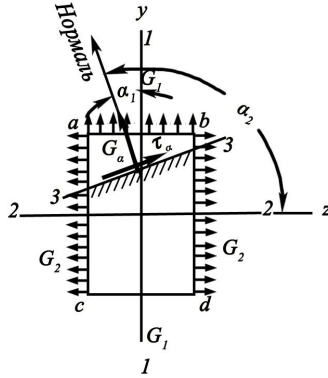


Рис. 29

Повні напруги в перерізі 3-3 σ_α та τ_α отримаємо, додавши результати дії напруг σ_1 і σ_2 .

Частина нормальної напруги σ_α , яку викликає σ_1 , визначиться за формулою (21) і буде дорівнювати $\sigma_1 \cos^2 \alpha_1$, а друга частина σ_α , під дією σ_2 , що визначається за цією ж формулою, буде дорівнювати $\sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2$. Таким чином, повна нормальна напруга

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 (\alpha_1 + 90^\circ),$$

або

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha_1 \quad (25)$$

Величина повної дотичної напруги τ_α в перерізі 3-3 визначається за формулою (22):

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_1 \cdot \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \cdot \sin 2\alpha_2) = \frac{1}{2} [\sigma_1 (\sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \cdot \sin 2(\alpha_1 + 90^\circ))],$$

або

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha_1 \quad (26)$$

Нормальні напруги σ_α потрібно вважати додатними (розтягуючими), якщо їх напрям співпадає з напрямом зовнішньої нормалі до похилого перерізу, що розглядається, в протилежному випадку напруги σ_α будуть від'ємними (стискуючими).

Дотичні напруги τ_α будуть додатними, якщо для суміщення з ними потрібно зовнішню нормаль повернути за годинниковою стрілкою, в протилежному випадку вони будуть від'ємними.

Із формули (26) виходить, що найбільші дотичні напруги будуть при $\sin 2\alpha_1=1$, тобто $\alpha_1=45^\circ$.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (27)$$

Формули (25) і (26) виведені для випадку додатних напруг σ_1 і σ_2 . Якщо вони будуть від'ємними, то значення їх потрібно підставляти в ці формули зі знаком мінус.

Приклад 13. Визначити нормальні σ_α і дотичні τ_α напруги в перерізі α - b , якщо $\sigma_y=50$ МПа, $\sigma_z=-30$ МПа і кут $\alpha=60^\circ$ (рис. 30, а).

Розв'язок. Згідно з вищевказаною умовою позначимо головні напруги (рис. 30,б)

$$\sigma_y = \sigma_1 = 50 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = \sigma_3 = -30 \text{ МПа}.$$

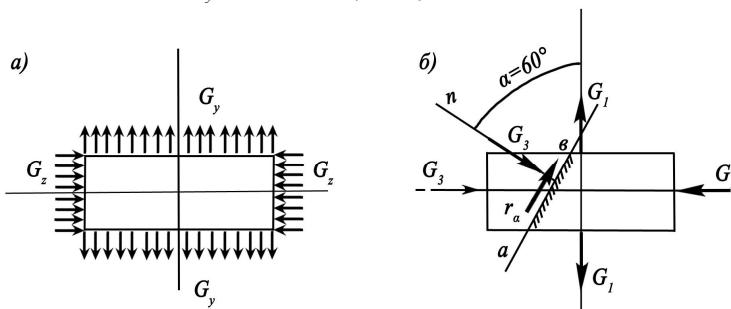


Рис. 30

Визначаємо нормальні напруги σ_α в перерізі $a - b$ за формулою (25):

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_3 \cdot \sin^2 \alpha = 50 \cdot \cos^2 60^\circ - 30 \cdot \sin^2 60^\circ = 50 \cdot 0,5^2 - 30 \cdot 0,866^2 = -10 \text{ МПа}.$$

Дотична напруга τ_α визначається за формулою (26):

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{50 + 30}{2} \cdot \sin 120^\circ = 40 \cdot \sin(90^\circ + 30^\circ) = 40 \cdot \cos 30^\circ = 40 \cdot 0,866 =$$

$$34,64 \text{ МПа}.$$

§ 23. ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ ПЛОСКОМУ ТА ОБ'ЄМНОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНАХ. УЗАГАЛЬНЕНИЙ ЗАКОН ГУКА

Перевіряючи міцність елемента (рис. 28, в), на гранях якого діють напруги σ_1 , σ_2 , σ_3 , нам доведеться стикнутися з питанням про величини відповідних деформацій. Називаючи ребро, що паралельне головній нарузі σ_1 першим, а ребра, що паралельні головним напругам σ_2 і σ_3 другим та третім, визначаємо відносні поздовжні деформації елемента в напрямку цих ребер, окремо розглядаючи вплив кожної із напруг та додаючи результати.

Під дією напруги σ_1 елемент в напрямку першого ребра отримає відносне видовження, що дорівнює:

$$\varepsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

В той же час по відношенню до напруг σ_2 і σ_3 перше ребро є поперечним розміром, тому під дією напруг σ_2 і окремо σ_3 елемент в напрямку першого ребра зазнає відносного укорочування, що дорівнює (див. § 10)

$$\varepsilon''_1 = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon'''_1 = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Повна відносна деформація елемента в напрямку першого ребра дорівнює сумі :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + \varepsilon''_1 + \varepsilon'''_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Те ж саме отримаємо і для деформацій в двох інших напрямках; маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right), \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_1}{E} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

В цю формулу головні напруги підставляються з відповідними знаками.

Формули (28) – це математичний вираз *узагальненого закону Гука*.

Визначаємо зміну об'єму прямокутного паралелепіпеда зі сторонами, що дорівнюють a , b , c , в загальному випадку напруженого стану. До деформації об'єм його дорівнює $V_0 = a \cdot b \cdot c$. Після деформації, внаслідок зміни довжини ребер, об'єм його стане

$$V_1 = (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (c + \Delta c),$$

або, нехтуючи добутками малих деформацій:

$$V_1 = a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot \Delta c + a \cdot c \cdot \Delta b + b \cdot c \cdot \Delta a = V_0 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Відносна зміна об'єму дорівнює:

$$\theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (29)$$

Підставляючи в цю формулу замість ε_1 , ε_2 , ε_3 їх значення із формул (28), отримаємо:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (30)$$

Відмітимо, якщо коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,5$, то відповідна зміна об'єму *дорівнює нулю*.

Якщо $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, то

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot 3\sigma = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \cdot \sigma.$$

Величину $\frac{1}{3(1 - 2\mu)}$ називають модулем об'ємної деформації та

позначають буквою K , тобто $K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$.

Підставивши це позначення у формулу (30), маємо

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K} \quad (31)$$

Ми бачимо, що зміна об'єму не залежить від значень головних напруг, а тільки від їх суми. Тому кубик отримає одну і ту ж зміну об'єму, незалежно від того, які діють по його гранях напруги, однакові чи різні.

$$\sigma_n = \frac{\theta \cdot E}{(1 - 2\mu) \cdot 3} = \frac{(1 - 2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \cdot E}{E(1 - 2\mu) \cdot 3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3};$$

в останньому випадку всі ребра кубика отримають однакову деформацію:

$$\varepsilon_n = \frac{\theta}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3 \cdot 3K} = \frac{\sigma_n}{K} \quad (32)$$

Приклад 14. Бетонний кубик зі стороною $a=20$ см щільно поміщений в абсолютно жорстку обойму і центрально стискується силою $F=200$ кН (рис. 31).

Найти тиск на спинки обойми та напругу в бетоні, якщо коефіцієнт Пуассона для бетону $\mu=0,18$.

Розв'язок. При поздовжньому стиску бетону він прагне розширитися в сторони і тисне при цьому на стінки обойми з силою, що дорівнює реакціям стінок N_x і N_y , (сила F направлена по осі Z).

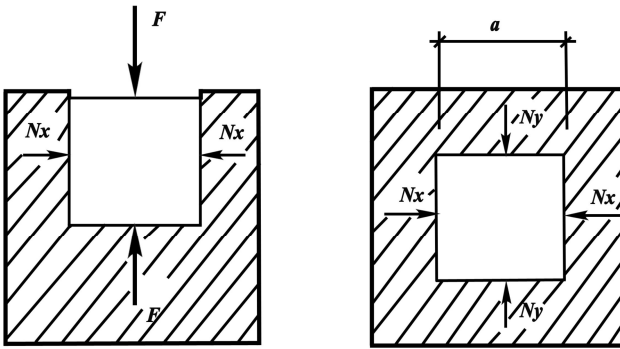


Рис. 31

Виходячи із симетрії, осі x , y і z співпадають з напрямками головних напруг. Так як всі сили перетинаються в одній точці, рівняння статки перетворюються в тотожність виду $0=0$, тому їх використати неможливо.

Розглянемо пружні деформації. Так як обойма жорстка, поперечні деформації (в напрямку осей x та y) неможливі. Тобто, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$.

Визаємо відносні видовження через напругу:

$$\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2 \text{ і } \sigma_z = \sigma_3:$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E} + \mu \frac{\sigma_z}{E} = 0$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\sigma_y}{E} + \mu \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_z}{E} = 0$$

$$\text{де } \sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{N_x}{a^2}, \sigma_y = \frac{N_y}{a^2} \text{ і } \sigma_z = \frac{N_z}{a^2} = \frac{F}{a^2} .$$

Розв'язуючи ці рівняння разом, знайдемо :

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_z = \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \frac{F}{a^2}$$

Підставивши значення, знайдемо :

$$N_x = N_y = \sigma_x \cdot a^2 = \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \frac{F}{a^2} \cdot a^2 = \frac{\mu}{1-\mu} \cdot F = \frac{0,18}{1-0,18} \cdot 200 = 43,9 \text{ кН}$$

Напруги в бетоні будуть:

$$\sigma_x = \sigma_1 = -\frac{N_x}{a^2} = -\frac{43,9}{20^2} = -0,11 \text{ кН/см}^2 = -1,1 \text{ МПа}$$

$$\sigma_y = \sigma_2 = \sigma_x = -1,1 \text{ МПа}$$

$$\sigma_z = \sigma_3 = -\frac{F}{a^2} = -\frac{200}{400} = -0,5 \text{ кН/см}^2 = -5 \text{ МПа}$$

§ 24. ПИТОМА ПОТЕНЦІЙНА ЕНЕРГІЯ ПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ СКЛАДНОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ

В §13 ми встановили, що питома потенційна енергія пружної деформації при розтязі (стискові), тобто при лінійному напруженому стані виражається формулою (10') :

$$U = \frac{\sigma^2}{2E},$$

або враховуючи, що $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ маємо :

$$U = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} . \quad (32)$$

Тепер перейдемо до визначення кількості питомої потенційної енергії для тіла, що знаходиться в умовах складного (об'ємного та плоского) напруженого стану. Користуючись принципом незалежності дії сил і вважаючи, що головні напруги зростають поступово, знайдемо потенційну енергію, як суму енергій, що накопичуються в одиниці об'єму матеріалу під дією кожної із головних напруг σ_1 , σ_2 і σ_3 за формулою (32)

$$U = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ і ε_3 - відносні деформації, що знаходяться за формулами (28).

Тоді

$$U = \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \left(\frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \right) + \sigma_2 \left(\frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \right) + \sigma_3 \left(\frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \right) \right]$$

або, розкривши дужки:

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \quad (33)$$

Таким чином, повна питома потенційна енергія деформації, що накопичується в одиниці об'єму матеріалу (кубик зі сторонами, що дорівнюють одиниці довжини), може бути знайдена за формулою (33). Ця енергія, може розглядатися як енергія, що складається із двох частин:

1) енергії U_v , що накопичується за рахунок зміни об'єму V даного кубика (тобто, однакової зміни всіх його розмірів без зміни кубічної форми) і

2) енергії U_f , пов'язаної зі зміною форми кубика (тобто енергії, що витрачається на перетворення кубика в паралелепіпед).

Такий поділ потенційної енергії на дві частини є зручним при подальшому вивченні питання про міцність матеріалу при об'ємному напруженому стані.

Знайдемо величину обох складових питомої потенційної енергії. Вище було показано (§22), що при однаковій деформації ребер кубика, тобто тільки при зміні об'єму, відносна деформація кожного ребра дорівнює (формула 32):

$$\varepsilon_n = \frac{\sigma_n}{3K},$$

де $\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$, а об'ємний модуль пружності $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$.

Тоді енергія зміни об'єму буде :

$$U_v = 3 \cdot \frac{\sigma_n \cdot \varepsilon_n}{2} = \frac{\sigma_n^2}{2K} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18K}$$

або:

$$U_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (34)$$

Потенційна енергія, що пов'язана із зміною форми виділеного елемента матеріалу, знаходиться як різниця:

$$U_f = U - U_v,$$

або:

$$U_{\Phi} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] - \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Зробивши відповідні розрахунки, маємо :

$$U_{\Phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 - \sigma_2 \cdot \sigma_3) \quad (35)$$

При простому осьовому розтязі, коли $\sigma_1 = \sigma = \frac{F}{A}$, $\sigma_2 = 0$ і $\sigma_3 = 0$ питома потенційна енергія, що пов'язана із зміною об'єму елементарного кубика

$$U_v = \frac{(1-2\mu) \cdot \sigma^2}{6E}, \quad (36)$$

а потенційна енергія зміни форми

$$U_{\Phi} = \frac{(1+\mu) \cdot \sigma^2}{3E}. \quad (37)$$

Зрозуміло, що їх сума дає повну питому енергію розтягу :

$$U = U_v + U_{\Phi} = \frac{(1-2\mu) \cdot \sigma^2}{6E} + \frac{(1+\mu) \cdot \sigma^2}{3E} =$$

$$\frac{\sigma^2 - 2\mu\sigma^2 + 2\sigma^2 + 2\mu\sigma^2}{6E} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

§ 25. ПОНЯТТЯ ПРО ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ

В §15 розглядалося питання про міцність матеріалу при лінійному напруженому стані: при осьовому розтязі, коли головні напруги мають значення:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0$$

або при осьовому стисковій коротких стержнів, коли

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\frac{F}{A}$$

В цьому випадку перевірка міцності проводиться за умовою

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_p \quad \text{або} \quad |\sigma_3| \leq [\sigma]_{cm}$$

Буквою $[\sigma]$ позначається допустима напруга при розтязі або стисковій. Для більшості пластичних матеріалів ці значення однакові, для крихких - різні.

В §14 вказано, що допустима напруга визначається з таким розрахунком, щоб був забезпечений відомий запас міцності у

порівнянні із небезпечним (граничним) станом :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{ep}}{k},$$

де σ_{ep} – напруга, що характеризує небезпечний (граничний) стан. При статичному навантаженні для пластичного матеріалу такий стан характеризується появою великих залишкових деформацій, а для крихкого – появою тріщин, руйнуванням матеріалу. Тоді у першому випадку $\sigma_{гр} = \sigma_{т3}$, а у другому – $\sigma_{гр} = \sigma_{в}$.

Для лінійного напруженого стану ці величини отримуються безпосередньо із лабораторних випробувань на розтяг або стиск. Цей дослід легко здійснити в лабораторії і безпосередньо знайти величину границі текучості і міцності.

Розглянемо тепер, як зробити перевірку міцності в тих випадках, коли дві або три головні напруги $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не дорівнюють нулю (рис.28).

В цьому випадку початок небезпечного стану матеріалу може бути викликаний різними числовими значеннями головних напруг $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ залежно від величини відношення їх однієї до другої. Кожній комбінації цих відношень будуть відповідати певні небезпечні величини головних напруг, при яких настає небезпечний стан матеріалу (поява великих залишкових деформацій або тріщин).

Таким чином, для знаходження цих небезпечних значень напруг $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в лабораторії потрібно проводити випробування для різних співвідношень $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$. Практично здійснити такі випробування

неможливо через труднощі їх постановки і великої кількості випробувань.

Тому необхідно знайти спосіб скласти умову міцності для *складного* напруженого стану, користуючись величинами $\sigma_{т}$ і $\sigma_{в}$, отриманих при дослідах для *лінійного* напруженого стану. Іншими словами виникла потреба створити теорію (гіпотезу), яка дозволила б замінити складний напружений стан еквівалентним йому лінійним напруженим станом.

Виявляється, що така заміна можлива, якщо прийняти якийсь припущення про те, який фактор є вирішальним у появі небезпечного стану матеріалу, або, іншими словами, що є причиною появи текучості або руйнування матеріалу.

Таких факторів можна намітити декілька. Дійсно, навіть при простому розтязі стержня із пластичного матеріалу можна поставити

питання: що є причиною текучості ?

Можна вважати, що текучість з'явиться тоді, коли найбільші нормальні напруги в стержні досягнуть границі текучості σ_1 . Але можна вважати, що поява текучості настане тоді, коли **найбільше видовження** матеріалу досягне повного значення. Можна зробити і третє припущення, що поява великих залишкових деформацій пов'язана з тим, що **дотичні напруги** досягли певної величини.

Таким чином, ми можемо висловити ряд гіпотез, побудувати ряд так званих теорій міцності. Як ми побачимо далі, при простому розтязі або стискові, при лінійному напруженому стані результати перевірки міцності виявляються однаковими, яку б із гіпотез ми не прийняли. Це пояснюється тим, що в цьому випадку перевірка міцності спирається безпосередньо на досліди.

Зовсім інакше це буде при складному напруженому стані. Нижче буде показано, як змінюється умова міцності залежно від прийнятої теорії. Вибір тої чи іншої теорії остаточно визначається перевіркою її на досліді для випадку складного напруженого стану.

Перш ніж перейти до викладення теорій міцності, відмітимо, що небезпечний стан для різних матеріалів лежить на границі застосування закону Гука (з відомим, достатнім для практики, наближенням). Це дозволить при всіх подальших підрахунках, що відносяться до перевірки міцності, користуватися формулами, що виведені за умови застосування закону Гука.

Перша теорія міцності або теорія найбільших нормальних напруг. Ця теорія передбачає, що небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли найбільша за абсолютною величиною нормальна напруга досягає небезпечного значення.

Таким чином, і в загальному випадку, коли всі три головні напруги σ_1 , σ_2 і σ_3 не дорівнюють нулю, при перевірці міцності потрібно враховувати тільки найбільшу напругу розтягу або стиску. Величина двох інших напруг як би не має ніякого значення. Фактично втрачається різниця між лінійним та складним напруженим станом.

Умова міцності для цієї теорії має вигляд :

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \text{ або } |\sigma_3| \leq [\sigma]_{\text{ст}}$$

При перевірці вказаної теорії на дослідах, виявилася невідповідність її висновків з результатами випробувань на всесторонній стиск не тільки пластичних матеріалів, але і крихких. Наприклад, випробуваний таким чином бетонний кубик витримав набагато більші напруги, ніж при одноосному стискові, не виявивши при цьому ніяких ознак руйнування. Лише для випадку розтягу

крихких матеріалів ця теорія відповідає дослідним даним. Так як ця теорія дає або більші, або менші розміри перерізів елементів конструкцій при складному напруженому стані, нею уникають користуватися.

Друга теорія міцності або теорія найбільших лінійних деформацій. Ця теорія передбачає, що міцність елемента, який знаходиться у складному напруженому стані, забезпечена, якщо найбільші відносні деформації не перевищують допустимої деформації для лінійного напруженого стану, тобто

$$\varepsilon_{max} \leq [\varepsilon], \quad (38)$$

$$\text{де } [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$$

Припустимо, що при плоскому напруженому стані небезпечним відносним видовженням буде ε_1 , тобто $\varepsilon_{max} = \varepsilon_1$, тоді

$$\varepsilon_1 \leq [\varepsilon] \quad (38')$$

Виразивши умову міцності (38') через напругу і використавши формули (28), можна записати

$$\frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} \leq \frac{[\sigma]}{E},$$

або, скорочуючи на E , отримаємо

$$\sigma_1 - \mu\sigma_2 \leq [\sigma] \quad (39)$$

Якщо небезпечним відносним видовженням буде ε_2 , то умова міцності запишеться так :

$$\sigma_2 - \mu\sigma_1 \leq [\sigma] \quad (39')$$

Для об'ємного напруженого стану замість формули (39) отримаємо

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (39'')$$

Як бачимо із формул (39) і (39'), з допустимою напругою $[\sigma]$ порівнюються не головні напруги σ_1 або σ_2 , а їх комбінація $\sigma_1 - \mu\sigma_2$ або $\sigma_2 - \mu\sigma_1$, яка називається **еквівалентною напругою**.

За допомогою еквівалентної напруги будь-який напружений стан можна звести до осьового розтягу або стиску, причому стає можливим не проводити обчислень лінійних деформацій, а виразити умову міцності через нормальні напруги. Позначивши еквівалентну напругу $\sigma_{екв}$, формулу (39'') можна представити у вигляді :

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (39''')$$

Таким чином, при перевірці міцності матеріалу за другою теорією потрібно визначити еквівалентну напругу за формулою (39''') і

порівняти її з допустимою напруженою.

Друга теорія міцності не підтверджується дослідами для пластичних матеріалів. Вона дає задовільні результати при випробуванні крихких матеріалів, але для деяких типів напруженого стану.

Третя теорія міцності або теорія найбільших дотичних напруг. Ця теорія передбачає, що міцність елемента, який знаходиться у складному напруженому стані, забезпечена, якщо найбільші дотичні напруги в його перерізах не перевищують допустимої дотичної напруги для лінійного напруженого стану елемента із того ж матеріалу:

$$\tau_{max} \leq [\tau]$$

Виразивши дотичну напругу через нормальну за формулами (23) і (27), умова міцності може бути представлена у вигляді:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (40)$$

або

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (40')$$

Як видно із формули (40) третя теорія враховує тільки дві головні напруги – найбільшу та найменшу . Недоліком цієї теорії є те, що вона не враховує проміжної головної напруги, яка теж впливає на міцність матеріалу.

Третя теорія міцності підтверджується результатами дослідів для пластичних матеріалів, міцність яких на розтяг та стиск однакова. Тому цю теорію інколи називають **теорією пластичності**. Для крихких матеріалів результати дослідів не відповідають третій теорії.

У зв'язку з недоліком старих теорій виникли нові ідеї відносно того, який фактор викликає небезпечний стан матеріалу.

Ряд авторів висловили припущення, що небезпечний стан матеріалу залежить не від величини деформації або напруг окремо, а від сукупності тих і інших – від величини питомої потенційної енергії деформації. Ця величина виражається через всі три головні напруги.

Якщо зробити припущення, що причиною небезпечного стану є накопичення повної питомої потенційної енергії деформації, то міцність матеріалу буде забезпечена при умові, що $U \leq [U]$, де $[U]$ – допустима кількість потенційної енергії, яка може бути отримана із формули (10') для повної енергії деформації при осьовому розтязі.

Ця теорія дослідами не підтвердилася і має тільки історичне значення. Але вона виявилася базою для створення нової **енергетичної теорії міцності**, яка досить добре узгоджується з дослідами.

Цю теорію, що називають *четвертою теорією міцності*, або *теорією питомої потенційної енергії зміни форми*, можна сформулювати так: *міцність елемента, що знаходиться у складному напруженому стані, забезпечена, якщо найбільша питома потенційна енергія зміни форми не перевищує допустимого її значення для лінійно напруженого елемента із того ж матеріалу, тобто*

$$U_{\phi} \leq [U_{\phi}]$$

Тут U_{ϕ} – потенційна енергія зміни форми для складного напруженого стану – визначається за формулою (35):

$$U_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 - \sigma_2 \cdot \sigma_3)$$

Величина допустимої потенційної енергії зміни форми для випадку простого розтягу дорівнює (37):

$$[U_{\phi}] = \frac{(1+\mu) \cdot [\sigma]^2}{3E},$$

тоді умова міцності буде мати вигляд:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 - \sigma_2 \cdot \sigma_3} \leq [\sigma] \quad (41)$$

Умову міцності (41) можна представити у іншому вигляді, інколи більш зручному для підрахунків :

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] \quad (42)$$

Умова міцності для плоского напруженого стану (при $\sigma_3 = 0$) виразиться формулою :

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq [\sigma] \quad (42')$$

Відмітимо, що цю теорію, як і третю, можна вважати *теорією міцності* за умови, що за небезпечний стан матеріалу приймають його перехід в пластичний стан.

Теорія міцності Мора. Крім розглянутих вище теорій, були запропоновані і інші, із яких потрібно відмітити теорію О.Мора, за якою умова міцності може бути представлена у вигляді:

$$\sigma_{\text{сKB}} = (\sigma_1 - \nu \sigma_3) \leq [\sigma]_{\text{p}}, \quad (43)$$

де ν – відношення граничних напруг при розтязі і стискові: для крихких матеріалів

$$\nu = \frac{\sigma_{e(p)}}{\sigma_{e(cm)}}$$

для крихко–пластичних матеріалів

$$\nu = \frac{\sigma_{0,2(p)}}{\sigma_{0,2(cm)}}$$

Для пластичних матеріалів $\nu = 1$ і умова міцності (43) приймає вигляд, аналогічний третій теорії. Тому теорію міцності Мора можна розглядати як узагальнення третьої теорії для крихких та крихко-пластичних матеріалів.

Як видно із формули (43), ця теорія також, як і третя, не враховує проміжної головної напруги σ_2 , що є її недоліком. Для крихких матеріалів теорія міцності Мора дає задовільні результати.

Приклад 15. Перевірити міцність матеріалу елемента (рис. 32) за третьою і четвертою теоріями міцності, якщо на нього діють головні напруги $\sigma_1 = 100$ МПа і $\sigma_2 = 30$ МПа. Допустима напруга $[\sigma] = 160$ МПа.

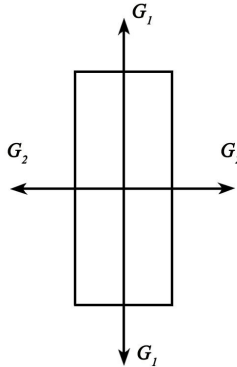


Рис. 32

Розв'язок. За третьою теорією міцності

$$\sigma_{\text{екв}} = (\sigma_1 - \sigma_2) \leq [\sigma] = 100 - 30 = 70 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

елемент задовольняє умову міцності.

За четвертою теорією міцності

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{100^2 + 30^2 - 100 \cdot 30} = 88,88 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}$$

елемент також задовольняє умову міцності.

Питання для самоконтролю

1. Які напруги виникають в похилих перерізах бруса при розтязі та стискові?
2. В яких перерізах виникають найбільші нормальні та дотичні напруги при розтязі та стискові?
3. Чому дорівнює сума нормальних напруг в двох взаємно перпендикулярних перерізах, що розтягуються?
4. В чому суть закону парності дотичних напруг?
5. Які напруги називаються головними?
6. Який напружений стан матеріалу називається лінійним, плоским, об'ємним?
7. Яка мета теорій міцності? В чому їх суть?
8. Які теорії придатні для розрахунку пластичних матеріалів, а які для крихких?

Розділ IV. ПРАКТИЧНІ РОЗРАХУНКИ НА ЗСУВ ТА ЗМИНАННЯ

§ 26. ДЕФОРМАЦІЯ ЗСУВУ. ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ЗСУВУ

З'єднання окремих елементів будівельних конструкцій між собою здійснюється по різному, залежно від матеріалу, з якого виготовлена конструкція, і технологічних вимог.

Для металевих конструкцій використовують зварні з'єднання, болтові та заклепкові; для дерев'яних конструкцій – клеєві, шпоночні та на врубках; для залізобетонних конструкцій – за допомогою спеціальних закладних деталей. Для нормальної експлуатації будівель та споруд з'єднання повинні бути міцними та надійними в експлуатації, тому вони теж підлягають розрахунку. Загальні питання розрахунку викладені в курсах відповідних конструкцій. В даному розділі розглянемо розрахунок деяких простих видів з'єднань, що сприймають розтяг або стиск: з'єднання металевих елементів зварюванням і заклепуванням та дерев'яних елементів на врубках.

Всі ці з'єднання працюють на зсув. Цей вид деформації має місце тоді, коли в поперечному перерізі виникає поперечна сила (Q).

Вище було сказано, що при осьовому розтязі та стиску в похилих перерізах виникають як нормальні, так і дотичні напруги, тобто розділені частини бруса прагнуть не тільки відірватися одна від одної, але і зсунутися. Розглянемо деформації та напруги при зсуві.

Якщо жорстко закріпити досить короткий брус одним кінцем, а другий завантажити силою F , то в ньому буде виникати одночасно зсув і згин (рис. 33, а). Але для дуже короткого бруса вплив згину буде незначним і тому його можна не враховувати.

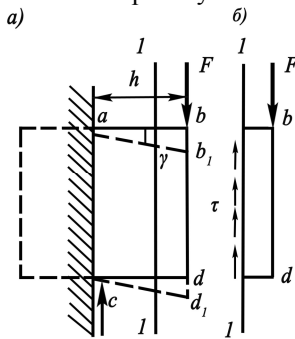


Рис. 33

Під дією сили F кожний поперечний переріз бруса зсувається відносно сусіднього вниз, в результаті чого кінцева грань bd займе положення b_1d_1 . Величина bb_1 (або dd_1) на яку переміститься точка b (або d) називається **абсолютним зсувом**.

Величина абсолютного зсуву даного перерізу залежить від відстані цього перерізу до кріплення: чим вона більша, тим більший абсолютний зсув. Відношення величини абсолютного зсуву до відстані ab називається **відносним зсувом**.

$$\frac{bb_1}{ab} = \operatorname{tg} \gamma,$$

а так як кут γ дуже малий, можна вважати:

$$\frac{bb_1}{ab} = \gamma \text{ (радіан)}$$

Зробимо переріз 1-1 (рис. 33, в) нескінченно близько до кінця бруса та відкинемо ліву частину. Дію відкинutoї частини на праву замінимо внутрішніми силами, які будуть лежати в площині поперечного перерізу, тобто ці сили будуть викликати дотичні напруги τ . Розподіл їх по площі перерізу не буде рівномірним, але для спрощення розрахунків будемо вважати, що дотичні напруги при зсуві розподіляються рівномірно по перерізу (рис. 34). Тому величину дотичних напруг при зсуві можна визначати за формуло

$$\tau = \frac{F}{A}, \quad (44)$$

порівнюючи формулу (44) з формулою (3)

$$\sigma = \frac{F}{A},$$

що визначає величину нормальних напруг при розтязі або стискові, помічаємо, що ці формули однакові. Але між ними є суттєва різниця. При осьовому розрізі (стискові) рівномірність розподілення нормальних напруг підтверджена дослідом, а розділ дотичних напруг при зсуві приймається рівномірним лише умовно – з метою спрощення розрахунків. Тому формула (44) дає не дійсне, а середнє значення дотичних напруг. Крім того, при розтязі та стискові розрахункові напруги визначаються на площі A , що перпендикулярна напрямку зовнішніх сил F , а при зсуві розрахункова площа перерізу паралельна їй.

За результатами дослідів встановлено, що величина абсолютного зсуву в межах пружних деформацій прямо пропорційна силі F , відстані h між перерізами ac і bd та обернено пропорційна площі поперечного перерізу A .

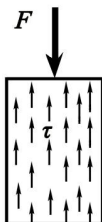


Рис. 34

Якщо при цьому врахувати залежність деформації зсуву від пружних властивостей матеріалу, ввівши коефіцієнт пропорційності $\frac{1}{G}$, то отримаємо наступну формулу для визначення величини абсолютного зсуву:

$$a = \frac{F \cdot h}{G \cdot A} \quad (45)$$

Взявши до уваги, що $\frac{a}{h} = \gamma$ і $\frac{F}{A} = \tau$, отримаємо:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (46)$$

тобто, *дотична напруга прямо пропорційна відносному зсуву*. Формула (46) виражає закон Гука для зсуву.

Постійна G , що входить до формул (45) і (46), називається **модулем зсуву** та має вимірність напруги, тобто вимірюється в МПа.

Модуль зсуву G характеризує опірність матеріалу деформації зсуву. Величина його визначається дослідним шляхом.

Таким чином, для оцінки пружних властивостей кожного ізотропного матеріалу маємо три характеристики:

- модуль поздовжньої пружності E ;
- коефіцієнт Пуассона μ ;
- модуль зсуву G .

Ці три пружні характеристики пов'язані між собою залежністю, яку даємо без доказу:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (47)$$

Прийнявши для сталі значення $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ і $\mu = 0,3$, визначимо для неї за формулою (47) величину модуля зсуву:

$$G = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2(1 + 0,3)} \approx 8 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

тобто $G = 0,4E$.

Практичні розрахунки на зсув мають мету перевірити міцність деталей, призначених для з'єднання окремих конструкцій, а також підбір їх перерізу. При розрахунку цих з'єднань повинна виконуватися умова, щоб робочі напруги зсуву або сколювання не перевищували допустимої напруги, тобто

$$\tau = \frac{F}{A} \leq [\tau] \quad (48)$$

Рівняння (48) є розрахунковим рівнянням на зсув (зріз, сколювання).

Вибір допустимої напруги на зсув (зріз) є ще більш складним питанням, ніж при розтязі та стискові. Справа в тому, що безпосереднє визначення границі міцності при зсуві ускладнюється трудністю практичного здійснення чистого зсуву без впливу інших деформацій або явищ (згину, тертя та ін.). Тому величину допустимої напруги при зсуві приймають не тільки на основі дослідів, але і теоретичних міркувань. Величини допустимих напруг при розрахунках металевих та дерев'яних конструкцій на зріз та сколювання наведені в табл. 6.

Таблиця 6

Матеріал конструкції	Допустимі напруги	
	на зріз чи сколювання МПа	на зминання МПа
1	2	3
Сталь для заклепок при продавлених отворах	100	240–280
Те ж, при розсвердлених отворах	140	280–320

1	2	3
Сосна:		
вздовж волокон	0,5–1,0	8
поперек волокон	0,6	2,4
Дуб:		
вздовж волокон	0,8–1,4	11
поперек волокон	0,8	4,8

§ 27. ЗМИНАННЯ. ДОПУСТИМІ НАПРУГИ НА ЗМИНАННЯ ТА РОЗРАХУНОК

Деформація зминання – це різновид деформації стиску, що відбувається на невеликій площі елемента конструкції.

Місцеві напруги, що виникають при цьому, називаються напругами зминання.

На рис. 35 показане болтове з'єднання дерев'яних брусків. Деревина під шайбами внаслідок сильної затяжки гайки отримала зминання.

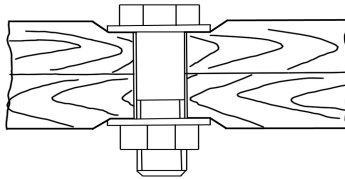


Рис. 35

При практичних розрахунках напруги зминання приймають за звичайні стискуючі напруги, а допустимі напруги на зминання приймають на основі спеціальних дослідних даних.

При з'єднанні елементів із різних матеріалів напруги на зминання перевіряють для більш “м'якого” матеріалу за формулою:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}], \quad (49)$$

яка є розрахунковим рівнянням на зминання.

Припускаючи, що напруги змінання розподіляються рівномірно по площині, що зминається, допустимі напруги на змінання для сталі приймають

$$[\sigma_{зм}] = 2 \div 2,5[\sigma],$$

де $[\sigma]$ – допустимі напруги на розтяг для сталі.

Такі високі значення допустимих напруг на змінання для сталі пояснюються тим, що напружена ділянка оточена ненапруженим матеріалом, тобто знаходиться в об'ємному напруженому стані. А в цьому випадку ознака руйнування не спостерігається. При цьому високі напруги змінання виникають біля самої поверхні стикання, швидко зменшуючись далі від місця прикладання навантаження.

Величини допустимих напруг на змінання для дерева залежать від напрямку сил по відношенню до напрямків волокон.

Значення допустимих напруг на змінання дані в таблиці (6)

§ 28. ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКУ ЗАКЛЕПКОВИХ, ЗВАРНИХ З'ЄДНАНЬ ТА ДЕРЕВ'ЯНИХ СПОЛУЧЕНЬ

Заклепкові з'єднання. При виготовленні металевих конструкцій виникає потреба з'єднати одне з одним декілька листів, штаб, кутів та інших профілів. На даний час це виконується здебільшого зварюванням, але при виготовленні в деяких випадках мостових, кроквяних ферм, котлів, суден, сталевих резервуарів та ін. ще збереглися заклепки. Цьому сприяє присутня в заклепкових з'єднаннях цінна якість – пластичний характер їх руйнування, якому звичайно передують значні залишкові деформації, що попереджають про можливе пошкодження конструкції і сигналізують про прийняття попереджувальних дій.

Дійсна робота заклепки складна і з точки зору зсуву може бути пояснена тільки наближено. Тому розрахунки, що наводяться нижче, оснований на досить грубих припущеннях і в значній мірі носять умовний характер.

На рис. 36 показано заклепкове з'єднання двох сталевих листів нахлестом. Під дією сил F листи намагаються зсунутись один відносно другого, але цьому перешкоджають заклепки, які забезпечують міцність з'єднання, приймають на себе дію сил F .

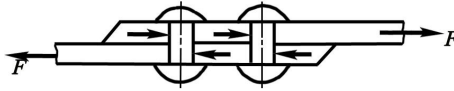


Рис. 36

Вияснимо, як працює заклепка в з'єднанні.

Із рис. 36 видно, що на кожну заклепку передаються від з'єднаних листів по дві рівні та протилежні сили. Досліди показують, що заклепки в ряду, паралельному лінії дії сил, працюють неоднаково: одні зазнають більших зусиль, ніж інші, але до моменту руйнування зусилля, що передаються на всі заклепки, майже вирівнюються за рахунок пластичних деформацій, і тому вважають, що всі заклепки завантажені однаково. Тому при n заклепок в з'єднанні на кожну з них будуть приходиться рівні та протилежні сили, що дорівнюють $\frac{F}{n}$, які

намагаються перерізати заклепку по площині стикання. Так як в даному випадку площина зрізу одна, заклепка називається **однозрізною**.

Отвори в заклепкових з'єднаннях виконуються на 0,5–1 мм більші за діаметр непоставленої заклепки. В розрахункові формули входить діаметр d отвору, так як у виконаному з'єднанні заклепка практично повністю заповнює отвір.

В площині стикання листів в заклепці виникають дотичні напруги, величина яких визначається за формулою:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{n \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4F}{n \cdot \pi d^2}, \quad (50)$$

де n – число заклепок, d – діаметр заклепки.

Розрахункове рівняння на зріз однозрізних заклепок буде мати вигляд:

$$\tau = \frac{4F}{n \pi d^2} \leq [\tau], \quad (51)$$

тобто робоча дотична напруга в перерізі заклепки не повинна бути більшою за допустиму. Формула 50 виходить із середньої напруги і є наближеною, але цілком придатна для практичних розрахунків.

Розрахункове рівняння 51 дозволяє визначити потрібну кількість однозрізних заклепок при заданому їх діаметрі i , навпаки, необхідний діаметр заклепки при заданій їх кількості.

$$n \geq \frac{4F}{\pi d^2 \cdot [\tau]} \quad (52)$$

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi n [\tau]}} \quad (52')$$

Необхідно запам'ятати, що при визначенні напруг за формулою (50) не взята до уваги та обставина, що сили F утворюють пару (рис. 37), яка зрівноважується іншою парою – реакціями з'єднаних листів на головки заклепки, викликаючи нормальні напруги в перерізі та перекошення з'єднання (рис. 38).

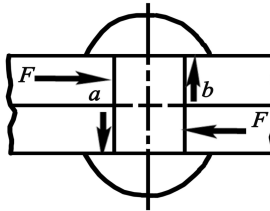


Рис. 37

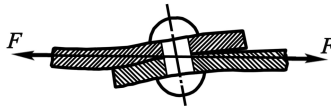


Рис. 38

Крім того, заклепки діаметром 8 мм та більше ставлять у гарячому стані, тому охолодження їх та пов'язане з цим їх скорочення викликає появу сил тертя між листами з'єднання, а також значні нормальні напруги в перерізі стержня заклепки. При розрахунках вплив нормальних напруг та тертя між листами в з'єднанні не враховуються.

Ми розглянули умову міцності, що забезпечує заклепочне з'єднання від перерізування заклепок. Але крім зрізу з'єднання зазнають ще напруги зминання, що викликані дією стінок заклепочного отвору на заклепку (рис. 39). Тому потрібно перевіряти міцність з'єднання і на зминання.

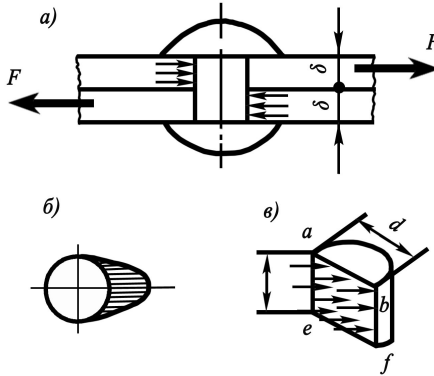


Рис. 39

Як видно з рис. 39 а, б, в змінання зазнає циліндрична поверхня заклепки. Закон розподілення напруг змінання по цій поверхні точно не відомий, тому розрахунок проводиться умовно в припущенні (яке виправдовується на практиці), що напруги змінання розподіляються рівномірно по діаметральній площині перерізу заклепки $abfc$, тоді розрахункова площа змінання

$$A_{зМ} = d \cdot \delta$$

а напруга змінання

$$\sigma_{зМ} = \frac{F}{nd\delta}, \quad (53)$$

де n – кількість заклепок в з'єднанні;

δ – товщина листів, що з'єднуються (у випадку різної товщини листів береться менша)

Таким чином, розрахункове рівняння на змінання буде мати вигляд

$$\sigma_{зМ} = \frac{F}{nd\delta} \leq [\sigma_{зМ}], \quad (54)$$

звідки необхідне число заклепок та їх діаметр визначають за формулами:

$$n \geq \frac{F}{\delta \cdot d [\sigma_{зМ}]} \quad (55)$$

$$d \geq \frac{F}{n\delta[\sigma_{3M}]} \quad (56)$$

Із вищевказаного видно, що число заклепок та їх діаметр потрібно визначати і на зріз, і на зминання за формулами (51), (52), (55), (56), причому із отриманих значень n та d потрібно приймати більші.

Заклепки, що працюють більш ніж по одній площині зрізу, називаються двозрізними, тризрізними і т.д.

Робота таких заклепок дещо відрізняється від однозрізних, але розрахунок їх проводиться так само, як однозрізних заклепок. При цьому необхідно врахувати кількість площин зрізу однієї заклепки. Напряга зрізу в перерізі заклепки визначається за формулою:

$$\tau = \frac{4F}{m \cdot n \cdot \pi d^2}$$

а розрахункове рівняння для багатозрізної заклепки буде мати вигляд:

$$\tau = \frac{4F}{m \cdot n \cdot \pi d^2} \leq [\tau], \quad (57)$$

звідки визначається необхідна кількість заклепок із умови міцності на зріз:

$$n \geq \frac{4F}{m \cdot \pi d^2 [\tau]},$$

де m – кількість площин зрізу однієї заклепки.

На рис. 40 показана робота двозрізної заклепки.

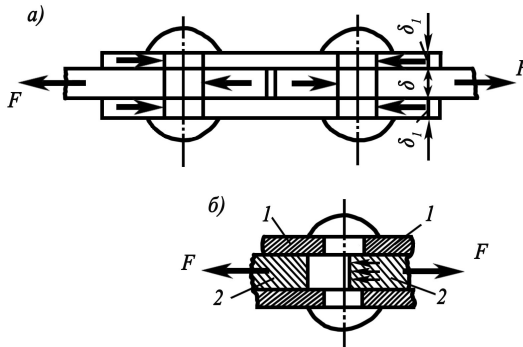


Рис. 40

Приклад 16. Визначити необхідне число заклепок для з'єднання двох сталевих листів (рис. 41) та перевірити напругу в ослабленому перерізі цих листів при їх ширині $b = 240 \text{ мм}$ та товщині $\delta = 12 \text{ мм}$. Прийняти діаметр заклепок $d = 23 \text{ мм}$. Розтягуюча сила $F = 250 \text{ кН}$. Допустима напруга: на зріз для заклепок $[\tau] = 100 \text{ МПа}$, на зминання $[\sigma_{зм}] = 240 \text{ МПа}$, на розтяг листів $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

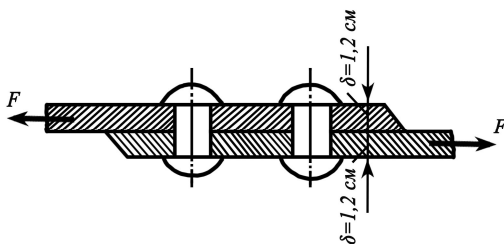


Рис. 41

Розв'язок. За формулою (52) знаходимо необхідну кількість заклепок із умови міцності на зріз:

$$n_{зр} = \frac{4F}{\pi d^2 [\tau]} = \frac{4 \cdot 250}{3.14 \cdot 2.3^2 \cdot 10} \approx 6,02 \approx 6$$

Необхідну кількість заклепок за умовою міцності на зминання визначаємо за формулою (55)

$$n_{зм} = \frac{F}{\delta \cdot d [\sigma_{зм}]} = \frac{250}{1,2 \cdot 2,3 \cdot 24} \approx 3,8 = 4$$

$$\text{де } [\tau] = 100 \text{ МПа} = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad [\sigma_{зм}] = 240 \text{ МПа} = 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Приймаємо більше число заклепок (на зріз) – 6 шт. – та розміщуємо їх в два ряди.

Перевіряємо величину напруги в ослаблених перерізах листів.

Площа ослабленого перерізу

$$A_{нт} = b\delta - nd \cdot \delta = 24 \cdot 1,2 - 3 \cdot 2,3 \cdot 1,2 = 20,52 \text{ см}^2$$

Найбільша напруга в листі

$$\sigma = \frac{250}{20,52} = 12,2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 122 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Зварні з'єднання. З'єднання елементів сталевих конструкцій виконуються переважно за допомогою електрозварювання.

Сутність електрозварювання полягає в тому, що розплавленим матеріалом сталюого електроду заповнюють (наплавляють) стик між

елементами що зварюються, в результаті чого отримують шов, який з'єднує їх в одне ціле.

При розрахунку зварних з'єднань вважають, що напруги по перерізу швів розподіляються рівномірно. При виборі допустимих напруг для матеріалу швів мають велике значення способ зварювання (ручний або автоматичний), а також склад та товщина захисної обмазки електродів. В табл.7 наведені значення допустимих напруг при зварюванні.

Таблиця 7

Вид деформацій	Напруги	Ручне зварювання		Автоматичне зварювання, МПа
		електроди з тонкою обмазкою, МПа	електроди з товстою обмазкою, МПа	
Розтяг	$[\sigma_E]$	100	130	130
Стиск	$[\sigma_E]$	110	145	145
Зріз	$[\tau_E]$	80	110	110

Розглянемо три основних види зварних з'єднань:

1. З'єднання встик виконують шляхом заповнення зазору між торцями елементів, що зварюються наплавленим металом по будь-якому з типів швів (рис. 42 а, б, в) залежно від товщини елементів, що з'єднуються.

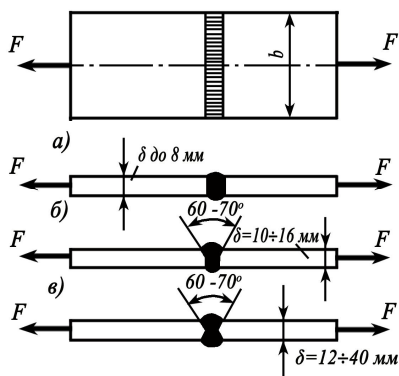


Рис. 42

Міцність зварювання перевіряють на розтяг або стиск за формулою:

$$\sigma_E = \frac{F}{l\delta} \leq [\sigma_E] \quad (58)$$

де $l \cdot \delta = A_E$ – умовна робоча площа перерізу шва;

$l = b$ – розрахункова довжина шва;

δ – товщина елементів, що зварюються.

2. З'єднання нахлестом лобовими (торцевими) швами (рис. 43, а) або встик за допомогою накладок (рис. 43, б). При цьому зварюванні шви отримуються у вигляді валиків. Дослідами встановлено, що такі шви в більшості випадків руйнуються по самому слабкому перерізу a - b (рис. 44)

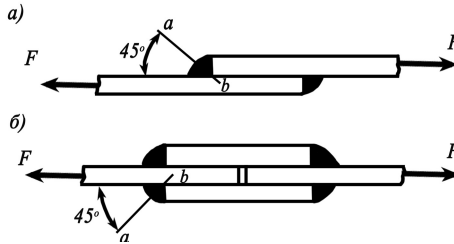


Рис. 43

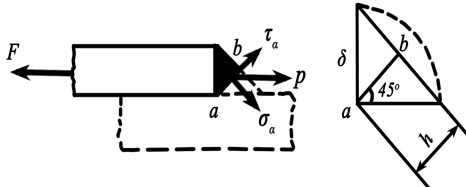


Рис. 44

Повну напругу в цьому перерізі можна розкласти на нормальну та дотичну. Так як опір сталі менший ніж розтяг, розрахунок лобових швів виконують на зріз за умовою, що дотичні напруги розподіляються рівномірно по площі перерізу a - b . Дотичні напруги в цьому перерізі, враховуючи сприйняття сили F нижнім швом буде:

$$\tau_E = \frac{F}{2A_E}$$

де $A_E = hl = \delta \cdot \cos 45^\circ \cdot l \approx 0.71\delta l$; $l = b$;

тоді розрахункове рівняння для зварного шва

$$\tau_E = \frac{F}{1,42\delta l} \leq [\tau_E] \quad (59)$$

3. З'єднання фланговими швами відрізняється від попереднього тим, що шви розміщуються паралельно лінії дії сил (рис. 45).

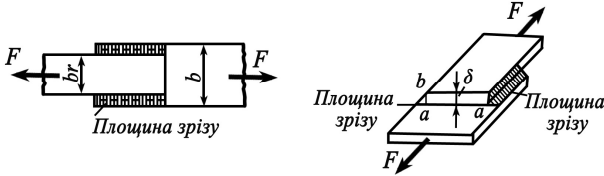


Рис. 45

Такі шви розраховуються так само, як і лобові.

На практиці розрахункову довжину швів l збільшують на 1 см., так як на кінцях швів спостерігається непровар, тобто

$$l = l_{\text{шв}} + 1 \text{ см}$$

Висоту швів δ приймають $6 \div 8 \text{ мм}$ залежно від товщини листів, що зварюються.

Приклад 17. Визначити довжину флангових швів, що з'єднують два сталевих листи товщиною $\delta = 8 \text{ мм}$ (рис. 45), якщо $F=200 \text{ кН}$, допустима напруга на різ $[\tau_E]=180 \text{ МПа}$

Розв'язок. Так як флангові шви розміщені симетрично відносно лінії дії сил F , то на кожен шов передається сила $\frac{F}{2}$. Із рівняння (59)

знайдемо потрібну довжину зварного шва

$$l = \frac{F}{2 \cdot 1,42 \cdot \delta \cdot [\tau_E]} + 1 = \frac{200}{2 \cdot 1,42 \cdot 0,8 \cdot 18} + 1 = 5,9 \text{ см},$$

де $[\tau_E] = 180 \text{ МПа} = 18 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, $\delta = 8 \text{ мм} = 0,8 \text{ см}$

З'єднання дерев'яних елементів

При виготовленні дерев'яних конструкцій часто виникає потреба з'єднувати між собою їх елементи. Розрізняють з'єднання:

- зрощування (або стики) – для збільшення довжини (рис. 47, а, б, в);
- сплювання – для збільшення розмірів попереднього перерізу;

• вузлові – для скріплення елементів під кутом (рис 46), (рис 47, г).
З'єднання виконують у більшості випадків спеціальними зв'язками. Залежно від характеру роботи зв'язків розрізняють такі види з'єднань:

- на клеях, що працюють у більшості випадків на зсув;
- на нагелях – болтах, штирях, цвяхах, що працюють в основному на згин;
- на розтягнутих зв'язках – болтах, хомутах, скобах, тяжах, цвяхах, що працюють на розтяг або витягування;
- на врубках – з'єднання, що не потребують спеціальних зв'язків.

Всі зв'язки (крім клеєвих) є податливими, тобто не забезпечують повної монолітності з'єднання. Деформації виникають внаслідок нещільності, усушки і зминання деревини, а також від згину зв'язків.

Розвиток деформації відбувається по-різному.

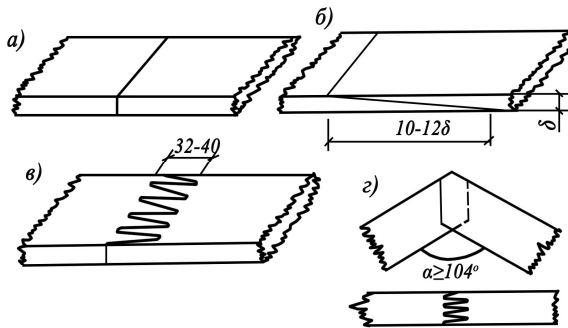


Рис. 46

Дерево є анізотропним матеріалом і тому одним і тим же деформаціям чинить опір по-різному залежно від напрямку дії сил до напрямку волокон. Так, наприклад, його опір сколюванню та зминанню у врубках вздовж волокон більший, ніж поперек їх. Явище зсуву в дерев'яних елементах конструкцій носить назву сколювання.

Детальний розгляд всіх видів з'єднань відноситься до іншого курсу підготовки молодшого спеціаліста, ми розглянемо лише деякі.

Клеєві з'єднання. Склеювання дерев'яних деталей застосовувалось вже багато століть, але лише в останні роки розроблені високо-

якісні водо- і біостійкі будівельні клеї, що забезпечують міцність клеєвого шва на стик і сколювання, а в деяких випадках і на розтяг, не нижче міцності деревини. Створення надійних клеїв (на основі синтетичних смол) для дерев'яних конструкцій має таке ж значення, як поява зварювання для сталених конструкцій.

Перевага клеєних конструкцій:

1. З дощок невеликих розмірів можна склеїти елементи будь-якої довжини з поперечним перерізом будь-якої форми, висота перерізів може вимірюватися метрами;

2. В них відсутні послаблення врубками та врізками, немає зсуву у швах;

3. Виготовлення клеєних конструкцій в заводських умовах легко автоматизується і тому має низьку трудомісткість;

4. При склеюванні можна використовувати короткомірні та з дефектами лісоматеріали (після вирізки значних пороків та з наступним стикуванням);

5. Металомісткість клеєних конструкцій незначна;

6. Внаслідок масивності перерізів клеєні елементи мають високу вогнестійкість.

Недоліком клеєних конструкцій є необхідність виготовлення їх в заводських умовах з дотриманням технології. Монтажні клейові з'єднання складні.

Застосовуються три типи поздовжнього стику на клею: впритик – найпростіший, добре працює на стиск (рис. 46, а), на “вус” (рис. 46, б) та “зубчастим шипом” (рис. 46, в,г). Останні два стики мають однакову міцність з основною деревиною, тому можуть працювати на стиск і на розтяг.

З'єднання на врубках. При розрахунках врубок дерев'яних з'єднань на сколювання і зминання застосовують формули (48) і (49). Значення допустимих напруг на сколювання та зминання наведені в таблиці 6.

Приклад 18. Визначити глибину врубки та довжину ділянки сколювання для опорного вузла дерев'яної ферми, якщо зусилля $N=50$ кН, $H=43,3$ кН, $b=12$ см, $h=16$ см, допустима напруга на сколювання $[\tau]=1$ МПа, допустима напруга на зминання $[\sigma_{зм}]=8$ МПа (рис. 47).

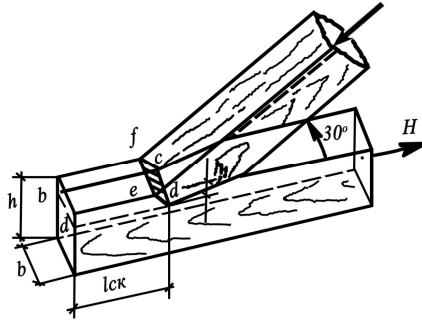


Рис. 47

Розв'язок. Знаходимо довжину площі сколювання за формулою (48)

$$\tau = \frac{F}{A} \leq [\tau] \rightarrow A = \frac{F}{[\tau]} = \frac{H}{[\tau]}$$

$$A = l_{ск} \cdot b \text{ тоді } l_{ск} = \frac{H}{b \cdot [\tau]} = \frac{43,3}{112 \cdot 0,1} = 36,1 \text{ см,}$$

$$\text{де } [\tau] = 1,0 \text{ МПа} = 0,1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Знаходимо глибину лобової врубкі h_1 за формулою (49)

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}] \rightarrow A_{зм} = \frac{F}{[\sigma_{зм}]} = \frac{N_1}{[\sigma_{зм}]}$$

$$\text{де } A_{зм} = \frac{h_1}{\cos 30^\circ} \cdot b, \quad [\sigma_{зм}] = 8 \text{ МПа} = 0,8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

$$\text{тоді } h_1 = \frac{N_1 \cdot \cos 30^\circ}{b \cdot [\sigma_{зм}]} = \frac{50 \cdot 0,87}{12 \cdot 0,8} = 4,53 \text{ см.}$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається деформацією зсуву?
2. Які внутрішні сили виникають при зсуві?
3. Які напруги виникають при зсуві?
4. Що називається деформацією зминання?
5. Які напруги виникають при зминанні?
6. Які бувають типи зварних з'єднань?
7. Яка різниця між однозрізною та двозрізною заклепками?
8. Які деформації виникають в сполученнях дерев'яних елементів конструкцій?

Розділ V. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

§ 29. ОСЬОВИЙ, ПОЛЯРНИЙ ТА ВІДЦЕНТРОВИЙ МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ

Вивчаючи розтяг, стиск та зсув, ми помітили, що міцність елементів конструкцій для якогось матеріалу залежить від площі поперечного перерізу. Тобто площа перерізу повністю визначає ступінь опору елемента конструкції деформації. При вивченні згину та кручення за цією величиною не можна робити висновок про ступінь опору матеріалу згину або крученню, так як одна і та ж балка залежно від положення осей поперечного перерізу до напрямку дії сил буде працювати, наприклад, на згин, по-різному.

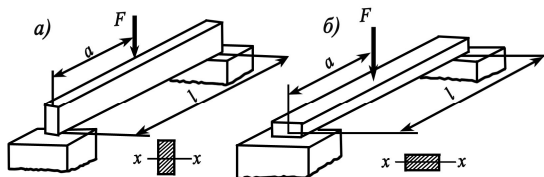


Рис. 48

На рис. 48 зображена балка прямокутного перерізу, причому одна сторона її перерізу значно більша ніж інша. На рис. 48, а балка лежить на опорах меншою стороною, а на рис. 48, б – більшою стороною. Очевидно, що в першому положенні балка виявиться більш міцною та жорсткою, тобто витримає більше навантаження і менше прогнеться, ніж у другому положенні.

Прийнято називати балку *жорсткою*, якщо вона мало прогинається від прикладеного навантаження на відміну від *гнучкої*, що прогинається на значну величину.

Із сказаного виходить, що жорсткість балки характеризує її здатність чинити опір деформації. Такою геометричною характеристикою при згині балок в опорі матеріалів є момент інерції площі перерізу відносно осі, що позначається латинською буквою I . Як побачимо далі, момент інерції перерізу розглянутої вище балки відносно осі x для першого положення (рис. 48, а) буде значно більшим (іноді в декілька раз), ніж для другого положення.

Перш ніж перейти до визначення поняття моменту інерції, згадаємо із теоретичної механіки ще про одну геометричну характеристику поперечного перерізу – статичний момент площі плоского перерізу відносно осі.

Статичним моментом плоского перерізу відносно будь-якої осі, що лежить з ним в одній площині (рис. 49), називається сума добутків елементарних площадок dA всього перерізу на відстань їх до цієї осі, тобто

$$S_x = \int_A y \cdot dA \quad \text{та} \quad S_y = \int_A x dA,$$

де A під інтегралом означає, що інтегрування розповсюджується на всю площу перерізу.

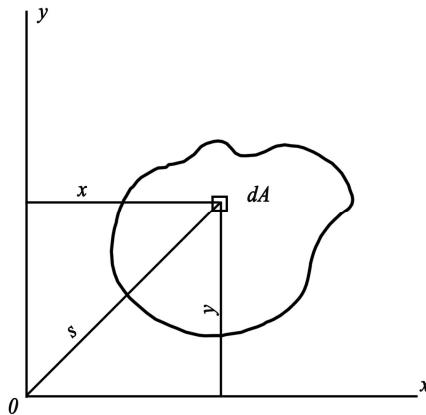


Рис. 49

Застосовуючи теорему про момент рівнодіючої, можна написати: $S_x = \int_A y dA = Ay_c$ і $S_y = \int_A x \cdot dA = Ax_c$,

де A – площа всього перерізу; x_c та y_c – координати центра ваги перерізу.

Звідси отримаємо формули для знаходження координат центра ваги перерізу:

$$x_c = \frac{S_y}{A} \quad \text{і} \quad y_c = \frac{S_x}{A}$$

Статичний момент може мати як додатні так і від'ємні значення залежно від знаку координат, тобто від розміщення осей, відносно яких він знаходиться.

Якщо вісь, відносно якої визначається статичний момент, проходить через центр ваги перерізу, тобто $x_c=0$ або $y_c=0$, то статичний момент відносно цієї осі дорівнює нулю.

Якщо переріз має вісь симетрії, то ця вісь завжди проходить через центр ваги. Тому статичний момент будь-якого перерізу відносно його осі симетрії завжди дорівнює нулю.

Осьовим (екваторіальним) моментом інерції плоского перерізу відносно осі називається сума добутків елементарних площадок dA на квадрати їх відстаней до цієї осі (рис. 49).

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (60)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (61)$$

В цих формулах індекси x та y позначають вісь, відносно якої визначаються моменти інерції.

Полярним моментом інерції перерізу I_p відносно якоїсь точки (полюса), що лежить в площині перерізу, називається сума добутків елементарних площадок dA на квадрати їх відстаней ρ до полюса (рис. 49), тобто

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (62)$$

Із рис. 33 видно, що $\rho^2 = x^2 + y^2$, тоді

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 \cdot dA = I_y + I_x \quad \text{або} \quad (63)$$

$$I_p = I_x + I_y,$$

тобто полярний момент інерції відносно якоїсь точки (полюса) дорівнює сумі осьових моментів інерції відносно двох будь-яких взаємно перпендикулярних осей, що проходять через цей полюс.

Як видно із означення осьові та полярний моменти інерції завжди додатні і не можуть дорівнювати нулю. При повертанні осей відносно початку координат на будь-який кут сума осьових моментів інерції залишається сталою і дорівнює полярному моменту інерції.

Відцентровим моментом інерції плоского перерізу відносно осей x та y називається сума добутків елементарних площадок dA на їх координати x та y .

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (64)$$

Відцентровий момент інерції може приймати як додатні, так і від'ємні значення, а значить і дорівнювати нулю.

Всі моменти інерції мають однакову одиницю виміру – m^4 , cm^4 , mm^4 .

Чому моменти інерції є геометричними характеристиками перерізу і як вони впливають на ступінь опору елемента конструкції деформації ми побачимо нижче, коли розглянемо внутрішні сили при згині та крученні.

§30. ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ МОМЕНТАМИ ІНЕРЦІЇ ПРИ ПОВОРОТІ ОСЕЙ

Якщо осі координат розмістити так, щоб початок координат співпав з центром ваги перерізу, то такі осі будуть називатися *центральною осями*. Очевидно, що таких осей можна провести безліч. Виникає питання, чи не можна виразити момент інерції відносно будь-якої центральної осі залежно від моменту інерції відносно одної або двох визначених осей. Для цього побачимо, як будуть змінюватися моменти інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей при повороті їх на деякий кут α .

Візьмемо довільну плоску фігуру і проведемо дві взаємно перпендикулярні центральні осі O_x і O_y (рис. 50). Нехай нам відомі осьові моменти інерції відносно цих осей I_x , I_y , а також відцентрований момент інерції I_{xy} .

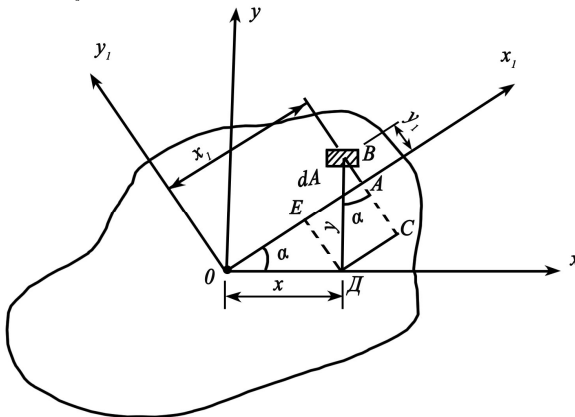


Рис. 50

Повернемо осі координат на кут α , вони займуть положення x_1 та y_1 ; додатний напрям цього кута будемо вважати проти годинникової стрілки. Запишемо моменти інерції цієї плоскої фігури відносно осей x_1 та y_1 .

$$I_x = \int_A y^2 dA ; I_y = \int_A x^2 dA \quad (65)$$

$$I'_x = \int_A y'^2 dA ; I'_y = \int_A x'^2 dA$$

Із креслення видно, що координати площадки dA в системі координатних осей $x_1 O y_1$ будуть:

$$x_1 = OE + BC = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \quad (66)$$

$$y_1 = BC - AC = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$$

Підставляючи ці значення у формули 65, отримаємо:

$$\begin{aligned} I'_x &= \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \int_A (y^2 \cos^2 \alpha - 2xy \cos \alpha \sin \alpha + x^2 \sin^2 \alpha) dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA - \sin 2\alpha \int_A xy dA \end{aligned} \quad (67)$$

Аналогічно:

$$I'_y = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA + \cos^2 \alpha \int_A x^2 dA + \sin 2\alpha \int_A xy dA \quad (68)$$

Перші два інтеграли виразів (67) і (68) – це осьові моменти інерції I_x та I_y , а останній – відцентрований момент інерції відносно цих осей I_{xy} .

Тоді:

$$I'_x = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (69)$$

$$I'_y = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

Із формули (69) можна отримати наступну залежність:

$$\begin{aligned} I'_x + I'_y &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha = \\ &= I_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + I_y (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = I_x + I_y, \end{aligned} \quad (70)$$

тобто сума моментів інерції відносно будь-яких взаємно перпендикулярних осей не змінюється при їх повороті.

§31. МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ НАЙПРОСТІШИХ ПЕРЕРЕЗІВ

Осьовий момент інерції прямокутника.

За означенням моменти інерції дорівнюють:

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

Знайдемо спочатку момент інерції I_x . Розіб'ємо прямокутний переріз на елементарні площадки dA – нескінченно вузькі смужки, паралельні осі x (рис. 51).

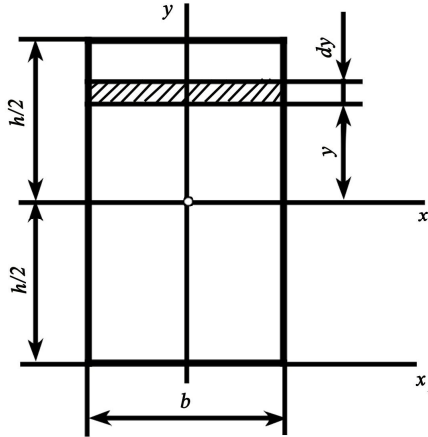


Рис. 51

Висота такої смужки буде dy , а ширина – b . Момент інерції її відносно осі x буде дорівнювати добутку її площі dA на квадрат відстані y до осі x , тобто

$$dI_x = dAy^2 = bdy^2, \text{ де } dA = bdy$$

Момент інерції всього перерізу виразиться сумою моментів інерції всіх цих смужок.

$$I_x = \int_A dI_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 bdy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = b \left[\frac{h^3}{8 \cdot 3} - \left(-\frac{h^3}{8 \cdot 3} \right) \right] = \frac{bh^3}{12}$$

Остаточно:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad (71)$$

Очевидно, що момент інерції прямокутника відносно осі y дорівнює:

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad (71')$$

Прийнявши $b=h=a$, отримаємо формулу для визначення моменту інерції квадратного перерізу.

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12} \quad (71'')$$

Моменти інерції круга

При визначенні осьових моментів інерції круга зручніше спочатку знайти полярний момент інерції відносно його центра. Для цього візьмемо круг радіусом r (рис. 52) та розіб'ємо його на нескінченно вузькі концентричні кільця шириною $d\rho$. Взевши одне із кілець радіусом ρ , визначимо його полярний момент інерції:

$$dI_\rho = \rho^2 dA = \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho^3 d\rho$$

де $dA = 2\pi\rho d\rho$

Для знаходження полярного момента інерції круга необхідно взяти інтеграл цього значення. ρ в цьому випадку змінюється від 0 до r .

$$I_\rho = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \left| \frac{\rho^4}{4} \right|_0^r = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2} \quad (72)$$

Виражаючи полярний момент інерції через діаметр, отримаємо:

$$I_\rho = \frac{\pi \left(\frac{d}{2} \right)^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

або остаточно:

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1d^4 \quad (72')$$

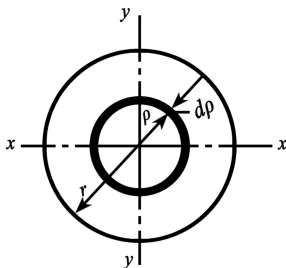


Рис. 52

Так як круг симетричний відносно будь-якого діаметру, осьові моменти інерції відносно будь-яких осей, що проходять через центр круга, однакові, тобто $I_x = I_y$, а так як $I_\rho = I_x + I_y$, то величина осьового моменту інерції площі круга відносно будь-якої осі, що

проходить через центр круга, дорівнює половині полярного момента інерції, тобто

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{32 \cdot 2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

або остаточно

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4 \quad (73)$$

Осьовий момент кругового кільця

Осьовий момент кругового кільця визначається як різниця осьових моментів інерції великого круга діаметром D та малого круга діаметром d (рис. 53).

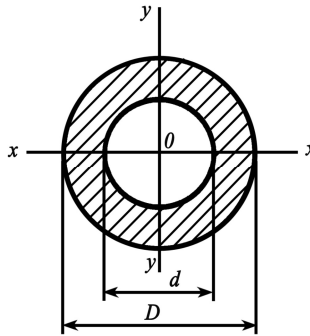


Рис. 53

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4)$$

остаточно

$$I_x = I_y = 0,05(D^4 - d^4) \quad (73')$$

Осьовий момент інерції трикутника

Розбиваємо площу трикутника на нескінченно вузькі смужки шириною dy та виділимо одну з них, що знаходиться на відстані y від осі x_1 (рис. 54). Із подібності трикутників ABC та aBc визначаємо x :

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{h}; \quad x = \frac{by}{h}$$

площа елементарної смужки:

$$dA = xdy = \frac{by}{h} dy$$

Тоді осьовий момент інерції площі трикутника відносно осі x_1 :

$$I_{x_1} = \int_A y^2 dA = \int_0^h \frac{by}{h} y^2 dy = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{b}{h} \left| \frac{y^4}{4} \right|_0^h = \frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{bh^3}{4}$$

остаточно:

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{4} \quad (74)$$

Таким же чином знаходять моменти

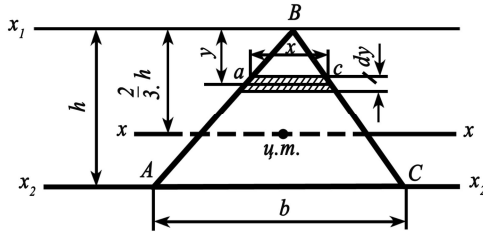


Рис. 54

інерції трикутника відносно осі x_2 , що співпадає з його основою, і відносно центральної осі x .

$$I_{x_2} = \frac{bh^3}{12} \quad (74')$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad (74'')$$

§32. ГОЛОВНІ ОСІ ІНЕРЦІЇ ТА ГОЛОВНІ МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ. ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ОСЬОВИМИ МОМЕНТАМИ ІНЕРЦІЇ ВІДНОСНО ПАРАЛЕЛЬНИХ ОСЕЙ

В цьому курсі ми будемо розглядати тільки ті перерізи, що мають вісь симетрії. Якщо в перерізі вісь симетрії прийнята за вісь x або y , то відцентровий момент інерції відносно цієї осі дорівнює нулю, так як в цьому випадку кожному елементу dA з додатним y відповідає рівний і симетрично розміщений елемент dA' з від'ємним y . Елементарні добутки $x \cdot y \cdot dA$ взаємно знищуються і інтеграл $\int_A xy dA$ перетворюється в нуль.

Покажемо, що для будь-якої точки довільного плоского перерізу можна знайти такі дві взаємно перпендикулярні осі, відносно яких відцентровий момент інерції буде дорівнювати нулю. Нехай для довільного перерізу координатні осі повернені на 90° , тоді вони займають положення x' та y' (рис. 55).

Якщо тепер виразити нові координати через старі, отримаємо

$$x' = y; \quad y' = -x$$

Тоді відцентровий момент інерції відносно нового положення осей

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = - \int_A xy dA = -I_{xy}$$

Тобто ми бачимо, що при повертанні осей на 90° відцентровий момент інерції змінює знак. Тому завжди буде і таке положення осей, відносно яких величина відцентрового моменту інерції дорівнює нулю.

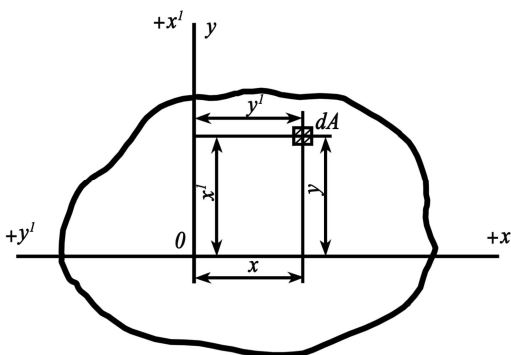


Рис. 55

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції плоского перерізу дорівнює нулю, називаються **головними осями інерції**.

Якщо початок координат головних осей співпадає з центром ваги перерізу, то такі осі називаються **головними центральними осями інерції**, а моменти інерції відносно таких осей називаються **головними центральними моментами інерції**.

В подальшому, для простоти, будемо називати їх головними осями та головними моментами.

Головні моменти інерції мають граничні (екстремальні) значення: один з них I_{\max} , а другий I_{\min} .

Осі симетрії будь-якого перерізу є головними осями інерції. У таких перерізів як тавр, швелер тощо, вісь симетрії є головною віссю інерції. Другою головною віссю є перпендикулярна до неї вісь, що проходить через центр ваги перерізу.

Щоб визначити момент інерції якогось перерізу відносно будь-якої осі, необхідно знати залежність між моментами інерції цього перерізу відносно двох паралельних осей, із яких одна є центральною віссю.

Нехай у якомусь довільному перерізі площею A (рис. 56) вісь x буде центральною, а вісь x_1 – паралельною їй на відстані a . Виділимо в перерізі елементарну площадку dA на відстані y від осі x . Тоді момент інерції відносно цієї осі дорівнює:

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Знайдемо момент інерції відносно осі x_1 .

Відстань y_1 елементарної площадки до осі x_1 буде дорівнювати $y + a$, тобто

$$y_1 = y + a$$

Тоді

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A (y^2 + 2ay + a^2) dA = \\ &= \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA \end{aligned}$$

В отриманому виразі перший інтеграл є осьовим моментом інерції відносно осі x , що проходить через центр ваги перерізу, тобто $\int_A y^2 dA = I_x$: другий інтеграл є статичним моментом всієї площі перерізу відносно осі x , тобто $\int_A y \cdot dA = S_x$. А так як статичний момент площі плоскої фігури відносно центральної осі дорівнює нулю, то другий доданок дорівнює нулю. Останній інтеграл $\int_A dA$ виражає собою площу всього перерізу A .

Таким чином, момент інерції перерізу відносно осі x_1 дорівнює

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A \quad (75)$$

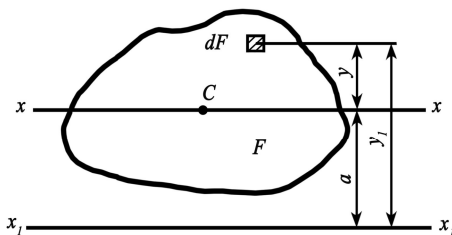


Рис. 56

Ця формула читається так: *момент інерції площі перерізу відносно будь-якої осі дорівнює моменту інерції відносно осі, їй паралельній, що проходить через центр ваги перерізу, плюс добуток площі цього перерізу на квадрат відстані між осями.*

За допомогою цієї формули можна знаходити моменти інерції будь-якого складного перерізу, так як момент інерції всього перерізу, відносно якоїсь осі, дорівнює сумі моментів інерції частин перерізу відносно цієї ж осі.

Приклад 19. Визначити момент інерції поперечного перерізу (рис. 57) збірної плити перекриття відносно центральної осі x .

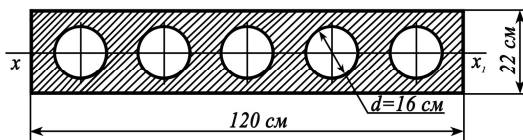


Рис. 57 (рис. 2.97, Збірник Утіліт, с. 153)

Розв'язок. Плита перекриття має форму прямокутника. Момент інерції цього перерізу відносно осі x (вона є головного вісью) знаходимо за формулою (71).

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Але переріз ослаблений п'ятьма отворами, моменти інерції яких ми повинні виключити. Моменти інерції круглого отвору знаходимо за формулою (73), тобто

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64}$$

Тоді момент інерції всього перерізу дорівнює:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} - 5 \cdot \frac{\pi d^4}{64} = \frac{120 \cdot 22^3}{12} - 5 \cdot \frac{3.14 \cdot 16^4}{64} = 106470 - 16085 = 90385 \text{ см}^4$$

Приклад 20. Визначити головні центральні моменти інерції перерізу (рис. 58).

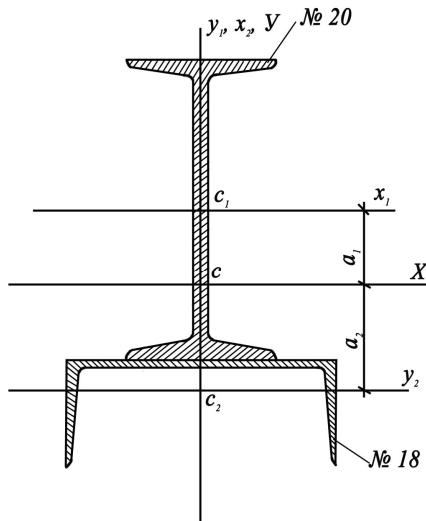


Рис. 58

Розв'язок. Знайдемо положення головних осей інерції перерізу. Переріз має вісь симетрії, вона співпадає з власною віссю двотавра y_1 . Позначимо головну вісь великою буквою Y . Друга головна вісь буде перпендикулярна осі Y та проходити через центр ваги перерізу. Знайдемо положення центру ваги перерізу. Для цього проведемо та позначимо власні осі кожного елемента перерізу. За допоміжні осі, для знаходження центра ваги, приймемо власні осі двотавра x_1 та y_1 , так як

власна вісь двотавра y_1 є віссю симетрії перерізу Y . Координати центра ваги знаходимо за формулами:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}$$

Координата $x_c = 0$, так як центр ваги лежить на осі симетрії, тобто на осі y_1 . Необхідні дані для знаходження координати y_c зведемо

№	Ескіз	A_i (см ²)	y_i (см)	
1	"	26,8	0	$y_2 = -\left(\frac{h^{26}}{2} + Z_0^{26}\right) = -(10 + 1,94) =$ $= -11,94 \text{ см}$
2	П	20,7	-11,94	

в таблицю.

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{26,8 \cdot 0 - 20,7 \cdot 11,4}{26,8 + 20,7} = -5,2 \text{ см}$$

Покажемо центр ваги на схемі та проведемо другу головну вісь X . Використовуючи зв'язок між моментами інерції відносно паралельних осей, знайдемо головний момент інерції відносно осі X .

$$I_x = I_{x_1} + a_1^2 A_1 + I_{y_2} + a_2^2 A_2 = 1840 + 5,2^2 \cdot 26,8 + 86 + 6,74^2 \cdot 20,7 = 3591 \text{ см}^4$$

де I_{x_1} – момент інерції двотавра відносно власної осі x_1 ,

I_{y_2} – момент інерції швелера відносно власної осі y_2 .

$$a_1 = |y_c| = 5,2 \text{ см}$$

$$a_2 = |y_2| - |y_c| = 11,94 - 5,2 = 6,74 \text{ см}$$

Головний момент інерції відносно осі Y знаходимо як суму моментів інерції двотавра і швелера, так як їх власні осі співпадають з головною віссю Y .

$$I_y = I_{y_1} + I_{x_2} = 115 + 1090 = 1205 \text{ см}^4,$$

де I_{y_1} – момент інерції двотавра відносно власної осі y_1 ,

I_{x_2} – момент інерції швелера відносно власної осі x_2 .

Остаточно: $I_x = 3591 \text{ см}^4$

$$I_y = 1205 \text{ см}^4$$

Питання для самоконтролю

1. Як практично знаходиться статичний момент площі плоскої фігури відносно осі?
2. Чому дорівнює статичний момент плоскої фігури відносно осі, що проходить через центр ваги?
3. Що називається осьовим, полярним, відцентрованим моментами інерції? Яка їх одиниця вимірювання?
4. Які моменти інерції завжди додатні?
5. Чому дорівнює осьовий момент прямокутника відносно його осей симетрії?
6. Чому дорівнюють осьові моменти інерції круга та кільця?
7. Які осі перерізу називаються головними?
8. Які моменти інерції називаються головними?

Розділ VI. ЗГИН ПРЯМОГО БРУСА

§33. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

В будівельних конструкціях широко застосовуються елементи, що працюють на згин. Характерною ознакою згину є зміна кривизни бруса, при згині прямого бруса його вісь стає криволінійною. Деформацію згину ми будемо вивчати на прикладі балки.

Ми знаємо, що деформація згину характеризується тим, що в поперечних перерізах балки виникає згинальний момент i , дуже часто, поперечна сила.

Згин називається **чистим**, якщо в перерізі балки виникає тільки згинальний момент.

Якщо разом із згинальним моментом в перерізах балки виникає і поперечна сила, згин називається **поперечним**.

Деформація згину має місце у випадку дії зовнішніх сил, що прикладені перпендикулярно осі балки, а також від пар сил, площина дії яких проходить через її вісь.

Площина, що проходить через вісь балки та одну із головних осей інерції перерізу, називається **головною площиною бруса**. Таким чином, брус має дві головні площини.

Площина, в якій лежать всі зовнішні навантаження, що діють на балку, називається **силовою площиною**. В більшості випадків всі зовнішні навантаження, що діють на балку, можна привести до сил, що лежать в одній площині, якщо зробити це неможливо, тоді деформація балки (бруса) буде складною.

Якщо площина дії сил (силова площина) співпадає з однією із головних площин бруса, то згин в цьому випадку буде називатися **прямим** або **плоским**, так як зігнута вісь балки після деформації залишиться в цій же площині.

Якщо силова площина не співпадає ні з однією із головних площин, згин називається **косим**. На рис. 59 показаний випадок косоного згину.

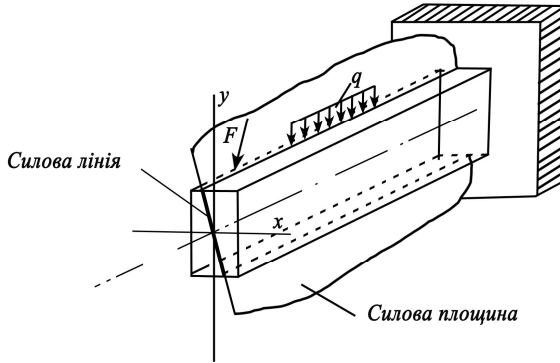


Рис. 59

Прикладом косої згини буде робота дерев'яного прогону від вертикального навантаження покрівлі (рис. 60).

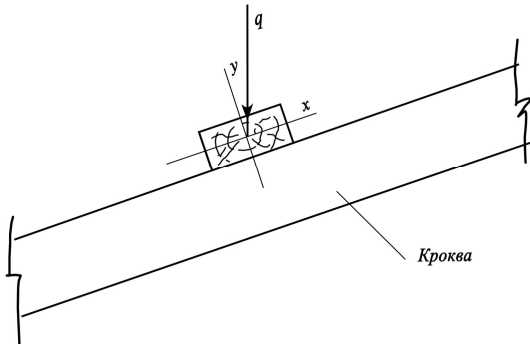


Рис. 60

Лінія перетину силової площини з площиною поперечного перерізу називається **силовою лінією** (рис. 59).

При вивченні згини будемо розглядати лише такі балки, перерізи яких мають одну або дві осі симетрії, а діючі зовнішні навантаження лежать в одній із головних площин бруса (рис. 61).

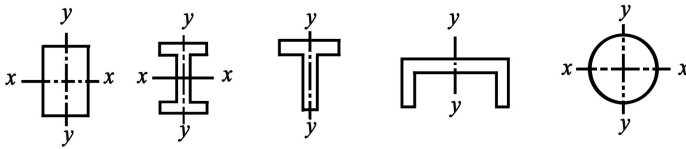


Рис. 61

Задача вивчення плоского згину зводиться до наступного:
 а) вивчення внутрішніх сил, що виникають в перерізах балки;
 б) установлення закону розподілу внутрішніх сил (напруг) по перерізу;
 в) виводу формул для визначення напруг та для підбору перерізів балок;
 г) вивчення лінійних та кутових переміщень – прогинів та кутів повороту поперечних перерізів балок.

§34. ПОПЕРЕЧНА СИЛА ТА ЗГИНАЛЬНИЙ МОМЕНТ

В даному параграфі ми детально познайомимося з поняттям “поперечна сила” і “згинальний момент”, сформулюємо визначення цих понять та правила визначення їх значень.

Нехай балка AB , що вільно лежить на двох опорах, знаходиться під дією двох сил F_1 та F_2 , розміщених в головній площині бруса (рис. 62, а). Відкинувши опори та замінивши їх опорними реакціями V_A і V_B , будемо розглядати балку, що знаходиться під дією сил F_1 , F_2 , V_A і V_B . Ці сили викликають в перерізах балки внутрішні сили пружності, які визначимо за допомогою методу перерізів.

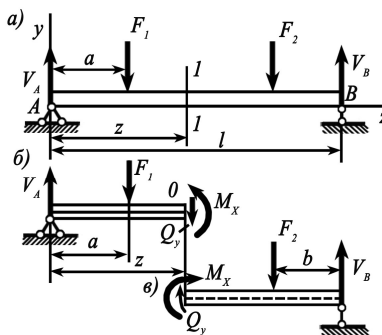


Рис. 62

Перерізом 1-1 на відстані z від лівої опори розріжемо балку на дві частини, відкинувши праву частину, розглянемо рівновагу залишеної лівої частини (рис. 62, б). Очевидно, що залишена частина балки буде знаходитись в рівновазі під дією зовнішніх сил V_A і F_1 та внутрішніх сил в перерізі 1-1, що замінюють дію відкинutoї правої частини балки на ліву. За умовою рівноваги внутрішні сили в перерізі 1-1 обох частин балки будуть рівними за величиною та протилежні за напрямком.

Замінімо дію відкинutoї правої частини балки на ліву внутрішніми силами, рівнодіюча яких повинна лежати в площині дії зовнішніх сил V_A і F_1 . Проекцію цієї рівнодіючої на вісь y позначимо через Q_y , а її момент відносно центру ваги перерізу 1-1 – через M_x , так як ліва і права частини балки знаходяться в рівновазі, то умова рівноваги для них повинна виконуватися. Тобто $\sum V_i = 0$ і $\sum M_0 = 0$. За центр моментів приймаємо центр ваги перерізу (точка O).

$$\sum V_i = V_A - F_1 - Q_y = 0; \quad \sum M_0 = V_A \cdot z - F_1(z - a) - M_x = 0,$$

звідси

$$Q_y = V_A - F_1; \quad M_x = V_A \cdot z - F_1(z - a).$$

Таким чином, внутрішні сили в перерізі виявилися приведеними до сили Q_y та пари сил з моментом M_x . Тобто **поперечна сила** – це проекція рівнодіючої внутрішніх сил на вісь, що перпендикулярна до осі балки та позначається Q_y або Q . **Згинальний момент** в довільному перерізі – це момент рівнодіючої внутрішніх сил відносно центру ваги цього перерізу та позначається M_x або M .

Із рівноваги правої частини балки (рис. 62, в) можна зробити висновок, що поперечна сила Q_y та згинальний момент M_x в перерізі будуть мати ті ж самі значення, що і в лівій частині, але протилежні за напрямком.

Із рівнянь рівноваги ми визначили, що *поперечна сила в довільному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх зовнішніх сил, що діють по одну сторону від перерізу, на вісь, перпендикулярну до осі бруса.*

Згинальний момент в довільному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх сил, що діють по одну сторону від перерізу, відносно його центру ваги.

Щоб отримати в одному і тому ж перерізі балки один і той же знак для поперечної сили або згинального моменту, незалежно від того, яку частину балки ми розглядаємо, прийняті наступні правила знаків:

а) поперечна сила в довільному перерізі буде додатною, якщо зовнішня сила, що діє на ліву відсічену частину, направлена знизу вгору, а на праву відсічену частину – зверху вниз (рис. 63, а). В протилежному випадку поперечна сила буде від’ємна (рис. 63, б).

б) згинальний момент в довільному перерізі балки буде додатним, якщо зовнішня сила, що діє на відсічену частину, згинає її відносно перерізу випуклістю вниз (рис. 64, а). В протилежному випадку згинальний момент буде від’ємним (рис. 64, б).

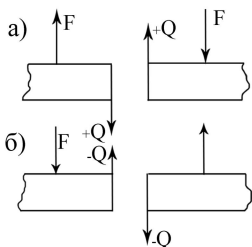


Рис. 63

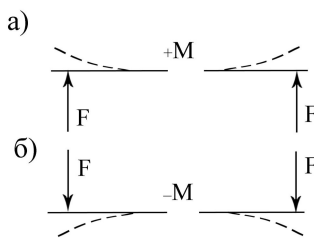


Рис. 64

**§35. ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ЗГИНАЛЬНИМ МОМЕНТОМ,
ПОПЕРЕЧНОЮ СИЛОЮ ТА ІНТЕНСИВНІСТЮ
РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ
(ТЕОРЕМА Д. І. ЖУРАВСЬКОГО)**

Розглянемо балку, що завантажена довільним навантаженням (рис. 65, а). Зробимо переріз на відстані z від лівої опори та відкинемо ліву частину. Дію відкинутої частини замінимо внутрішніми силами – поперечною силою Q та згинальним моментом M . Другий переріз зробимо нескінченно близько від першого перерізу на відстані dz та відкинемо праву частину балки. Дію відкинутої частини замінимо внутрішніми силами Q_1 та M_1 .

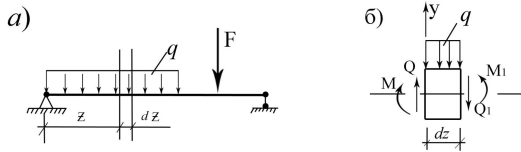


Рис. 65

Таким чином, ми вирізали елемент балки довжиною dz , який знаходиться в рівновазі під дією внутрішніх та зовнішніх сил. Покажемо його у збільшеному вигляді (рис. 65, б). Поперечна сила Q_1 та згинальний момент M_1 мало відрізняються від Q та M , так як перерізи знаходяться нескінченно близько один від одного, тобто на величину малих приростів dQ та dM і складають

$$Q_1 = Q + dQ; \quad M_1 = M + dM.$$

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum V_i = 0; \quad Q - q \cdot dz - Q_1 = 0 \quad \text{або} \quad Q - q \cdot dz - (Q + dQ) = 0$$

звідси $dQ = -q \cdot dz$ або

$$\frac{dQ}{dz} = -q, \quad (76)$$

тобто *перша похідна від поперечної сили по абсцисі z дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження із зворотним знаком.*

Складаємо рівняння моментів всіх сил відносно центру ваги правого перерізу:

$$\sum M = 0; \quad M + Q \cdot dz - q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - M_1 = 0$$

або

$$dM = Q dz - q \frac{(dz)^2}{2}.$$

В цьому рівнянні останній доданок є малою величиною вищого порядку відносно інших членів, тому ним можна знехтувати, тоді отримаємо:

$$dM = Q dz$$

звідси

$$\frac{dM}{dz} = Q, \quad (77)$$

тобто *перша похідна від згинального моменту по абсцисі z дорівнює поперечній силі.*

Формула (76) не застосовується для перерізів, в яких прикладені зосереджені сили, а формула (77) не застосовується для перерізів, де прикладені зосереджені моменти.

Із знайдених вище двох диференціальних залежностей випливає третя:

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = -q \quad (78)$$

тобто *друга похідна від згинального моменту по абсцисі z дорівнює першій похідній від поперечної сили Q або дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження з протилежним знаком.*

Формули (76)–(78) були отримані російським інженером Д. І. Журавським. Вони використовуються при аналізі питань, пов'язаних із згином балок, зокрема, для перевірки правильності побудови епюр згинальних моментів і поперечних сил.

§36. ПОБУДОВА ЕПЮР ПОПЕРЕЧНИХ СИЛ ТА ЗГИНАЛЬНИХ МОМЕНТІВ ДЛЯ РІЗНИХ ВИДІВ ЗАВАНТАЖЕННЯ ПРОСТИХ БАЛОК

Для наочного уявлення про закони міни поперечної сили та згинального моменту по довжині балки зручно зображати їх у вигляді графіків, ординати яких відповідають значенням Q або M в будь-якому її перерізі.

Побудову епюр виконують наступним чином. Лінію, паралельну осі балки, приймають за вісь абсцис, від якої в довільному масштабі відкладають ординати, що відповідають значенням Q або M , що діють в різних перерізах балки. З'єднуючи кінці відкладених ординат, отримують епюру Q або M .

Ординати додатних поперечних сил прийнято відкладати вгору від осі, а від'ємних – вниз. Ординати додатних згинальних моментів відкладають по-різному: вище або нижче осі, тобто епюру згинальних моментів M будують або зі сторони стиснених волокон балки, або зі сторони розтягнутих.

У будівельників прийнято зображати епюру згинальних моментів зі сторони розтягнутого волокна, так як це зручніше при використанні епюри в розрахунках та конструюванні елементів, що згинаються, деяких будівельних конструкцій.

Таким чином, додатні значення згинальних моментів ми будемо відкладати нижче осі епюри.

Штрихувати епюри Q і M потрібно тільки вертикальними лініями, так як кожна лінія штриховки в прийнятому масштабі виражає величину Q або M в даному перерізі.

Побудуємо епюри Q і M для балки, завантаженої силою F (рис. 66).

Знайдемо величини опорних реакцій V_A та V_B :

$$\sum M_A = F \cdot a - V_B \cdot l = 0, \quad \text{звідки} \quad V_B = \frac{F \cdot a}{l};$$

$$\sum M_B = V_A \cdot l - F \cdot b = 0, \quad \text{звідки} \quad V_A = \frac{F \cdot b}{l}.$$

Горизонтальна складова реакції опори A дорівнює нулю, тому що в простих балках від вертикального навантаження виникають тільки вертикальні реакції.

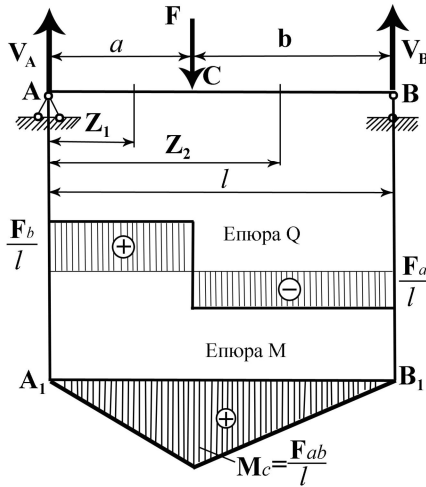


Рис. 66

Будуємо епюру Q . Розглянемо ділянку AC балки. На цій ділянці зробимо довільний переріз на відстані z_1 від лівої опори. Відкидаємо праву частину балки, а те, що залишилося в лівій частині, проектуємо на вісь, перпендикулярну до осі балки, тобто на вісь y .

$$Q_{z_1} = V_A = \frac{F \cdot b}{l}$$

Зліва у нас залишилася тільки сила V_A , яка проектується на вісь y в натуральну величину зі знаком плюс (для лівої частини сила V_A направлена знизу вгору).

Ми бачимо, що поперечна сила в перерізі z_1 не залежить від z_1 , тобто і на початку ділянки, в перерізі A , і в кінці її, в перерізі C , поперечна сила дорівнює $Q_{z_1} = V_A$. Це значить, що графіком поперечної сили на ділянці AC буде пряма лінія, паралельна осі епюри.

Під балкою, паралельно її осі, проведемо вісь епюри та відкладемо в довільному масштабі величину поперечної сили на ділянці AC вгору від осі епюри (рис. 66).

Для побудови епюри Q на другій ділянці балки робимо переріз на цій ділянці на відстані z_2 від лівої опори. Відкидаємо праву частину, а те, що залишилося в лівій частині, проектуємо на вісь y , маємо:

$$Q_{z_2} = V_A - F = \frac{F \cdot b}{l} - F = \frac{F \cdot b - F \cdot l}{l} = \frac{F(b-l)}{l} = -\frac{F(l-b)}{l} = -\frac{F \cdot a}{l}$$

Якщо відкинути ліву частину, то поперечна сила буде дорівнювати:

$$Q_{z_2} = -V_B = -\frac{F \cdot a}{l}$$

Поперечна сила знову не залежить від z_2 , тому графіком поперечної сили на ділянці CB також буде пряма, паралельна осі епюри. Значення поперечної сили відкладаємо нижче осі епюри (рис. 66).

Будуємо епюру M . Складемо вираз згинального моменту в перерізі Z_1 на ділянці AC . Відкидаючи праву частину, маємо:

$$M_{z_1} = V_A \cdot z_1$$

Відносно перерізу z_1 сила V_A згинає ліву частину випуклістю вниз, значить згинальний момент M_{z_1} буде додатним.

При цьому згинальний момент знаходиться в прямій залежності від z_1 , це значить що графіком буде пряма лінія. Для побудови епюри M на ділянці AC досить визначити два значення згинального моменту – на початку ділянки та в кінці.

Тобто при $z_1=0$, маємо $M_{z_1} = V_A \cdot 0 = 0$;

$$\text{при } z_1=a \quad M_{z_1} = V_A \cdot a = \frac{F \cdot b}{l} \cdot a = \frac{F \cdot a \cdot b}{l}$$

Відкладаємо ці значення у відповідних перерізах та будуємо графік на ділянці AC . Причому значення моменту в перерізі C відкладаємо нижче осі (рис. 66).

Для побудови правої частини епюри згинальних моментів можна розглядати ліву або праву частину балки. В даному випадку вираз згинального моменту в перерізі від правої частини буде простішим

$$M_{z_2} = V_B(l - z_2)$$

Знак згинального моменту знову буде додатним, так як сила V_B згинає праву частину відносно перерізу випуклістю вниз.

Залежність моменту від z_2 знову пряма, тому графіком теж буде пряма лінія.

$$\text{При } z_2=a \quad M_{z_2} = M_C = V_B(l - a) = V_B \cdot b = \frac{F \cdot a \cdot b}{l};$$

$$\text{при } z_2=l \quad M_{z_2} = M_B = V_B(l - l) = 0$$

З'єднуємо відкладені значення прямою лінією. Як видно із епюри M , по всій довжині балки згинальний момент додатний і досягає найбільшого значення в точці C , тобто під силою F

$$M_{max} = \frac{F \cdot a \cdot b}{l}$$

Побудуємо епюри Q і M для балки, що завантажена рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 67).

Знайдемо величини опорних реакцій. Виходячи із симетрії балки та навантаження, маємо

$$V_A = V_B = \frac{q \cdot l}{2}$$

Горизонтальна реакція опори A відсутня.

Будуємо епюру Q . Робимо довільний переріз на відстані z_1 від лівої опори. Відкидаємо праву частину та знаходимо

$$Q_{z_1} = V_A - q \cdot z_1$$

V_A діє знизу вгору – буде зі знаком плюс, розподілене навантаження діє зверху вниз – буде зі знаком мінус. Як бачимо, поперечна сила Q знаходиться в прямій залежності із z_1 , це значить, що графіком поперечної сили буде пряма лінія. Знайдемо граничні значення.

$$\text{При } z_1=0 \quad Q_{z_1} = Q_A = V_A - q \cdot 0 = V_A = \frac{ql}{2};$$

$$\text{при } z_1=l \quad Q_{z_1} = Q_B = V_A - ql = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2}$$

В перерізах A і B маємо однакові величини поперечної сили, але з різними знаками. Відкладаємо у довільному масштабі додатні значення вверх, а від'ємні – вниз та з'єднуємо прямою лінією (рис. 67).

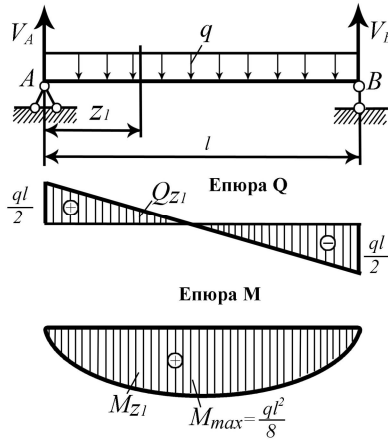


Рис. 67

Будуємо епюру M . Складаємо вираз згинального моменту в перерізі z_1 для лівої частини балки. Праву відкидаємо.

$$M_{z_1} = V_A \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} = V_A \cdot z_1 - \frac{q \cdot z_1^2}{2}$$

Згинальний момент M_{z_1} знаходиться в квадратній залежності від абсциси Z_1 , тому окреслення опори моментів буде кривою лінією – квадратною параболою. Щоб побудувати її, візьмемо декілька перерізів, в яких визначимо величини згинальних моментів:

$$\text{при } Z_1=0 \quad M_{z_1} = M_A = 0$$

$$\text{при } Z_1=\frac{l}{4} \quad M_{z_1} = V_A \cdot \frac{l}{4} - \frac{q \cdot l^2}{16 \cdot 2} = \frac{q \cdot l^2}{8} - \frac{q \cdot l^2}{32} = \frac{3}{32} ql^2$$

$$\text{при } Z_1 = \frac{l}{2} \quad M_{z_1} = V_A \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot l^2}{4 \cdot 2} = \frac{q \cdot l^2}{4} - \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{1}{8} q l^2$$

$$\text{при } Z_1 = l \quad M_{z_1} = V_A \cdot l - \frac{q \cdot l^2}{2} = \frac{q \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^2}{2} = 0$$

Найбільший згинальний момент буде в перерізі, що відповідає абсцисі Z_1 , яка визначиться, якщо прирівняти нулю першу похідну від моменту M по Z_1 :

$$\frac{dM}{dz} = \frac{ql}{2} - qz_1 = 0,$$

$$\text{звідки } z_1 = \frac{ql}{2 \cdot q} = \frac{l}{2},$$

тобто найбільший згинальний момент виникає посередині прольоту балки

$$M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8} \quad (79)$$

Як ми бачимо, в цьому перерізі поперечна сила дорівнює нулю. Формулу (79) потрібно запам'ятати.

Побудуємо епюри Q і M для балки, що завантажена зосередженою парою сил з моментом m (рис. 68)

Визначимо опорні реакції V_A і V_B :

$$\sum M_A = 0; \quad m - V_B l = 0; \quad V_B = \frac{m}{l};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -V_A l + m = 0; \quad V_A = \frac{m}{l};$$

Горизонтальна реакція опори A відсутня. Ми бачимо, що реакції також складають пару сил, які зрівноважують прикладену до балки пару з моментом m .

Будуємо епюру Q . Зробивши переріз в будь-якому місці балки та відкинувши, наприклад, праву частину, ми бачимо, що поперечна сила дорівнює лівій опорній реакції зі знаком мінус, так як проекція пари сил на будь-яку вісь дорівнює нулю.

$$Q = -V_A = -\frac{m}{l}$$

Це означає, що епюра Q по всій довжині балки обмежена прямою, паралельною осі. Тобто навантаження у вигляді зосередженого моменту не впливає на величину поперечної сили (рис. 68).

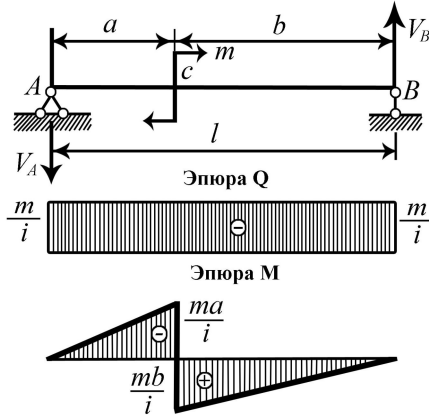


Рис. 68

Будуємо епюру M . Складаємо вираз згинального моменту в перерізі на відстані z_1 від лівої опори на ділянці AC .

Відкидаючи праву частину балки, маємо:

$$M_{z_1} = -V_A \cdot z_1$$

Відносно перерізу z_1 сила V_A згинає ліву частину балки випуклістю вгору, значить згинальний момент M_{z_1} буде від'ємним.

При цьому згинальний момент знаходиться в прямій залежності від z_1 , це значить що графіком буде пряма лінія.

$$\text{При } z_1=0; M_{z_1} = M_A = -V_A \cdot 0 = 0;$$

$$\text{при } z_1=a; M_{z_1} = M_C = -V_A \cdot a = -\frac{m}{l} \cdot a$$

Відкладаючи ці значення у відповідних перерізах, будуємо епюру на ділянці AC , причому значення моменту в перерізі C відкладаємо вище осі (рис 68)

Для побудови правої частини епюри робимо переріз на відстані z_2 від правої опори (рис. 68) та відкидаємо ліву частину балки.

$$M_{z_2} = V_B \cdot z_2$$

Знак буде додатним, тому, що сила V_B згинає праву частину відносно перерізу випуклістю вниз.

Графіком знову буде пряма лінія.

$$\text{При } z_2=0; M_{z_2} = M_B = V_B \cdot 0 = 0$$

$$\text{при } z_2=b; \quad M_{z_2} = M_C = V_B \cdot b = \frac{m}{l} \cdot b$$

Відкидаючи ці значення у відповідних перерізах, маємо епюру M (рис 68).

Ми бачимо, що в перерізі C епюра M робить стрибок на величину момента пари (m);

$$\frac{m}{l} \cdot a + \frac{m}{l} \cdot b = \frac{ma + mb}{l} = \frac{m(a+b)}{l} = \frac{m \cdot l}{l} = m$$

У вищенаведених найпростіших прикладах побудова епюр Q і M виконувалась з попереднім складанням аналітичного виразу закону зміни Q або M по довжині балки, що є функціями від положення перерізу, яке визначається його абсцисою z . Для більш складних випадків навантаження балок доцільно будувати епюри Q і M за характерними точками (перерізами), що є границями ділянок навантаження; проміжні значення Q і M слід визначити тільки в окремих випадках. Нижче (в §37) наведемо приклад побудови епюр Q і M за характерними точками.

§37. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ Д.І. ЖУРАВСЬКОГО ТА ПРАВИЛА ПОБУДОВИ І ПЕРЕВІРКИ ЕПЮР ПОПЕРЕЧНИХ СИЛ ТА ЗГИНАЛЬНИХ МОМЕНТІВ

Виведені в §35 залежності між згинальним моментом M , поперечною силою Q та інтенсивністю розподіленого навантаження q можна використати при побудові епюр Q і M та при перевірці правильності побудови епюр.

Щоб краще зрозуміти, як використовувати ці залежності, згадаємо з вищої математики, що геометричним значенням похідної функції є тангенс кута нахилу дотичної в даній точці кривої до абсцис. Тобто можна записати:

$$\frac{dQ}{dz} = -q = -tg\alpha_1; \quad (80)$$

$$\frac{dM}{dz} = Q = tg\alpha_2; \quad (80')$$

На основі цих формул інтенсивність навантаження q можна прийняти за тангенс кута нахилу дотичної до лінії, що окреслює епюру Q , а величину поперечної сили Q – за тангенс кута нахилу дотичної до лінії, що окреслює епюру M .

Звернемося до рис. 66–68 та розглянемо ті ділянки балок, що не навантажені розподіленим навантаженням, тобто де $q = 0$.

Згідно з формулою (80) тангенс кута нахилу прямих, що окреслюють епюру Q , дорівнює нулю, тобто ці прямі горизонтальні і, отже, ординати епюри Q в межах кожної ділянки між зосередженими силами однакові.

Однаковим ординатам опори Q , як це впливає із формули (80'), в межах кожної ділянки повинні відповідати похилі прямі на епюрі M з одним і тим же тангенсом кута нахилу, що ми і бачимо на побудованих епюрах.

В перерізах, де ординати епюри Q на суміжних ділянках розрізняються між собою, тобто утворюють стрибки, будуть відповідні зміни кутів нахилу, які виражаються зломом прямих або кривих ліній, що окреслюють епюру M .

Із формули (80) виходить, що згинальний момент буде мати найбільші значення в перерізі, де $Q = \frac{dM}{dz} = 0$, тобто де поперечна сила дорівнює нулю або змінює знак на протилежний (переходить через вісь абсцис)

Теорема Журавського дає можливість за відомим навантаженням та знайденими опорними реакціями, не проводячи обчислень, визначити характер епюр, тобто показати на ділянках балки лінії, що окреслюють епюри Q і M .

На основі теореми Д.І. Журавського та на основі прикладів (рис. 66–68) можна вивести правила, що дають можливість перевіряти правильність окреслення епюр Q і M .

1. На ділянці де немає розподіленого навантаження, епюра Q обмежена прямою лінією, паралельною осі абсцис, а епюра M – похилою прямою (при $Q \neq 0$) (рис. 66).

2. На ділянці, де є розподілене навантаження, епюра Q обмежена похилою прямою, а епюра M – квадратною параболою (рис. 67) випуклістю в сторону дії навантаження.

3. В точці, де прикладена зосереджена сила, епюра Q робить стрибок на величину сили, причому її нахил до осі абсцис не змінюється, а епюра M – злам, вістря якого направлене в сторону дії сили (рис. 66).

4. В точці, де прикладений зосереджений момент, епюра Q – без змін, епюра M робить стрибок на величину моменту, причому її нахил до осі абсцис не змінюється (рис. 68).

5. Якщо на ділянці згинальний момент зростає, то епюра Q на цій ділянці додатна (рис. 66, 67).

6. Якщо на ділянці епюра Q перетинає вісь абсцис, то епюра M в цьому місці має екстремальне значення (рис. 67).

Приклад 21. Побудувати епюри Q і M для простої балки (рис. 69).

Розв'язок. Знаходимо опорні реакції. Від вертикального навантаження виникають тільки вертикальні реакції V_A і V_B .

Складемо рівняння рівноваги.

$$1. \sum M_A = 0; -q_1 \cdot 2 \cdot 1 + F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 3 + q_2 \cdot 3 \cdot 4,5 - V_B \cdot 6 = 0$$

$$1. \sum M_B = 0; -q_1 \cdot 2 \cdot 7 + V_A \cdot 6 + F_1 \cdot 5 + F_2 \cdot 3 - q_2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$$

Із 1 знаходимо

$$V_B = \frac{-q_1 \cdot 2 \cdot 1 + F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 3 + q_2 \cdot 3 \cdot 4,5}{6} = \frac{-8 \cdot 2 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot 4,5}{6} = 34,8 \text{ кН}$$

Із 2 знаходимо

$$V_B = \frac{-q_1 \cdot 2 \cdot 7 + F_1 \cdot 5 + F_2 \cdot 3 + q_2 \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = \frac{-8 \cdot 2 \cdot 7 + 30 \cdot 5 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = 61,2 \text{ кН}$$

Перевірка: $\sum Y_i = 0;$

$$-q_1 \cdot 2 + V_A - F_1 - F_2 - q_2 \cdot 3 + V_B = -8 \cdot 2 + 61,2 - 30 - 20 - 10 \cdot 3 + 34,8 = 96 - 96 = 0$$

Будуємо епюри Q і M за характерними точками. Для цього послідовно робимо переріз зліва та справа від характерних точок, тобто на початку і в кінці кожної ділянки.

$$Q_C = 0; Q_A^{ліва} = -q_1 \cdot 2 = -8 \cdot 2 = -16 \text{ кН}$$

$$Q_A^{права} = -q_1 \cdot 2 + V_A = -8 \cdot 2 + 61,2 = -16 + 61,2 = 45,2 \text{ кН}$$

$$Q_D^{ліва} = -q_1 \cdot 2 + V_A = -16 + 61,2 = 45,2 \text{ кН}$$

$$Q_D^{права} = -q_1 \cdot 2 + V_A - F_1 = 45,2 - 30 = 15,2 \text{ кН}$$

$$Q_E^{права} = -q_1 \cdot 2 + V_A - F_1 = 15,2 \text{ кН}$$

$$Q_E^{ліва} = q_2 \cdot 3 - V_B = 10 \cdot 3 - 34,8 = -4,8 \text{ кН}$$

$$Q_B = -V_B = -34,8 \text{ кН}$$

За отриманими значеннями будуємо епюру Q (рис. 69)

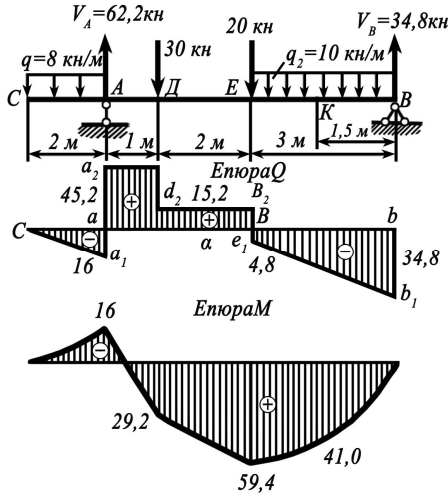


Рис. 69

Будуємо епюру M . При побудові епюри M переріз в характерній точці робимо з однієї сторони, так як значення згинальних моментів лівише та правіше точки однакові, крім точок, де прикладений зосереджений момент.

$$M_C = 0; M_A = -q_1 \cdot 2 \cdot 1 = -8 \cdot 2 \cdot 1 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_D = -q_1 \cdot 2 \cdot 2 + V_A \cdot 1 = -8 \cdot 2 \cdot 2 + 61,2 \cdot 1 = 29,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_E = -q_2 \cdot 3 \cdot 1,5 + V_B \cdot 3 = -10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 34,8 \cdot 2 = 59,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_B = 0$$

Для точнішої побудови епюри M на ділянці BE знайдемо згинальний момент посередині ділянки:

$$M_K = -q_2 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + V_B \cdot 1,5 = -10 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 34,8 \cdot 1,5 = 41,0 \text{ кН}$$

За отриманими значеннями будуємо епюру M (рис. 69)

Для швидкого контролю правильності побудови епюри згинальних моментів зручно використати зворотну теорему Журавського, суть якої в наступному.

Подавши вираз $Q = \frac{dM}{dz}$ у вигляді $dM = Q \cdot dz$ та проінтегрувавши одержаний вираз в межах від 0 до z , маємо

$$M = \int_0^z Q \cdot dz,$$

тобто згинальний момент в перерізі z дорівнює інтегралу поперечної сили, взятому в межах від початку координат до цього перерізу

З вищої математики відомо, що визначений інтеграл

$$\int_a^b f(z) dz$$

можє бути зрозумілим як площа фігури, що обмежена лінією $y=f(z)$ (в нашому випадку – лінією, що окреслює епюру Q), віссю абсцис та двома ординатами, що відповідають абсцисам $z=a$ і $z=b$.

Отже, якщо підрахувати площу епюри Q по одну сторону перерізу балки, то отримаємо величину згинального моменту в цьому перерізі. В тому випадку, коли на ділянці балки, що розглядається, прикладена зосереджена пара сил (момент), величину цього моменту потрібно алгебраїчно додати до площі ділянки епюри Q .

Якщо епюра Q має додатні та від'ємні ділянки, то для отримання величини згинального моменту в перерізі потрібно взяти алгебраїчну суму площ ділянок епюри Q по одну сторону від перерізу. Отриманий в результаті цього знак суми площ епюри Q буде знаком згинального моменту в даному перерізі балки. Якщо додавати площі ділянок епюри Q правіше від перерізу, то отриманий в результаті обчислень знак потрібно змінити на протилежний.

Застосуємо цей спосіб до розглянутого прикладу 21 (рис. 69).

Визначимо згинальний момент як площі ділянок епюри Q ;

$$M_A = \text{площі епюри } Q \text{ на ділянці } c-a; -\frac{16 \cdot 2}{2} = -16 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_D = \text{площі епюри } Q \text{ на ділянці } c-d; -\frac{16 \cdot 2}{2} + 45,2 \cdot 1 = 29,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_E = \text{площі епюри } Q \text{ на ділянці } b-e \text{ (трапеція } ee_1b_1b);$$

$$\frac{4,8 + 34,8}{2} \cdot 3 = 59,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$M_B = \text{площі всієї епюри } Q = -16 + 45,2 + 30,4 - 59,4 = 0.$$

Як бачимо, результати знаходження згинальних моментів за цим способом повністю відповідають результатам, що отримані як суми моментів сил, що діють по одну сторону від перерізу.

Викладений спосіб дуже зручний та потребує мінімум часу при знаходженні максимального згинального моменту в перерізах балки. Для цього достатньо знайти алгебраїчну суму площ ділянок епюри Q по одну сторону від перерізу, в якому поперечна сила змінює знак. В нашому прикладі M_{\max} виражається площею ділянки епюри Q правіше від точки e , тобто площею трапеції ee_1b_1b (рис. 69):

$$M_{\max} = \frac{(4,0 + 34,8) \cdot 3}{2} = 59,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Те ж саме можна отримати, взявши площу епюри Q лівіше від точки e :

$$M_{\max} = 15,2 \cdot 2 + 45,2 \cdot 1 - \frac{16 \cdot 2}{2} = 59,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Приклад 22. Побудувати епюри Q і M для балки, що зображена на рис. 70, а.

Розв'язок. Балка має одну опору – жорстку. Так як внутрішні сили знаходяться від дії зовнішніх сил, що знаходяться по одну сторону від перерізу, то реакції опор можна не знаходити. Але при цьому відкидати потрібно ту частину балки, в якій знаходиться опора.

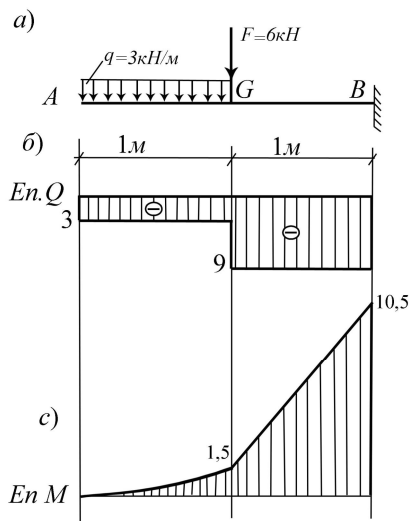


Рис. 70

Будуємо епюру Q . Робимо переріз в точці A , відкидаємо праву частину балки разом з опорою.

$$Q_A = 0.$$

Робимо переріз в точці C лівіше, знову відкидаємо праву частину балки.

$$Q_C^{\text{лів}} = -q \cdot 1 = -3 \cdot 1 = -3 \text{ кН}.$$

Робимо переріз в точці C правіше:

$$Q_C^{\text{пр}} = -q \cdot 1 - F = -3 \cdot 1 = -9 \text{ кН}.$$

Робимо переріз в точці B та знову відкидаємо праву частину разом з опорою.

$$Q_B = -q \cdot 1 - F = -3 \cdot 1 - 6 = -9 \text{ кН}.$$

За отриманими значеннями будуємо епюру Q (рис. 70, б).

Будуємо епюру M . Робимо переріз в точці A та відкидаємо праву частину балки:

$$M_A = 0.$$

Робимо переріз в точці C , знову відкидаємо праву частину балки.

$$M_C = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -3 \cdot 1 \cdot 0,5 = -1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Робимо переріз в точці B та знову відкидаємо праву частину, тобто опору.

$$M_B = -q \cdot 1 \cdot 1,5 - F \cdot 1 = -3 \cdot 1 \cdot 1,5 - 6 \cdot 1 = -4,5 - 6 = -10,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За знайденими значеннями будуємо епюру M . Так як епюра Q на ділянці AC не перетинає вісь абсцис, це значить, що епюра M на цій ділянці не має екстремального значення, тому епюра на цій ділянці окреслена параболою випуклістю вниз, ординати якої не виходять за межі значень 0 – $1,5$ кН·м (рис 70, с). В точці C епюра робить злам, так як тут прикладена зосереджена сила F .

§38. НОРМАЛЬНІ НАПРУГИ ПРИ ЗГІНІ. ЖОРСТКІСТЬ ПЕРЕРІЗУ БРУСА ПРИ ЗГІНІ

Раніше було встановлено, що при прямому згині в його перерізах виникає згинальний момент та, дуже часто, поперечна сила.

При вивченні напруженого стану балки ми спочатку розглянемо випадок чистого згину. Чистий згин, наприклад, виникає в середній частині балки, зображеної на рис. 71, а. Власною вагою балки нехтуємо. На ділянці CD поперечна сила Q відсутня, а згинальний момент постійний по довжині цієї ділянки.

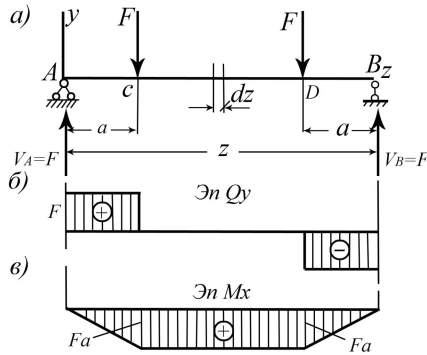


Рис. 71

Тепер вяснімо, які напруги в перерізах бруса будуть відповідати внутрішнім силовим факторам.

Уявимо, що брус (балка) складається з незліченої кількості волокон, що паралельні осі бруса. Щоб мати уявлення про деформацію згину, поставимо два досліди:

1. Балку, що вільно лежить на двох опорах і має на верхній та нижній сторонах пази, в які вставлено точно підігнані за розміром пазів бруски, піддамо деформації згину (рис. 72). В результаті цього бруски, які містяться на верхній частині бруса, виявляться затиснутими.

2. На бокову поверхню призматичного гумового (для більшої наочності) бруса прямокутного перерізу нанесемо сітку поздовжніх та поперечних прямих ліній і піддамо цей брус деформації чистого згину (рис. 73, а).

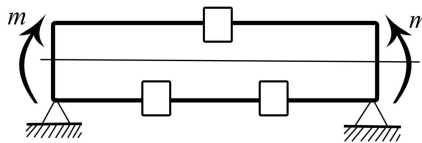


Рис. 72

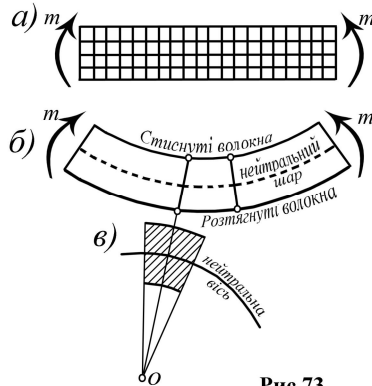


Рис 73

В результаті побачимо, що:

- поперечні прямі лінії в результаті деформації не викривляються, а залишаються прямими, але нахилиються на деякий кут одна відносно іншої. Поздовжні прямі лінії, а також вісь бруса викривляються (рис. 73, б).

- розміри перерізу бруса стануть ширшими у верхній частині та вужчими в нижній частині (рис. 73, в).

З описаних дослідів можна зробити висновок: верхні волокна бруса стискаються, а нижні розтягуються, при чому величина розтягу або стиску пропорційно зменшується у волокон, що ближче до осі бруса.

Між розтягнутими та стиснутими волокнами існує шар, де волокна не розтягуються і не стискаються, а тільки викривляються. Цей шар волокон називається **нейтральним шаром** (рис. 73, б).

Розтяг або стиск волокон може відбуватися тільки силами, що діють вздовж цих волокон, тобто нормальними до поперечного перерізу. Це значить, що в поперечному перерізі бруса виникають нормальні напруги, що змінюються по висоті перерізу.

Потрібно сказати, що в даному випадку нейтральний шар знаходиться посередині висоти перерізу тому, що балка має дві осі симетрії. Якщо форма перерізу інша, нейтральний шар може лежати вище або нижче середини перерізу. Досліди показують, що нейтральний шар в балках, що знаходяться під дією чистого прямого згину, розміщений в площині, яка проходить через центр ваги перерізу. В подальшому такий висновок ми отримаємо і теоретичним шляхом.

Лінія перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу балки називається **нейтральною віссю** (рис. 73, в). Вона, як і нейтральний шар, проходить через центр ваги перерізу і перпендикулярна до площини симетрії балки, тобто до площини дії сил.

Перейдемо до визначення нормальних напруг в поперечних перерізах балки при чистому згині.

Двома поперечними перерізами виріжемо з балки елемент довжиною dz (рис. 71) та зобразимо його в більшому масштабі (рис. 74). Після згину торці балки нахилиться один до одного, утворивши кут $d\theta$. Позначимо радіус кривизни зігнутої осі балки ρ , а довжину одного із поздовжніх волокон, що лежать в нейтральному шарові, – mn .

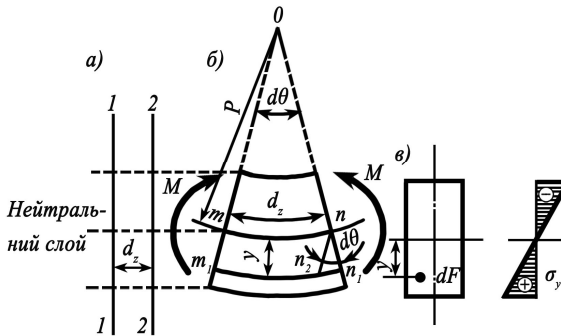


Рис. 74

Так як ці волокна не змінюють своєї довжини при згині, можна написати:

$$mn = dz = \rho \cdot d\theta$$

Будь-яке інше волокно вище або нижче нейтрального шару змінить свою довжину. Розглянемо волокно m_1n_1 , що лежить в розтягнутій зоні на відстані y від нейтрального шару і, звичайно, видовжується при згині. Для визначення величини видовження його проведемо через точку n лінію, паралельну m_1n_1 , до перетину з волокном m_1n_1 в точці n_2 . Тоді можна вважати, що $m_1n_2 \approx mn_1$, а відрізок n_1n_2 будемо приймати як абсолютне видовження волокна m_1n_2 , або mn . Відрізок n_1n_2 наближено можна прийняти за дугу круга радіуса y , тоді абсолютне видовження

$$n_1n_2 = yd\theta,$$

а відносне видовження того ж волокна $m_1 n_2$ буде

$$\varepsilon_y = \frac{n_1 n_2}{m n} = \frac{y \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} = \frac{y}{\rho},$$

або остаточно

$$\varepsilon_y = \frac{y}{\rho},$$

тобто *відносне видовження волокна прямо пропорційно відстані його від нейтрального шару.*

За законом Гука, $\sigma = E\varepsilon$, підставивши сюди вираз $\varepsilon_y = \frac{y}{\rho}$ відносного видовження довільного волокна балки, отримаємо величину напруги в ньому:

$$\sigma_y = E \cdot \varepsilon_y = \frac{E \cdot y}{\rho},$$

тобто нормальні напруги змінюються прямо пропорційно відстані від нейтральної осі балки, а в точках, що знаходяться на цій осі, вони дорівнюють нулю.

Отримавши закон розподілення нормальних напруг по висоті поперечного перерізу балки при чистому згині, перейдемо до визначення їх величини залежно від величини згинального моменту. Для цього виділимо на поперечному перерізі (рис. 75, а, б) довільну елементарну площадку dA на відстані y від нейтральної осі. Величина елементарної сили, що виникає на площадці dA , буде

$$\sigma_y \cdot dA = \frac{E \cdot y}{\rho} \cdot dA$$

Ці елементарні сили будуть нормальні до поперечного перерізу, тобто паралельні осі балки.

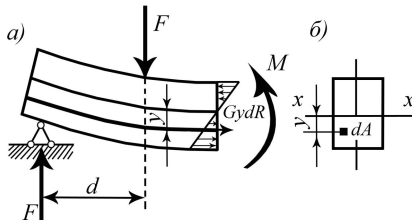


Рис. 75

Із умови рівноваги лівої відсіченої частини сума проєкцій всіх елементарних сил на вісь z буде виражена інтегралом, розповсюдженим на всю площу перерізу A , тобто

$$\sum z_i = \int_A \sigma_y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0.$$

Величина модуля пружності E не дорівнює нулю, а радіус кривизни ρ – величина кінцева, тобто $E \neq 0$ і $\rho \neq \infty$, значить

$$\int_A y \cdot dA = 0.$$

Цей інтеграл – це статичний момент площі перерізу відносно нейтральної осі. Звідси виходить, що нейтральна вісь проходить через центр ваги поперечного перерізу, тому що тільки в цьому випадку статичний момент дорівнює нулю.

Елементарна нормальна сила дорівнює $\sigma_y \cdot dA$, а її момент відносно нейтральної осі $dM_x = (\sigma_y \cdot dA) \cdot y$. Щоб визначити повний момент, необхідно додати елементарні моменти, що діють по всій площі поперечного перерізу балки, тобто

$$M_x = \int_A \sigma_y \cdot dA \cdot y,$$

або замінивши σ_y на $\frac{E \cdot y}{\rho}$, маємо

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA.$$

В отриманому виразі інтеграл є осевим моментом інерції перерізу відносно нейтральної осі, тобто

$$\int_A y^2 \cdot dA = I_x,$$

тоді

$$\frac{E \cdot I_x}{\rho} = M_x,$$

або

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}, \quad (81)$$

де $\frac{1}{\rho}$ – кривизна зігнутої осі балки; добуток $E \cdot I_x$ називається

жорсткістю перерізу балки при згині. Вона характеризує ступінь опору балки викривленню осі при згині.

Отримана рівність (81) читається так: *кривизна зігнутої осі балки прямо пропорційна згинальному моменту і обернено пропорційна жорсткості перерізу балки.*

Підставивши вираз (81) в формулу $\sigma_y = \frac{E \cdot y}{\rho}$, отримаємо

$$\sigma_y = \frac{M_x \cdot E}{E \cdot I_x} \cdot y = \frac{M_x}{I_x} \cdot y;$$

остаточно

$$\sigma_y = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad (82)$$

Отримана формула справедлива для будь-якої форми поперечного перерізу, але за умови, що переріз має вісь симетрії, в площині якої діють пари сил, що згинають балку.

Формула (82) є рівнянням прямої, тобто нормальні напруги по висоті перерізу змінюються за законом прямої лінії. Найбільші напруги будуть в найбільш віддалених від нейтральної осі волокнах:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{max} \quad (82')$$

Якщо переріз балки несиметричний відносно нейтральної осі, наприклад, тавровий переріз (рис. 76), то напруга в крайніх волокнах визначається за формулами:

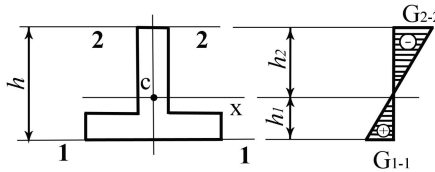


Рис. 76

$$\sigma_{1-1} = \frac{M_x}{I_x} \cdot h_1 \quad (83)$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{M_x}{I_x} \cdot h_2 \quad (83')$$

Вираз (82') можна записати так:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{\frac{I_x}{y_{max}}}$$

Величина $\frac{I_x}{y_{max}} = W_x$ називається **осьовим моментом опору**

перерізу і є геометричною характеристикою поперечного перерізу балки, що визначає її міцність при згині.

Тоді остаточно

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \quad (84)$$

Момент опору вимірюється в m^3, cm^3 .

Формула (84) виведена для випадку чистого згину, при якому поперечні перерізи балки залишаються плоскими і після деформації. У випадку поперечного згину перерізи зазнають зсуву і викривляються. Але викривлення перерізів і надавлювання волокон одне на одне настільки незначні, що не змінюють устанавленого закону розподілу деформацій волокон. Тому формула (84) може застосовуватись і для випадку плоского поперечного згину балки.

Виведемо формули моментів опору для елементарних перерізів.

Прямокутник зі сторонами b і h (рис. 51):

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \quad (85)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{max}} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6} \quad (85')$$

Квадрат зі стороною a :

$$W_x = W_y = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6} \quad (85'')$$

Круг (рис. 52)

$$W_x = W_y = \frac{I}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3 \quad (86)$$

Кругове кільце (рис. 53)

$$W_x = W_y = \frac{I}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D} \quad (87)$$

Якщо задамося відношенням діаметрів $\frac{d}{D} = \alpha$ або $d = D \cdot \alpha$, то отримаємо:

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} (1 - \alpha^4); \quad (87')$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3 (1 - \alpha^4).$$

Як видно із доведення формули (87), при визначенні момента опору кругового кільця не можна підраховувати його величину як різницю моментів опору великого та малого кругів.

Крім того, треба мати на увазі, що на відміну від моментів інерції моменти опору не можна підраховувати як суму моментів опору окремих частин перерізу.

На практиці часто приходиться через відсутність балок потрібного поперечного перерізу замінювати їх двома складеними перерізами. В цьому випадку потрібно добитися того, щоб складена балка за міцністю не поступалася суцільній балці, не спричиняючи збільшення витрати матеріалу.

§39. ДОТИЧНІ НАПРУГИ ПРИ ЗГІНІ

На відміну від чистого згину при поперечному згині в перерізах бруса виникають не тільки згинальні моменти, але й поперечні сили. Тому в поперечних перерізах поряд з нормальними напругами виникають і дотичні напруги.

За законом парності дотичних напруг, дія їх по якій-небудь площадці викликає рівні за величиною, але протилежні за знаком

дотичні напруги по площадці, перпендикулярній до першої. Тобто по площадках, паралельних нейтральному шару, повинні діяти дотичні напруги, що повністю підтверджується дослідами.

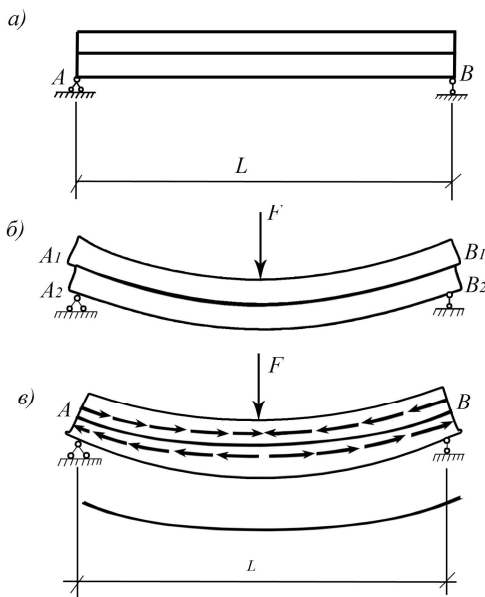


Рис. 77

Розглянемо, наприклад, балку, що складена із двох однакових брусів прямокутного перерізу (рис. 77, а), причому припустимо, що тертя між ними відсутнє. Нехай ця балка згинається під дією зосередженої сили F , що прикладена до середини прольоту. Після деформації балка прийме вигляд згідно з рис. 77, б, тобто кожен брус зігнеться незалежно один від одного. Тобто нижні волокна кожного бруса будуть розтягуватися, а верхні – стискатися. По площині їх стикання вони будуть ковзатися один по одному, а їх кінцеві перерізи, що лежали до деформації в одній площині, розійдуться.

Суцільна балка під дією сили зігнеться так, як показано на рис. 77, в. При цьому волокна AB будуть лежати в нейтральному шарові і їх довжина залишиться без змін. Значить, при згині суцільної балки по нейтральному шару діють дотичні напруги, що не допускають зсуву верхньої половини балки відносно нижньої.

Дію поздовжніх дотичних напруг при згині було вперше правильно оцінено Д.І. Журавським, який також вперше розробив і теорію дотичних напруг при згині балок прямокутного перерізу. Ним також зроблені основні припущення при вивченні цієї теорії:

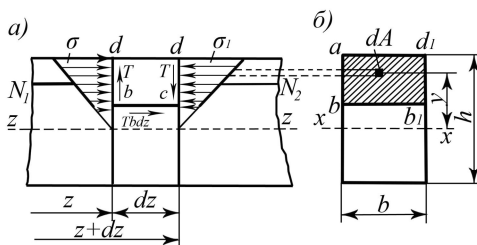
а) дотичні напруги в кожній точці поперечного перерізу направлені паралельно поперечній силі Q ;

б) дотичні напруги розподіляються рівномірно по ширині поперечного перерізу балки.

Вказані припущення прийняті в опорі матеріалів для спрощення виведення формули визначення величини дотичних напруг і закону їх розподілу по висоті перерізу балки.

Для балок прямокутного перерізу, коли їх висота більше ширини, вказані припущення дуже близькі до дійсності.

Виріжемо із балки прямокутного перерізу (рис. 78) двома нескінченно близькими суміжними поперечними перерізами елемент довжиною dz і проведемо переріз bc , паралельний нейтральному шарові.



$$\sigma dF = \frac{M}{j_x} y dF$$

Рис. 78

Нормальна напруга в перерізі z у волокні, що лежить на відстані y від нейтрального шару,

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot y;$$

а нормальна напруга в тому ж волокні в перерізі $z + dz$

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{I_x} \cdot y.$$

По перерізах ab і cd діють ще дотичні напруги τ , а по площині bc згідно із законом парності дотичних напруг будуть діяти поздовжні дотичні напруги τ' .

Нормальне зусилля в перерізі z , що діє на елементарну площадку dA , що відповідає волокну на відстані y від нейтральної осі,

$$\sigma \cdot dA = \frac{M}{I_x} \cdot y \cdot dA.$$

Повне зусилля, що діє по площі відсіченої частини abb_1a_1 , виразиться сумою елементарних сил, що прикладені до цієї площі, тобто

$$N_1 = \int_{A^{відс}} \sigma \cdot dA = \frac{M}{I_x} \int_{A^{відс}} y \cdot dA,$$

але так як інтеграл $\int_{A^{відс}} y \cdot dA$ – це статичний момент відсіченої

площі abb_1a_1 відносно нейтральної осі, то можна записати, що

$$N_1 = \frac{M}{I_x} \cdot S_x^{відс}.$$

Так само знайдемо величину повного зусилля N_2 , що діє на виділений елемент справа (по перерізу $z + dz$):

$$N_2 = \int_{A^{відс}} \sigma_1 \cdot dA = \frac{M_1}{I_x} \int_{A^{відс}} y \cdot dA = \frac{M_1}{I_x} \cdot S_x^{відс}.$$

Дію відкинутої нижньої частини замінимо силами. Так як поздовжні волокна не натискають одне на одне, то по нижній грані елемента необхідно прикласти тільки дотичні напруги τ , вважаючи їх рівномірно розподіленими по ширині балки. Величина повної зсуваючої сили по нижній грані відсіченої частини дорівнює добутку напруги на площу розрізу, тобто зсуваюча сила буде дорівнювати $\tau \cdot b \cdot dz$ і направлена в сторону більшого згинального момента.

Розглянемо умову рівноваги виділеного елемента, для чого спроектуємо всі сили, що діють на нього, на вісь z :

$$\sum Z_i = 0; \quad N_1 - N_2 + \tau \cdot b \cdot dz = 0,$$

або

$$\frac{M}{I_x} \cdot S_x^{відс} - \frac{M_1}{I_x} \cdot S_x^{відс} + \tau \cdot b \cdot dz = 0,$$

або

$$\tau \cdot b \cdot dz = (M_1 - M) \frac{S_x^{відс}}{I_x},$$

або

$$\tau \cdot b \cdot dz = dM \cdot \frac{S_x^{eio\delta c}}{I_x},$$

звідки

$$\tau = \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^{eio\delta c}}{b \cdot I_x},$$

а так як згідно із (77) $\frac{dM}{dz} = Q$, то

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{eio\delta c}}{I_x \cdot b} \quad (88)$$

де τ – дотична напруга на площадці, паралельній нейтральному шарові;

Q – поперечна сила в перерізі, що розглядається;

I_x – осьовий момент інерції відносно нейтральної осі всього поперечного перерізу балки;

$S_x^{eio\delta c}$ – статичний момент відносно нейтральної осі тієї частини поперечного перерізу, що лежить вище або нижче площадки, що розглядається;

b – ширина перерізу на рівні площадки, по якій визначаються дотичні напруги.

Так як різниця сил ($N_2 - N_1$) та $\tau \cdot b \cdot dz$ утворюють пару, що прагне обертати елемент проти годинникової стрілки, то для повної рівноваги необхідно по бокових його гранях прикласти рівні за модулем і протилежні за напрямком дотичні сили T .

Формула (88) називається *формулою Д.І. Журавського для визначення дотичних напруг при згині*.

Хоча ця формула виведена для визначення дотичних напруг по площадках, паралельних нейтральному шарові, але в силу закону парності дотичних напруг нею можна користуватися і для визначення їх у відповідних точках поперечного перерізу.

§40. ЕПЮРИ ДОТИЧНИХ НАПРУГ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОГО ТА ДВОТАВРОВОГО ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ

Із формули (88) видно, що дотичні напруги змінюються за висотою перерізу за тим ж законом, що і величина $\frac{S_x^{відс}}{b}$. В

прямокутному перерізі, у якого $b=const$, закон розподілення дотичних напруг буде таким же, що і для величини статичного моменту відсіченої частини відносно нейтральної осі.

Розглянемо точку перерізу, що знаходиться на відстані y від нейтральної осі (рис. 79).

Знайдемо статичний момент частини перерізу площею A_1 , що знаходиться вище від точки, що розглядається.

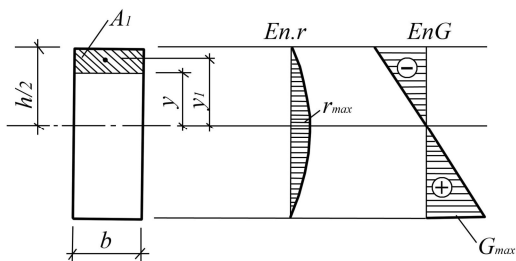


Рис. 79

$$S_x = A_1 \cdot y_1,$$

де

$$A_1 = b \left(\frac{h}{2} - y \right), \quad y_1 = \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right),$$

тоді

$$S_x = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Підставивши значення S_x в формулу (88), маємо

$$\tau = \frac{Q}{I_x \cdot b} \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Це рівняння квадратної параболи, із якого виходить, що дотичні напруги τ мають найбільше значення в точках нейтральної осі (при $y = 0$):

$$\tau_{max} = \frac{Q}{I_x \cdot b} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h^2}{4}.$$

Підставивши значення $I_x = \frac{bh^3}{12}$, отримаємо:

$$\tau_{max} = \frac{Q}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A},$$

де $A = b \cdot h$, або остаточно

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A} \quad (89)$$

В крайніх верхніх та нижніх точках перерізу при $y = \pm \frac{h}{2}$ величина дотичних напруг дорівнює нулю. Зображена на рис. 79 еюра виражає закон розподілу дотичних напруг по висоті поперечного перерізу балок і називається *епюрою дотичних напруг*. Для порівняння на рис. 79 показана і еюра нормальних напруг.

Двотаврові та таврові перерізи балок можна розглядати як складені із прямокутників, тому на них можна поширювати з деякими обмеженнями викладену вище теорію дотичних напруг.

Справа в тому, що в полицях двотаврових балок крім вертикальних дотичних напруг τ_y виникають ще горизонтально діючі дотичні напруги τ_x (рис. 80). Тобто в межах полиці двотавра дотичні напруги розподіляються за більш складним законом, ніж в перерізах прямокутних балок, але величина їх незначна.

Порівнюючи еюри дотичних і нормальних напруг для простої балки, бачимо, що в точках перерізу, де дотичні напруги мають максимальне значення (на нейтральній осі), нормальні напруги дорівнюють нулю і, навпаки, в тих точках, де дотичні напруги дорівнюють нулю, нормальні напруги мають максимальне значення (рис. 79,80).

На основі досліджень розподілення напруг в двотавровому перерізі можна зробити наступний висновок про роботу складових частин цього профілю.

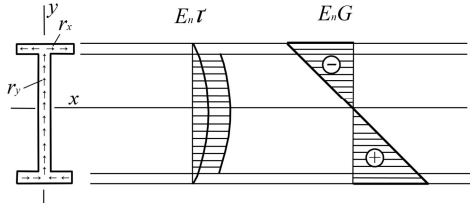


Рис. 80

Полиці балки потрапляють в зону найбільших нормальних напруг та сприймають їх всюю своєю площею, тобто беруть на себе головну частину опору перерізу згинальному моменту. Дотичні напруги в полицях дуже малі, і тому вони сприймають невелику частину дії поперечної сили.

На стінку балки приходится мала частина опору згинальному моменту, а при наближенні до нейтральної осі нормальні напруги швидко зменшуються. Величина статичного моменту для різних значень y в межах стінки змінюється мало, в той же час дотичні напруги по всій її висоті дуже великі і тому майже вся поперечна сила сприймається стінкою.

Виходячи із цього, можна сказати, що в двотавровому перерізі полиця працює головним чином на сприймання згинального моменту, а стінка – поперечної сили.

Приклад 23. Знайти найбільші нормальні та дотичні напруги для балки, зображеної на рис. 81, при $b = 18$ см, $h = 27$ см.

Розв'язок. Визначасмо величину опорних реакцій:

$$V_A = V_B = \frac{F}{2} + \frac{ql}{2} = \frac{4}{2} + \frac{3 \cdot 6}{2} = 2 + 9 = 11 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру поперечних сил Q :

$$Q_A = V_A = 11 \text{ кН}; \quad Q_C^{ліб} = V_A - q \cdot 3 = 11 - 9 = 2 \text{ кН}$$

$$Q_C^{пр} = -V_B + q \cdot 3 = -11 + 9 = -2 \text{ кН}; \quad Q_B = -V_B = -11 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів M_x .

$$M_A = 0; \quad M_C = V_A \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 11 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 = 33 - 13,5 = 19,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_B = 0.$$

Знаходимо найбільші нормальні напруги:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x},$$

де

$$M_{max} = 19,5 \text{ кН}\cdot\text{м} = 1950 \text{ кН}\cdot\text{см}$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{18 \cdot 27^2}{6} = 2187 \text{ см}^3,$$

тоді

$$\sigma_{max} = \frac{1950}{2187} = 0,892 \text{ кН} / \text{см}^2 = 8,92 \text{ МПа}.$$

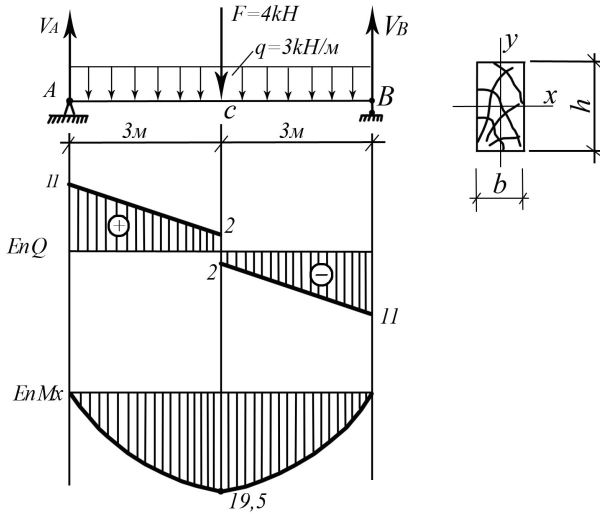


Рис. 81

Знаходимо найбільші дотичні напруги:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x^{6i0c}}{I_x b},$$

або за формулою (89)

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{max}}{A},$$

де

$$Q_{max} = 11 \text{ кН}, \quad A = b \cdot h = 12 \cdot 27 = 486 \text{ см}^2,$$

тоді

$$\tau_{max} = \frac{3 \cdot 11}{2 \cdot 486} = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ кН/см}^2 = 0,34 \text{ МПа.}$$

§41. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГІНІ

Як ми встановили раніше, в поперечних перерізах балки при поперечному згині виникають нормальна та дотична напруги. Але, як ми бачимо з прикладу 23, дотична напруга дуже мала в порівнянні з нормальною напругою. Тому розрахунки на міцність при згині виконують за найбільшими нормальними напругами, за винятком випадків, на яких зупинимось нижче.

Умова міцності при згині за допустимими напругами на основі формули (84) виразиться нерівністю

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (90)$$

Отримана умова міцності виражає вимогу, щоб найбільші робочі напруги в поперечних перерізах балок не перевищували допустимої напруги для даного матеріалу.

Причому в формулу (90) підставляють найбільші (за абсолютною величиною) значення M_x .

Ми вже знаємо із розділу II, що основна формула розрахунку на міцність за допустимими напругами дає можливість виконувати три види розрахунків:

- перевірний, що полягає у визначенні найбільшої напруги в небезпечному перерізі та порівнянні її з допустимою;
- проектний, що полягає у визначенні необхідного моменту опору перерізу,

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \quad (91)$$

Для отримання необхідних розмірів поперечного перерізу балки потрібно задатися формою перерізу балки, а потім, застосовуючи відповідну їй формулу моменту опору, визначити розміри поперечного перерізу;

- визначення найбільшого допустимого навантаження на балку.

Для вирішення цієї задачі знаходимо значення найбільшого допустимого згинального моменту за формулою (90):

$$[M_{max}] = [\sigma] \cdot W_x, \quad (92)$$

Приклад 24. За даними прикладу 23 підібрати переріз сталюї двотаврової балки при допустимій напрузі $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язок.

$$M_{\max} = 19,5 \text{ кН}\cdot\text{м} = 1950 \text{ кН}\cdot\text{см}.$$

Необхідний момент опору перерізу

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{1950}{16} = 122 \text{ см}^3,$$

де $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2$

За таблицями сортаменту підбираємо переріз двотавра № 18 з моментом опору $W_x = 143 \text{ см}^3$.

Приклад 25. Визначити допустиму величину сил F , прикладених до сталюї швелерної балки, що згинається в площині найменшої жорсткості (рис. 82), $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язок. Знаходимо реакції опор.

Так як навантаження симетрично прикладене до балки, то

$$V_A = V_B = \frac{2F}{2} = F.$$

Будуємо епюру згинальних моментів.

$$M_A = 0; \quad M_C = V_A \cdot 2 = F \cdot 2 = 2F; \quad M_D = V_B \cdot 2 = F \cdot 2 = 2F; \quad M_B = 0.$$

Знайдемо допустимий згинальний момент за формулою (92).

$$[M] = [\sigma] \cdot W_x, \quad \text{де } [\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2.$$

Осьовий момент опору W_x приймається за таблицями сортаменту для швелера № 30 відносно його власної осі y , так як нейтральна вісь балки буде співпадати з цією віссю,

$$W_x = W_y^{\text{швел}} = 43,6 \text{ см}^3,$$

$$[M] = 16 \cdot 43,6 = 697,6 \text{ кН}\cdot\text{см} = 6,98 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

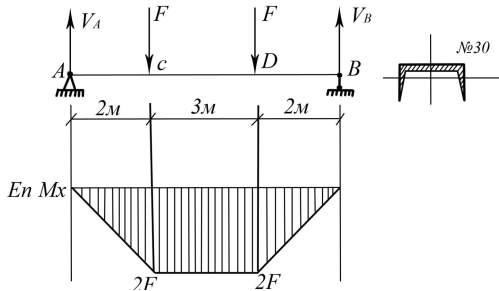


Рис. 82

Максимальний згинальний момент в балці

$$M_{max} = 2F = [M] = 6,98 \text{ кМ}\cdot\text{м},$$

тоді допустиме навантаження

$$[F] = \frac{[M]}{2} = \frac{6,98}{2} = 3,49 \text{ кН}.$$

При дуже великих навантаженнях на балку та у випадках, коли згинальний момент незначний, а поперечна сила велика (при великих зосереджених силах поблизу опор), дотичні напруги можуть бути великими. Те саме може бути в перерізах клепанних та зварних балок, де товщина стінки менша, ніж в прокатних. В цих випадках повинна бути зроблена перевірка міцності по дотичних напругах на основі формули (88).

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x^{stoc}}{I_x \cdot b} \leq [\tau]. \quad (93)$$

В дерев'яних балках в перерізах, направлених вздовж волокон, опір сколюванню значно гірший, ніж опір поперечному перерізанню волокон. В площині нейтрального шару виникають значні дотичні напруги, величина яких також повинна бути перевірена розрахунком.

Міцність балки при згині залежить від величини найбільшої нормальної напруги в поперечному перерізі,

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}.$$

Величина моменту опору перерізу знаходиться в знаменнику. Тобто чим більша його величина, тим менша напруга, а значить, і міцніша балка. Найбільш раціональними, з точки зору економії матеріалу, будуть перерізи, в яких при меншій площі будуть більші моменти опору.

Економічність та раціональність прийнятого типу перерізу можна оцінювати за **питомим осевим моментом опору**

$$W_{num} = \frac{W}{\sqrt{A^3}}.$$

Так, для прямокутного перерізу $W_{num} = \frac{h}{36b}$; для круглого – $W_{num} = 0,141$; для кільцевого – $W_{num} = 0,294$; для прокатних профілів балок, наприклад, для двотавра № 10 (ГОСТ 8239-72) $W_{num} = 0,96$; для двотавра № 30 – $W_{num} = 1,49$.

Таким чином, двотаврові балки в 5–6 разів економічніші за прямокутні балки і в 7–8 разів – за балки круглого перерізу.

§42. НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГІНІ. ГОЛОВНІ ПЛОЩАДКИ ТА ГОЛОВНІ НАПРУГИ

Перевірку балки на міцність можна здійснити за формулами (90) і (93), тобто за нормальними і дотичними напругами. Давайте вяснимо, міцність яких елементів ми перевіряємо за цими формулами.

На рис. 83 показана частина фасаду балки в тому місці, де розміщені перерізи з найбільшим згинальним моментом та найбільшою поперечною силою.

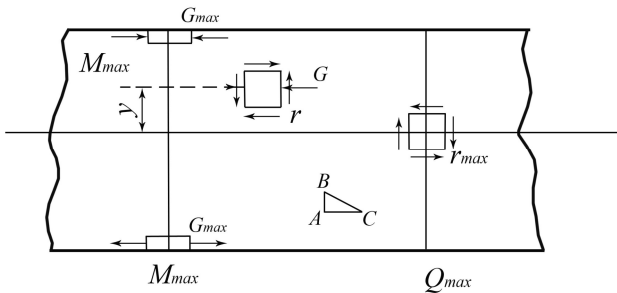


Рис. 83

В перерізі з найбільшим згинальним моментом M_{max} в елементах, найбільш віддалених від нейтрального шару, виникають найбільші нормальні напруги σ_{max} , а дотичні напруги дорівнюють нулю. Ці елементи працюють на розтяг та стиск. В елементі, що розміщений в нейтральному шарові, виникають найбільші дотичні напруги τ_{max} в перерізі, де виникає найбільша поперечна сила Q_{max} . Цей елемент знаходиться в стані чистого зсуву.

Таким чином, проводячи перевірку міцності за найбільшими нормальними та дотичними напругами, ми в дійсності перевіряємо міцність матеріала балки лише в трьох показаних на рис. 83 елементах.

Немає ніякої впевненості в тому, що ці три елемента знаходяться в найбільш небезпечному стані.

В елементі, що знаходиться в довільному перерізі на відстані y від нейтрального шару, виникають нормальні та дотичні напруги (рис. 83). Нормальні напруги σ діють по гранях, перпендикулярних до осі балки, а дотичні напруги τ – по всіх чотирьох бокових гранях.

Фасадні грані елемента будуть вільні від напруг. Таким чином, ми маємо справу з плоским напруженим станом. Знайдемо головні напруги. Вони будуть виникати в похилих перерізах, в яких відсутні дотичні напруги. Для визначення головних напруг із балки виділимо елемент у вигляді трикутної призми із основою ABC і висотою, що дорівнює ширині балки (рис. 83). Замінімо дію відкинутих частин балки внутрішніми силами.

Представимо виділений елемент в більшому масштабі (рис. 84, а). На гранях призми будуть діяти: по AB – нормальні напруги σ і дотичні τ , по грані AC – тільки дотичні напруги τ , що дорівнюють дотичним напругам по грані AB (згідно із законом парності дотичних напруг). Нормальні напруги по грані AC дорівнюють нулю, так як при згині балки поздовжні волокна не тиснуть одне на одне. По похилій грані BC діють нормальні напруги σ' і дотичні τ' . Напруги σ і τ відомі, а напруги σ' і τ' невідомі і їх потрібно знайти.

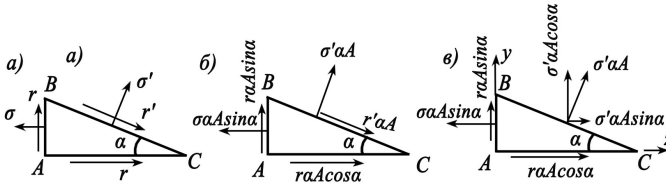


Рис. 84

Якщо позначити dA – площу грані BC , а α – кут її нахилу, то площа грані AB буде $dA \cdot \sin\alpha$, а площа грані AC – $dA \cdot \cos\alpha$. Напрямок всіх напруг, показаних на рис. 84, а, приймаємо за додатний, а кут α будемо рахувати від горизонтальної осі за годинниковою стрілкою. Сили, що замінюють дію відкинутих частин балки на грані призми, показані на рис. 84, б.

При поступовому повертанні похилої площадки напруги на ній будуть змінюватися, причому якщо σ' буде зростати, то τ' буде зменшуватися, це значить, що може настати момент, при якому τ' буде дорівнювати нулю, а σ' досягне найбільшого значення.

При такому положенні похила площадка BC буде головною площадкою, а нормальні напруги на ній σ' будуть головними напругами. При цьому для будь-якої точки балки можуть бути знайдені дві взаємно перпендикулярні площадки, які будуть

головними, і на одній із них буде діяти найбільша додатна головна напруга, на другій – найбільша від'ємна головна напруга.

Визначимо величину головної напруги. Уявимо, що кут нахилу головної площадки α вже знайдено. Тобто на грані BC будуть діяти тільки головні напруги, рівнодіюча яких дорівнює $\sigma'dA$. По грані AB рівнодіюча нормальних напруг дорівнює $\sigma \cdot dA \sin \alpha$, а рівнодіюча дотичних напруг – $\tau dA \sin \alpha$. По грані AC діють тільки дотичні напруги, рівнодіюча яких дорівнює $\tau dA \cos \alpha$ (рис. 84, в).

Складемо рівняння рівноваги призми.

$$1. \sum Z_i = 0; \quad \sigma' \cdot dA \cdot \sin \alpha - \sigma \cdot dA \cdot \sin \alpha + \tau \cdot dA \cdot \cos \alpha = 0.$$

$$2. \sum Y_i = 0; \quad \sigma' \cdot dA \cdot \cos \alpha + \tau \cdot dA \cdot \sin \alpha = 0.$$

Зробивши перетворення, отримаємо:

$$1. (\sigma' - \sigma) \sin \alpha = -\tau \cos \alpha;$$

$$2. \sigma' \cos \alpha = -\tau \sin \alpha$$

перемноживши ліві та праві частини цих рівнянь та зробивши скорочення, отримаємо:

$$(\sigma' - \sigma) \cdot \sigma' = \tau^2,$$

або

$$\sigma'^2 - \sigma \cdot \sigma' - \tau^2 = 0.$$

Розв'язуючи отримане квадратне рівняння відносно σ' , знайдемо величини головних напруг:

$$\sigma''_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad (94)$$

Розділимо рівняння рівноваги $\sum Y_i = 0$ на $\cos \alpha$:

$$\frac{\sigma' \cdot dA \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\tau \cdot dA \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$$

Скоротивши на dA , маємо:

$$\sigma' + \tau \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sigma'}{\tau}. \quad (95)$$

За формулою (95) знаходять кут нахилу головної площадки в перерізі бруса.

Найбільші дотичні напруги τ_{\max} будуть діяти під кутом 45° до головних площадок. Їх величину можна знайти за допомогою третьої теорії міцності (див. § 25). Приймаючи $\sigma_1 = \sigma'_{\max}$ і $\sigma_3 = \sigma'_{\min}$, то отримаємо

$$\tau'_{max} = \frac{\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} - \left[\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right]}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2};$$

аналогічно

$$\tau'_{min} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2},$$

або остаточно

$$\tau'_{\frac{max}{min}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (96)$$

При визначенні σ'_{max} , τ'_{min} за формулами (94)–(96) числові значення величин σ і τ потрібно підставляти у формули з урахуванням їх знаків: нормальні напруги розтягу брати зі знаком плюс, а знак дотичних напруг повинен відповідати знаку поперечної сили в даному перерізі.

Щоб знайти переріз по довжині балки, в якому діють найбільші головні напруги, потрібно співставити епюри Q і M . Той переріз, в якому одночасно діють більші, ніж в інших перерізах, поперечна сила і згинальний момент, і буде небезпечним перерізом по головним напругам.

Такими перерізами по довжині балки можуть бути, наприклад, перерізи над опорами консольних балок, в місці кріплення консолі та ін. Взагалі перерізи з M_{max} і Q_{max} не співпадають. Тому часто виникає необхідність перевіряти головні напруги в декількох перерізах, вибираючи їх таким чином, щоб значення M і Q були відносно великими.

Що стосується зміни нормальних та дотичних напруг по висоті перерізу балки, потрібно сказати наступне. В балках прямокутного перерізу не буде таких точок, в яких діяли б одночасно великі нормальні та дотичні напруги, а в балках двотаврового перерізу і взагалі в тих випадках, коли в перерізі різко змінюється ширина, такі точки будуть. Щоб знайти у вибраному перерізі точки, найбільш небезпечні по головних напругах, необхідно співставити епюри σ і τ . Точки перерізу, які відповідають більшим ординатам σ і τ , і будуть небезпечними по головних напругах.

В результаті перевірки головних напруг в перерізах балки величина їх не повинна перевищувати допустимих нормальних напруг, тобто:

$$\sigma'_{\frac{\max}{\min}} \leq [\sigma].$$

Відносно напрямку головних напруг потрібно сказати, що для балок, виготовлених із матеріалів, однаково працюючих на розтяг та стиск, це питання не має суттєвого значення, і при перевірці по головних напругах достатньо обмежитися обчисленням значень σ'_{\max} і σ'_{\min} .

Що стосується балок, виготовлених із матеріалів, по-різному працюючих на розтяг та стиск, як, наприклад, із залізобетону, то дуже важливо знати напрям розтягуючих напруг в кожній точці, щоб по цих напрямках поставити стержні арматури. На рис. 85 показані приблизні криві напрямку головних напруг в балці, що називаються *траєкторіями головних напруг*. Напрямок траєкторій залежить від виду навантаження та від умови спирання балки. Через кожну точку балки можна провести дві траєкторії головних напруг – розтягуючих та стискуючих.

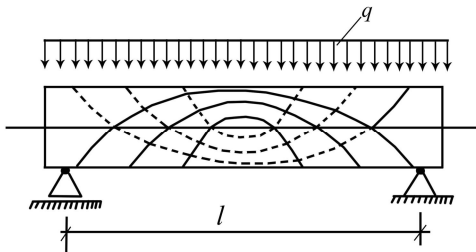


Рис. 85

Для балки, показаної на рис. 85, траєкторії стискуючих напруг проведені пунктиром, а розтягуючих – суцільними лініями.

Траєкторії головних напруг в стінці сталевій двотавровій балки вперше були побудовані Д.І. Журавським. Він вперше пояснив причину випучування стінки двотавра при втраті її стійкості як результат дії головних стискуючих напруг.

Перевірка міцності складених балок по головних напругах вперше була введена в практику проф. М. А. Белелюбським в 1870 р. при розрахунку клепанних мостових балок. Останнім часом вона

замінена перевіркою так званої *приведеної* (або еквівалентної) напруги за формулою

$$\sigma_{np} = \sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (97)$$

Ця формула отримана із формули (42), що виражає умову міцності для плоского напруженого стану за енергетичною теорією міцності, якщо в цю формулу підставити значення головних напруг σ'_{max} і σ'_{min} (або відповідно σ_1 і σ_3), що визначені за формулою (94).

§43. ЛІНІЙНІ ТА КУТОВІ ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ЗГИНІ

В результаті згину вісь балки скривлюється. Це значить, що точки, які лежать на ній, тобто перерізи балки, отримують деякі переміщення. Так як деформації малі у порівнянні з розмірами балки, то будемо вважати, що переміщення перпендикулярні початковому положенню балки. Крива лінія, якою стає початкова вісь балки, називається *зігнутою віссю балки, або пружною лінією* (рис. 86). Вертикальні переміщення перерізів будемо називати *прогинами*. Прогини в різних точках балки різні і залежать від відстані z від прийнятого початку координат, тобто $y_z = f(z)$. При $z = 0$ $y_z = 0$, а при $z = \frac{l}{2}$ він досягає свого найбільшого значення y_{max} . Найбільший прогин

будемо позначати буквою f , тоді $y_{max} = f$.

Осі координат домовимося розміщувати таким чином.

Початок координат приймемо на лівому кінці балки, вісь z направимо вправо по осі балки, а вісь y – вгору. Таке розміщення осей дасть можливість рахувати прогини балки вниз від'ємними, а прогини вгору – додатними.

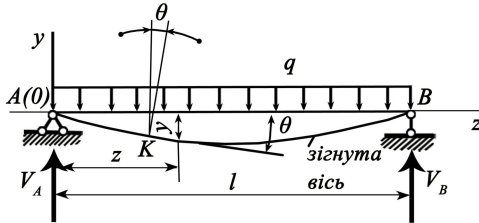


Рис. 86

Кут, що утворює дотична до довільної точки К зігнутої осі з початковим її положенням, умовимося позначати буквою θ . Цей кут виражає кутове переміщення поперечного перерізу балки при згині і називається *кутом повороту перерізу балки*. Остаточо: y – лінійне переміщення перерізу балки, θ – кутове переміщення.

В багатьох випадках прийняті перерізи балок із умови міцності мають досить великі прогини, що не відповідають нормам проектування. В цьому випадку необхідний поперечний переріз визначають із умови жорсткості. Крім розрахунку балок та інших конструкцій на жорсткість, вивчення деформацій балок необхідне ще для розв'язку статично невизначених задач при згині, коли потрібно додатково до рівнянь статички складати рівняння із умови деформації осі балки.

§44. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ МЕТОДОМ ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ

Для визначення зігнутої осі балки необхідно скласти її рівняння, тобто виразити ординати (прогини балок) в функції від положення точок по довжині балки, іншими словами, щоб знайти залежність $y = f(z)$. Щоб знайти цю залежність, використаємо рівність (81), що отримана при доведенні формули нормальних напруг при згині та виражає залежність кривизни балки із згинальним моментом та поперечною жорсткістю перерізу.

Формула кривизни з вищої математики виражає її зв'язок з похідними y' та y'' від ординати кривої:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Залежність цю можна спростити, маючи на увазі, що прогини балок дуже малі в порівнянні з довжиною балки, а кути нахилу перерізів не перевищують 1° . В знаменник правої частини цієї формули входить $(y')^2$ - тангенс кута нахилу в квадраті, що є малою величиною у порівнянні з другою величиною, що входить в двочлен знаменника, а тому її відкидають, в результаті чого формула приймає вигляд

$$\frac{1}{\rho} \approx \pm y'',$$

тобто кривизна балки наближено дорівнює другій похідній від прогину. Тепер формулу $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ можна представити так:

$$\pm y'' = \frac{M}{EI}$$

Нагадаємо з математики, що знак другої похідної залежить від напрямку осей координат, а саме: якщо вісь y направлена вгору, а випуклість осі направлена вниз, то знак другої похідної буде додатним, тоді:

$$y'' = \frac{M}{EI} \quad (98)$$

Отримане рівняння (98) називається *наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі балки*.

Існує декілька методів розв'язку цього рівняння, один з яких – метод початкових параметрів.

Академіком М.М. Криловим було розв'язане це рівняння для балки, що завантажена всіма видами навантажень. В результаті їм було отримано універсальне рівняння пружної лінії, що має наступний вигляд (у формі, запропонованій професором А. П. Коробовим):

$$y = y_0 + \theta_0 \cdot z + \frac{M_0 \cdot z^2}{2E \cdot I_x} + \frac{Q_0 \cdot z^3}{6E \cdot I_x} + \sum_{z>a} \frac{M(z-a)^2}{2E \cdot I_x} \left\| - \sum_{z>b} \frac{F(z-b)^3}{6E \cdot I_x} \right\| \left\| - \sum_{z>c_1} \frac{q(z-c_1)^4}{24E \cdot I_x} \right\| + \sum_{z>c_2} \frac{q(z-c_2)^4}{24E \cdot I_x} \left\| \right.$$

Це рівняння ми подаємо для випадку рівномірно розподіленого навантаження. Тут y_0 , θ_0 , M_0 і Q_0 – початкові параметри: y_0 – прогин на початку координат; θ_0 – кут повороту початкового перерізу; M_0 – згинальний момент в початковому перерізі; Q_0 – поперечна сила в тому ж перерізі. Відмітимо, що y_0 і θ_0 – це геометричні фактори, а M_0 та Q_0 – силові фактори.

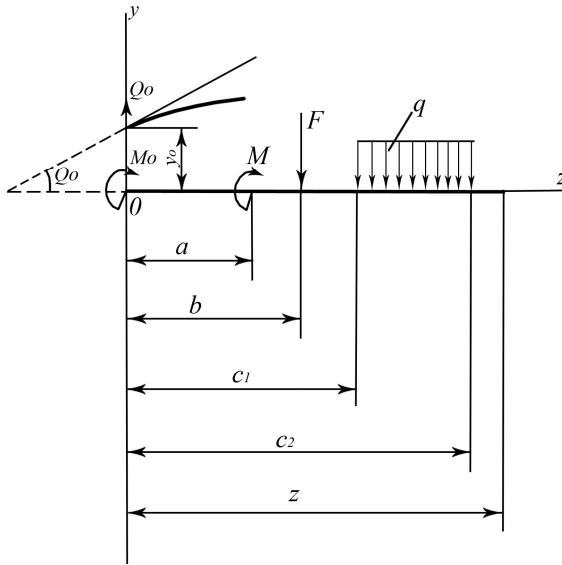


Рис. 87

Початкові параметри y_0 , θ_0 , M_0 і Q_0 можуть приймати як завгодно значення: додатні, від'ємні та дорівнювати нулю. Визначають ці чотири величини, виходячи із умови закріплення балки, а також навантаження лівого кінця, що прийнятий за початок координат. На рис. 87 всі початкові параметри – додатні: y_0 – відкладений вгору від осі z ; θ_0 – поворот перерізу, припускається, що проти годинникової стрілки; M_0 – направлений за годинниковою стрілкою; Q_0 – направлена вгору. Що стосується інших доданків у рівнянні методу початкових параметрів, то їх знак визначається залежно від того, чи створює дане навантаження додатний або від'ємний згинальний момент в перерізі з абсцисою z . Знак \parallel (переривач) показує, що відповідний доданок потрібно врахувати тільки при $z > a$. Це значить, що при визначенні прогину в якомусь перерізі з координатою z в рівняння входять лише ті навантаження, що лежать зліва від цього перерізу.

Отже, універсальне рівняння прогину містить у собі наступні доданки:

- а) чотири – для початкових параметрів;
- б) одне – для зовнішніх моментів;
- в) одне – для зосереджених сил;
- г) два – для рівномірно розподіленого навантаження.

Відмітимо, що всі доданки, крім початкових параметрів, знаходяться під знаком суми, що поширюється на всі навантаження даного виду. В такому вигляді універсальне рівняння прогинів рекомендується до практичного використання (і до запам'ятовування.). Рівняння кутів повороту може бути легко отримане із рівняння прогинів шляхом обчислення похідної по координаті z .

Приклад 26. Для балки (рис. 88, а) підібрати двотавровий переріз та побудувати епюри кутів повороту перерізів і прогинів. $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 100 \text{ МПа}$. Власну вагу балки не враховувати.

Розв'язок. Знайдемо опорні реакції балки.

1. $\sum M_A = 0$; $q \cdot 3 \cdot 1,5 - V_B \cdot 6 = 0$
2. $\sum M_B = 0$; $V_A \cdot 6 - q \cdot 3 \cdot 4,5 = 0$

Із (1) знаходимо

$$V_B = \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = 7,5 \text{ кН.}$$

Із (2) знаходимо

$$V_A = \frac{q \cdot 3 \cdot 4,5}{6} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 4,5}{6} = 22,5 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum Y_i = V_A + V_B - q \cdot 3 = 22,5 + 7,5 - 10 \cdot 3 = 0.$$

Будуємо епюру Q (рис 88, б),

$$Q_A = V_A = 22,5 \text{ кН}; \quad Q_C = -V_B = -7,5 \text{ кН}; \quad Q_B = -V_B = -7,5 \text{ кН.}$$

Будуємо епюру M_x (рис 88, в)

$$M_A = 0; \quad M_C = V_B \cdot 3 = 7,5 \cdot 3 = 22,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_B = 0.$$

Поперечна сила в перерізі на відстані z від лівої опори дорівнює нулю. Знайдемо z .

$$Q_z = V_A - q \cdot z = 0, \quad \text{звідси} \quad z = \frac{V_A}{q} = \frac{22,5}{10} = 2,25 \text{ м,}$$

тоді згинальний момент в цьому перерізі

$$M_z = V_A \cdot z - \frac{qz^2}{2} = 22,5 \cdot 2,25 - \frac{10 \cdot 2,25^2}{2} = 25,31 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

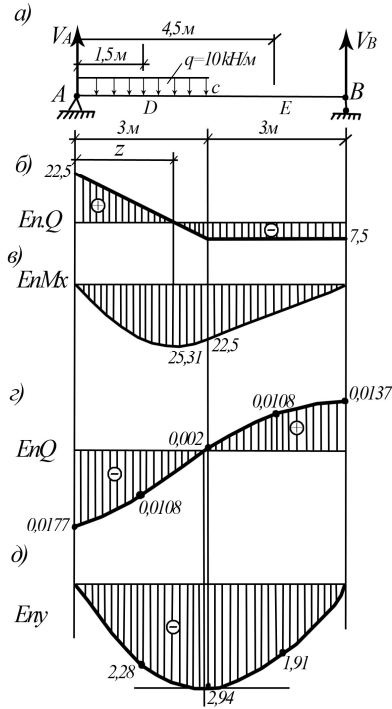


Рис. 88

Підбираємо двотавровий переріз із розрахунку на міцність за нормальними напругами за формулою (91)

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

$$M_{\max} = 25,31 \text{ кН}\cdot\text{м} = 2531 \text{ кН}\cdot\text{см}.$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН}/\text{см}^2.$$

$$W_x = \frac{2531}{16} = 158,19 \text{ см}^3. \text{ За таблицями сортаменту приймаємо}$$

двотавр № 18а з $W_x = 159 \text{ см}^3$. Перевіримо переріз за дотичними напругами за формулою (93)

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^{\text{сидс}}}{I_x \cdot b} \leq [\tau]$$

де $Q_{\max} = 22,5 \text{ кН}$, $S_x^{\text{відс}} = 89,8 \text{ см}^2$, $I_x = 1430 \text{ см}^4$, $b = 0,51 \text{ см}$,
 $[\tau] = 100 \text{ МПа} = 10 \text{ кН/см}^2$.

$$\tau_{\max} = \frac{22,5 \cdot 89,8}{1430 \cdot 0,51} = 2,77 \text{ кН/см}^2 < [\tau] = 10 \text{ кН/см}^2$$

Умова міцності виконується.

Для даної балки рівняння пружної лінії має вигляд

$$y = y_0 + \theta_0 \cdot z + \frac{M_0 \cdot z^2}{2E \cdot I_x} + \frac{Q_0 \cdot z^3}{6E \cdot I_x} - \frac{q \cdot z^4}{24E \cdot I_x} + \frac{q \cdot (z-3)^4}{24E \cdot I_x} \quad \left\| \begin{array}{l} \\ z > 3 \end{array} \right.$$

Початкові параметри:

$$y_0 = 0; \quad \theta_0 \neq 0;$$

$$M_0 = 0; \quad Q_0 \neq 0;$$

З врахуванням значень рівняння запишеться так:

$$y = \theta_0 \cdot z + \frac{22,5 \cdot z^3}{6E \cdot I_x} - \frac{10 \cdot z^4}{24E \cdot I_x} + \frac{10 \cdot (z-3)^4}{24E \cdot I_x} \quad \left\| \begin{array}{l} \\ z > 3 \end{array} \right.$$

або

$$y = \theta_0 \cdot z + \frac{3,75 \cdot z^3}{E \cdot I_x} - \frac{0,417 \cdot z^4}{E \cdot I_x} + \frac{0,417 \cdot (z-3)^4}{E \cdot I_x} \quad \left\| \begin{array}{l} \\ z > 3 \end{array} \right.$$

Знайдемо θ_0 із умови, що прогин правого кінця балки дорівнює нулю, тобто при $z = 6 \text{ м}$.

$$y = \theta_0 \cdot 6 + \frac{3,75 \cdot 6^3}{E \cdot I_x} - \frac{0,417 \cdot 6^4}{E \cdot I_x} + \frac{0,417 \cdot (6-3)^4}{E \cdot I_x} = 0$$

Звідси

$$\theta_0 = -\frac{3,75 \cdot 6^3}{6E \cdot I_x} + \frac{0,417 \cdot 6^4}{6E \cdot I_x} - \frac{0,417 \cdot 3^4}{6E \cdot I_x} = \frac{-135 + 90,08 - 5,63}{E \cdot I_x} = -\frac{50,55}{E \cdot I_x}$$

Рівняння зігнутої осі балки прийме вигляд:

$$y = -\frac{50,55 \cdot z}{E \cdot I_x} + \frac{3,75 \cdot z^3}{E \cdot I_x} - \frac{0,417 \cdot z^4}{E \cdot I_x} + \frac{0,417 \cdot (z-3)^4}{E \cdot I_x} \quad \left\| \begin{array}{l} \\ z > 3 \end{array} \right.$$

Звідси легко отримати рівняння кутів повороту перерізів

$$\theta = y' = -\frac{50,55}{E \cdot I_x} + \frac{3 \cdot 3,75 \cdot z^2}{E \cdot I_x} - \frac{4 \cdot 0,417 \cdot z^3}{E \cdot I_x} + \frac{4 \cdot 0,417 \cdot (z-3)^3}{E \cdot I_x} \quad \left\| \begin{array}{l} \\ z > 3 \end{array} \right.$$

Надаючи абсциси z різні значення, наприклад для точок A, D, C, E, B (рис 88, а), побудуємо епюру θ при $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $I_x = 1430 \text{ см}^4$.

При $z = 0$

$$\theta_A = -\frac{50,55}{E \cdot I_x} = -\frac{50,55 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 \cdot 1430} = -0,0177 \text{ рад}$$

При $z = 1,5 \text{ м}$

$$\begin{aligned} \theta_D &= -\frac{50,55}{E \cdot I_x} + \frac{3 \cdot 3,75 \cdot 1,5^2}{E \cdot I_x} - \frac{4 \cdot 0,417 \cdot 1,5^3}{E \cdot I_x} = \frac{-50,55 + 25,31 - 5,63}{E \cdot I_x} = \frac{-30,87}{E \cdot I_x} \\ &= \frac{-30,87 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 \cdot 1430} = -0,0108 \text{ рад} \end{aligned}$$

При $z = 3 \text{ м}$

$$\begin{aligned} \theta_C &= -\frac{50,55}{E \cdot I_x} + \frac{3 \cdot 3,75 \cdot 3^2}{E \cdot I_x} - \frac{4 \cdot 0,417 \cdot 3^3}{E \cdot I_x} = \frac{-50,55 + 101,25 - 45,04}{E \cdot I_x} \\ &= \frac{5,66}{E \cdot I_x} = \frac{5,66 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 \cdot 1430} = 0,00198 \text{ рад} \end{aligned}$$

При $z = 4,5 \text{ м}$

$$\begin{aligned} \theta_E &= -\frac{50,55}{E \cdot I_x} + \frac{3 \cdot 3,75 \cdot 4,5^2}{E \cdot I_x} - \frac{4 \cdot 0,417 \cdot 4,5^3}{E \cdot I_x} + \frac{4 \cdot 0,417 \cdot 1,5^3}{E \cdot I_x} = \\ &= \frac{-50,55 + 227,81 - 152 + 5,62}{E \cdot I_x} = \frac{30,89}{E \cdot I_x} = \frac{30,89 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 \cdot 1430} = 0,0108 \text{ рад} \end{aligned}$$

При $z = 6 \text{ м}$

$$\begin{aligned} \theta_B &= -\frac{50,55}{E \cdot I_x} + \frac{3 \cdot 3,75 \cdot 6^2}{E \cdot I_x} - \frac{4 \cdot 0,417 \cdot 6^3}{E \cdot I_x} + \frac{4 \cdot 0,417 \cdot 3^3}{E \cdot I_x} = \frac{-50,55 + 405 - 360,34 + 45,04}{E \cdot I_x} = \frac{39,15}{E \cdot I_x} \\ &= \frac{39,15 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 \cdot 1430} = 0,0137 \text{ рад}. \end{aligned}$$

Відкладаємо додатні значення кутів повороту від осі z вгору. Будуємо епюру кутів повороту (рис. 88, г).

Будуємо епюру прогинів, надаючи абсциси z значення характерних точок

$$z = 0 \quad y_A = 0$$

$$z = 1,5\text{м}$$

$$y_D = -\frac{50,55 \cdot 1,5}{E \cdot I_x} + \frac{3,75 \cdot 1,5^3}{E \cdot I_x} - \frac{0,417 \cdot 1,5^4}{E \cdot I_x} = \frac{-75,83 + 12,66 - 2,11}{E \cdot I_x} = -\frac{65,28}{E \cdot I_x} = -\frac{65,28 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 1430} = -2,28\text{см}$$

$$z = 3\text{ м}$$

$$y_C = -\frac{50,55 \cdot 3}{E \cdot I_x} + \frac{3,75 \cdot 3^3}{E \cdot I_x} - \frac{0,417 \cdot 3^4}{E \cdot I_x} = \frac{-151,65 + 101,25 - 33,78}{E \cdot I_x} = -\frac{84,18}{E \cdot I_x} = -\frac{84,18 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 1430} = -2,94\text{см}$$

$$z = 4,5\text{м}$$

$$y_E = -\frac{50,55 \cdot 4,5}{E \cdot I_x} + \frac{3,75 \cdot 4,5^3}{E \cdot I_x} - \frac{0,417 \cdot 4,5^4}{E \cdot I_x} + \frac{0,417 \cdot 1,5^4}{E \cdot I_x} = \frac{-227,48 + 341,74 - 171 + 2,11}{E \cdot I_x} = -\frac{54,62}{E \cdot I_x} = -\frac{54,62 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 1430} = -1,91\text{см}$$

$$z = 6\text{ м} \quad y_B = 0.$$

Відкладаючи відповідні значення в характерних точках, будуємо епюру прогинів (рис. 88, д).

Треба відмітити, що в розглянутому прикладі прогин посередині прольоту дуже мало відрізняється від максимального (приблизно на 1%). Цей результат є в значній мірі загальним – максимальний прогин двохопорної балки без консолей при навантаженнях, що викликають однозначні прогини, мало відрізняється від прогину посередині балки. Тому у вказаних випадках для спрощення розрахунків на жорсткість прогин посередині прольоту приймають за максимальний.

Більш загальний метод визначення переміщень, який можна застосувати для будь-якої лінійно деформованої системи при довільному навантаженні, розроблений німецьким вченим О. Мором. Для з'ясування суті цього методу необхідно познайомитися з поняттями потенційної енергії деформації при згині і пов'язаних з нею теорем про роботу зовнішніх та внутрішніх сил, виклад яких наводимо в наступних параграфах.

§45. ПОТЕНЦІЙНА ЕНЕРГІЯ ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ ЗГІНІ

Пружні системи, до яких відносяться споруди та їх складові частини, деформуються під дією зовнішніх сил, а при розвантаженні знову повертаються в початковий стан. Зовнішні сили при цьому здійснюють роботу, що перетворюється в потенційну енергію системи. Величина роботи зовнішніх сил вважається рівною сумарній роботі внутрішніх сил, що деформують окремі елементарні об'єми тіла.

Робота внутрішніх сил чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил, але протилежна за знаком, тому в подальшому під рівністю робіт будемо розуміти рівність їх за абсолютним значенням. Таким чином, задача визначення енергії деформації зводиться до обчислення роботи зовнішніх сил.

Для отримання загального виразу потенційної енергії при згині розглянемо балку постійного перерізу, що знаходиться в стані чистого згину; в її перерізах, як відомо, виникає тільки згинальний момент.

Виріжемо уявно з балки нескінченно малий елемент довжиною dz , кінцеві перерізи якого в результаті згину повернулись на кут $d\varphi$ (рис. 89).

Робота зовнішнього моменту, як відомо із теоретичної механіки, дорівнює добутку моменту на відповідний кут повороту. В даному випадку пара сил прикладена статично, тобто роботу зовнішнього моменту визначаємо як половину добутку величини моменту на кут повороту перерізу:

$$dW = \frac{1}{2} M_x \cdot d\varphi.$$

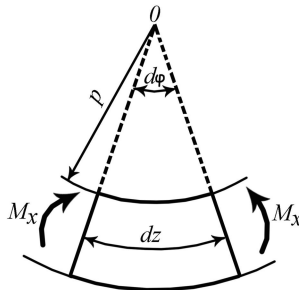


Рис. 89

Але з рис. 89 видно, що $d\varphi = \frac{dz}{\rho}$, а так як згідно з формулою

$$(81) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}, \quad \text{то} \quad d\varphi = \frac{M_x \cdot dz}{E \cdot I_x}, \quad \text{тобто,}$$
$$dW = \frac{M_x^2}{2E \cdot I_x} \cdot dz \quad (99)$$

Так як при чистому згині згинальний момент – величина постійна, то повна робота внутрішніх сил чисельно дорівнює потенційній енергії на ділянці довжини l :

$$W = \frac{M_x^2 \cdot l}{2E \cdot I_x} \quad (100)$$

При поперечному згині, як відомо, в перерізах балки виникають ще поперечні сили, але ними можна знехтувати, так як вони майже не впливають на роботу, викликану згинальним моментом.

§46. ТЕОРЕМА ПРО ВЗАЄМНІСТЬ РОБІТ

Використовуючи поняття про роботу, що затрачена на деформацію, можна отримати досить зручний загальний метод визначення переміщень балок та стержневих систем при будь-яких навантаженнях. Цей метод базується на розглянутих нижче положеннях та теоремах.

Завантажимо балку (рис. 90) послідовно двома силами F_1 та F_2 , причому спочатку прикладемо до неї силу F_1 , а потім (вже до зігнутої) – силу F_2 . Повну величину роботи W_{11} , викликану цими силами, складуть наступні три роботи:

1. Робота W_{11} , що викликана силою F_1 , на власному переміщенні Δ_{11} , що спричиняється нею, дорівнює

$$W_{11} = \frac{F_1 \cdot \Delta_{11}}{2}$$

Індекси в позначенні роботи W_{11} вказують: перший – на силу, що виконує роботу, а другий – на силу, що спричиняє переміщення, на якому була виконана робота. Індекси переміщення Δ_{11} вказують: перший – місце та напрям переміщення, другий – силу, що викликала переміщення.

2. Робота W_{22} , що викликана силою F_2 на власному переміщенні Δ_{22} , що спричиняється нею,

$$W_{22} = \frac{F_2 \cdot \Delta_{22}}{2}$$

3. Робота W_{12} , що викликана силою F_1 на переміщенні Δ_{12} , що спричиняється силою F_2 ,

$$W_{12} = F_1 \cdot \Delta_{12}$$

Сила F_1 при виконанні роботи W_{12} має повне своє значення, тому в її виразі множник $1/2$ випадає. Роботу W_{12} будемо називати “*роботою сили на чужому переміщенні*”, або “*віртуальною роботою*”.

Таким чином, повна робота зовнішніх сил

$$W_1 = W_{11} + W_{22} + W_{12}.$$

Якщо змінити порядок прикладання зовнішніх сил, тобто спочатку прикласти до балки силу F_2 , а потім силу F_1 , то повна робота, виконана ними,

$$W_2 = W_{22} + W_{11} + W_{21}$$

Але так як величина роботи не залежить від порядку прикладання сил, праві частини виразів повних робіт W_1 та W_2 можна прирівняти:

$$W_{12} = W_{21} \quad (101)$$

Формулу (101) можна прочитати так: *робота першої сили на переміщенні, що викликане другою силою, дорівнює роботі другої сили на переміщенні, що викликане першою силою*. Вона виражає теорему Бетті про взаємність робіт зовнішніх сил, названу іменем італійського вченого, що вперше опублікував цю теорему. Ця теорема справедлива і для тих випадків, коли на балку послідовно прикладені не дві сили, а дві системи сил.

Тепер розглянемо випадок, при якому сили, що діють на балку, дорівнюють одиниці, тобто $F_1 = F_2 = 1$ (абстрактне число). Переміщення, що викликані одиничними силами, позначимо δ_{11} , δ_{12} і т. д. на відміну від позначень Δ_{11} , Δ_{12} і т. д., прийнятих для переміщення від сил будь-якої величини.

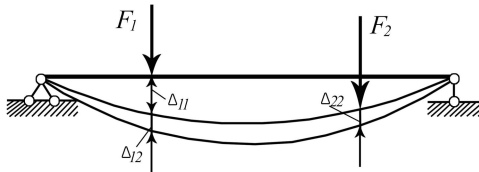


Рис. 90

Робота сили $F_1 = 1$ на переміщенні, що викликане силою $F_2 = 1$,

$$W_{12} = 1 \cdot \delta_{12}.$$

Робота сили $F_2 = 1$ на переміщенні, що викликане силою $F_1 = 1$,

$$W_{21} = 1 \cdot \delta_{21}.$$

Застосувавши теорему Бетті, маємо:

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

Ця рівність називається **теоремою про взаємність переміщень**, або теоремою Максвелла, названу іменем англійського вченого Д. Максвелла. Її можна прочитати так: *переміщення в точці 1 від одиничної сили, прикладеної в точці 2, дорівнює переміщенню в точці 2 від одиничної сили, що прикладена в точці 1.*

§47. ФОРМУЛА МОРА ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ ЗГІНІ. ПРАВИЛО ВЕРЕЩАГІНА. ФОРМУЛА СІМПСОНА

Нехай потрібно визначити вертикальне переміщення точки A балки (рис. 91, а). Позначимо дійсний стан балки F , а фіктивний стан її – i . Фіктивний стан, це коли ми замість заданого навантаження прикладемо одиничну силу в тій точці, де потрібно знайти переміщення, та по його напрямку, тобто одиничну силу прикладаємо в точці A (рис. 91, б).

Робота зовнішніх сил дорівнює добутку одиничної сили на шукане переміщення y_A :

$$W_{iF} = i \cdot y_A$$

Робота внутрішніх сил

$$\int U_{Fi} = U_{iF} = \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{E \cdot I_x} \cdot dz$$

Але так як деформації тіла пружні, то робота зовнішніх сил чисельно дорівнює роботі внутрішніх сил, тобто $W_{iF} = U_{iF}$. Тобто,

$$y_A = \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{E \cdot I_x} \cdot dz \quad (102)$$

Формула (102) називається **формулою (інтегралом) Мора** і дозволяє визначити переміщення будь-якої лінійно деформованої системи (або балки) від будь-якого навантаження. Підінтегральний вираз в цій формулі буде додатним, якщо обидва згинальних моменти входять у формулу з однаковими знаками, тобто коли їх епюри знаходяться по одну сторону від осі балки.

Для визначення переміщення за формулою Мора необхідно виконати наступні дії:

1) записати вираз згинального моменту M_F від заданого навантаження в перерізі A ;

2) розглянути фіктивний стан балки, тобто зняти задане навантаження та прикласти до неї одиничну силу в точці, де знаходимо переміщення, та по його напрямку;

3) складаємо вираз згинального моменту \bar{M}_i для фіктивного стану в перерізі A ;

4) обчислюємо інтеграл (102) із добутку виразів цих моментів, поділених на жорсткість перерізу балки.

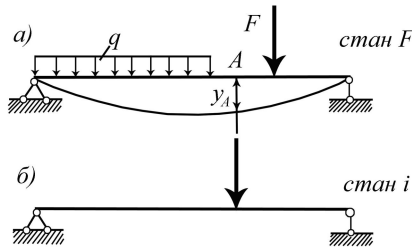


Рис. 91

У випадку знаходження кутового переміщення (кута повороту) якогось перерізу замість одиничної сили прикладаємо одиничний згинальний момент.

Що стосується знаку переміщення, треба пам'ятати, що він залежить від напрямку одиничної сили; якщо результат обчислень буде додатним, переміщення теж додатне, тобто воно відбувається за напрямком одиничної сили, та навпаки, якщо результат від'ємний. Тому немає значення, в яку сторону направлена одинична сила.

Обчислення переміщень за формулою Мора значно спрощується, якщо використати для цього формулу Сімпсона або правило Верещагіна.

Основна перевага цих формул полягає в тому, що за їх допомогою можна обійтись без інтегрування добутків значень моментів в перерізі. Ці трудомісткі операції замінюються найпростішими геометричними обчисленнями, що полягають в "перемноженні

епору” згинальних моментів від заданого навантаження та одиничної епюри.

Розглянемо спочатку правило Верещагіна. Нехай на ділянці AB балки постійної жорсткості (рис. 92) епюра \bar{M}_i прямолинійна і виражена рівнянням

$$\bar{M}_i = kz + b;$$

друга епюра з довільним окресленням $M_F(z)$.

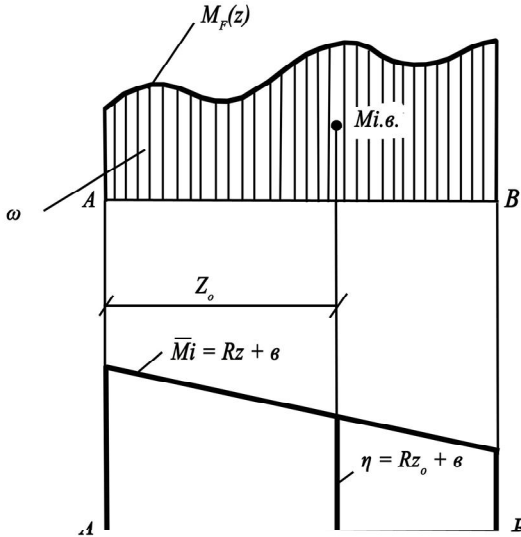


Рис. 92

Підставимо вираз \bar{M}_i в інтеграл (102), отримаємо :

$$\int_A^B \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{E \cdot I_x} dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \int_A^B M_F (kz + b) \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \left(k \int_A^B M_F \cdot z \cdot dz + b \int_A^B M_F \cdot dz \right)$$

Очевидно, що перший інтеграл – це статичний момент площі епюри M_F (ω) відносно осі ординат, що дорівнює $\omega \cdot z_0$, а другий інтеграл – площа епюри M_F в межах від A до B (ω), тоді

$$\int_A^B \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{E \cdot I_x} dz = \frac{1}{E \cdot I_x} (kz_0 + b\omega) = \frac{1}{E \cdot I_x} \omega(kz_0 + b)$$

Але множник $kz_0 + b = \eta$ – ордината прямолінійної епюри \bar{M}_i , що знаходиться проти центру ваги площі ω . Тому остаточно маємо

$$y_{iF} = \int_A^B \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{E \cdot I_x} dz = \frac{\omega \cdot \eta}{E \cdot I_x}, \quad (103)$$

тобто *інтеграл Мора дорівнює добутку площі епюри M_F (від заданого навантаження) на ординату прямолінійної епюри M_b , що знаходиться під центром ваги епюри M_F , діленому на жорсткість перерізу балки EI_x .*

Потрібно пам'ятати, що обидві епюри на ділянках повинні бути безперервними функціями, а ордината η береться тільки з прямолінійної епюри.

Для випадку складених епюр згинальних моментів M_F від заданого навантаження, вона розбивається на ділянки, які перемножаються окремо.

Формула Сімпсона для обчислення інтегралу Мора має вигляд

$$y_{iF} = \frac{l}{6E \cdot I_x} (aa' + 4bb' + cc') \quad (104)$$

де l – довжина ділянки епюр (рис. 93);

a, c – ординати епюри M_F на початку та на кінці ділянки;

b – ордината епюри M_F посередині ділянки;

a', b', c' – відповідно те ж саме для ділянки епюри \bar{M}_i .

Знак добутків aa', bb', cc' визначається за тим же правилом, що і у формулі Мора: якщо обидві епюри знаходяться по одну сторону від осі (рис. 93), то знак добутку додатний.

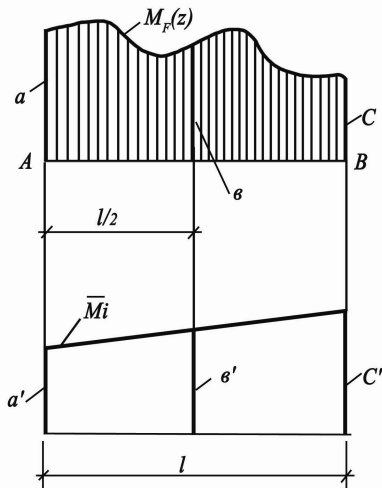


Рис. 93

Формула Сімпсона використовується у випадку складних епюр на ділянках балки від заданого навантаження.

Приклад 27. Для двотаврової балки, зображеної на рис.94, знайти прогин кінця консолі.

Дв. № 24, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа

Розв'язок. Знаходимо реакції опор за умовою рівноваги:

$$1. \sum M_A = 0; \quad q \cdot 3 \cdot 1,5 + F_1 \cdot 4 - V_D \cdot 5 + F_2 \cdot 7 = 0$$

$$2. \sum M_D = 0; \quad V_A \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 3,5 - F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 2 = 0$$

Із (1) знаходимо:

$$V_D = \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5 + F_1 \cdot 4 + F_2 \cdot 7}{5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 30 \cdot 4 + 20 \cdot 7}{5} = 61 \text{ кН}$$

Із (2) знаходимо:

$$V_A = \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5 + F_1 \cdot 1 - F_2 \cdot 2}{5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 3,5 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 2}{5} = 19 \text{ кН}$$

Перевірка: $\sum Y_i = 0; \quad V_A - q \cdot 3 - F_1 + V_D - F_2 = 19 - 10 \cdot 3 - 30 + 61 - 20 = 80 - 80 = 0$

Будемо епюру поперечних сил Q за характерними точками (рис. 94, б)

$Q_A = V_A = 19 \text{ кН}$, $Q_B = V_A - q \cdot 3 = 19 - 10 \cdot 3 = -11 \text{ кН}$,
 $Q_C^{ниж} = V_A - q \cdot 3 = -11 \text{ кН}$, $Q_C^{верх} = -V_D + F_2 = -61 + 20 = -41 \text{ кН}$,
 $Q_D^{ниж} = -V_D + F_2 = -61 + 20 = -41 \text{ кН}$, $Q_D^{верх} = Q_E = F_2 = 20 \text{ кН}$.
 Будемо епюру згинальних моментів M_x (рис. 94, в)

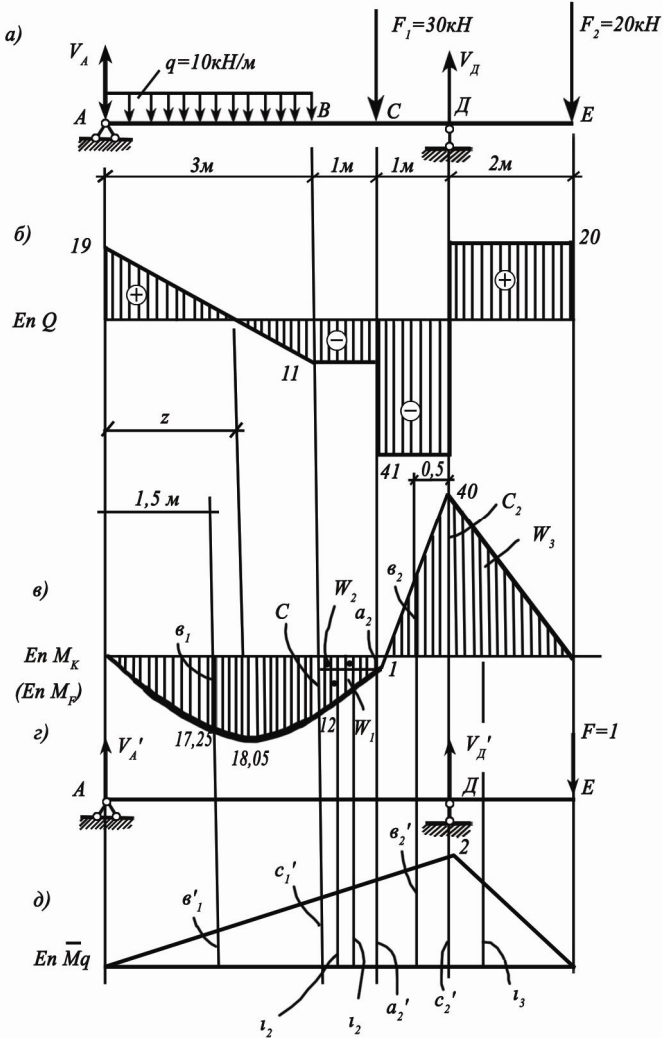


Рис. 94

$$M_A = 0, \quad M_B = V_A \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 19 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5 = 57 - 45 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_C = V_D \cdot 1 - F_2 \cdot 3 = 61 \cdot 1 - 20 \cdot 3 = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_D = -F_2 \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_E = 0.$$

Знайдемо екстремальне значення згинального моменту на ділянці AB балки. В точці, де епюра Q перетинає вісь епюри, поперечна сила дорівнює нулю.

$$Q_z = V_A - q \cdot z = 0, \quad \text{звідси} \quad z = \frac{V_A}{q} = \frac{19}{10} = 1,9 \text{ м, тоді}$$

$$M_z = V_A \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = 19 \cdot 1,9 - 10 \cdot \frac{1,9^2}{2} = 36,1 - 18,05 = 18,05 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Для знаходження прогину в точці E розглядаємо фіктивний стан балки. Для цього знімаємо задане навантаження та прикладаємо в точці E одиничну силу $F = 1$ (рис. 94, г). Будуємо від цієї сили епюру згинальних моментів \bar{M}_1 (рис. 94, д).

$$\bar{M}_A = 0, \quad \bar{M}_D = -F \cdot 2 = -2 \text{ м}, \quad \bar{M}_E = 0$$

Як бачимо, в даному випадку реакції опор від фіктивного навантаження можемо не визначати.

Для визначення переміщення в точці E використаємо правило Верещагіна та формулу Сімпсона: на ділянках AB , CD – формулу Сімпсона, на ділянках BC , DE – правило Верещагіна. Ділянку BC у вигляді трапеції розіб'ємо на дві площі – трикутник ω_1 та прямокутник ω_2 .

Значення a_i , b_i , c_i , η_i знаходимо геометрично із подібності трикутників окремо, а також площі ω_i . Значення цих величин підставляємо у формули знаходження переміщень.

$$y_E = \frac{l_1}{6E \cdot I_x} (a_1 a'_1 + 4b_1 b'_1 + c_1 c'_1) + \frac{\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2}{E \cdot I_x} +$$

$$\frac{l_2}{6E \cdot I_x} (a_2 a'_2 + 4b_2 b'_2 + c_2 c'_2) + \frac{\omega_3 \eta_3}{E \cdot I_x} =$$

$$= \frac{3}{6E \cdot I_x} (0 \cdot 0 - 4 \cdot 17,25 \cdot 0,6 - 12 \cdot 1,2) + \frac{-5,5 \cdot 1,33 - 1 \cdot 1,4}{E \cdot I_x} +$$

$$+ \frac{1}{6E \cdot I_x} (-1 \cdot 1,6 + 4 \cdot 19,5 \cdot 1,8 + 40 \cdot 2) + \frac{40 \cdot 1,33}{E \cdot I_x} =$$

$$= \frac{-27,9 - 8,72 + 36,47 + 53,2}{E \cdot I_x} = \frac{53,05}{E \cdot I_x}$$

Отримали знак плюс, це значить, що переміщення точки E балки відбувається за напрямком одиничної сили F_1 , тобто зверху вниз.

За таблицями сортаменту приймаємо $I_x = 3460 \text{ см}^4$.

Чисельник переміщення має одиницю вимірювання $\text{кН}\cdot\text{м}^3$, перевівши метри в сантиметри, маємо:

$$y_E = \frac{53,05 \text{ кН}\cdot\text{м}^3}{E \cdot I_x} = \frac{53,05 \cdot 10^6}{E \cdot I_x} \text{ кН}\cdot\text{см}^3 = \frac{53,05 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 3460} = 0,766 \text{ см},$$

$$\text{де } E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2.$$

§48. РОЗРАХУНОК БАЛОК НА ЖОРСТКІСТЬ

Балки, в яких поперечний переріз підбирався за умовою міцності, можуть отримувати значні деформації, тобто зігнута вісь має значну кривизну і її прогини виходять недопустимо великими.

В багатьох випадках такі прогини балок можуть порушити нормальну експлуатацію будівлі або споруди. Наприклад, внаслідок недопустимо великого прогину балок міжетажного перекриття останні стають хиткими. В результаті цього може розтріскуватися і навіть облетіти штукатурка стелі.

В промислових будівлях значні прогини елементів конструкцій можуть викликати аварію. Наприклад, через великі прогини підкранових балок може відбутися недопустиме уширення кранових шляхів і, як наслідок цього, схід з рельсів мостового крану.

Звідси зрозуміло, яке значення надається дотриманню допустимих значень прогинів для деяких елементів конструкцій, що згинаються.

Тому балки перекриття та інші конструкції цивільних та промислових будівель підбирають за умовою жорсткості, для чого звичайно задається найбільший допустимий прогин. Технічними умовами та нормами проектування для різних класів будівель та споруд встановлені значення допустимих прогинів від $\frac{1}{150}$ і до $\frac{1}{1000}$ прольоту балки, а в деяких випадках і менші.

Таким чином, умова жорсткості може бути виражена формулою $f \leq [f]$, тобто найбільший прогин балки не повинен перевищувати допустимого.

На практиці для спрощення та прискорення розрахунків часто приходиться користуватись готовими формулами із довідників для визначення прогинів та кутів повороту як при підборі поперечних перерізів, так і при перевірці жорсткості перерізів працюючих балок. Готові формули застосовують також при розв'язуванні статично невизначених задач при згині.

Готові формули для деяких видів навантаження наведені в додатках. В тих випадках, коли на балку діє декілька видів навантажень, необхідно використати принцип незалежності дії сил, у згідно з яким визначають переміщення від кожного виду навантажень, а потім додають.

При цьому припускається, що визначений розрахунком найбільший прогин виникає в перерізі, досить близькому до середини балки, про що говориться вище (приклад 26).

При розрахунку на жорсткість у формулу прогину для заданої схеми балки та навантаження підставляють значення величини допустимого прогину і визначають величину потрібного моменту інерції, за яким і приймають необхідний переріз балки. Для підбору сталених двотаврових та швелерних балок користуються сортаментом.

Нижче наведені приклади підбору перерізів балок за умовою жорсткості.

Приклад 28. Підібрати переріз сталюї двотаврової балки за умовою міцності та жорсткості (рис. 95). Допустима напруга $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; допустимий прогин $[f] = \frac{1}{600} l$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $q = 8 \text{ кН/м}$; $F = 25 \text{ кН}$.

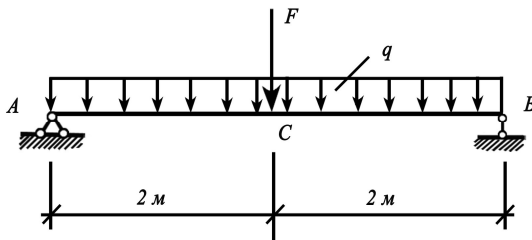


Рис. 95

Розв'язок. Для підбору перерізу за умовою міцності найбільший згинальний момент посередині прольоту знайдемо як суму згинальних моментів від кожного навантаження окремо:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Fl}{4} = \frac{8 \cdot 4^2}{8} + \frac{25 \cdot 4}{4} = 16 + 25 = 41 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

За формулою (91) знайдемо потрібний момент опору

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{41 \cdot 100}{16} = 256,25 \text{ см}^3$$

За сортаментом приймаємо Дв. № 24 з $W_x = 289 \text{ см}^3$

Умова жорсткості має вигляд

$$f = f_q + f_F \leq [f] = \frac{1}{600}l, \text{ або}$$

$$f = \frac{5ql^4}{384EI_x} + \frac{Fl^3}{48EI_x} \leq [f] = \frac{1}{600}l = \frac{400}{600} = 0,67 \text{ см}$$

Звідси знайдемо величину необхідного моменту інерції перерізу

$$I_x = \frac{1}{[f] \cdot E} \left(\frac{5ql^4}{384} + \frac{Fl^3}{48} \right) = \frac{1}{0,67 \cdot 2 \cdot 10^4} \left(\frac{5 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 400^4}{384} + \frac{25 \cdot 400^3}{48} \right) = 4478 \text{ см}^4.$$

За сортаментом приймаємо Дв. № 27 з $I_x = 5010 \text{ см}^4$.

При підрахунках потрібно слідкувати за одиницями вимірювання. В даному випадку довжини прийняті в сантиметрах.

Із наведеного прикладу видно, наскільки різні перерізи балок, що визначаються із умов міцності та жорсткості.

Приклад 29. Перевірити жорсткість дерев'яної балки, що зображена на рис. 96; $E = 10^4 \text{ МПа}$; $[f] = \frac{1}{200}l$; $F = 10 \text{ кН}$; $q = 8 \text{ кН/м}$; $b = 18 \text{ см}$; $h = 24 \text{ см}$.

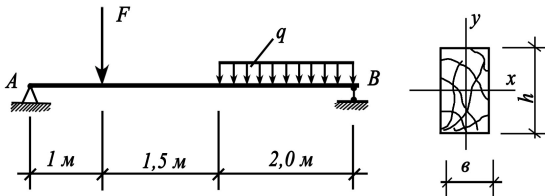


Рис. 96

Розв'язок. Момент інерції поперечного перерізу балки

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{18 \cdot 24^3}{12} = 20736 \text{ см}^4.$$

$$\text{Допустимий прогин } [f] = \frac{1}{200} l = \frac{450}{200} = 2,25 \text{ см.}$$

Величина повного прогину складається із прогинів від розподіленого навантаження та зосередженої сили.

$$f = f_F + f_q = \frac{F \cdot a}{48EI_x} (3l^2 - 4a^2) + \frac{qb^3l}{48EI_x} \left(\frac{3l}{2b} - \frac{b}{l} \right),$$

де $a = 1 \text{ м} = 100 \text{ см}$, $b = 2 \text{ м} = 200 \text{ см}$, тоді

$$\begin{aligned} f &= \frac{10 \cdot 100}{48EI_x} (3 \cdot 450^2 - 4 \cdot 100^2) + \frac{8 \cdot 10^{-2} \cdot 200^3 \cdot 450}{48EI_x} \left(\frac{3 \cdot 450}{2 \cdot 200} - \frac{200}{450} \right) = \\ &= \frac{11822917 + 17583333}{EI_x} = \frac{29406250}{EI_x} = \frac{29406250}{1 \cdot 10^3 \cdot 20736} = 1,42 \text{ см} \end{aligned}$$

Остаточо $f = 1,42 \text{ см} < [f] = 2,25 \text{ см}$.

Умова жорсткості виконується.

Перші роботи по дослідженню згину балок провів Галілей та опублікував їх у 1638 році. Ці дослідження були направлені головним чином на розв'язок задачі про напруги при поперечному згині балок – однієї із найважчих задач за весь період розвитку опору матеріалів. Але правильного розв'язку Галілей не дав і не міг дати, так як він виходив із законів механіки абсолютно твердого тіла, не приймаючи до уваги пружних властивостей матеріалу. Але його роботи значно вплинули на розвиток науки про міцність матеріалів.

Відкритий Гуком у 1678 році закон прямої пропорційності між навантаженням та деформацією дозволив правильно підійти до розв'язку задачі про напруги при згині балок, яку згодом розвинули французькі вчені. Так, перший правильний розв'язок цієї задачі дав у 1713 р. Паран. Теорія згину в її сучасному вигляді була викладена Навьє в 1826 р. в курсі опору матеріалів. Заслуга введення в науку поняття про моменти інерції перерізу та розробка їх теорії належить Персі.

В період двадцятих та тридцятих років XIX сторіччя з'явилися нові (на той час) матеріали – чавун та зварне залізо, що знайшли досить широке застосування головним чином у зв'язку з інтенсивним ростом залізничного будівництва. Це значно вплинуло на розвиток науки про опір матеріалів. Завдяки введеному французьким вченим Коші поняттю про напруги з'явилась можливість їх визначення та порівняння з допустимими напругами. Ця обставина створила

небувало до цього впевненість у інженерів у надійності виконуваних ними розрахунків, і з цього часу опір матеріалів став прикладною наукою, здатною вирішувати практичні задачі техніки.

Дотичні напруги відкрив французький вчений Кулон (1736–1806), але визначити величину їх йому не вдалося. Всі праці французької школи щодо розв'язування задачі про напруги відносились тільки до чистого згину і не враховували зсувів. Вперше розв'язок задачі про поперечний згин дав російський вчений Д.І. Журавський. Він у 1848 р. вперше вивів формулу для знаходження дотичних напруг при згині, якою користуються і в даний час.

Диференційне рівняння зігнутої осі балки вперше вивів Л. Єйлер. Він застосував його до дослідження деяких випадків поперечного згину, а також при створенні теорії поздовжнього згину стиснутих стержнів. Подальші дослідження зігнутої осі балки провів Навьє. Але його метод був досить громіздкий, що викликало прагнення до створення більш простих методів розв'язку цієї задачі.

Значне спрощення в розв'язок цієї задачі внесли прийомом інтегрування диференційних рівнянь зігнутої осі балки, розроблені німецьким вченим Клебшем (1833–1872) та пізніше – російським вченим І.Г. Бубновим (1879–1919). Успішний розв'язок задачі був зроблений лише в 1923 р. російським вченим М.П. Пузиревським (1861–1934) стосовно балок, що лежать на пружній основі, причому метод був названий “методом початкових параметрів”. Академік Крилов (1863–1945) дав суворе обґрунтування вказаного методу. В галузі застосування методу початкових параметрів до простих балок слід відмітити праці професорів М.Г. Куліковського, Г.С. Глушкова, С.М. Соколова, І.С. Подольського, М.К. Снітко, О.О. Уманського та ін.

Багатьма вченими вказаний метод, поширений на розв'язок інших, більш складніших задач, пов'язаних з питаннями згину стержнів. Серед них можна вказати, наприклад, на праці проф. М.І. Безухова, що поширив метод початкових параметрів на динамічні задачі згину, проф. М.К. Снітко – на задачі стійкості та ін.

В даний час метод початкових параметрів є загальнопризнаним та широко застосовується при розв'язуванні різних задач, пов'язаних із згином елементів конструкцій.

Питання для самоконтролю

1. Що називається згином?
2. Який згин називається прямим?
3. Чому дорівнюють поперечна сила та згинальний момент в довільному перерізі бруса?
4. Який закон розподілу нормальних напруг по поперечному перерізу бруса?
5. В яких точках перерізу виникають найбільші нормальні напруги?
6. В яких точках перерізу виникають найбільші дотичні напруги?
7. Що називається пружною лінією балки ?
8. Який зв'язок між кривизною бруса, згинальним моментом та жорсткістю балки ?

Розділ VII . КРУЧЕННЯ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО ПЕРЕРІЗУ

§ 49. ВІДОМОСТІ ПРО ДЕФОРМАЦІЮ КРУЧЕННЯ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО ПЕРЕРІЗУ

З першого розділу ми знаємо, що деформація кручення – це деформація, при якій в поперечному перерізі виникає тільки один внутрішній силовий фактор – крутний момент M_k . З деформацією кручення на практиці приходиться зустрічатися досить часто: вали механізмів та машин, карданний вал автомобіля, елементи просторових конструкцій, пружини і навіть звичайний замковий ключ – все це приклади стержнів (брусів), що працюють на кручення.

Розглянемо деформацію кручення на наступному прикладі. Уявимо, що до вільного кінця жорстко закріпленого бруса круглого поперечного перерізу (рис. 97, а) прикладена пара сил з моментом m , що діє в площині, перпендикулярній до його осі.

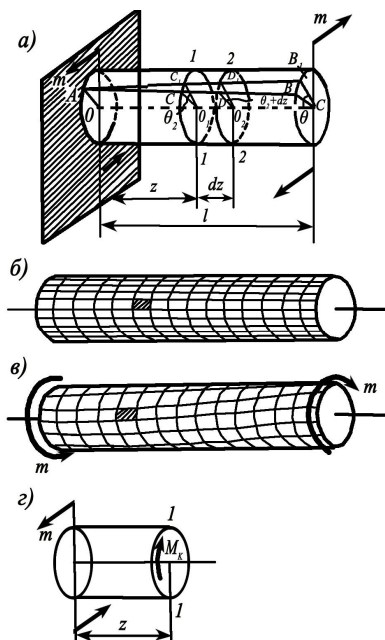


Рис. 97

Під дією цієї пари брус буде зазнавати деформації кручення, яка, будемо припускати, протікає пружно. Момент пари, що скручує брус, називається *скручуючим моментом* та позначається t .

Досліди показують, що при крученні вісь бруса залишається прямою, кінцеві перерізи – плоскими, а радіуси, позначені на кінцевих перерізах, не викривляються. Кола, нанесені на поверхню бруса до деформації, не змінюються і після неї. Всі твірні повертаються одна відносно одної на той самий кут, перетворюючи прямокутники на поверхні бруса в однакові ромби (рис. 97, б, в). Це явище можна спостерігати скручуючи гумовий брус з нанесеними лініями на його поверхні. Все вищесказане дає можливість припустити, що кожен елемент (на поверхні та всередині бруса) зазнає чистого зсуву і, отже, в поперечних перерізах бруса виникають тільки дотичні напрути.

Кут, на який повертається навколо осі один переріз відносно іншого, називається *кутом закручування* та позначається буквою φ (рис. 97, а). Величина його пропорційна відстані між перерізами.

Кут повороту $\angle BOB_1$ правого кінцевого перерізу відносно лівого закріпленого називається *повним кутом закручування*.

§ 50. КРУТНИЙ МОМЕНТ. ПОБУДОВА ЕПЮРИ КРУТНИХ МОМЕНТІВ

Для знаходження внутрішніх сил в перерізах бруса застосуємо *метод перерізів*. Розріжемо брус площиною 1–1 перпендикулярно його осі на відстані Z від закріпленого кінця, а потім, відкинувши праву його частину (рис. 97, г), замінимо її дію внутрішніми силами. На залишену частину діє тільки реактивний момент m в опорі. Тому очевидно, що внутрішні сили в поперечному перерізі 1–1 зрівноважать зовнішню пару з моментом m і будуть теж парою сил з моментом M_k .

Цей момент внутрішньої пари сил, що діє в площині поперечного перерізу бруса, називається *крутним моментом* та позначається M_k .

Для трансмісійного вала, на який насаджено декілька шківів, що передають обертання робочим органам станка, необхідно вміти визначати величини крутних моментів в поперечних перерізах кожної ділянки вала між шківками. В цьому випадку будують епюри крутних моментів M_k , щоб мати наочне уявлення про зміну їх величини по довжині вала.

Побудуємо епюру крутних моментів для трансмісійного вала (рис. 98, а), що отримує від двигуна через пасову передачу та шківа A

скручуючий момент m_1 , який витрачається на приведення в дію робочих органів станка через шківів B, C і D .

Але вал, крім кручення, зазнає ще і згину від ваги шківів та натягу пасів, але при орієнтовному розрахунку валів, що розглядається в даному розділі, впливом згину нехтуємо.

Нехай $m_1 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m_2 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m_3 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m_4 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, причому m_1 діє на вал від ведучого шківів (в одну сторону), а m_2, m_3 та m_4 – від ведених шківів (в іншу сторону).

Нехтуючи тертям в підшипниках, при стійкому рівномірному обертанні вала повинна виконуватись умова рівноваги

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0.$$

Застосовуючи метод перерізів та розглянувши рівновагу будь-якої із відсічених частин, знаходимо величину крутного моменту в перерізі, що розглядається.

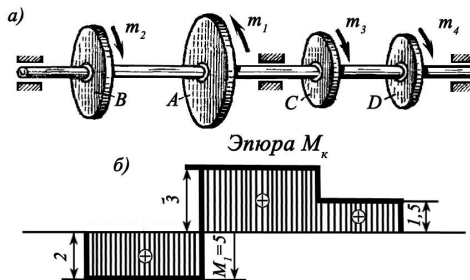


Рис. 98

Крутний момент в довільному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі скручуючих моментів, що діють на брус по одну сторону від перерізу.

Домовимося рахувати знак крутного моменту за знаком скручуючого.

Якщо дивитися на відсічену частину з боку вільного кінця вала в напрямку до перерізу, і скручуючий момент при цьому направлений в сторону годинникової стрілки, то крутний момент в цьому перерізі будемо вважати додатним. В протилежному випадку – від'ємним. Взагалі можна прийняти будь-яке правило знаків за напрямком, але

при цьому треба тільки суворо дотримуватися якогось правила при побудові епюру по всій довжині валу.

Так як тертям в підшипниках ми нехтуємо, то зліва від шківів B та справа від шківів D крутні моменти в перерізах валу дорівнюють нулю. На ділянці BA , зробивши переріз та відкинувши праву частину валу, діє скручуючий момент m_2 за годинникової стрілкою. Значить

$$M_k(BA) = m_2 = 2kH \cdot m$$

Зробивши переріз на ділянці AC , та відкинувши теж праву частину маємо

$$M_k(AC) = m_2 - m_1 = 2 - 5 = -3kH \cdot m$$

Зробимо переріз на ділянці CD та відкинемо ліву частину, тоді будемо мати

$$M_k(CD) = -m_4 = -1,5kH \cdot m$$

Відкладаючи від прийнятої осі абсциси в довільному масштабі ординати, що відповідають значенням крутних моментів в перерізах валу, що знайдені на його ділянках, отримаємо епюру крутних моментів (рис. 98, б).

Додатні значення крутних моментів можна відкладати як вище від осі, так і нижче.

Звернемо увагу на характер зміни ординат епюри крутних моментів. В тих її точках, які відповідають точкам прикладання скручуючих моментів, епюра робить стрибок на величину моменту.

§ 51. НАПРУГИ ТА ДЕФОРМАЦІЇ КРУЧЕННЯ

В попередньому параграфі ми сказали, що в поперечному перерізі бруса при крученні виникають тільки дотичні напруги. Спробуємо розібратися, як ці напруги розподіляються по поперечному перерізу. Для цього застосуємо метод перерізів. Уявно виріжемо із круглого бруса елемент довжиною dz (рис. 99, а), із якого в свою чергу виріжемо другий елемент довільного радіусу ρ (рис. 99, б).

Припустимо, що різниця повних зсувів двох перерізів на відстані dz буде nn_1 , тоді відносний зсув $\gamma = \frac{nn_1}{dz}$. Якщо позначити

досить малу різницю повних кутів закручування на довжині dz через $d\varphi$, то можна написати $nn_1 = \rho d\varphi$. Тоді вираз для відносного зсуву буде мати вигляд

$$\gamma = \frac{nn_1}{dz} = \frac{\rho d\varphi}{dz}$$

Використаємо закон Гука для зсуву $\tau = G \cdot \gamma$. Підставивши сюди значення відносного зсуву, маємо:

$$\tau = G \cdot \frac{\rho d\varphi}{dz},$$

де ρ – відстань від точки, що розглядається, до осі бруса.

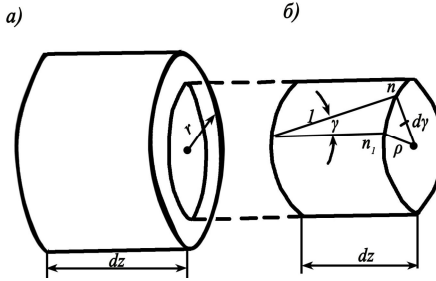


Рис. 99

Величина елементарної внутрішньої дотичної сили в довільній точці перерізу дорівнює $\tau \cdot dA$; момент цієї сили відносно осі бруса, $dM_z = \tau \cdot dA \cdot \rho$.

Щоб отримати повний момент внутрішніх дотичних сил відносно осі бруса, необхідно додати елементарні моменти dM_z , тобто

$$\int_A dM_z = \int_A \tau \rho dA$$

або

$$M_z = M_k = \int_A \tau \rho dA$$

але так як $\tau = G \frac{\rho d\varphi}{dz}$, то можна записати

$$M_k = \int_A \left(G \frac{\rho d\varphi}{dz} \right) \rho \cdot dA$$

або

$$M_k = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 \cdot dA$$

Інтеграл $\int_A \rho^2 \cdot dA$ – це полярний момент інерції площі перерізу,

тому

$$M_k = G \frac{d\varphi}{dz} I_p,$$

звідки

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{GI_p},$$

де $d\varphi$ – елементарний кут закручування по довжині dz .

Повний кут закручування:

$$\varphi = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_k}{GI_p} dz = \frac{M_k}{GI_p} \int_0^l dz = \frac{M_k}{GI_p} \cdot l,$$

або остаточно:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{GI_p} \quad (105)$$

Добуток $G I_p$ називається *жорсткістю перерізу бруса при крученні*.

Із отриманої формули (105) бачимо, що величина кута закручування φ прямо пропорційна крутному моменту M_k та довжині бруса l та обернено пропорційна жорсткості перерізу бруса при крученні $G I_p$.

Величина кута закручування φ вимірюється в радіанах. Щоб отримати φ в градусах, потрібно застосувати формулу:

$$\varphi^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_k \cdot l}{GI_p} \quad (106)$$

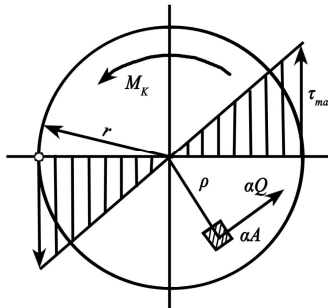


Рис. 100

Підставляючи у вираз $\tau = G \frac{\rho \cdot d\varphi}{dz}$ значення $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{GI_p}$,

отримаємо формулу для визначення дотичних напруг

$$\tau = \frac{G \cdot \rho \cdot M_k}{G \cdot I_p} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho,$$

або остаточно:

$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho \quad (107)$$

У формулі (107) величина $\frac{M_k}{I_p}$ постійна для даного перерізу,

тому дотичні напруги змінюються прямо пропорційно відстані ρ . Графічно закон зміни τ показаний на рис. 100.

Найбільше значення величини дотичних напруг буде в крайніх точках перерізу бруса, тобто при $\rho = \rho_{max} = r$:

$$\tau_{max} = \frac{M_k \cdot \rho_{max}}{I_p} = \frac{M_k}{\frac{I_p}{\rho_{max}}} = \frac{M_k}{W_p} \quad (108)$$

Величина $\frac{I_p}{\rho_{max}} = W_p$ називається **полярним моментом опору**

перерізу бруса.

§ 52. ПОЛЯРНИЙ МОМЕНТ ОПОРУ ДЛЯ КРУГА ТА КІЛЬЦЯ. РОЗРАХУНКИ ВАЛІВ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ

Ми визначили величину полярного моменту опору перерізу

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}}.$$

Для круглого перерізу $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$, підставляючи це значення у

формулу моменту опору, маємо:

$$W_p = \frac{\pi d^4}{32 \cdot \rho_{max}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{16},$$

де $\rho_{max} = \frac{d}{2}$, остаточно:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \quad (109)$$

Для кільцевого перерізу $I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$, $\rho_{max} = \frac{D}{2}$, тоді полярний момент опору буде

$$W_p = \frac{\pi(D^4 - d^4) \cdot 2}{32D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \quad (110)$$

Якщо задатися відношенням діаметрів $\frac{d}{D} = \alpha$, тоді отримаємо:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \quad (110')$$

Бруси круглого перерізу, що працюють на кручення, в основному, застосовуються в машинобудуванні. Із таких брусів виготовляють різного роду вали, які передають обертальний рух від одного агрегату до іншого.

Для розрахунку таких валів на міцність застосовують метод розрахунку за допустимими напруженнями, який є орієнтовним розрахунком вала, тому що основним розрахунком валів є розрахунок на жорсткість.

Формула розрахунку на міцність має вигляд

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]$$

Як ми знаємо, за основною формулою можна робити три види розрахунків: перевірний, проектний, визначення допустимого навантаження.

При розрахунках валів дуже часто бувають задані потужність N (у *Вт* або *кВт* або *к.с.*) та кутова швидкість ω (в *рад/сек*) або n (в *об/хв*). При цьому обертальний (скручуючий) момент, що передається, визначається за однією із формул:

$$M = \frac{N}{\omega},$$

де M у Нм, N у вт і ω в рад/сек; або

$$M = 7301 \frac{N}{n},$$

де M у Нм, N у к.с. і n в об/хв; або

$$M = 9927 \frac{N}{n},$$

де M у Нм, N у квт і n в об/хв

Приклад 30. Перевірити міцність вала діаметром $d=8\text{см}$, якщо найбільший крутний момент $M_k=12\text{кНм}$. Допустима напруга для матеріалу $[\tau]=60\text{МПа}$

Розв'язок. Основна формула перевірного розрахунку має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]$$

$$\text{Знайдемо } W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 8^3}{16} = 100,5 \text{ см}^3$$

Тоді найбільша напруга в перерізі валу

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{12 \cdot 100}{100,5} = 11,9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 11,9 \text{ МПа} > [\tau] = 60 \text{ МПа}$$

Умова міцності не виконується, це значить, що потрібно збільшити діаметр вала. Знайдемо потрібний діаметр вала, використовуючи формулу проектного розрахунку.

$$W_p \geq \frac{M_k}{[\tau]},$$

де $M_k = 12\text{кНм} = 1200 \text{ кН см}$

$[\tau]=60\text{МПа}=6\text{кН/см}^2$

$$W_p \geq \frac{1200}{6} = 200 \text{ см}^3, \text{ тоді діаметр вала}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 200 \text{ см}^3, \text{ звідси } d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 200}{\pi}} = 10 \text{ см},$$

тобто умова міцності буде виконуватись, якщо діаметр вала не менше $d=10 \text{ см}$.

Приклад 31. Замінити суцільний вал діаметром $d_c=15 \text{ см}$ порожнистим валом, у якого відношення діаметрів $\frac{d}{D}=0,95$. Знайти

внутрішній та зовнішній діаметри порожнистого вала та порівняти його вагу із суцільним валом.

Розв'язок. Найбільші дотичні напруги в обох валах повинні бути однакові:

$$\tau_{max} = \frac{16M_k}{\pi d_c^3} = \frac{16M_k}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}$$

Звідси визначимо зовнішній діаметр порожнистого вала:

$$D^3 = \frac{\pi d_c^3 \cdot 16M_k}{16M_k \cdot \pi (1 - \alpha^4)} = \frac{d_c^3}{1 - \alpha^4} = \frac{15^3}{1 - 0,95^4} = 18197,3 \text{ см}^3,$$

$$\text{тоді } D = \sqrt[3]{18197,3} = 26,30 \text{ см}$$

$$\text{так як } d = 0,95D = 0,95 \cdot 26,3 = 24,99 \text{ см}$$

$$\text{приймаємо: } D=264 \text{ мм, } d=250 \text{ мм}$$

Порівняємо вагу валів. Відношення ваги валів дорівнює відношенню їх площ поперечних перерізів. Знайдемо площі перерізу суцільного та порожнистого валів.

$$A_c = \frac{\pi d c^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 15^2}{4} = 176,7 \text{ см}^2$$

$$A_{II} = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14 (26,4^2 - 25^2)}{4} = 56,5 \text{ см}^2$$

$$\text{Їх відношення } \frac{A_c}{A_{II}} = \frac{176,7}{56,5} = 3,12, \text{ тобто порожнистий вал у}$$

3,12 раза легший за суцільний.

На практиці дуже часто, крім умови міцності до вала ставиться умова жорсткості. Вона полягає в тому, щоб кут закручування вала на одиниці його довжини не перевищував якоїсь наперед заданої величини. При розрахунку довгих валів ця умова ставиться в першу чергу.

Залежно від швидкості обертання валів та умов їх роботи і завантаження допустимі кути закручування $[\varphi]$ на 1 пог.м довжини встановлені в межах

$$4,4 \cdot 10^{-3} - 17,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м} (0,25 - 1,0) \text{ град/м}$$

Розрахункове рівняння із умови жорсткості буде мати вигляд

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} \leq [\varphi] \quad (111)$$

Для отримання розрахункової формули на жорсткість підставимо у вираз (111) допустимий кут закручування $[\varphi]$ на довжині одного метра

$$\varphi^0 = \frac{180^0 M_k \cdot 100}{\pi G \cdot I_p} \leq [\varphi^0],$$

звідки:

$$I_p \geq \frac{18000 M_k}{G \pi [\varphi^0]}$$

Для суцільного вала отримаємо:

$$\frac{\pi d^4}{32} \geq \frac{18000 M_k}{G \pi [\varphi^0]}$$

Таким чином, із умови жорсткості діаметр вала повинен бути

$$d = 4 \sqrt[4]{\frac{18000 M_k \cdot 32}{G \pi^2 [\varphi^0]}} = 15.3 \cdot 4 \sqrt[4]{\frac{M_k}{G \cdot [\varphi^0]}} \quad (112)$$

Для порожнистих валів формула має вигляд:

$$D = 4 \sqrt[4]{\frac{18000 \cdot M_k \cdot 32}{G \cdot \pi^2 (1 - \alpha^4) \cdot [\varphi^0]}} = 15.3 \sqrt[4]{\frac{M_k}{G (1 - \alpha^4) \cdot [\varphi^0]}} \quad (113)$$

де α – відношення $\frac{d}{D}$

Питання для самоконтролю

1. Чому дорівнює крутний момент в поперечному перерізі бруса?
2. Які напруги виникають в поперечному перерізі бруса при крученні?
3. Який кут називається повним кутом закручування ?
4. Що називається жорсткістю перерізу вала при крученні ?
5. В яких точках перерізу круглого бруса виникають найбільші дотичні напруги ?
6. За яким законом розподіляються дотичні напруги в перерізі круглого бруса при крученні ?
7. В чому суть розрахунку на жорсткість ?
8. Що таке допустимий кут закручування ?

РОЗДІЛ VIII. СКЛАДНИЙ ОПІР

§53. КОСИЙ ЗГИН. НОРМАЛЬНІ НАПРУГИ ПРИ КОСОМУ ЗГИНІ. РІВНЯННЯ НУЛЬОВОЇ ЛІНІЇ

Ми розглянули випадки, коли елементи конструкцій знаходились під впливом однієї із простих деформацій: осьовий розтяг або стиск, зсув, згин або кручення. Але на практиці в багатьох випадках конструкції та їх елементи зазнають одноразово не одну із вказаних деформацій, а дві і більше.

Наприклад, колони та зовнішні стіни будівель, що завантажені позацентрово, зазнають не тільки стиску, але і згину; сходинкові марші також зазнають стиску та згину; вали машин крім кручення зазнають ще і згину і т. д.

Елементи конструкцій, в яких одночасно виникає дві або більше простих деформації, знаходяться в стані *складного опору*.

Розглянемо деякі випадки складного опору, причому при визначенні напруг будемо користуватися принципом незалежності дії сил .

Одним із видів складного опору є косий згин. Цей вид деформації виникає в прогонах та балках, що спираються на похилу площину; рейка на завороті залізничної колії і т. д.

Визначення косоного згину ми зробили в §33, нагадаємо його: *згин називається косим, якщо силова площина не співпадає ні з однією із головних площин бруса* .

Розглянемо деформацію косоного згину на простому прикладі. Нехай на консоль діє зосереджена сила F , що прикладена до вільного кінця під кутом α до головної осі y (рис. 101,а). Силу F розкладемо на складові по напрямку головних осей x та y . Величини складових дорівнюють:

$$F_x = F \sin \alpha ; F_y = F \cos \alpha$$

Замінивши силу F двома складовими, ми привели випадок косоного згину до двох прямих згинів відносно осей x та y . Розглянемо спочатку згин відносно осі x під дією сили F_y (рис. 101, б). У верхній частині бруса розтягнуті волокна, у нижній – стиснуті. Найбільші напруги виникають в небезпечному перерізі $ABCD$ в найбільш віддалених точках від нейтральної осі. Ці точки знаходяться по лінії BC .

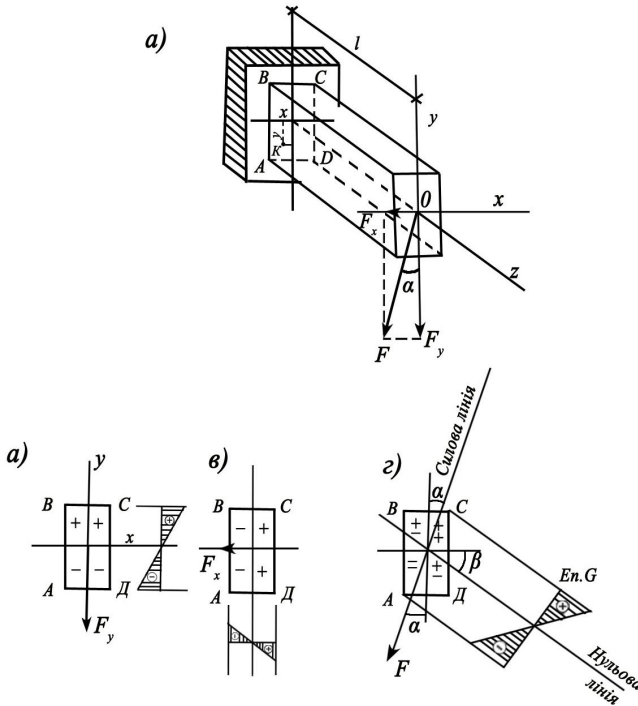


Рис. 101

$$\sigma_{M_x} = \frac{M_x}{W_x}$$

Розглянемо згин відносно осі y під дією сили F_x (рис. 101, в). Стиснуті волокна у нас будуть лівише від осі y , а розтягнуті – правіше. Найбільші напруги виникають в точках по лінії CD

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y}{W_y}$$

Але ці два згини відбуваються одночасно, тобто під дією сили F , а напруги в точках поперечного перерізу алгебраїчно додаються. В першому та третьому квадрантах перерізу напруги одного знаку, а в другому та четвертому – як додатні так і від'ємні (рис. 101, г). Це значить, що нейтральна вісь проходить через другий та четвертий квадрант (рис. 101, г). Точки, які найбільш віддалені від нейтральної

осі, – точки C і A , в них виникають найбільші напруги

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (114)$$

Значення моментів для нашого прикладу дорівнюють

$$M_x = F_y \cdot l = F \cdot l \cdot \cos \alpha = M \cdot \cos \alpha \quad (115)$$

$$M_y = F_x \cdot l = F \cdot l \cdot \sin \alpha = M \cdot \sin \alpha$$

M_x та M_y – це моменти відносно головних осей x і y , тобто складові моменту M , що діє в площині дії сили F . Він дорівнює $F l$.

Визначимо напруги в довільній точці K (з координатами x , y), що розміщена у третьому квадранті (рис. 101, а). Ми маємо можливість визначити для цієї точки нормальні напруги, що викликані окремо моментами M_x та M_y , які згинають балку в головних площинах zy та xz .

Нормальні напруги в точці K є стискуючими (від'ємними) і є сумою напруг від згину моментами M_x і M_y

$$\sigma_k = -\frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x,$$

або з врахуванням формул (115)

$$\sigma_k = -\frac{M \cdot \cos \alpha \cdot y}{I_x} - \frac{M \cdot \sin \alpha \cdot x}{I_y} = -M \left(\frac{y \cdot \cos \alpha}{I_x} + \frac{x \cdot \sin \alpha}{I_y} \right) \quad (116)$$

В даному випадку цією формулою можна користуватися при визначенні напруг в будь-якій точці перерізу балки.

Хоча формула (116) і отримана із розгляду часткового випадку косоного згину балки, закріпленої одним кінцем та завантаженої на іншому зосередженою силою F , але вона є загальною формулою для визначення напруг при косому згині. Для балок, завантажених та закріплених інакше, потрібно лише враховувати знаки моментів M_x та M_y .

Знаходження небезпечних точок при косому згині зводиться до визначення положення нейтральної осі та їх відстані до неї.

Рівняння нульової лінії (нейтральної осі) отримаємо із умови, що нормальні напруги в точках, що лежать на цій осі, дорівнюють нулю. Позначимо координати цих точок x_0 та y_0 ; підставимо ці величини у формулу (116)

$$\frac{M \cos \alpha \cdot y_0}{I_x} - \frac{M \sin \alpha \cdot x_0}{I_y} = 0$$

Скорочуємо на M , маємо

$$\frac{\cos\alpha \cdot y_0}{I_x} + \frac{\sin\alpha \cdot x_0}{I_y} = 0 \quad (117)$$

Це і є рівняння нейтральної осі; вона є прямою лінією, що проходить через центр ваги перерізу (при $x_0 = 0, y_0 = 0$) (рис. 102).

Так як нейтральна вісь проходить через центр ваги перерізу, то для визначення її положення достатньо знати кут β між нейтральною віссю та віссю x .

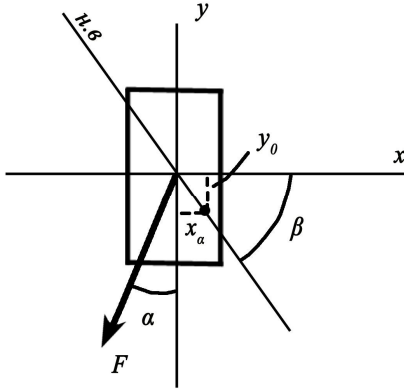


Рис. 102

Із креслення видно, що тангенс цього кута дорівнює відношенню y_0 до x_0 за абсолютним значенням

$$\operatorname{tg}\beta = \left| \frac{y_0}{x_0} \right|.$$

З врахуванням рівняння (117) отримаємо

$$\operatorname{tg}\beta = \left| \frac{y_0}{x_0} \right| = \operatorname{tg}\alpha \frac{I_x}{I_y} \quad (118)$$

Таким чином, положення нейтральної осі не залежить від величини сили F , а лише від кута нахилу вантажної площини до осі y і від форми перерізу. Кути α і β в загальному випадку не однакові, тобто нульова лінія не перпендикулярна силовій лінії, як це мало місце у випадку прямого згину. Взаємна перпендикулярність їх буде у випадку, коли $I_x = I_y$, тобто для квадратних, круглих та інших перерізів, у яких однакові головні моменти інерції перерізу.

§54. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ КОСОМУ ЗГІНІ. ВИЗНАЧЕННЯ ПРОГІНІВ

При розрахунках на міцність за допустимими напругами потрібно, щоб виконувалася умова

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (119)$$

Формула (119) справедлива для всіх перерізів, що вписуються в прямокутник таким чином, що крайні чотири точки перерізу співпадають з вершинами прямокутника, наприклад, для двотавра, швелера, складених перерізів із них і т. д.

При виконанні проектного розрахунку балок, що працюють на косий згин, із формули (119) потрібно знайти моменти опору перерізу.

Так як в цю формулу входять дві невідомі величини W_x і W_y , то для розв'язку задачі необхідно задатися відношенням $\frac{W_x}{W_y}$. У зв'язку з

цим для практичного застосування формулу (119) зручніше перетворити наступним чином:

$$[\sigma] = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{1}{W_x} \left(M_x + \frac{W_x}{W_y} \cdot M_y \right) = \frac{1}{W_x} (M_x + kM_y),$$

звідки

$$W_x = \frac{M_x + kM_y}{[\sigma]}, \quad (120)$$

де $k = \frac{W_x}{W_y}$ – коефіцієнт, що приймається для першого

наближення рівним 8÷10 для двотаврового перерізу і 6÷8 для швелерів. Для прямокутних перерізів цей коефіцієнт завжди дорівнює відношенню висоти перерізу h до його ширини b ;

$$k = \frac{W_x}{W_y} = \frac{bh^2 \cdot 6}{6 \cdot hb^2} = \frac{h}{b}$$

Формула (120) є формулою проектного розрахунку за допустимими напругами при косому згині.

Приклад 32. Знайти найбільші напруги в поперечному перерізі прогону покрівлі (рис.103). Проліт прогону $l=4$ м. Прогон несе вертикальне рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю

$q=2$ кН/м. Кут нахилу покрівлі до горизонту $\alpha = 20^\circ$. Прогон працює як балка з шарнірними опорами.

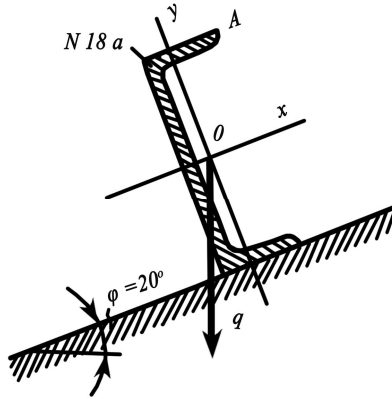


Рис. 103

Розв'язок. Розкладемо навантаження q по осях:

$$q_x = q \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 0,342 = 0,684 \text{ кН/м.}$$

$$q_y = q \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 0,94 = 1,88 \text{ кН/м.}$$

Навантаження q_y згинає балку відносно осі x , найбільший згинальний момент виникає в середині прольоту

$$M_x = \frac{q_y I^2}{8} = \frac{1,88 \cdot 4^2}{8} = 3,76 \text{ кН} \cdot \text{м} = 376 \text{ кН} \cdot \text{см.}$$

Навантаження q_x згинає балку відносно осі y , найбільший момент при цьому

$$M_y = \frac{q_x I^2}{8} = \frac{0,684 \cdot 4^2}{8} = 1,368 \text{ кН} \cdot \text{м} = 136,8 \text{ кН} \cdot \text{см.}$$

Для швелера №18а $W_x = 132 \text{ см}^3$, $W_y = 20 \text{ см}^3$.

Для швелера найбільші напруги виникають в точці A верхньої полиці, це напруги стиску. За формулою (114) знайдемо

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{3,76 \cdot 100}{132} + \frac{1,368 \cdot 100}{20} = \\ &= 2,85 + 6,84 = 9,69 \text{ кН/см}^2 = 96,9 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Приклад 33. Підібрати переріз двотавра для прогону покрівлі, що має нахил до горизонту $\alpha = 25^\circ$, під рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q = 2,5$ кН/м, що діє у вертикальній площині. Проліт прогону $l = 4$ м. Допустима напруга $[\sigma] = 160$ МПа. Прогон працює як балка з шарнірними опорами.

Розв'язок. Розкладемо навантаження як у попередньому прикладі:

$$q_x = q \cdot \sin \alpha = 2,5 \cdot 0,42 = 1,06 \text{ кН/м.}$$

$$q_y = q \cdot \cos \alpha = 2,5 \cdot 0,906 = 2,27 \text{ кН/м.}$$

Найбільші згинальні моменти

$$M_y = \frac{q_x l^2}{8} = \frac{1,06 \cdot 4^2}{8} = 2,12 \text{ кН} \cdot \text{м} = 212 \text{ кН} \cdot \text{см.}$$

$$M_x = \frac{q_y l^2}{8} = \frac{2,27 \cdot 4^2}{8} = 4,54 \text{ кН} \cdot \text{м} = 454 \text{ кН} \cdot \text{см.}$$

Використовуємо формулу (120) та підбираємо переріз:

$$W_x = \frac{M_x + kM_y}{[\sigma]}.$$

Для першого наближення приймаємо $k = 9$.

$$W_x = \frac{454 + 9 \cdot 212}{16} = 147,6 \text{ см}^3. \text{ За таблицями приймаємо двотавр}$$

№18а з $W_x = 159 \text{ см}^3$. $W_y = 22,8 \text{ см}^3$.

Перевіримо напругу за формулою (119)

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{454}{159} + \frac{212}{22,8} = 12,15 \text{ кН/см}^3 = \\ &= 121,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Недонапруга складає $\frac{160 - 121,5}{160} \cdot 100\% = 24\% > 5\%$, що

недопустимо.

Приймаємо двотавр №18 з $W_x = 143 \text{ см}^3$, $W_y = 18,4 \text{ см}^3$, тоді напруги

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{454}{109} + \frac{212}{14,5} = 14,7 \text{ кН/см}^2 = \\ &= 147 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Недонапруга складає $\frac{160 - 147}{160} \cdot 100\% = 8,1\% > 5\%$.

Приймаємо двотавр №16 з $W_x=109 \text{ см}^3$, $W_y=14,5 \text{ см}^3$, тоді напруга

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{454}{109} + \frac{212}{14,5} = 18,8 \text{ кН} / \text{см}^2 = 188 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Перенапруга складає $\frac{188-160}{160} \cdot 100\% = 17,5\%$. Остаточню приймаємо двотавр №18 з $W_x = 143 \text{ см}^3$, $W_y = 18,4 \text{ см}^3$.

Для перерізів, у яких обидві головні осі є осями симетрії, умову міцності можна записати на основі формули (116), знайшовши максимальні напруги:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \pm M \left(\frac{y_{\max} \cdot \cos \alpha}{I_x} + \frac{x_{\max} \cdot \sin \alpha}{I_y} \right) = \\ &= \pm M \left(\frac{\cos \alpha}{W_x} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) = \pm \frac{M}{W_x} \left(\cos \alpha + \frac{W_x}{W_y} \sin \alpha \right) \end{aligned} \quad (121)$$

Тоді умова міцності для таких перерізів набуває вигляду:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_{\max}}{W_x} \left(\cos \alpha + \frac{W_x}{W_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma] \quad (122)$$

Для визначення прогинів в різних перерізах балки при косому згині знову застосуємо принцип незалежності дії сил. Повертаючись до прикладу, який розглядався в попередніх параграфах, знаходимо спочатку прогин точки θ (вільного кінця балки) тільки від дії сили F_y (рис.101,а); цей прогин f_y , буде направлений по осі y і дорівнює

$$f_y = \frac{F_y \cdot l^3}{3I_x E} = \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot l^3}{3I_x E}$$

Аналогічно прогин точки θ від сили F_x буде направлений по осі x і виразиться формулою

$$f_x = \frac{F_x \cdot l^3}{3I_y E} = \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot l^3}{3I_y E}.$$

Повний прогин f кінця балки буде геометричною сумою обох цих прогинів (рис. 104); він дорівнює

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (123)$$

При цьому

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{\sin \alpha \cdot I_x}{\cos \alpha \cdot I_y} = \text{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y} = \text{tg} \beta \quad \text{і} \quad f = \frac{f_x}{\sin \beta} = \frac{f_y}{\cos \beta} \quad (124)$$

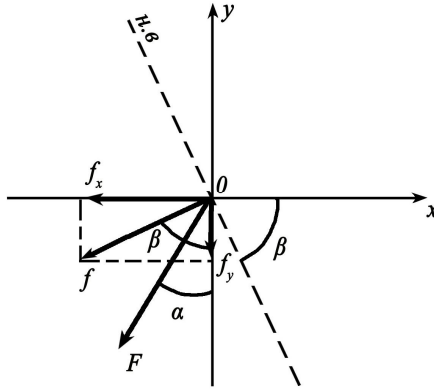


Рис. 104

Звідси виходить, що кут між віссю y і повним прогином f дорівнює куту β , тобто прогин f направлений **перпендикулярно до нейтральної осі**. Згин балки відбувається не в площині дії зовнішніх сил, а в площині, що перпендикулярна до нейтральної осі.

Приклад 34. Підібрати переріз дерев'яних лат висотою h і шириною b та визначити переміщення середини їх прольоту. Проліт лат (відстань між кроквами) дорівнює $l = 4$ м, кут нахилу покриття до горизонту $\alpha = 25^\circ$. Навантаження від снігу та власна вага покриття є рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q = 4$ кН/м. Лати спираються як проста балка на двох опорах. Допустима напруга $[\sigma] = 10$ МПа, модуль пружності матеріалу $E = 1 \cdot 10^4$ МПа, $\frac{h}{b} = 1,5$.

Розв'язок. Найбільший згинальний момент M_{max} буде посередині прольоту:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{4 \cdot 16}{8} = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За формулою (122) знайдемо

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \left(\cos \alpha + \frac{h}{b} \sin \alpha \right) = \frac{800}{1} (0,906 + 1,5 \cdot 0,423) = 1232 \text{ см}^3,$$

$$\text{де } M_{max} = 8 \text{ кН} \cdot \text{м} = 800 \text{ кН} \cdot \text{см}, [\sigma] = 10 \text{ МПа} = 1 \text{ кН} / \text{см}^2,$$

$$\text{так, як } W_x = \frac{bh^2}{6} = 1232 \text{ см}^3, \text{ але } h = 1,5b, \text{ тоді } \frac{2,25b^3}{12} = 1232 \text{ см}^3,$$

$$\text{звідси } b = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 1232}{2,25}} = \sqrt[3]{6570,67} = 18,73 \text{ см} \approx 19 \text{ см}, h = 1,5b = 28 \text{ см}$$

Найбільший прогин лат буде посередині прольоту. Моменти інерції перерізу дорівнюють

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{19 \cdot 28^3}{12} = 34757 \text{ см}^4, I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{28 \cdot 19^3}{12} = 16004 \text{ см}^4.$$

Кут нахилу нейтральної осі β знаходимо за формулою (118)

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y} = \operatorname{tg} 25^\circ \frac{34757}{16004} = 1,013,$$

звідти кут $\beta = 45,36^\circ$. Кут між площиною згину та силовою площиною складає

$$\beta - \alpha = 45,36^\circ - 25^\circ = 20,36^\circ.$$

Прогин в площині найбільшої жорсткості дорівнює

$$f_y = \frac{5ql^4 \cdot \cos \alpha}{384I_x E} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 400^4 \cdot 0,906}{384 \cdot 34757 \cdot 1 \cdot 10^3} = 0,348 \text{ см},$$

де $q = 4 \text{ кН/м} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ кН/см}, l = 4 \text{ м} = 400 \text{ см}, E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$.

Повний прогин дорівнює

$$f = \frac{f_y}{\cos \beta} = \frac{0,348}{0,703} = 0,495 \text{ см}.$$

Осі x (паралельно стороні b) дорівнює прогин в напрямку

$$f_x = f_y \operatorname{tg} \beta = 0,348 \cdot 1,013 = 0,352 \text{ см}.$$

§55. ПОЗАЦЕНТРОВИЙ СТИСК (РОЗТЯГ) БРУСА ВЕЛИКОЇ ЖОРСТКОСТІ

Вивчаючи деформацію розтягу або стиску, ми розглядали випадок, коли сили, що діють на брус, або рівнодіючі систем сил, були прикладені в центрі ваги перерізу. В цьому випадку мала місце деформація осевого розтягу або стиску.

В будівельній практиці є багато конструкцій та їх елементів, що завантажені стискуючими силами прикладеними поза центром ваги перерізу (див. §52).

Деформація під дією сил, паралельних осі бруса, якщо точки їх прикладання не співпадають з центром ваги перерізу, називається позацентровим стиском або розтягом.

Відстань e точки прикладання сили до центру ваги перерізу називається *ексцентриситетом*.

В даному параграфі розглянемо випадок позацентрального стиску бруса великої жорсткості. Всі висновки будуть справедливі і для деформації позацентрального розтягу з врахуванням знаку напруги.

Бруси малої жорсткості, тобто стержні, при стисковій можуть втратити стійкість форми, тобто зігнутися. Стиск стержнів ми розглянемо нижче.

Розглянемо спочатку випадок, коли стискуюча сила прикладена на одній з головних осей перерізу (рис. 105).

Нехай сила F прикладена в точці A . Приведемо силу F до центру ваги перерізу, для чого прикладемо в ньому (точка O) зрівноважену систему двох сил, рівних силі F .

В результаті цього на брус уже діє три сили: сила F , що прикладена в центрі ваги перерізу, і дві сили F , що складають пару сил з моментом $M = F \cdot l$ (перекреслені рисками). Очевидно, що сила F , прикладена в центрі перерізу, буде викликати осьовий стиск, а момент пари буде його згинати. Таким чином, випадок позацентрального стиску ми привели до двох простих деформацій – осьового стиску та прямого згину.

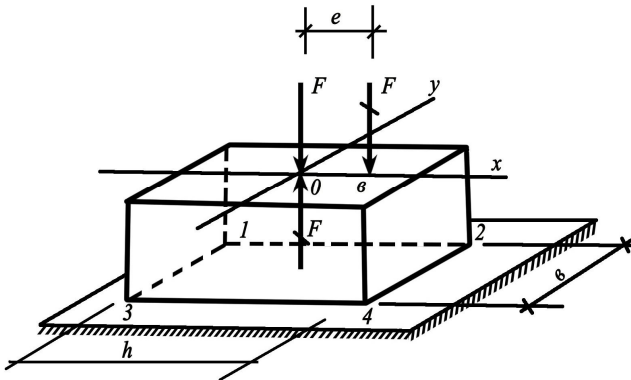


Рис. 105

Припускаючи, що деформації жорсткого бруса незначні, при розрахунках будемо користуватися принципом незалежності дії сил.

Застосовуючи метод перерізів, знаходимо, що в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає два внутрішніх силових фактори: поздовжня сила $N = -F$ і згинальний момент $M_y = M = F \cdot l$.

Так як власну вагу бруса ми не враховуємо, значення внутрішніх сил будуть однакові у всіх поперечних перерізах.

Величина нормальної напруги, що виникає в будь-якій точці поперечного перерізу бруса, визначається як алгебраїчна сума двох напруг:

σ_N – від осевого стиску і σ_{My} – від прямого згину, тобто $\sigma = \sigma_N + \sigma_{My}$, або

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot x. \quad (125)$$

При цьому кожен доданок підставляється у формулу зі своїм знаком, виходячи із характеру деформації бруса, тобто в даному випадку формула буде мати вигляд

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x. \quad (125')$$

Якщо сила F прикладена по осі y , то

$$\sigma = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y. \quad (125'')$$

Найбільші напруги в перерізі будуть

$$\sigma_{max/min} = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y}, \quad (126)$$

Для визначення найбільшої напруги (по грані 1–3) перед другим доданком правої частини формули потрібно поставити знак плюс, тоді

$$\sigma_{max} = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y}, \quad (126')$$

а для визначення найменшої напруги (по грані 2–4) – знак мінус, тоді

$$\sigma_{min} = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y}. \quad (126'')$$

Якщо сила F буде прикладена по осі x , тоді відповідно

$$\sigma_{max} = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} \quad (\text{по грані 1–2})$$

$$\sigma_{min} = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} \quad (\text{по грані 3–4})$$

Прийнявши для прямокутного перерізу $A = h \cdot b$ та $W_y = \frac{bh^2}{6}$ та зробивши перетворення, надамо формулі (126) інший вид

$$\sigma_{max/min} = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y} = -\frac{N}{A} \left(1 \pm \frac{6e}{h} \right),$$

або остаточно

$$\sigma_{max/min} = -\frac{N}{A} \left(1 \pm \frac{6e}{h} \right). \quad (127)$$

Аналізуючи отриману формулу (127), можна сказати, що знак напруги залежить від виразу в дужках, причому можливі три випадки:

а) $\frac{6e}{h} < 1$ або $e < \frac{h}{6}$

В цьому випадку вираз у дужках може бути тільки додатним. Це значить, що напруги від згину за абсолютним значенням будуть меншими від напруг стиску, тобто $|\sigma_N| > |\sigma_{M_y}|$ (рис. 106, а). Тому в поперечному перерізі будуть діяти тільки напруги стиску. Нульова лінія в цьому випадку буде проходити поза перерізом (рис. 106, а).

б) $\frac{6e}{h} = 1$ або $e = \frac{h}{6}$.

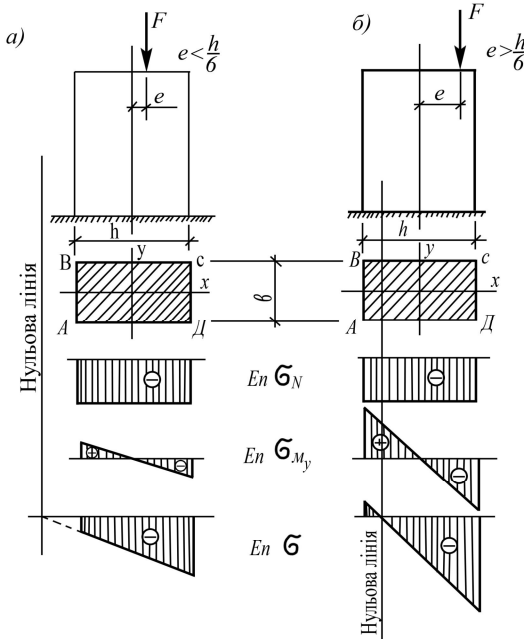


Рис. 106

В цьому випадку вираз у дужках може бути або додатним, або дорівнювати нулю, тобто напруги в перерізі теж одного знаку.

$$в) \frac{6e}{h} < 1 \text{ або } e > \frac{h}{6}.$$

В даному випадку вираз у дужках може бути як додатним, так і від'ємним, це значить, що напруги в перерізі будуть різних знаків тому, що напруга від згину буде більшою, ніж напруга від стиску, тобто $\sigma_M > \sigma_N$ (рис. 106, б). Нульова лінія знаходиться в межах поперечного перерізу. Справа від нульової лінії напруги від'ємні, а зліва – додатні.

Отже, результат дослідження формули (127) з точки зору впливу величини ексцентриситету на знак і величину напруги в перерізі можна звести до наступних положень:

1) якщо точка прикладання рівнодіючої всіх зовнішніх сил не виходить за межі середньої третини прямокутного перерізу, тобто ексцентриситет не перевищує $\frac{h}{6}$, то напруги в перерізі будуть одного знаку, а нейтральна вісь проходить за межами перерізу;

2) якщо точка прикладання рівнодіючої лежить на границі середньої третини перерізу, тобто ексцентриситет дорівнює $\frac{h}{6}$, то одна із крайніх напруг дорівнює нулю, а друга – в два рази більша напруги від осового стиску; нульова лінія при цьому проходить по границі перерізу;

3) якщо точка прикладання сили лежить за межами середньої третини перерізу, то напруги в перерізі будуть різних знаків, а нейтральна вісь проходить в межах перерізу (рис. 106, б).

Ми розглянули випадок, коли сила F прикладена справа від осі перерізу; відповідно до цього побудовані епюри нормальних напруг на рис. 106.

Установлена залежність між величиною ексцентриситету і характером напруг в перерізі має велике практичне значення. Наприклад, для кам'яних та бетонних неармованих колон, фундаментів, стін, що працюють в умовах позацентрового стиску, поява напруг розтягу в їх перерізах не бажана, а часто і недопустима. Справа в тому, що ці матеріали погано працюють на розтяг, їх допустимі напруги на розтяг $[\sigma]_p$ дуже малі, і тому для таких конструкцій потрібно так підбирати їх поперечні перерізи, щоб точка

прикладання рівнодіючої зовнішніх сил не виходила за межі середньої третини перерізу.

Тепер розглянемо випадок, коли стискуюча сила прикладена в точці, що не лежить на головних осях перерізу (рис. 107).

Нехай сила F прикладена в точці поперечного перерізу з координатами e_x і e_y відносно головних осей інерції.

Від цієї сили в довільному поперечному перерізі бруса витікають: стискуюча поздовжня сила $N=F$ та згинальні моменти: $M_x = F \cdot e_y$, $M_y = F \cdot e_x$.

Нормовані напруги в довільній точці поперечного перерізу визначаються за формулою

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} \cdot y \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x. \quad (128)$$

Вибір знаків перед членами, що містять M_x і M_y , залежить від положення точки в перерізі, в якій знаходимо напругу.

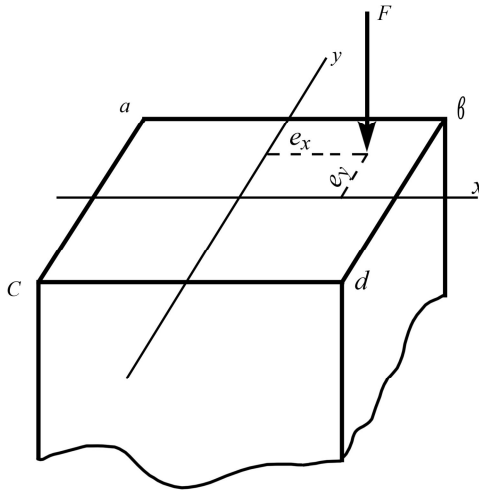


Рис. 107

Для поперечних перерізів, що мають дві осі симетрії, найбільші нормальні напруги визначаються за формулою

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}. \quad (129)$$

Наприклад, напруга в точці d прямокутного перерізу (рис. 107)

$$\sigma_d = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}.$$

Аналогічно можна знайти напругу в інших точках вершин перерізу.

Розрахункова формула розрахунку на міцність за допустимими напругами при позакентровому стиску має вигляд:

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \quad (130)$$

Приклад 35. Від підкранової балки на залізобетонну колону передається сила F_1 , що прикладена до консолі (рис.108). Сила ваги колони та фундаменту і осьове навантаження на колону дорівнює силі F_2 . Визначити розміри квадратної підшови фундаменту, якщо допустима напруга на стиск ґрунту $[\sigma]_{sp} = 0,25 \text{ МПа}$.

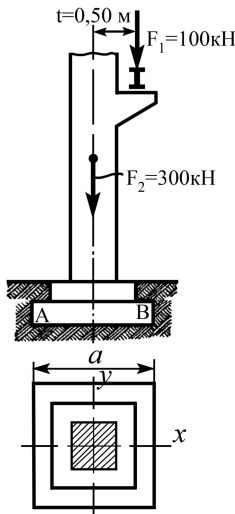


Рис. 108

Розв'язок. Найбільша напруга стиску під підшовою фундаменту буде по ребру B , тобто

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y}.$$

Так як ми визначаємо напруги стиску, знаки перед доданками можемо опустити. Умова міцності буде:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]_{sp}.$$

Знайдемо всі необхідні величини:

$$N = F_1 + F_2 = 100 + 300 = 400 \text{ кН};$$

$$M_y = F_1 \cdot e = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$A = a^2, W_y = \frac{a^3}{6}, [\sigma]_{sp} = 0,25 \text{ МПа} = 250 \text{ кН} / \text{м}^2$$

та підставимо у формулу $\frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{400}{a^2} + \frac{50 \cdot 6}{a^3} \leq 250$, або

$$400a + 300 \leq 250a^3, \text{ або } 2,5a^3 = 4a + 3.$$

Маємо неповне кубічне рівняння; розв'яжемо його графічно. Побудуємо спочатку графік функції $y = 2,5a^3$ – це кубічна парабола, а графік $y = 4a + 3$ – це графік прямої лінії. Побудуємо ці графіки в осях a, y (рис. 109). Масштаб осі a візьмемо більшим, ніж осі y .

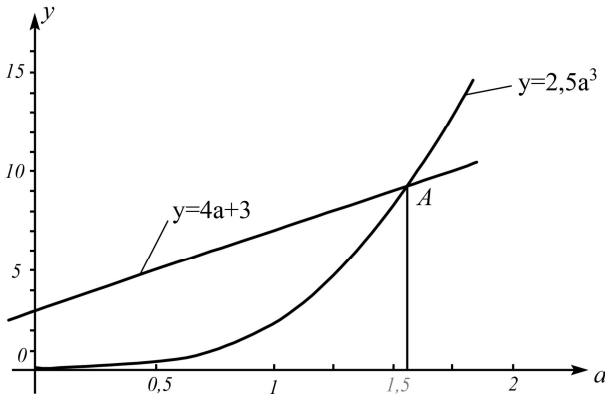


Рис. 109

Ці графіки перетнулися в точці A з загальною абсцисою $1,55 \text{ м}$. Тобто, за умови міцності основи (грунту) розмір підшви фундаменту повинен бути не менше, ніж $a = 1,55 \text{ м}$.

§56. ЯДРО ПЕРЕРІЗУ. ПОЛОЖЕННЯ НУЛЬОВОЇ ЛІНІЇ

При практичних розрахунках іноді необхідно встановити положення точок прикладання стискуючих сил, при яких напруги по всьому перерізу будуть одного знаку.

Це особливо важливо при розрахунковій конструкції, які погано працюють на розтяг. Однакові знаки напруг в перерізі можливі в тому випадку, коли нейтральна вісь буде проходити за межами перерізу або тільки торкатися його.

Частина перерізу, що обмежена деяким контуром, де прикладена стискуюча сила, що викликає напруги одного знаку, називається *ядром перерізу*.

Для побудови ядра перерізу необхідно визначити значення найбільших ексцентриситетів точки прикладання сили, що діють в головних площинах бруса, e_x та e_y , при яких напруги в поперечних перерізах будуть одного знаку. Тобто потрібно визначити, при якому ексцентриситеті буде границя між напругами стиску та розтягу, де $\sigma = 0$. Тому потрібно праву частину у формулі (126') прирівняти до нуля:

$$-\frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} = 0.$$

Замінивши згинальний момент M добутком $F \cdot e_x$, $N = F$ запишемо $-\frac{F}{A} + \frac{F \cdot e_x}{W_y}$ або $\frac{F}{A} = \frac{F \cdot e_x}{W_y}$, після скорочення на F $\frac{1}{A} = \frac{e_x}{W_y}$,

звідки

$$e_x = \frac{W_y}{A}; \quad (131)$$

аналогічно

$$e_y = \frac{W_x}{A}. \quad (131')$$

Для побудови ядра перерізу визначають величини e_x та e_y , значення яких відкладають від центру ваги перерізу: e_x – вправо та вліво по осі x ; e_y – вниз та вверх по осі y .

Приклад 36. Побудувати ядро перерізу для прямокутного перерізу висотою $h = 30$ см, шириною $b = 20$ см (рис. 110).

Розв'язок. Знайдемо площу перерізу: $A = h \cdot b = 30 \cdot 20 = 600$ см².

Знаходимо осові моменти опору перерізу відносно головних осей:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{20 \cdot 30^2}{6} = 3000 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{30 \cdot 20^2}{6} = 2000 \text{ см}^3.$$

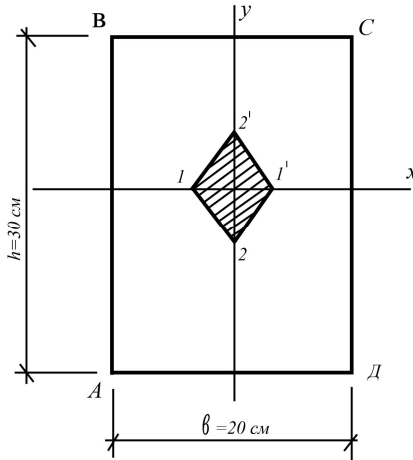


Рис. 110

Визначаємо величини e_x та e_y :

$$e_x = \frac{W_y}{A} = \frac{2000}{600} = 3,33 \text{ см};$$

$$e_y = \frac{W_x}{A} = \frac{3000}{600} = 5 \text{ см}.$$

Відкладаємо величину ексцентриситету e_x вліво та вправо від центру ваги перерізу, а величину e_y по осі y ввєрх та вниз; точки 1, 2', 1', 2 послідовно з'єднуємо між собою прямими лініями. Площа, що обмежена ромбом, буде ядром перерізу.

Приклад 37. Побудувати ядро перерізу для круглого перерізу діаметром $D = 50 \text{ см}$ (рис.111).

Розв'язок. Підраховуємо площу перерізу:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 50^2}{4} = 1963,5 \text{ см}^2.$$

Визначаємо моменти опору перерізу відносно осей. Для круглого перерізу $W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} = 12270,9 \text{ см}^3$.

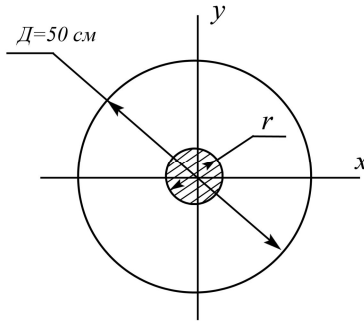


Рис. 111

Знаходимо величини e_x та e_y .

Так як $W_x = W_y$, то $e_x = e_y = \frac{W_x}{A} = \frac{12270,9}{1963,5} = 6,25 \text{ см}$.

Ядром перерізу буде площа, що обмежена колом радіусу $r = e_x = e_y = 6,25 \text{ см}$ (рис.111).

Як ми вже знаємо, нейтральна вісь проходить поза межами перерізу, якщо зовнішня стискуюча сила прикладена в межах ядра перерізу.

Визначимо положення нейтральної осі (нульової лінії) для розглянутого вище загального випадку позacentрового стиску (розтягу). Для цього потрібно ввести нові поняття радіусів інерції i_x та i_y :

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (132)$$

Ці величини, на яких ми зупинимось детальніше нижче (§ 58), характеризують якість форми перерізу при згині. Формули (132) перепишемо в такому вигляді: $I_x = A \cdot i_x^2$, $I_y = A \cdot i_y^2$ та підставимо їх у формулу (128), одночасно замінивши M_x та M_y відповідно на $F \cdot e_y$ та $F \cdot e_x$:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e_y}{A \cdot i_x^2} \cdot y + \frac{F \cdot e_x}{A \cdot i_y^2} \cdot x.$$

Винесемо за дужки $\frac{F}{A}$, отримаємо

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_y \cdot y}{i_x^2} + \frac{e_x \cdot x}{i_y^2} \right).$$

Величини e_y та e_x – постійні та визначають точку прикладання сили F .

Змінні величини x та y визначають точку поперечного перерізу, в якій ми знаходимо напругу. Тому для визначення положення нульової лінії, тобто геометричного місця точок з напругами, що дорівнюють нулю, потрібно прирівняти праву частину рівності нулю:

$$\frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_y \cdot y}{i_x^2} + \frac{e_x \cdot x}{i_y^2} \right) = 0.$$

Так як $F \neq 0$ і $A \neq 0$, значить

$$1 + \frac{e_y \cdot y}{i_x^2} + \frac{e_x \cdot x}{i_y^2} = 0; \quad (133)$$

перепишемо це рівняння у вигляді $\frac{x}{\frac{i_y^2}{e_x}} + \frac{y}{\frac{i_x^2}{e_y}} = 1$.

Позначивши знаменники у вигляді дробу, відповідно a і b , отримаємо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (134)$$

Рівняння (134) є рівнянням нульової лінії у відрізках на осях. Відрізок, що відсікає нульова лінія на осі x ,

$$a = -\frac{i_y^2}{e_x};$$

відрізок, що відсікає нульова лінія на осі y ,

$$b = -\frac{i_x^2}{e_y}.$$

Як виходить з формули (133), положення нульової лінії залежить від розмірів та форми перерізу, а також від координат точки прикладання сили (ексцентриситетів e_x та e_y), але не залежить від величини цієї сили F .

Приклад 38. Знайти положення нульової лінії для прямокутного перерізу (рис.112), якщо сила F , прикладена в точці A з ексцентриситетами $e_x = -10 \text{ см}$, $e_y = -12 \text{ см}$.

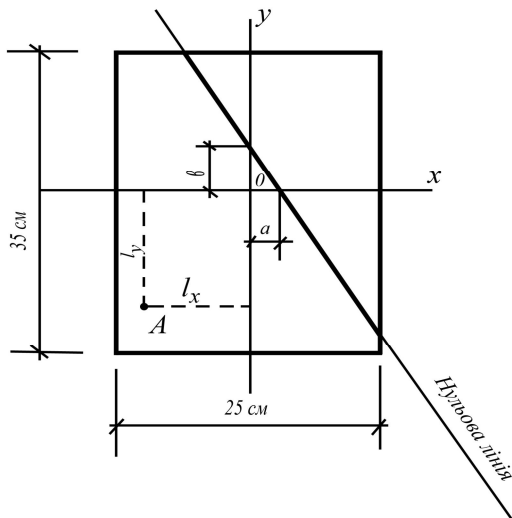


Рис. 112

Розв'язок. Знайдемо радіуси інерції:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3}{12 \cdot b \cdot h} = \frac{h^2}{12} = \frac{35^2}{12} = 102,1 \text{ см}^2 ;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{hb^3}{12 \cdot b \cdot h} = \frac{b^2}{12} = \frac{25^2}{12} = 52,1 \text{ см}^2 .$$

Знаходимо відрізки на осях

$$a = -\frac{i_y^2}{e_x} = -\frac{52,1}{-10} = 5,21 \text{ см} ;$$

$$b = -\frac{i_x^2}{e_y} = -\frac{102,1}{-12} = 8,51 \text{ см} .$$

Відрізок a відкладаємо по осі x , а відрізок b – по осі y і проводимо нульову лінію.

Питання для самоконтролю

1. Що таке складний опір?
2. В якому випадку згин називається косим?
3. Як розміщена нейтральна вісь в поперечному перерізі при косому згині?
4. Який вид деформації називається позацентровим стиском (розтягом)?
5. Які напруги виникають в поперечному перерізі бруса при позацентровому стискові (розтязі)?
6. Що таке ядро перерізу?
7. Що таке радіус інерції перерізу?

РОЗДІЛ ІХ. ПОЗДОВЖНИЙ ЗГИН

§57. ПОНЯТТЯ ПРО СТІЙКІСТЬ ФОРМИ СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ. КРИТИЧНА СИЛА

В попередній розділах були розглянуті методи визначення напруг та деформацій при розтязі, стискові, крученні, згині та складному опорі. Міцність у всіх цих випадках визначалась величиною діючої напруги, а жорсткість – величиною деформації. При цьому малось на увазі, що дана система, деформуючись, може мати тільки одну, заздалегідь відому стійку форму рівноваги. Між іншим рівновага деформованого тіла може бути не тільки стійкою, але і нестійкою.

Для прикладу візьмемо дерев'яну лінійку для креслення і стиснемо її з двох сторін силою. При деякому значенні сили лінійка залишається прямою. Збільшуючи поступово навантаження, помітимо, що в якийсь момент лінійка зігнеться. Кривизна лінійки швидко збільшується і лінійка зламається.

При цьому виявляється, що якщо визначити напругу тиску, то вона буде в багато разів менша, ніж границя міцності матеріалу, з якого вона зроблена.

Звідси виходить, що причиною руйнування лінійки є не порушення міцності при стискові, а втрата прямолінійної форми, тобто втрата стійкості, що викликала додаткові напруги від згину.

Із сказаного видно, що для надійної роботи конструкції, крім міцності її елементів, необхідно, щоб вони були стійкими. Тому стиснуті стержні, крім перевірки на міцність, перевіряють на стійкість. Вияснимо умови, при яких порушується стійкість прямолінійної форми стиснутого стержня.

Нехай довгий та тонкий стержень, шарнірно закріплений на опорах, завантажений осьювою силою F , що поступово зростає (рис. 113, а). При досить малій величині сили стержень буде зберігати прямолінійну форму. Якщо такий стержень навантажити деякою поперечною силою F_1 (рис. 113, б), він зігнеться. Але якщо цю силу забрати, стержень зробить декілька коливань і знову повернеться в початкове положення. Такий стан рівноваги стиснутого стержня називається *стійким*.

При поступовому збільшенні сили F , ми можемо помітити, що в якийсь момент стержень після зняття сили F_1 уже не повертається в початкове положення, а залишається криволінійним, хоча до прикла-

дання сили F_l він був прямим. Такий прямолінійний стан рівноваги стиснутого стержня називається *нестійким*

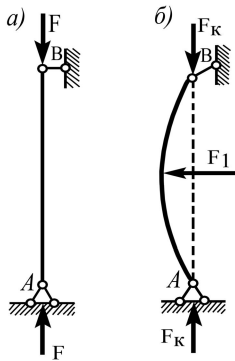


Рис.113

Між стійкою та нестійкою рівновагою стиснутого стержня, напевно, існує стан, при якому після зняття поперечної сили F_l , стержень може повернутись в початкове положення, а може і не повернутися. Назвемо цей стан *критичним*, а стискуючу силу F , яка викликає цей стан – *критичною силою*. Тобто критична сила – це найбільша стискуюча сила, при якій ще зберігається стійка рівновага стержня; позначається F_k .

Деформація стержня, що виражається викривленням його під дією стискуючих сил, що діють вздовж його осі, називається *поздовжнім згином*.

При цьому ми бачимо, що втрата стійкості відбувається в площині його найменшої жорсткості.

Теоретично дія однієї точно центральної поздовжньої стискуючої сили, що за величиною дорівнює критичній, на точно вертикальний стержень із абсолютно однорідного матеріалу не повинна ні викривляти, ні руйнувати його, якщо тільки напруги в перерізі не перевищують границю текучості.

Але так як такі умови роботи стержня не реальні, навантаження, що близькі до критичної сили, викликають втрату стійкості стержня. Тому в практичних розрахунках критичну силу розглядають як руйнівне навантаження.

§58. ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА. ВПЛИВ КІНЦЕВИХ ЗАКРІПЛЕНЬ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧНОЇ СИЛИ

Встановивши поняття про критичну силу як про "руйнівне" навантаження, що виводить стержень із стану його нормальної роботи, ми можемо скласти умову для перевірки на стійкість, аналогічну умову міцності.

Критична сила викликає в стиснутому стержні напругу, що називається критичною напругою та позначається буквою $\sigma_k = \frac{F_k}{A}$.

Критична напруга є небезпечною напругою для стиснутого стержня.

Для знаходження критичної напруги σ_k потрібно визначити критичну силу F_k , тобто найменше осьове навантаження, що здатне втримати в рівновазі трохи викривлений стиснутий стержень.

Це завдання вперше розв'язав академік Петербурзької академії наук Л. Ейлер у 1744 році.

Значимо, що постановка задачі інша, ніж у всіх раніше розглянутих розділах курсу. Якщо раніше ми визначали деформацію при заданих зовнішніх навантаженнях, то тут ставиться протилежне завдання: маючи задане викривлення осі стиснутого стержня, потрібно визначити, при якому значенні осьової сили F таке викривлення можливе.

Розглянемо прямий стержень постійного перерізу, що шарнірно спирається своїми кінцями; одна із опор допускає можливість поздовжнього переміщення кінця стержня (рис. 114). Власною вагою стержня нехтуємо.

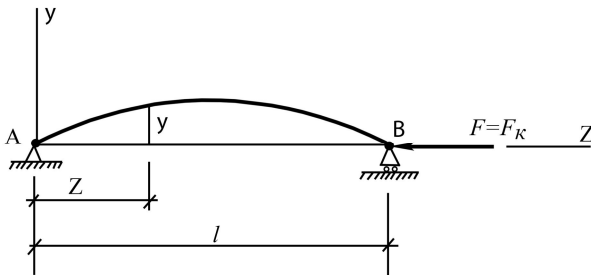


Рис. 114

Навантажимо стержень поздовжньою центрально стискуючою силою $F=F_k$ і дамо йому досить мале викривлення в площині найменшої жорсткості; стержень утримується у викривленому стані, що можливо, так як $F=F_k$.

Передбачаємо, що вигин стержня досить невеликий, тому для розв'язання поставленої задачі можна скористатися наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі стержня. Вибравши початок координат в точці A , а напрям координатних осей, як показано на рис. 114, маємо

$$EI \frac{d^2 y}{dz^2} = M(z)$$

Візьмемо переріз на відстані z від початку координат; ордината зігнутої осі в цьому перерізі буде y , а згинальний момент $M(z) = -Fy$.

За схемою, зображеною на рис. 114, згинальний момент виходить від'ємним, а ординати при вибраному напрямку осі y виявляються додатними. (Якби стержень вигнувся випуклістю вниз, то момент був би додатний, а y – від'ємним).

Наведене диференціальне рівняння набуває вигляду:

$$EI \frac{d^2 y}{dz^2} = -F \cdot y; \quad (135)$$

поділивши обидві частини рівняння на EI та позначивши дріб $\frac{F}{EI}$ через k^2 , приведемо його до виду:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = k^2 y = 0$$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд:

$$y = a \sin kz + b \cos kz \quad (136)$$

Цей розв'язок містить в собі три невідомих: постійні інтегрування a і b , а також $k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$, так як величина критичної сили нам невідома.

Умови на кінцях стержня дають два рівняння:

в точці A при $z=0$ прогин $y = 0$

в точці B при $z=l$ прогин $y = 0$

Із першої умови виходить (так як $\sin kz=0$ і $\cos kz=1$)

$$0 = b.$$

Таким чином, зігнута вісь є синусоїдою з рівнянням

$$y = a \sin kz. \quad (137)$$

Застосувавши другу умову, підставимо в це рівняння $y = 0$ і $z = l$; маємо

$$0 = a \sin kl \quad (138)$$

Звідси виходить, що або a , або kl дорівнює нулю. Якщо a дорівнює нулю, то із рівняння (137) випливає, що прогин в будь-якому перерізі стержня дорівнює нулю, тобто стержень залишається прямолінійним. Це суперечить вихідній передумові нашого висновку. Отже, $\sin kl = 0$, а величина kl може мати наступний нескінченний ряд значень:

$$kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi;$$

де n – будь-яке число.

Звідси, $k = \frac{\pi n}{l}$, а так як $k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$, то

$$\frac{F}{EI} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot n^2 \quad \text{і} \quad F = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot n^2 \quad (139)$$

Інакше кажучи, навантаження, що здатне утримати злегка викривлений стержень в рівновазі, теоретично може мати цілий ряд значень. Але так як знаходиться та становить інтерес з практичної точки зору найменше значення осевої стискуючої сили, при якій стає можливим поздовжній гин, то потрібно приймати $n = n_{min}$.

Перший корінь $n = 0$ вимагає, щоб F_k дорівнювала нулю, що не відповідає вихідним даним задачі; тому цей корінь повинен бути відкинутим та найменшим коренем приймається значення $n = 1$

Тоді отримаємо:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (140)$$

(тут I – менший момент інерції поперечного перерізу стержня)

Отриманий вираз називається **формулою Ейлера** для стисненого стержня з шарнірно закріпленими кінцями .

Для інших способів закріплення кінців стержня формула зміниться. Випадок закріплення стиснутого стержня з шарнірно закріпленими кінцями будемо вважати першим (основним) випадком закріплення. Інші випадки закріплення будемо приводити до основного випадку. Формула Ейлера для стержня з будь-яким закріпленням кінців має вигляд

$$F_k = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2} \quad (141)$$

В цій формулі коефіцієнт μ називається **коефіцієнтом приведення довжини**, який залежить від способу закріплення кінців стержня.

Всі можливі випадки закріплення кінців стержня, що зустрічаються в будівельних конструкціях, можна привести до чотирьох видів (рис. 115).

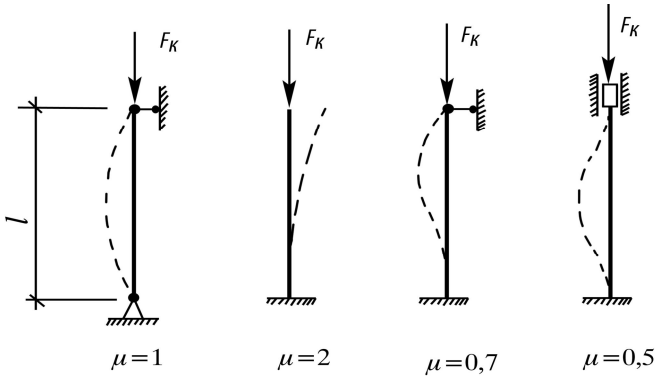


Рис.115

Тобто при шарнірному закріпленні кінців (основний випадок) $\mu = 1$;

при одному вільному і другому жорстко закріпленому кінцях $\mu = 2$;

при одному жорстко закріпленому і другому шарнірному кінцях $\mu \approx 0,7$;

при обох жорстко закріплених кінцях $\mu = 0,5$.

Величина добутку коефіцієнта приведення довжини μ на дійсну довжину стержня l називається **приведеною**, або **розрахунковою довжиною стержня**, та позначається $l_{розр}$, тобто $l_{розр} = \mu l$.

Таким чином, формулу (141) можна представити у вигляді

$$F_K = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_{розр}^2} \quad (141')$$

та нею можна користуватися для визначення величини критичної сили для всіх випадків закріплення кінців стержня.

Поняття про приведену довжину стержня ввів у 1892 р. професор Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучення Ф.С. Ясінський.

§59. КРИТИЧНА НАПРУГА. ГНУЧКІСТЬ СТЕРЖНЯ. ГРАНИЦІ ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА

Для забезпечення стійкості стержня потрібно, щоб стискуюча сила F була меншою, ніж критична F_{κ} , або щоб робочі напруги в поперечних перерізах не перевищували напруг від дії критичної сили.

Напруги в поперечних перерізах стиснутого стержня від дії критичної сили F_{κ} називаються **критичними напругами** та позначаються σ_{κ} .

$$\text{Тобто, } \sigma_{\kappa} = \frac{F_{\kappa}}{A}$$

Так як для стиснутого стержня критичні напруги є небезпечними, то для забезпечення стійкості прямолінійної форми стержня, потрібно до умови міцності на стиск $\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$ додати ще умову стійкості

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{cm}] \quad (142)$$

де $[\sigma_{cm}]$ – опустима напруга на стійкість, що дорівнює критичній нарузі, поділеній на коефіцієнт запасу стійкості k_{cm} , тобто

$$[\sigma_{cm}] = \frac{\sigma_{\kappa}}{k_{cm}}$$

Знайдемо величину критичної напруги:

$$\sigma_{\kappa} = \frac{F_{\kappa}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{\text{розр}}^2 \cdot A}$$

Вираз $\frac{I_{\min}}{A}$ має свою, окрему назву:

$$\sqrt{\frac{I}{A}} = i \text{ – радіус інерції перерізу.}$$

Із цього можна написати $I_{\min} = A \cdot i_{\min}^2$, тоді

$$\sigma_{\kappa} = \frac{\pi^2 EA \cdot i_{\min}^2}{l_{\text{розр}}^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{l_{\text{розр}}^2}$$

Якщо перенести величину i_{min}^2 в знаменник, отримаємо

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_{розр}}{i_{min}}\right)^2} \quad (\text{а})$$

Відношення розрахункової (приведеної) довжини стержня до меншого радіусу інерції називається **гнучкістю стержня** та позначається λ , тобто

$$\lambda = \frac{l_{розр}}{i_{min}} = \frac{\mu l}{i_{min}}.$$

Підставивши значення гнучкості у формулу (а), отримаємо

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (143)$$

Тобто, *критична напруга прямо пропорційна модулю поздовжньої пружності та обернено пропорційна квадрату гнучкості стержня*. Формула (143) дозволяє також встановити границі застосування формули Ейлера. Ця формула була виведена за умови, що при будь-якому значенні F стержень працює в межах пружних деформацій. Тому її не можна застосувати у випадках, коли критичні напруги стають більшими, ніж границя пропорційності.

Тому, якщо $\sigma_k \leq \sigma_{nc}$, формула Ейлера справедлива, якщо $\sigma_k > \sigma_{nc}$, то не справедлива. Очевидно, що границею застосування формули Ейлера буде випадок, коли $\sigma_k = \sigma_{nc}$. Для практичного застосування зручно виразити границі застосування формули Ейлера через гнучкість λ .

Замінімо у формулі (143) σ_k на σ_{nc} :

$$\sigma_{nc} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

звідки визначимо граничне значення гнучкості стержня:

$$\lambda_{гран} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{nc}}}.$$

Прийнявши для сталі Ст.3 $\sigma_{nc} = 200 \text{ МПа}$: і $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, отримаємо

$$\lambda_{гран} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100,$$

тобто, якщо гнучкість стержня $\lambda \geq 100$, то формула Ейлера справедлива, якщо $\lambda < 100$, то не справедлива.

Досліди показують, що в тих випадках, коли критична напруга більша за границю пропорційності, то дійсні критичні сили виявляються набагато менші обчислених за формулою Ейлера. Ця формула, як виявилось на практиці може застосовуватись для певної категорії стержнів – тонких та довгих, тобто з великою гнучкістю, в той час як конструкції часто містять стержні з малою гнучкістю.

Тому виникла необхідність в розробці методів визначення критичних напруг і для випадків, коли вони перевищують границю пропорційності матеріалу, наприклад, для будівельної сталі при гнучкості від 0 до 100 ($\lambda = 0 \div 100$). Вирішальним у цьому питанні є результати експериментальних досліджень, хоча розв'язок цієї задачі можливий і теоретичним шляхом.

Найбільш багатий дослідний матеріал був зібраний професором Ф.С. Ясінським, яким складена спеціальна таблиця критичних напруг залежно від гнучкості для багатьох матеріалів.

На основі дослідних даних Ф.С. Ясінським була запропонована емпірична формула для визначення критичної напруги в перерізах стержнів деяких конструкційних матеріалів:

$$\sigma_k = a - b\lambda, \quad (144)$$

де a і b – коефіцієнт, що визначаються дослідним шляхом.

Для сталі Ст.3 формула (144) має вигляд

$$\sigma_k = 338,7 - 1,483\lambda \text{ МПа}; \quad (145)$$

для дерева (хвойні породи)

$$\sigma_k = 29,3 - 0,194 \lambda \text{ МПа}$$

Визначивши величину критичної напруги, можна знайти критичну силу за формулою

$$F_k = \sigma_k \cdot A.$$

Формула Ф.С. Ясінського придатна не при всіх значеннях гнучкості λ . На рис.116 зображений графік залежності критичної напруги від гнучкості для сталі Ст.3. Гіпербола Ейлера, побудована за рівнянням (143) при $\lambda \geq \lambda_{\text{гран}}$, показана пунктиром в межах $\lambda = 60 \div 100$, так як нею користуватися на цій ділянці не можна.

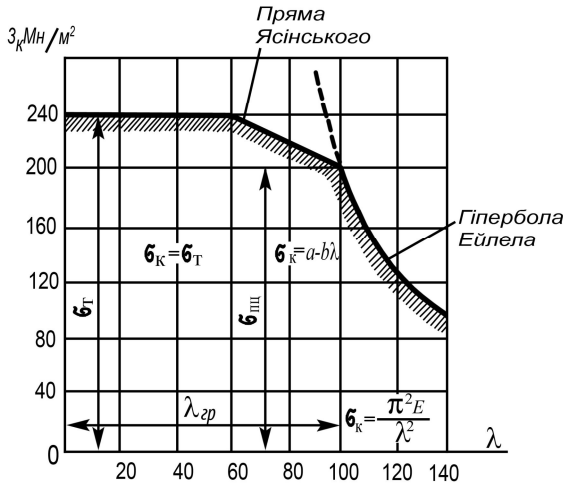


Рис. 116

Для гнучкості від 0 до 60 критична напруга приблизно постійна: $\sigma_k = \sigma_T$ або $\sigma_k = \sigma_B$ і тому стержні розраховують не на стійкість, а на міцність. Стержні, що мають гнучкість в межах $60 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{гран.}}$, розраховуються за формулою Ф.С. Ясінського.

Перейдемо тепер до питання про допустиму напругу при поздовжньому згині, яку можна визначити при великих гнучкостях ($\lambda > 100$) за формулою (143), а при малих гнучкостях – за формулою (144), розділивши знайдені значення критичної напруги на коефіцієнт запасу стійкості k_{cm} .

Коефіцієнт запасу стійкості k_{cm} приймають в межах:

для сталі – від 1,8 до 3;

для дерева – від 2,8 до 3,2.

Отже, для кожного значення гнучкості λ можна знайти своє значення допустимої напруги при поздовжньому згині:

$$[\sigma_{cm}] = \frac{\sigma_k}{k_{cm}}$$

§60. РОЗРАХУНОК ЦЕНТРАЛЬНО СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ НА МІЦНІСТЬ ЗА ДОПОМОГОЮ КОЕФІЦІЄНТА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗГИНУ

В §59 ми встановили, що стиснені стержні повинні бути перевірені за двома умовами:

а) за умовою міцності

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma], \text{ де } [\sigma] = \frac{\sigma_{гран}}{k}, \text{ (} \sigma_{гран} = \sigma_T \text{ або } \sigma_{гран} = \sigma_B \text{);}$$

б) за умовою стійкості

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{см}] = \frac{\sigma_{\kappa}}{k_{см}}$$

Ми встановили, що допустима напруга на стійкість не є постійною величиною для одного і того ж матеріалу, а залежить від гнучкості стержня λ .

З'ясуємо, як пов'язані допустимі напруги на стійкість з допустимими напругами на міцність. Для цього візьмемо їх відношення:

$$\frac{[\sigma_{см}]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{\kappa} \cdot k}{k_{см} \cdot \sigma_{гран}},$$

звідси

$$[\sigma_{см}] = \frac{\sigma_{\kappa} \cdot k}{k_{см} \cdot \sigma_{гран}} \cdot [\sigma].$$

Позначивши вираз, що стоїть в правій частині рівності перед $[\sigma]$ через φ , отримаємо

$$\varphi = \frac{\sigma_{\kappa} \cdot k}{k_{см} \cdot \sigma_{гран}} ; \quad [\sigma_{см}] = \varphi [\sigma].$$

Коефіцієнт φ називається **коефіцієнтом зменшення основної допустимої напруги** $[\sigma]$ при поздовжньому згині (коефіцієнтом поздовжнього згину). Його величина завжди менша одиниці. За графіком залежності σ від λ для даного матеріалу, а також за σ_T , σ_B і коефіцієнтами запасу міцності k та стійкості $k_{см}$ складені таблиці значень коефіцієнтів φ у функції від гнучкості. Значення їх для деяких матеріалів наведені в додатках.

Тепер розрахункову формулу на стійкість можна представити у вигляді:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma], \quad (146)$$

де $[\sigma]$ – основна допустима напруга при осьовому стискові.

За основною формулою (146) можна робити три види розрахунків на стійкість:

1. Перевірка стиснутих стержнів на стійкість.
2. Визначення площі поперечного перерізу стиснутого стержня (проектний розрахунок).
3. Визначення допустимого навантаження на стаяк (стержень.)

Приклад 39. Знайти величину критичної сили для стаяка висотою 3,5 м з перерізом 10×16 см. Стаяк закріплений з обох кінців шарнірно. Матеріал – сосна, модуль пружності $E=1 \cdot 10^4$ МПа, гранична гнучкість $\lambda_{\text{гран}}=75$.

Розв'язок. Критичну силу знаходимо за формулою

$$F_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{\text{розр}}^2}$$

Площа перерізу стаяка $A = 10 \cdot 16 = 160$ см², менший момент інерції перерізу буде відносно осі y .

$$I_{\min} = I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{16 \cdot 10^3}{12} = 1333 \text{ см}^4,$$

тоді менший радіус інерції

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12 \cdot h \cdot b}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = 2,89 \text{ см.}$$

Визначаємо гнучкість стаяка:

$$\lambda = \frac{l_{\text{розр}}}{i_{\min}} = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1 \cdot 350}{2,89} = 121,75,$$

тобто критична сила визначається за формулою Ейлера.

$$F_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{\text{розр}}^2} = \frac{3,14^2 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1333}{1 \cdot 350} = 37589 \text{ кН} = 37,6 \text{ МН},$$

де $E = 1 \cdot 10^4$ МПа $= 1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, $l = 3,5 \text{ м} = 350 \text{ см}$.

Приклад 40. Перевірити стійкість дерев'яного стаяка висотою 4 м і перерізом 16 × 20 см. Кінці стаяка закріплено шарнірно, $[\sigma]=10$ Мпа, осьове стискує навантаження $F=130$ кН.

Розв'язок. Умова стійкості має вигляд:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma],$$

Знайдемо площу перерізу $A = 16 \cdot 20 = 320 \text{ см}^2$. Менший момент інерції перерізу

$$I_{min} = I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 16^3}{12} = 6826 \text{ см}^4,$$

тоді менший радіус інерції перерізу

$$i_{min} = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{6826}{320}} = 4,62 \text{ см}$$

Знайдемо гнучкість стояка

$$\lambda = \frac{l_{розр}}{i_{min}} = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1 \cdot 400}{4,62} = 86,6$$

За додатками для $\lambda = 86,6$ по інтерполяції знаходимо

$$\varphi = 0,48 - \frac{0,48 - 0,38}{10} \cdot 6,6 = 0,414$$

Перевіряємо стійкість:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{130}{320} = 0,406 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 4,06 \text{ МПа} < \varphi[\sigma] = 0,414 \cdot 10 = 4,14 \text{ МПа}$$

Умова стійкості виконується.

Виконання проектного розрахунку, тобто визначення площі поперечного перерізу за формулою (146), із якої отримаємо

$$A \geq \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi} \quad (147)$$

В цій формулі дві невідомі величини A і φ хоча і пов'язані між собою, але залежність між ними непроста. Тому виключити із рівняння одну з них шляхом заміни її іншою неможливо. В даному випадку приходиться підбирати переріз методом послідовного наближення, який полягає в наступному.

Для першого наближення задаємося коефіцієнтом φ_1 , який приймають менше одиниці ($\varphi_1 = 0,5$).

За прийнятим значенням φ_1 визначаємо площу перерізу A та його форму. Після підбору перерізу знаходимо для нього I_{min} , i_{min} і λ , а потім за знайденою гнучкістю λ відповідну їй величину коефіцієнта φ .

Отримане значення φ може сильно відрізнятись від прийнятого для першого наближення, тому і напруга буде значно відрізнятись від допустимої. В цьому випадку потрібно взяти нове значення φ_2 ,

наприклад, середнє між φ_1 і φ , тобто $\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}$, і так само як раніше виконати необхідні обчислення, в результаті чого отримаємо нове значення коефіцієнта φ .

Звичайно буває достатньо двох або трьох спроб, щоб підібрати переріз стержня.

Приклад 41. Підібрати переріз рівностійкої центрально стисненої колони, що складається із двох швелерів, з'єднаних планками за допомогою зварювання. Для колони умова закріплення її кінців та стискаюча сила вказані на рис. 117, а, поперечний переріз – на рис. 117, б. Допустима напруга для сталі $[\sigma] = 160 \text{ Мпа}$.

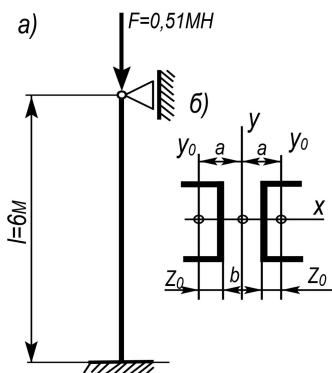


Рис. 117

Розв'язок. Розрахунок відносно матеріальної осі x .
Із умови стійкості

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma],$$

задавшись для першого наближення коефіцієнтом поздовжнього згину $\varphi = 0,75$, знаходимо потрібну площу перерізу колони

$$A = \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{510}{0,75 \cdot 16} = 42,5 \text{ см}^2$$

де $F = 0,51 \text{ МН} = 510 \text{ кН}$, $[\sigma] = 160 \text{ Мпа} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

За сортаментом підбираємо два швелери №18 з площею $A = 2 \cdot 20,7 = 41,4 \text{ см}^2$ і радіусом інерції $i_x = 7,24 \text{ см}$. Відповідна гнучкість колони

$$\lambda_x = \frac{l_{\text{розр}}}{i_x} = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 600}{7,24} = 58.$$

Коефіцієнт φ по інтерполяції (додаток)

$$\varphi_1 = 0,89 - \frac{0,89 - 0,86}{10} \cdot 8 = 0,866$$

Перевіряємо напругу.

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_1 A} = \frac{510}{0,866 \cdot 41,4} = 14,22 \text{ кН/см}^2 \quad \langle [\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2$$

Отримали недонапруження.

Приймаємо два швелери №16а з $A = 2 \cdot 19,5 = 39 \text{ см}^2$ і радіусом інерції $i_x = 6,49 \text{ см}$.

Відповідна гнучкість колони

$$\lambda_x = \frac{0,7 \cdot 600}{6,49} = 64,7$$

Тоді коефіцієнт φ_2 по інтерполяції

$$\varphi_2 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 4,7 = 0,837,$$

а напруга

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_2 A} = \frac{510}{0,837 \cdot 39} = 15,63 \text{ кН/см}^2 \quad \langle [\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2$$

Недонапруга складе $\frac{16 - 15,63}{16} \cdot 100 \% = 2,3 \% < 5 \%$, що

допустимо.

Розрахунок на стійкість колони відносно вільної осі y зводиться до визначення відстані b між швелерами (рис. 117, б). При цьому в розрахунок вводиться не гнучкість $\lambda_y = \frac{l_{\text{розр}}}{i_y}$, а так звана приведена

гнучкість $\lambda_{\text{пр}}$, яка внаслідок деформації з'єднувальних планок більша λ_y , і для випадку, що розглядається, визначається за формулою

$\lambda_{\text{пр}} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_g^2}$, де $\lambda_g = \frac{l_g}{i_g}$ – гнучкість ділянки швелера, замкненого між

планками, відносно власної осі y_0 ; вона приймається в межах 30...40.

Відстань b між швелерами колони визначаємо із умови рівності жорсткості в двох площинах: $\lambda_{np} = \lambda_x$.

Тоді необхідна гнучкість колони відносно вільної осі y буде:

$$\lambda_y = \sqrt{\lambda_{np}^2 - \lambda_e^2} = \sqrt{\lambda_x^2 - \lambda_e^2} = \sqrt{64,7^2 - 30^2} = 57,3$$

Необхідний радіус інерції перерізу

$$i_y = \frac{I_{розр}}{\lambda_y} = \frac{0,7 \cdot 600}{57,3} = 7,33 \text{ см}$$

Необхідний момент інерції перерізу

$$I_y = A \cdot i_y^2 = 39 \cdot 7,33^2 = 2095 \text{ см}^4.$$

З іншої сторони,

$$I_y = 2(I_{y_0}^{шв} + A^{шв} \cdot a^2) = 2(78,8 + 19,5 \cdot a^2).$$

Порівнявши праві частини обох рівнянь, маємо:

$$2(78,8 + 19,5 \cdot a^2) = 2095 \text{ або } 78,8 + 19,5a^2 = 1047,7,$$

звідки

$$a = \sqrt{\frac{1047,7 - 78,8}{19,5}} = 7,05 \text{ см} \approx 7 \text{ см}.$$

Із рис. 117, б видно, що $b = 2(a - z_0) = 2(7 - 2) = 10 \text{ см}$.

В даному прикладі ми намагалися підібрати відстань між швелерами (b) таку, щоб моменти інерції перерізу колони відносно осей x та y були однакові. При конструюванні стиснутих елементів велике значення має форма поперечного перерізу. Вона виявляється найбільш доцільною і економічною в тому випадку, якщо гнучкість відносно обох головних осей інерції перерізу буде однаковою.

Стержні у вигляді окремих двотаврів і швелерів є дуже неекономічними, так як розрахунок їх приходить вести за меншим моментом інерції перерізу, в той час як другий, більший момент інерції, а відповідно більша жорсткість перерізу залишається невикористаною. Тому при проектуванні колон та стержнів ферм із прокатних профілів застосовують складені перерізи таким чином, щоб гнучкості їх відносно обох головних осей були по можливості однакові. При цьому велике значення має влаштування надійного з'єднання елементів складеного перерізу (планки, з'єднальні решітки тощо), які забезпечують їх спільну роботу.

Питання для самоконтролю

1. В чому суть поздовжнього згину?
2. Яка сила називається критичною?
3. Що називається запасом стійкості?
4. Що називається коефіцієнтом довжини і чому він дорівнює для випадків кріплення бруса?
5. Який момент інерції підставляється у формулу Ейлера? Чому?
6. Що називається гнучкістю стержня?
7. Які форми перерізу будуть раціональні при поздовжньому згині?
8. Що таке коефіцієнт φ ? Від чого він залежить?
9. В чому суть розрахунку стиснених стержнів на поздовжній згин?

Розділ X. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ НА ДІЮ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ. ПОНЯТТЯ ПРО ДІЮ ПОВТОРНО-ЗМІННИХ НАВАНТАЖЕНЬ

§61. ПОНЯТТЯ ПРО ДІЮ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

До цього часу ми розв'язували основне завдання опору матеріалів, виходячи з того, що навантаження, яке діє на елементи конструкцій або деталей машин, є *статичним*.

Ми знаємо, що статичне навантаження характеризується тим, що не змінює механічного стану конструкції або деталі, тобто в них не виникають прискорення. Наявність прискорення в конструкціях або їх елементах характеризує дію *динамічного навантаження*.

Розглянемо дію конструкції на канат. Ця дія буде статичною, якщо вантаж знаходиться в стані спокою або піднімається рівномірно, тобто без прискорення. Але цей вантаж спричинить динамічне навантаження на канат, якщо він рухається нерівномірно, наприклад, в момент початку руху конструкції або його зупинки.

При змінних напругах ми зустрічаємося з явищем руйнування від поступово зростаючої тріщини – з явищем втоми.

При різкій зміні швидкості руху елемента конструкції залежно від передачі на нього тиску від сусідніх елементів, коли має місце явище *удару*, може виявитися крихкість в таких матеріалах, які при статичному навантаженні були пластичними. Тому при перевірці міцності деталей конструкцій, що зазнають дії динамічних навантажень, доводиться цікавитися впливом цих навантажень не тільки на величину напруги в деталях, але і на здатність матеріалу чинити опір таким навантаженням.

В цьому розділі ми зупинилися на двох випадках динамічного навантаження, що виникає залежно від швидкості їх руху.

Метод розрахунку на динамічне навантаження оснований на відомому із теоретичної механіки *принципі Даламбера*.

Нагадаємо, що згідно з цим принципом тіло, що рухається, розглядається як таке, що знаходиться в рівновазі, якщо до зовнішніх сил додати силу інерції, яка дорівнює добутку маси тіла на його прискорення і направлена в протилежну сторону від прискорення.

Тому, якщо відомі сили інерції, можна застосувати метод перерізів і, використовуючи рівняння рівноваги, визначити внутрішні

зусилля в перерізах тіла. Якщо визначити сили інерції важко, використовують закон збереження енергії.

У всіх випадках, де прикладене динамічне навантаження, виникають додаткові сили – сили інерції, що можуть бути дуже великими: так, наприклад, при підніманні вантажу з прискоренням сила інерції може значно перевищувати вагу самого вантажу. Сили інерції викликають додаткові напруги, які при розрахунках повинні бути враховані. Для спрощення розрахунків ці додаткові напруги умовно вважають статичними, але викликані силами інерції.

§62. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Покажемо, як визначаються напруги, коли точки елемента конструкції отримують постійне прискорення. Нехай вантаж Q піднімається рівноприскорено на сталюму канаті поперечним перерізом A (рис. 118, а). Визначаємо напругу в перерізі сталюго канату, для чого застосовуємо метод перерізів і розглянемо рівновагу нижньої відсіченої частини (вагою канату нехтуємо).

Як бачимо із риси. 118, б, ця частина рухається з прискоренням a , тому на неї крім ваги вантажу діє ще сила інерції, що направлена в сторону, протилежну прискоренню, яка дорівнює добутку маси вантажу на прискорення

$$\frac{Q}{g} \cdot a,$$

де g – прискорення сили тяжіння – $9,81 \frac{M}{c^2}$

За умовою рівноваги в перерізі виникає поздовжня сила

$N_d = Q + \frac{Q \cdot a}{g}$. Тоді напруга в цьому перерізі (назвемо її динамічною)

$$Q_d = \frac{N_d}{A} = \frac{Q}{A} + \frac{Q \cdot a}{g \cdot A} = \frac{Q}{A} \left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

Як видно із отриманого виразу, величина $\frac{Q}{A}$ є статичною напругою $\sigma_{ст}$, тому запишемо

$$\sigma_{\text{д}} = \sigma_{\text{ст}} \left(1 + \frac{a}{g} \right), \quad (148)$$

тобто величина динамічної напруги дорівнює

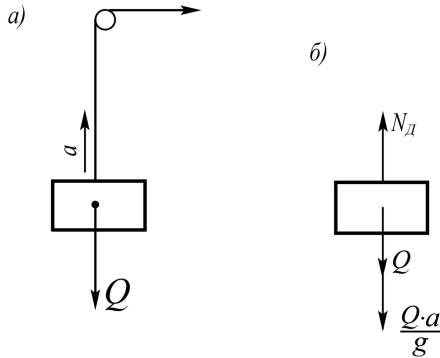


Рис. 118

статичній напрузі, помноженій на величину $1 + \frac{a}{g}$, яку назвемо динамічним коефіцієнтом $k_{\text{д}}$, тобто формулу (148) можна записати так:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}} \quad (149)$$

Умова міцності при динамічному навантаженні

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}} \leq [\sigma]$$

звідки

$$\sigma_{\text{ст. max}} \leq \frac{[\sigma]}{k_{\text{д}}}. \quad (150)$$

Як видно із формули (148) при $a=0$, тобто коли прискорення відсутнє, динамічні напруги дорівнюють статичним. Іншими словами, у випадку рівномірного прямолінійного руху напруги в перерізах канату будуть такими ж, як і у випадку нерухомого стану вантажу.

Із викладеного стає очевидним, що динамічний розрахунок можна замінити статичним. Для цього досить зменшити допустиму напругу, розділивши її на динамічний коефіцієнт.

Розглянемо дію іншого виду динамічного навантаження – ударного. Якщо швидкість елемента конструкції або прилеглих до нього частин змінюється за досить короткий проміжок часу, то відбувається явище удару.

Наприклад, при забиванні палі молот, що впав з деякої висоти на палю, зупиняється майже миттєво, тобто зміна швидкості падіння молоту від деякої величини до нуля відбувається за досить короткий час, тобто відбувається удар.

Удар може бути поздовжнім (стискуючим або розтягуючим), коли вантаж падає на стержень вздовж його осі, та поперечним (згинаючим), якщо падіння вантажу на стержень відбувається перпендикулярно його осі.

Розглянемо явище удару за наступних припущень.

1) при ударі в елементі конструкції виникає тільки пружна деформація;

2) удар вважається непружним, тобто тіло, що ударяє, не відскакує після удару, а продовжує переміщуватися разом з удареним тілом як одне ціле;

3) маса тіла, що ударяє, вважається досить малою в порівнянні з масою удареного тіла і в рахунок не береться. Це припущення, як побачимо далі, підвищує величину динамічної напруги, тобто збільшує запас міцності при ударі.

Нехай вантаж вагою Q вільно падає з висоти h на довільну конструкцію, причому швидкість падіння його при ударі

$$v = \sqrt{2gh},$$

$$\text{звідки } h = \frac{v^2}{2g}.$$

Конструкція під дією удару деформується, і точка удару переміститься в напрямі падіння вантажу на величину f_d . Величина повної роботи падаючого вантажу

$$W_d = Q(h + f_d).$$

Отримана робота переходить в потенційну енергію деформації конструкції, що ударяється. Якщо позначити буквою δ переміщення від одиничної сили, то відношення $\frac{f_d}{\delta} = Q_{y0}$ виразить собою еквівалентну силу, яка при своїй статичній дії викличе таке ж переміщення $f_d = Q_{y0} \cdot \delta$, яке викликане ударом.

Знайдемо величину потенційної енергії:

$$\Pi = \frac{1}{2} Q_{y0} \cdot f_d = \frac{1}{2} \frac{f_d \cdot f_d}{\delta} = \frac{f_d^2}{2\delta}.$$

Прирівняємо вирази кінетичної та потенційної енергії:

$$Q(h + f_D) = \frac{f_D^2}{2\delta} \quad \text{або} \quad f_D^2 - 2Q\delta f_D - 2Q\delta h = 0.$$

Розв'язавши це квадратне рівняння відносно f_D , отримаємо

$$f_D = Q\delta + \sqrt{(Q\delta)^2 + 2Q\delta \cdot h} = Q\delta \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{Q\delta}} \right).$$

Знак "плюс" перед коренем означає, що ми визначали найбільше значення переміщення.

Переміщення $Q\delta = f_{cm}$ є переміщенням від статичної дії навантаження Q , тобто можна написати

$$f_D = f_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{cm}}} \right). \quad (151)$$

Вираз у дужках показує в скільки разів результат ударної дії вантажу більше статичної дії і називається **динамічним коефіцієнтом**.

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{cm}}}, \quad (152)$$

звідки видно, що величина k_D зростає із збільшенням висоти h падіння вантажу.

Формула (151) може бути представлена у вигляді:

$$f_D = k_D \cdot f_{cm} \quad (153)$$

Так як ми прийняли припущення про справедливість закону Гука в межах пружності, то можна записати

$$\sigma_D = k_D \cdot \sigma_{cm}, \quad (154)$$

або

$$\sigma_D = \sigma_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{cm}}} \right). \quad (155)$$

Якщо прийняти $h=0$, тобто навантаження прикласти одразу (раптова дія навантаження), величина динамічного коефіцієнта

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + 0} = 2.$$

Таким чином, раптово прикладне навантаження викликає вдвічі більші напруги і деформації, ніж при статичному навантаженні.

Приклад 42. Визначити динамічну напругу в сталевому канаті в момент підйому вантажу $Q=60$ кН, якщо прискорення в цей момент $a=5 \frac{м}{с^2}$. Довжина канату 20 м, площа його перерізу $A=8$ см² і об'ємна

вага $\rho = 7,8 \frac{г}{см^3}$.

Розв'язок. Визначимо вагу сталевго канату

$$P = \rho A l = 76,518 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 2000 = 1,224 \text{ кН},$$

де $\rho = 7,8 \frac{г}{см^3} = 76,518 \cdot 10^{-6} \frac{кН}{см^3}$, $l = 20 \text{ м} = 2000 \text{ см}$

Визначимо поздовжню силу в канаті

$$N = Q + P = 60 + 1,224 = 61,224 \text{ кН}$$

Визначимо величину динамічного навантаження за формулою (148)

$$\sigma_{дл} = \sigma_{ст} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \frac{61,224}{8} \left(1 + \frac{500}{981} \right) = 11,55 \frac{кН}{см^2} = 115,5 \text{ МПа.}$$

де $a = 5 \frac{м}{с^2} = 500 \frac{см}{с^2}$, $g = 9,81 \frac{м}{с^2} = 981 \frac{см}{с^2}$

Приклад 43. При забиванні дерев'яної палі діаметром $d = 20$ см, довжиною $l = 7$ см молот вагою $Q = 2$ кН падає з висоти $h = 0,5$ м (рис. 119).

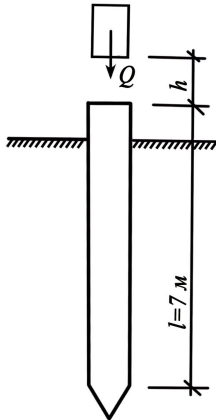


Рис. 119

Визначити статичну та динамічну напруги в перерізі палі. Модуль пружності для палі $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Умовно вважаємо, що при ударі нижній кінець палі не переміщується (в кінці забивання). Власного вагою палі нехтуємо.

Розв'язок. Знаходимо площу перерізу палі

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314,16 \text{ см}^2.$$

Знайдемо величину статичного поздовжнього укорочення палі:

$$\Delta l_{cm} = \frac{Q \cdot l}{EA} = \frac{2 \cdot 700}{10^3 \cdot 314,16} = 4,456 \cdot 10^{-3} \text{ см},$$

де $l = 7 \text{ м} = 700 \text{ см}$,

Величина статичної напруги дорівнює

$$\sigma_{cm} = \frac{N}{A} = \frac{Q}{A} = \frac{2}{314,16} = 6,366 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}$$

Знайдемо величину динамічної напруги за формулою (155)

$$\sigma_d = \sigma_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{cm}}} \right) = 6,366 \cdot 10^{-3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 50}{4,456 \cdot 10^{-3}}} \right) = 0,954 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 9,54 \text{ МПа}$$

Приклад 44. Визначити динамічну напругу в небезпечному перерізі двотаврової балки №30, якщо посередині падає вантажна $Q = 2 \text{ кН}$, з висоти 50 см . Проліт балки $l = 4 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ (рис. 120)

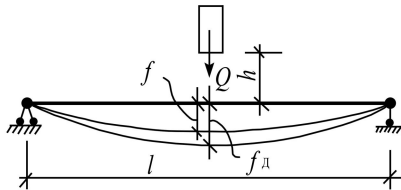


Рис. 120

Розв'язок. Знаходимо величину найбільшого згинального моменту від статичної дії навантаження.

$$M_{max} = \frac{Ql}{4} = \frac{2 \cdot 4}{4} = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Знаходимо величину статичної напруги

$$\sigma_{cm} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{2 \cdot 100}{472} = 0,424 \frac{\kappa H}{\text{см}^2}$$

де $M_{max} = 2\kappa H \cdot m = 200\kappa H \cdot \text{см}$, $W_x = 472 \text{ см}^3$

Знаходимо величину статичного прогину за готовою формулою (додаток)

$$f_{cm} = \frac{Ql^3}{48EI_x} = \frac{2 \cdot 400^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 7080} = 4,708 \cdot 10^{-3} \text{ см}$$

За формулою (152) знаходимо значення динамічного коефіцієнту

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 50}{4,708 \cdot 10^{-3}}} = 146,74$$

Тоді динамічна напруга – за формулою (154):

$$\sigma_\partial = k_D \cdot \sigma_{cm} = 146,74 \cdot 0,424 = 62,22 \frac{\kappa H}{\text{см}^2} = 622,2 \text{ МПа}$$

Динамічна напруга більша не тільки допустимої напруги, але і границі текучості.

Із наведених прикладів видно, що динамічна дія навантаження викликає досить великі напруги в перерізах елементів конструкцій в порівнянні з такими ж за величиною статичними навантаженнями. Особливо це стосується ударних навантажень.

Звідси можна зробити висновок, наскільки важливо при монтажі будівельних конструкцій (фундаментів, панелей, плит перекриття тощо) бути обережним при опусканні плити перекриття або іншої деталі на вже зібрану частину будівлі, щоб при цьому не відбулося удару.

§63. ПОНЯТТЯ ПРО ДІЮ ПОВТОРНО-ЗМІННИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Опір матеріалів дії навантажень, що систематично змінюють свою величину або величину і знак, суттєво відрізняється від опору тих самих матеріалів статичному та ударному навантаженню. Тому питання про перевірку міцності матеріалів, що знаходяться під дією змінних навантажень, потребує особливого вивчення.

Давно відомо, що деталі машини, що знаходяться під дією змінних навантажень, які повторюються велику кількість разів, іноді руйнуються раптово, без наявності помітних залишкових деформацій,

при напругах, яким вони чинили опір при статичному навантаженні досить надійно.

Прикладом такого навантаження є “ломання” дроту, тобто багаторазове згинання відрізка дроту. Очевидно, що в цьому випадку частини дроту перемінно опиняються то в розтягнутій, то в стиснутій зонах. Після деякої кількості циклів напруг відбувається руйнування дроту.

Злам деталі після руйнування має характерний вигляд і на ньому, як правило, є дві зони: одна – гладенька, притерта (поверхня тріщини, що поступово розвивається), друга – грубозерниста (поверхня остаточного зламу в ослабленому тріщиною перерізі). Внаслідок такого крихкого руйнування складається враження, що циклічні напруги призводять до зміни кристалічної будови матеріалу. Тому раніше вважали, що матеріал “втомлюється” і змінює свою будову, перетворюючись з пластичного на крихкий. Звідси і виник напрямок, пов’язаний з визначенням здатності матеріалу чинити опір дії циклічних напруг, розрахунком на втомлену міцність (опір втомленості).

Зараз доведено, що при циклічних навантаженнях будова матеріалу не змінюється. Руйнування відбувається внаслідок виникнення та розвитку тріщин, які ослаблюються переріз.

Зазначимо, що в теорії втомленості є великі математичні труднощі і вона досі достатньо не відпрацьована. В загальному випадку тут не можна використовувати звичну розрахункову схему, як для суцільного середовища, оскільки треба враховувати зв’язки всередині кристалів та між ними. Тому розрахунки на опір втомленості здійснюють на підставі експериментальних даних.

Зміну напруги від однієї крайньої величини до другої і навпаки ми в подальшому будемо називати циклом напруг.

Закон зміни напруг за один цикл зобразимо графічно (рис. 121). Найбільшу та найменшу напругу позначимо відповідно σ_{max} та σ_{min} Відношення їх

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}, \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad (156)$$

називають **коефіцієнтом асиметрії циклу**.

Залежно від r цикли бувають: **подібними** (якщо мають однакові коефіцієнти асиметрії), **симетричними** (коли $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$; $r=-1$) (рис. 121, а)

несиметричними ($\sigma_{max} \neq |\sigma_{min}|$; $|r| \neq 1$) та **віднульовими** (пульсуючими) ($\sigma_{min}=0$; $r=0$) (рис. 121, б).

При цьому несиметричний цикл може бути як знакопостійним (рис. 122, а), так і знакозмінним (рис. 121, а).

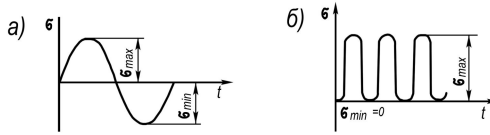


Рис. 121

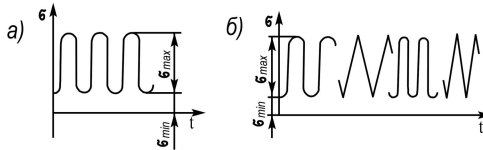


Рис. 122

Цикли характеризуються також середньою напругою $\sigma_{сep}$ та амплітудою σ_a :

$$\sigma_{сep} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_{max}(1+r)}{2}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_{max}(1-r)}{2} \quad (157)$$

З формул (157) впливають такі залежності:

$$\sigma_{max} = \sigma_a + \sigma_{сep}; \quad \sigma_{min} = \sigma_{сep} - \sigma_a$$

Процес розвитку тріщин при циклічних напругах пов'язаний з накопиченням пластичних деформацій. Тоді ймовірно, що опір втомленості не залежить від закону та частоти зміни напруги у межах інтервалу $\sigma_{max} \dots \sigma_{min}$. Отже, цикли, зображені на рис 122, б, рівноцінні.

Нагадаємо, що опором втомленості матеріалу називають його здатність чинити опір руйнуванню при дії циклічних напруг. Найбільша напруга, яку матеріал може витримати, не руйнуючись, практично нескінченну кількість циклів напруг, називається **границею витривалості**. Границя витривалості позначається σ_r або τ_r , де індекс r відповідає коефіцієнту асиметрії циклу ($\sigma_{.1}$, $\tau_{.1}$ – при симетричному циклі; σ_0 , τ_0 – при віднульовому).

Границя витривалості залежить від виду деформації, фізико-механічних властивостей матеріалу, коефіцієнта асиметрії циклу та інших факторів. Її визначають експериментально, найчастіше в умовах

симетричного циклу. Схема установки для визначення границі витривалості в умовах чистого згину зразка, що обертається, показано на рис. 123. Тут зразок затискається в цангах 2,4, що обертаються за допомогою двигуна 7. Частота обертання зразка до руйнування фіксується лічильником 6.

Зусилля на зразок передаються через підвіси 1,5. При проведенні дослідів випробовують партію однакових зразків в кількості не менше ніж 10 шт. (при підвищеній точності дослідів кількість зразків збільшується до 40–60 шт).

На першому етапі задається напруга, що перевищує границю витривалості матеріалу зразка, тобто $\sigma_1 = (0,5 \dots 0,7)\sigma_B$, де σ_B – границя міцності матеріалу зразка. В цьому випадку зразок зруйнується за досить невелику кількість циклів навантаження N_1 . Навантаження на наступні зразки поступово зменшують.

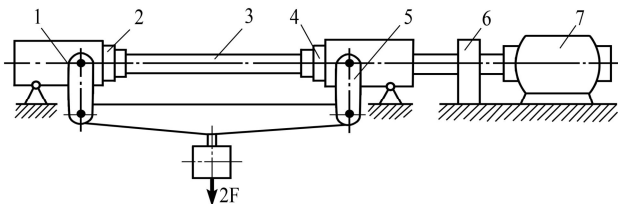


Рис. 123

Очевидно, що кожний з менш навантажених зразків (σ_{II} , σ_{III} , $\sigma_{IV} \dots$) буде витримувати дедалі більшу кількість циклів до руйнування (N_{II} , N_{III} , $N_{IV} \dots$).

Обробивши отримані дані, можна побудувати криву втомленості в координатах σ , N (рис. 124). Неважко помітити, що крива втомленості послідовно наближається до деякої горизонтальної прямої, що відсікає на осі ординат відрізок, який відповідає границі витривалості для симетричного циклу σ_1 .

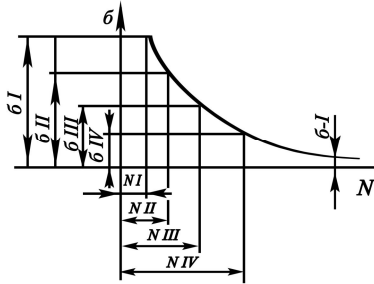


Рис. 124

Як правило, досліди на втомленість проводять при певній базі випробувань (кількість циклів), перевищення якої не призводить до руйнування зразка при даній напрузі. Так, для сталених зразків вона становить 10^7 циклів, для кольорових металів – 10^8 .

Питання для самоконтролю

1. Наведіть приклади статичної та динамічної дії навантажень.
2. Що таке динамічний коефіцієнт?
3. Чому дорівнює динамічний коефіцієнт при раптовому прикладанні навантаження?
4. Що називається ударним навантаженням?
5. Що називається циклом напруг?
6. Що називається границею витривалості?

Розділ XI. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ЗА ГРАНИЧНИМ СТАНОМ

§64. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Метод розрахунку за допустимими напругами, на основі якого ми вивчали опір матеріалів, базується на припущенні, що матеріали будівельних конструкцій є ідеально пружні, тобто не враховує дійсних властивостей будівельних матеріалів, які в більшості випадків мають пружно-пластичні властивості. Крім того, цей метод не враховує дійсні умови роботи конструкцій під навантаженням. В багатьох випадках виявляється, що дійсна міцність конструкцій набагато більша від розрахункової.

Оснований на прийнятті єдиного постійного коефіцієнта запасу міцності, цей метод не задовольняє сучасні вимоги до будівель і споруд, що призводить в одних випадках до надмірної міцності, а в інших – до її зменшення.

Виходячи з цих та інших суттєвих недоліків методу розрахунку за допустимими напругами, в тридцятих роках ХХ століття для розрахунку будівельних конструкцій був прийнятий *метод розрахунку за руйнівними навантаженнями*.

Метод розрахунку за руйнівними навантаженнями ґрунтується на більш широкому використанні експериментальних даних та узагальненні досвіду будівництва, а також на аналізі пластичних властивостей матеріалів.

Коротко познайомимося з його основами. Суть цього методу зводиться до того, щоб найбільше навантаження F_{max} , що діє на всю конструкцію, не перевищувало допустимого значення найбільшого навантаження $[F]$, тобто $F_{max} \leq [F]$, де $[F]$ – допустиме навантаження, що дорівнює руйнівному навантаженню F_p , діленому на коефіцієнт запасу міцності:

$$[F] = \frac{F_p}{k}$$

При цьому під руйнівним навантаженням розуміють таку її величину, при якій подальша нормальна експлуатація конструкції неможлива.

Розрахунки за методом руйнівних навантажень ґрунтуються інколи на припущенні, що матеріал конструкцій має ідеальні пружно-

пластичні властивості. Графічно це можна зобразити у вигляді діаграми на рис. 125 (діаграма Прандтля). Із діаграми видно, що матеріал передбачається ідеально пружним до границі текучості (ділянка OA), а по досягненні σ_T він набуває ідеально пластичних властивостей, внаслідок чого його деформації можуть безперервно зростати при постійній нарузі σ_T (ділянка AB).

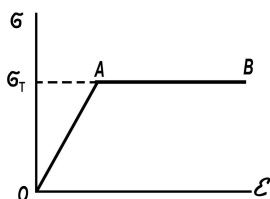


Рис. 125

Розглянемо сталю двотаврову балку (рис. 126, а), в небезпечному перерізі якої найбільша напруга дорівнює границі текучості. Величину згинального моменту в цьому стані позначимо M_T . Із епюри нормальних напруг (рис. 126, б) видно, що напруги, які дорівнюють σ_T , діють лише в крайніх волокнах балки, а вся інша частина її знаходиться у пружному стані.

Для подальшої деформації балки потрібно збільшити навантаження, так як її несуча здатність ще не вичерпана.

Із збільшенням згинального моменту зона текучості розповсюджується в середину балки (рис. 126, в), а потім при якомусь граничному значенні згинального моменту зона текучості розповсюджується по всьому перерізу, і в цьому випадку, несуча здатність балки буде вичерпана.

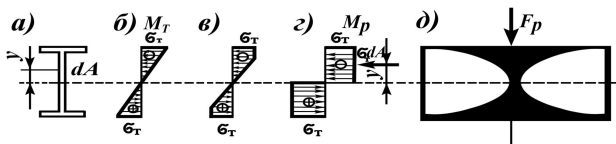


Рис. 126

Епюра напруг набуде вигляду, показаного на рис. 126, г. Подальша деформація відбудеться вже без збільшення навантаження, і

в небезпечному перерізі утвориться так званий *пластичний шарнір* (рис. 126, д), поява якого означає втрату несучої здатності балки.

Навантаження, від дії якого в небезпечному перерізі балки утворюється пластичний шарнір, називається *руйнівним навантаженням*, а згинальний момент, викликаний цим навантаженням – *руйнівним згинальним моментом*.

Руйнівний згинальний момент M_p можна визначити як суму моментів внутрішніх сил $\sigma_T \cdot dA$ відносно нейтральної осі. Так як момент елементарної

сили $\sigma_T \cdot dA$ відносно нейтральної осі дорівнює $\sigma_T \cdot dA \cdot y$ (рис. 126, г), то повний момент дорівнює:

$$M_p = 2 \int_{\frac{A}{2}} \sigma_T \cdot y \cdot dA = 2\sigma_T \int_{\frac{A}{2}} y \cdot dA$$

Інтеграл – це статичний момент S_x верхньої половини площі перерізу відносно нейтральної осі, тому можна записати

$$M_p = 2 \sigma_T \cdot S_x$$

Умова міцності $M_{max} \leq [M]$, але так як

$$[M] = \frac{M_p}{k} = \frac{2\sigma_T \cdot S_x}{k} = 2[\sigma] \cdot S_x \quad (159)$$

Таким чином, при розрахунку по руйнівним навантаженням розміри поперечного перерізу симетричної балки необхідно підбирати не за моментом опору W , а за величиною подвійного статичного моменту півперерізу балки відносно нейтральної осі. Якщо позначити

$$2S = W_n$$

то формула (159) набуде вигляду

$$[M] = 2S[\sigma] = W_n \cdot [\sigma] \quad (160)$$

Величина W_n називається *пластичним моментом опору*.

Для прямокутного перерізу W_n дорівнює:

$$W_n = 2S_x = 2b \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}$$

де b , h – розміри перерізу. Момент опору перерізу $W_x = \frac{bh^2}{6}$,

тоді їх відношення:

$$\frac{W_n}{W_x} = \frac{2S_x}{W_x} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = 1,5$$

Отриманий результат означає, що при розрахунках балок прямокутного перерізу за руйнівними навантаженнями можна збільшити згинальний момент, отриманий при розрахунку за допустимими напруженнями, в 1,5 разу. Іншими словами, необхідний момент опору балки в 1,5 разу менший, ніж при розрахунку за допустимими напруженнями. Для двотаврових перерізів ця величина складає 12%, тобто

$$W_n = 1,12W_x.$$

Як бачимо, метод розрахунку за руйнівними навантаженнями теж ґрунтується на єдиному постійному коефіцієнті запасу міцності, який не може правильно врахувати дійсні умови експлуатації конструкцій, мінливість навантаження та якість матеріалів.

У зв'язку з недоліками цього методу був розроблений новий метод розрахунку будівельних конструкцій – **метод граничних станів**.

§65. СУТЬ МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ ЗА ГРАНИЧНИМ СТАНОМ

Метод розрахунку за граничним станом застосовується в нашій країні для розрахунку будівельних конструкцій з 1955 р. в якості основного методу розрахунку.

Під **граничним** розуміють такий стан конструкції, після досягнення якого конструкція (основа, будівля, споруда) перестав задовольняти умови експлуатації або вимоги їх зведення.

Такий розрахунок передбачає не допустити настання граничного стану при зведенні будівель і споруд, а також при їх експлуатації.

При розрахунках конструкцій враховуються дві групи граничного стану:

перша група – це втрата несучої здатності або непридатність до експлуатації;

друга група – це непридатність до нормальної експлуатації.

До граничного стану першої групи відносять: втрату стійкості форми, втрату стійкості положення, руйнування будь-якого характеру, а також стан, при якому виникає необхідність припинення експлуатації в результаті текучості матеріалу, повзучості, порушення з'єднань, надмірного розкриття тріщин.

До граничного стану другої групи відносять: недопустимі деформації конструкцій в результаті прогинів, осідання, коливання конструкцій, утворення або розкриття тріщин.

Поява тріщин та їх розкриття перевіряють тільки в залізобетонних та кам'яних конструкціях. В металевих і дерев'яних конструкціях поява будь-яких тріщин недопустима: тріщини, що виникають в металі або дереві в подальшому розвиваються і призводять до руйнування конструкції.

Суть методу розрахунку за граничним станом можна виразити таким чином: *розрахунок повинен бути зроблений так, щоб не допустити переходу конструкції або споруди ні в один із граничних станів за весь час експлуатації, а також при їх зведенні.*

Для цього величини зусиль, деформацій, переміщень, розкриття тріщин або величини від інших факторів не повинні перевищувати граничних значень, встановлених нормами проектування.

В будівельних нормах даються конкретні характеристики граничного стану для бетонних, залізобетонних, кам'яних, сталевих, і дерев'яних конструкцій, а також природної основи будівель і споруд.

Встановлене нормами граничне значення напруг в матеріалі називають **нормативним опором** R'' . Нормативний опір є основною характеристикою опору матеріалу силовій дії.

В більшості випадків за нормативний опір R'' приймається границя текучості або міцності матеріалу.

При розрахунках конструкцій приймається **розрахунковий опір матеріалу** R , який знаходиться діленням нормативного опору на **коефіцієнт надійності по матеріалу** γ_i :

$$R = \frac{R''}{\gamma_i} \quad (161)$$

Коефіцієнт надійності по матеріалу враховує мінливість показників міцності матеріалу, так як механічні властивості одного і того ж матеріалу непостійні і можуть змінюватись від багатьох причин. При цьому для природних матеріалів характеристики залежать від умови їх утворення, а для штучних – від особливостей технологічного процесу їх виготовлення та від якості сировини.

Числові значення цього коефіцієнта встановлюються нормами проектування залежно від властивостей матеріалу та інших факторів. В розрахунок за несучою здатністю коефіцієнт γ_i приймається не менше 1,1.

Температура, вологість та агресивність середовища, тривалість дії навантаження, особливості технології виготовлення конструкцій та інші фактори, що не враховані безпосередньо в розрахунках, які не відображені при встановленні розрахункових характеристик, але здатні

вплинути на несучу здатність конструкцій, враховуються коефіцієнтами **умови роботи** γ_s .

Числові значення коефіцієнтів γ_s встановлені відповідними нормативними документами.

Можливі відхилення значень навантажень від нормативних враховуються коефіцієнтами надійності по навантаженню γ_f , що встановлені з врахуванням призначення будівель і споруд та умов їх експлуатації.

Навантаження, що прийняті в розрахунках конструкцій, які отримуються множенням їх нормативних значень (F^H , q^H) на відповідні коефіцієнти γ_b , називаються розрахунковими навантаженнями (F , q).

Ступінь відповідальності і капітальності будівель і споруд, а також значимість наслідків настання граничного стану враховуються в необхідних випадках **коефіцієнтом призначення конструкцій** γ_n .

Таким чином, в методі розрахунку конструкцій за граничним станом коефіцієнти γ_i , γ_f , γ_s , γ_n введені замість колишнього загального коефіцієнта запасу міцності. Значення їх наведені в будівельних нормах для кожного виду конструкцій. Окреме врахування впливу мінливості навантаження, механічних характеристик матеріалів, загальних умов роботи конструкцій та інших факторів на несучу здатність конструкцій дозволяє точніше визначити величини цих коефіцієнтів, ніж єдиний загальний коефіцієнт запасу міцності.

Основна розрахункова формула для граничного стану першої групи, тобто за несучою здатністю, в загальному вигляді може бути представлена так:

$$N \leq \Phi, \quad (162)$$

де N – розрахункове зусилля в елементі конструкції, визначається як сума зусиль від розрахункових навантажень;

Φ – розрахункова несуча здатність, що є функцією геометричних характеристик поперечного перерізу, розрахункового опору матеріалу і коефіцієнтів умов роботи конструкцій.

Розрахункова несуча здатність конструкції визначається не за нормативним, а за розрахунковим опором матеріалів, тому вона є найменшою вірогідною величиною несучої здатності, при якій гарантується належна міцність конструкції.

Тобто, суть формули (162) полягає в тому, *щоб найбільше розрахункове зусилля в елементі не перевищувало його найменшої несучої здатності.*

Формула для розрахунку за граничним станом другої групи – за непридатністю до нормальної експлуатації має вигляд

$$f_{max} \leq \Delta \quad (163)$$

Це значить, що найбільші переміщення (прогини, зсуви, кути повороту) не повинні перевищувати нормативного переміщення.

Для кожного виду деформацій формула (156) буде мати свій вигляд для граничного стану першої групи.

Осьовий розтяг та стиск

$$N = N_g + N_p \leq \gamma_s R F_{HT}, \quad (164)$$

де $N_g = N_g^n \gamma_{f(g)}$, $N_p = N_p^n \gamma_{f(p)}$ – розрахункові поздовжні сили від постійних та тимчасових нормативних навантажень, помножених на відповідні коефіцієнти надійності по навантаженню;

F_{HT} – площа перерізу (нетто) елемента конструкції.

Формулу (164) можна прочитати так: *найбільша розрахункова поздовжня сила в елементі конструкції не повинна перевищувати його мінімальної несучої здатності.*

Коли в розрахунок вводиться декілька видів постійних та тимчасових навантажень і кожний з них має свій коефіцієнт надійності по навантаженню, в лівій частині формули (164) буде відповідне число доданків.

Приклад 45. Визначити площу поперечного перерізу цегляного стовпа підвального приміщення житлового будинку, якщо нормативне постійне навантаження (власна вага кладки та перекриття) $F^n=900$ кН, тимчасове нормативне навантаження (корисне навантаження на перекриття) $Q^n=200$ кН. Висота стовпа – 2,4 м; $R = 1,5$ МПа.

Розв’язок. Із будівельних норм коефіцієнт надійності по навантаженню для власної ваги $\gamma_{f(g)}=1,1$, для тимчасового навантаження $\gamma_{f(p)} = 1,4$.

Визначаємо розрахункову поздовжню силу.

$$N = F^n \gamma_{f(g)} + Q^n \gamma_{f(p)} = 900 \times 1,1 + 200 \times 1,4 = 1270 \text{ кН}$$

За формулою (164) $N \leq \gamma_s R F_{HT}$ знаходимо

$$F_{HT} = \frac{N}{\gamma_s R} = \frac{1270}{1,0 \cdot 1,500} = 0,847 \text{ м}^2$$

де $\gamma_s = 1$ для стовпів площею більше $0,3 \text{ м}^2$, $R = 1,5 \text{ МПа} = 1500 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$.

Приймаємо переріз стовпа квадратним, $a = \sqrt{0,847} = 0,92 \text{ м}$, тобто переріз стовпа має бути не менше ніж $92 \times 92 \text{ см}$.

Зсув (зріз, сколювання)

При розрахунку заклепочних з'єднань загальна формула розрахунку за несучою здатністю (162) для заклепок може бути представлена у вигляді:

$$N_{зр} \leq \gamma_s \cdot R_{зр} \cdot n \cdot n_{зр} \cdot A_{зр}, \quad (165)$$

де $N_{зр}$ – розрахункове зусилля зрізу в з'єднанні;

γ_s – коефіцієнт умов роботи з'єднання;

$R_{зр}$ – розрахунковий опір заклепок зрізу;

n – число робочих заклепок в з'єднанні;

$n_{зр}$ – число робочих зрізів однієї заклепки;

$A_{зр}$ – площа зрізу однієї заклепки.

Тобто найбільше розрахункове зусилля в з'єднанні не повинно перевищувати його мінімальної несучої здатності при роботі на зріз.

При розрахунку з'єднання на зминання формула (162) буде мати вигляд:

$$N_{зм} \leq \gamma_s \cdot R_{зм} \cdot n \cdot A_{зм}, \quad (165')$$

де $R_{зм}$ – розрахунковий опір заклепок зминанню;

$A_{зм}$ – площа зминання однієї заклепки.

Покажемо на прикладі застосування формул (165) і (165') при розрахунках несучої здатності заклепочного з'єднання на зріз і зминання. При цьому для наочного порівняння результатів розрахунку з методом за допустимими напругами, розв'яжемо задачу в прикладі 16.

Приклад 46. Визначити необхідну кількість заклепок для з'єднання сталених листів (рис. 41) та перевірити несучу здатність (міцність) з'єднання в його небезпечному перерізі. Розтягуюча сила $F^H = 250 \text{ кН}$ складається із постійної $F_g = 70 \text{ кН}$ і тимчасової $F_p = 180 \text{ кН}$ навантажень: $\gamma_{f(g)} = 1,1$, $\gamma_{f(p)} = 1,4$, $\gamma_s = 1$. Розрахунковий опір заклепок $R_{зр} = 140 \text{ МПа}$, $R_{зм} = 340 \text{ МПа}$; листів $R = 210 \text{ МПа}$.

Розв'язок. Знаходимо величину розрахункового зусилля:

$$N_{зр} = N_g + N_p = F_g \gamma_{f(g)} + F_p \gamma_{f(p)} = 70 \cdot 1,1 + 180 \cdot 1,4 = 329 \text{ кН} .$$

Необхідна кількість заклепок з формули (165) із розрахунку на зріз

$$n_{зр} = \frac{N_{зр}}{\gamma_s \cdot R_{зр} \cdot n_{зр} \cdot A_{зр}} = \frac{329 \cdot 4}{1 \cdot 14 \cdot 1,3 \cdot 1,4 \cdot 2,3^2} = 5,66 \approx 6$$

$$\text{де } R_{зр} = 140 \text{ МПа} = 14 \text{ кН/см}^2, A_{зр} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2,3^2}{4}$$

Із розрахунку на зминання

$$n_{зм} = \frac{N_{зм}}{\gamma_s \cdot R_{зм} \cdot A_{зм}} = \frac{329}{1 \cdot 34 \cdot 1,2 \cdot 2,3} = 3,5 \approx 4,$$

$$\text{де } R_{зм} = 340 \text{ МПа} = 3,4 \text{ кН/см}^2, A_{зм} = \delta \cdot d = 1,2 \cdot 2,3 = 2,76 \text{ см}^2$$

Приймаємо кількість заклепок із розрахунку на зріз – 6 шт.

Перевіримо міцність з'єднання в ослабленому перерізі за формулою (164)

$$N \leq \gamma_s \cdot R \cdot A_{HT}$$

або

$$N = 329 \text{ кН} < 1 \cdot 21 \cdot 20,52 = 430,92 \text{ кН},$$

$$\text{де } A_{HT} = 20,52 \text{ см}^2 \text{ (див. приклад 16),}$$

тобто умова виконується.

Визначення несучої здатності дерев'яних з'єднань при розрахунках на сколювання проводять за формулою

$$N \leq \gamma_s \cdot R_{ск} \cdot A_{ск}, \quad (166)$$

де N – розрахункове зусилля;

$R_{ск}$ – розрахунковий опір деревини сколювання;

$A_{ск}$ – розрахункова площа сколювання;

При розрахунках на зминання елементів з'єднання користуються формулою

$$N \leq \gamma_s \cdot R_{зм} \cdot A_{зм}, \quad (167)$$

де $R_{зм}$ – розрахунковий опір деревини зминанню;

$A_{зм}$ – розрахункова площа зминання.

Розв'яжемо приклад 18, користуючись формулами (166) і (167), якщо розрахунковий опір сколюванню вздовж волокон $R_{ск} = 2,4 \text{ МПа}$, а зминання – $R_{зм} = 13 \text{ МПа}$. Стискаюче зусилля у крові

$N_1^H = 50 \text{ кН}$ отримане в результаті дії постійного $N_g = 10 \text{ кН}$ і тимчасового $N_p = 40 \text{ кН}$ навантажень; $\gamma_{f(g)} = 1,1$, $\gamma_{f(p)} = 1,4$, $\gamma_s = 1,0$.

Розв'язок. Розрахункове зусилля у крокві

$$N = N_g + N_p = N_g \gamma_{f(g)} + N_p \gamma_{f(p)} = 10 \cdot 1,1 + 40 \cdot 1,4 = 67 \text{ кН}.$$

Розрахункові зусилля вздовж волокон дорівнюють:

$$N_{\text{ск}} = N_{\text{зм}} = H = N \cdot \cos 30^\circ = 67 \cdot 0,866 = 58,02 \text{ кН}$$

Необхідна площа сколювання

$$A_{\text{ск}} = \frac{N_{\text{ск}}}{\gamma_s R_{\text{ск}}} = \frac{58,02}{1,0 \cdot 0,24} = 241,77 \text{ см}^2,$$

де $R_{\text{ск}} = 2,4 \text{ МПа} = 0,24 \text{ кН/см}^2$,

тоді довжина площі сколювання

$$l_{\text{ск}} = \frac{N_{\text{ск}}}{b} = \frac{241,77}{12} = 20,15 \text{ см (в прикладі } 18 \text{ } l_{\text{ск}} = 36,1 \text{ см)}$$

Необхідна площа зминання врубки

$$A_{\text{зм}} = \frac{N_{\text{зм}}}{\gamma_s R_{\text{зм}}} = \frac{58,02}{1,0 \cdot 1,3} = 44,63 \text{ см}^2.$$

Глибина врубки

$$h_1 = \frac{A_{\text{зм}}}{b} = \frac{44,63}{12} = 3,72 \text{ см (в прикладі } 18 \text{ } h_1 = 4,53 \text{ см)}$$

Поперечний згин

Розрахункова формула при згині по першій групі граничного стану має вигляд:

$$M = M_g + M_p \leq \gamma_s R W, \quad (168)$$

де M – розрахунковий згинальний момент;

R – розрахунковий опір матеріалу згину;

W – момент опору перерізу елемента конструкції.

Формула (168) зводиться до наступного: *найбільший розрахунковий згинальний момент в перерізі бруса не повинен перевищувати його мінімальної несучої здатності при згині.*

Для розрізних сталевих балок двотаврового та швелерного перерізів, закріплених від втрати стійкості та навантажених статичним навантаженням у формулі (168) вводиться пластичний момент опору (див. § 63):

$W_n = 1,12W$ – при згині в площині стінки;

$W_n = 1,2W$ – при згині в площині полиць.

При наявності зони частого згину відповідний момент опору приймається рівним $0,5 (W+W_n)$.

Приклад 47. Підібрати переріз двотаврової сталльної балки (рис. 127), закріпленої від втрати стійкості, якщо $F^H=50 \text{ кН}$, $g^H=13 \text{ кН}$. Навантаження складається із 30% постійного та 70% тимчасового навантаження, $R=210 \text{ МПа}$, $\gamma_{f(g)}=1,1$, $\gamma_{f(p)}=1,4$, $\gamma_s=1$.

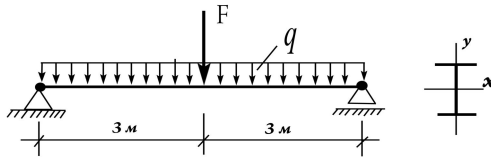


Рис. 127

Розв'язок. Знаходимо розрахункові значення навантажень:

$$F = F^H \cdot 0,3 \cdot \gamma_{f(g)} + F^H \cdot 0,7 \gamma_{f(p)} = 50 \cdot 0,3 \cdot 1,1 + 50 \cdot 0,7 \cdot 1,4 = 65,5 \text{ кН}.$$

$$g = g^H \cdot 0,3 \cdot \gamma_{f(g)} + g^H \cdot 0,7 \gamma_{f(p)} = 13 \cdot 0,3 \cdot 1,1 + 13 \cdot 0,7 \cdot 1,4 = 17,03 \text{ кН}.$$

Розрахунковий згинальний момент

$$M_x = \frac{F \cdot 3}{2} + \frac{g l^2}{8} = \frac{65,5 \cdot 3}{2} + \frac{17,03 \cdot 6^2}{8} = 174,89 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Із формули (168) визначаємо необхідний момент опору, причому переріз підбираємо за пластичним моментом, тобто формула (168) буде мати вигляд

$$M_x \leq \gamma_s \cdot R \cdot 1,12 \cdot W_x,$$

звідки

$$W_x \leq \frac{M_x}{\gamma_s \cdot R \cdot 1,12} = \frac{174,89 \cdot 100}{1,12 \cdot 1,0 \cdot 21} = 743,5 \text{ см}^3$$

де $R=210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $M=174,89 \text{ кН} \cdot \text{м} = 17489 \text{ кН} \cdot \text{см}$.

За таблицями сортаменту приймаємо двотавр № 36 з $W_x=743 \text{ см}^3$.

Підберемо переріз методом допустимих напруг:

$$M_{x(max)} = \frac{F^H \cdot 3}{2} + \frac{g^H \cdot l^2}{8} = \frac{50 \cdot 3}{2} + \frac{13 \cdot 6^2}{8} = 75 + 58,5 = 133,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

тоді

$$W_x = \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{133,5 \cdot 100}{16} = 834,4 \text{ см}^3$$

Потрібно прийняти двотавр №40 з $W_x = 953 \text{ см}^3$.

Таким чином, переріз балки, що розрахована за методом граничного стану, економніший на $\frac{834,4 - 743,5}{834,4} \cdot 100\% = 10,9\%$.

Поздовжній згин

При розрахунку центрально стиснених стержнів на поздовжній згин за методом граничного стану формула, що виражає умову збереження стійкості стержня, має вигляд:

$$N \leq \gamma_s \cdot \varphi \cdot R \cdot A_{\text{бр}} \quad (169)$$

При цьому зберігаються ті ж значення коефіцієнтів φ , які приймалися для розрахунків за методом допустимих напруг.

Приклад 48. Підібрати переріз рівностійкої центрально стисненої колони із двох швелерів (рис. 128), з'єднаних між собою стальними планками. Навантаження $F^u = 500 \text{ кН}$ складається із постійного (25%) і тимчасового (75%). Вважати коефіцієнти надійності по навантаженню для постійного $\gamma_{f(g)} = 1,1$, для тимчасового $\gamma_{f(g)} = 1,2$, коефіцієнт умови роботи $\gamma_s = 0,95$, розрахунковий опір для сталі $R = 210 \text{ МПа}$.

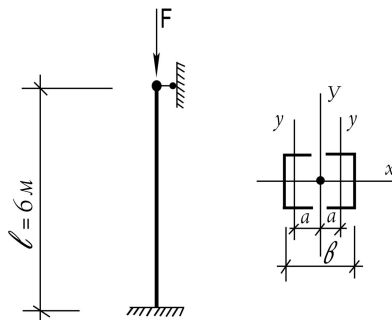


Рис. 128

Розв'язок. Знаходимо розрахункову поздовжню силу
 $N = F = F^u \cdot 0,25 \cdot \gamma_{f(g)} + F^u \cdot 0,75 \gamma_{f(p)} = 500 \cdot 0,25 \cdot 1,1 + 500 \cdot 0,75 \cdot 1,2 = 587,5 \text{ кН}$

Розрахунок відносно матеріальної осі x .

Із умови стійкості

$$\frac{N}{\varphi \cdot A} \leq \gamma_s \cdot R.$$

Задавшись для першого наближення коефіцієнтом поздовжнього згину $\varphi = 0,75$, знаходимо потрібну площу перерізу колони

$$A = \frac{N}{\varphi \cdot \gamma_s \cdot R} = \frac{587,5}{0,75 \cdot 0,95 \cdot 21} = 39,26 \text{ см}^2,$$

де $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$.

За сортаментом приймаємо два швелера № 16а з площею $A = 2 \cdot 19,5 = 39 \text{ см}^2$ та радіусом інерції $i_x = 6,49 \text{ см}$.

Тоді відповідна гнучкість колони

$$\lambda_x = \frac{l_{розр}}{i_x} = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 600}{6,49} = 64,8.$$

Коефіцієнт φ по інтерполяції (додаток 7):

$$\varphi_1 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 4,8 = 0,836.$$

Перевіряємо напругу

$$\sigma = \frac{N}{\varphi_1 \cdot A} = \frac{587,5}{0,836 \cdot 39} = 18,02 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < \gamma_s \cdot R = 0,95 \cdot 21 = 19,95 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Недонапруга складає

$$\frac{19,95 - 18,02}{19,95} \cdot 100\% = 9,67\%, \text{ що недопустимо.}$$

Приймаємо два швелера №16 з $A = 2 \cdot 18,1 = 36,2 \text{ см}^2$ та $i_x = 6,42 \text{ см}$.

Відповідна гнучкість колони

$$\lambda_x = \frac{0,7 \cdot 600}{6,42} = 65,42.$$

коефіцієнт φ_2 по інтерполяції

$$\varphi_2 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 5,42 = 0,833.$$

Тоді напруга

$$\sigma = \frac{N}{\varphi_2 \cdot A} = \frac{587,5}{0,836 \cdot 36,2} = 19,48 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < \gamma_s \cdot R = 19,95 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Недонапруга складає

$$\frac{19,95 - 19,48}{19,95} \cdot 100\% = 2,36\%, \text{ що допустимо.}$$

Остаточню приймаємо переріз із двох швелерів № 16.

Розрахунок на стійкість колони відносно вільної осі y зводиться до визначення відстані e між швелерами (рис. 128). При цьому в розрахунок вводиться не гнучкість $\lambda_y = \frac{l_{розр}}{i_y}$, а так звана приведена

гнучкість λ_{np} , яка внаслідок деформації з'єднувальних планок більша λ_y , і для цього випадку визначається за формулою $\lambda_{np} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_e^2}$, де $\lambda_e = \frac{l_e}{i_e}$ – гнучкість ділянки швелера між планками, відносно власної

осі u ; вона приймається в межах 30...40.

Відстань e між швелерами знайдемо із умови рівності стійкості в двох площинах:

$$\lambda_{np} = \lambda_x.$$

Тоді потрібна гнучкість відносно вільної осі

$$\lambda_y = \sqrt{\lambda_{np}^2 - \lambda_e^2} = \sqrt{\lambda_x^2 - \lambda_e^2} = \sqrt{65,42^2 - 30^2} = 58,14.$$

Потрібний радіус інерції перерізу

$$i_y = \frac{l_{розр}}{\lambda_y} = \frac{0,7 \cdot 600}{58,14} = 7,22 \text{ см}$$

Потрібний момент інерції перерізу

$$I_y = A \cdot i_y^2 = 36,2 \cdot 7,22^2 = 1889 \text{ см}^4$$

З іншої сторони

$$I_y = 2(I_y^{шв} + A^{шв} \cdot a^2) = 2(63,3 + 18,1 \cdot a^2)$$

Порівнюючи праві частини обох рівнянь, маємо:

$$2 \cdot (63,3 + 18,1 \cdot a^2) = 1889 \text{ або } 63,3 + 18,1 \cdot a^2 = 944,5 \text{ см}^4,$$

звідки

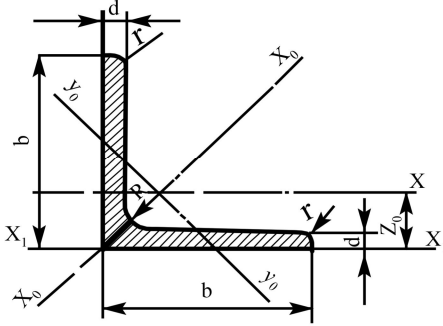
$$a = \sqrt{\frac{944,5 - 63,3}{18,1}} = 6,98 \text{ см} \approx 7 \text{ см.}$$

Із рис. 128 видно, що $e = 2(a + z_0^{шв}) = 2(7 + 1,8) = 17,6 \text{ см.}$

Питання для самоконтролю

1. В чому суть методу розрахунку за руйнівними навантаженнями?
2. В чому недолік методу за руйнівними навантаженнями?
3. Що називається граничним станом?
4. В чому суть розрахунку за граничним станом?
5. Які основні коефіцієнти прийняті замість єдиного коефіцієнта запасу міцності?
6. Що таке нормативне та розрахункове навантаження?
7. Що таке нормативний та розрахунковий опір матеріалів?

Сортамент прокатної сталі
Сталь прокатна кутова рівнобока (ГОСТ 8509 – 72)



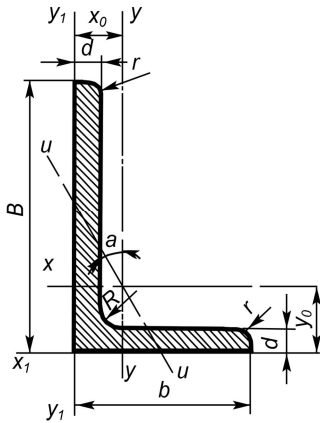
Позначення:
 b – ширина полиці;
 d – товщина полиці;
 R – радіус внутрішнього заокруглення;
 r – радіус заокруглення полиці;
 I – момент інерції;
 i – радіус інерції;
 z_0 – відстань від центра ваги до полиці.

Продовження додатка 1

Номер профілю	Розміри		Площа розрізу A	Маса 1 м довжини	Довідкові величини для осей							
	b	d			$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	
					I_x	i_x	$I_{x_0 \max}$	$i_{x_0 \max}$	$I_{y_0 \min}$	$i_{y_0 \min}$	I_{x_1}	z_0
	мм	мм			см ²	кг	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	20	3	1,13	0,89	0,49	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4	1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,28	1,09	0,64
2,5	25	3	1,43	1,12	0,81	0,76	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4	1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	1,62	1,27	1,16	0,85	0,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,05	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,46	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,79	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	256	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	332	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
10	100	14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00

СТАЛЬ ПРОКАТНА КУТОВА НЕРІВНОБОКА (ГОСТ 8510-72)



Позначення:

B – ширина великої полиці;

b – ширина малої полиці;

d – товщина полиці;

R – радіус внутрішнього заокруглення;

r – радіус заокруглення полиці;

I – момент інерції;

i – радіус інерції;

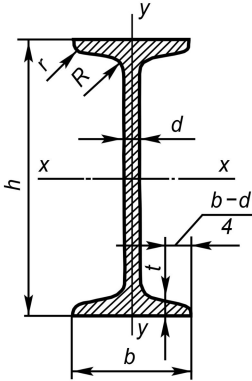
x_0, y_0 – відстані від центру ваги до зовнішніх граней полиць.

Номер профілю	Розміри					Площа перерізу A	Маса Ім довжини	Довідкові величини для осей										
	В	b	d	R	r			$x-x$		$y-y$		x_I-x_I		y_I-y_I		$u-u$		Кут нахилу осі α
								I_x	i_x	I_y	i_y	I_{x_1}	y_0	I_{y_0}	x_0	$I_{u \min}$	$i_{u \min}$	
								мм					см ²	кг	см ⁴	см	см ⁴	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
5.6/3,6	56	36	4 5	6,0	2,0	3,58 4,41	2,81 3,46	11,4 13,8	1,78 1,77	3,70 4,48	1,02 1,01	23,2 29,2	1,82 1,86	6,25 7,91	0,84 0,88	2,19 2,66	0,78 0,78	0,506 0,404
6,3/4.0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			4,98			3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396	
			5,90			4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393	
			7,68			6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,95	0,386	
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406

7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,47	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			7,25			5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435	
			9,47			7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430	
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			7,55			5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	26,2	1,17	8,88	1,08	0,386	
9/5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			8,54			6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384	
			11,8			8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7			11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8			12,6	9,87	123	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10			15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			8			13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8			16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10			19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12			23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	12	4	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10			22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409

**СТАЛЬ ПРОКАТНА – БАЛКИ ДВОТАВРОВІ
(ГОСТ 8239-72)**



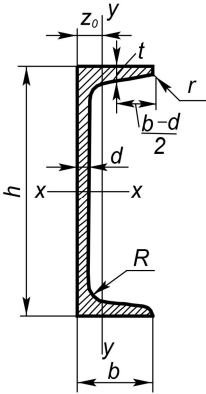
Позначення:

- h – висота балки;
- b – ширина полиці;
- d – товщина стінки;
- t – середня товщина полиці;
- R – радіус внутрішнього заокруглення;
- r – радіус заокруглення полиці;
- I – момент інерції;
- W – момент опору;
- S – статичний момент півперерізу;
- i – радіус інерції.

Но- мер про- філю	Маса 1 м дов- жини	Розміри						Пло- ща пере- різу A	Довідкові величини для осей							
		h	b	d	t	R	r		$x-x$				$y-y$			
									I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y	
		кг	мм						см ²	см ⁴	см ³	см	см ³	см ⁴	см ³	см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	10	4	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11	4,5	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13	5	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,5	14	6	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13,0	15	6	72,6	19062	953	16,20	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	16	7	84,7	27696	1231	18,10	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	17	7	100	39727	1589	19,90	919	1 043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	18	7	118	55962	2035	21,80	1 181	1 356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	20	8	138	76806	2560	23,60	1	1 725	182	3,54

СТАЛЬ ПРОКАТНА – ШВЕЛЕРИ (ГОСТ 8240-72)



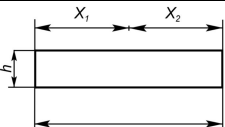
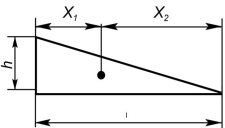
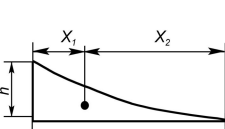
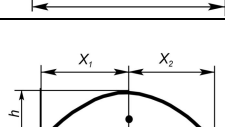
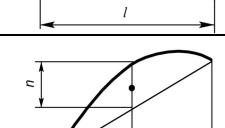
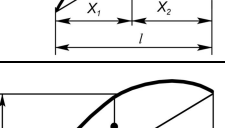
Позначення:

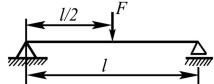
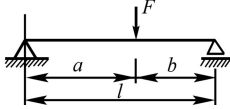
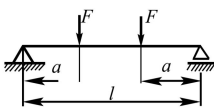
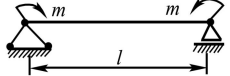
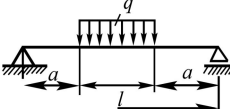
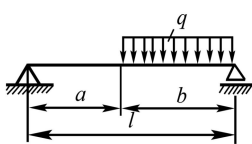
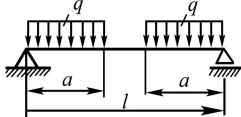
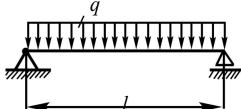
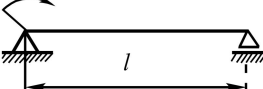
- h – висота швелера;
- b – ширина полиці;
- d – товщина стінки;
- t – середня товщина полиці;
- R – радіус внутрішнього заокруглення;
- r – радіус заокруглення полиці;
- I – момент інерції;
- W – момент опору;
- S – статичний момент півперерізу;
- i – радіус інерції;
- z_0 – відстань від осі y - y до зовнішньої грані стінки

Но- мер про- фі- лю	Ма- са 1 м дов- жи- ни, кг	Розміри						Пло- ща пе- ре- різу A , см^2	Довідкові величини для осей							
		h	b	d	t	R	r		$x-x$				$y-y$			z_0 см
									I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y	
									см^4	см^3	см	см^3	см^4	см^3	см	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	3,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,89	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
На	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16а	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10	4	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10	4	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Додаток 5

Фігура	Площа	Абсиси центру ваги	
		x_1	x_2
	lh	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{2}{3}l$
	$\frac{1}{3}lh$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3}{4}l$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{3}{8}l$	$\frac{5}{8}l$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$

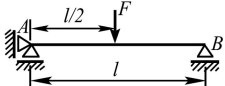
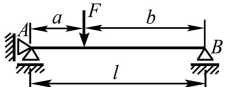
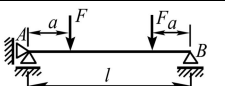
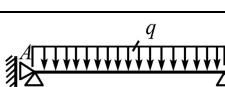
№ з/п	Схема навантаження	Прогин по середині балки
1		$\frac{Fl^3}{48EI}$
2		$\frac{Fb}{48EI} (3l^2 - 4b^2) \text{ при } a > b$ $\frac{Fa}{48EI} (3l^2 - 4a^2) \text{ при } a < b$
3		$\frac{Fa(3l^2 - 4a^2)}{24EI}$
4		$\frac{ml^2}{8EI}$
5		$\frac{qb}{384EI} (8l^3 - 4b^2l + b^3)$
6		$\frac{qb^3l}{48EI} \left(\frac{3l}{2b} - \frac{b}{l} \right) \text{ при } a > b$ $\frac{qb^3l^2}{48EI} \left[1,5 - \frac{b^2}{l^2} + \frac{(l-2a)^4}{8b^2l^2} \right] \text{ при } a < b$
7		$\frac{ml^2}{16EIx}$
8		$\frac{ml^2}{16EI}$
9		$\frac{ml^2}{16EI}$

Додаток 7

Значення коефіцієнтів поздовжнього згину

Гнучкість	Ст3, Ст4	Ст5	Чавун	Дерево (сосна, ялина)	Гнучкість	Ст3, Ст4	Ст5	Чавун	Дерево (сосна, ялина)
0	1	1	1	1	120	0,45	0,37	–	0,22
10	0,99	0,98	0,97	0,99	130	0,40	0,32	–	0,18
20	0,97	0,96	0,91	0,97	140	0,36	0,28	–	0,16
30	0,95	0,93	0,81	0,93	150	0,32	0,25	–	0,14
40	0,92	0,90	0,69	0,87	160	0,29	0,23	–	0,12
50	0,89	0,85	0,57	0,80	170	0,26	0,21	–	0,11
60	0,86	0,80	0,44	0,71	180	0,23	0,19	–	0,10
70	0,81	0,74	0,34	0,61	190	0,21	0,17	–	0,09
80	0,75	0,67	0,26	0,49	200	0,19	0,15	–	0,08
90	0,69	0,59	0,20	0,38	210	0,17	0,14	–	–
103	0,60	0,50	0,16	0,31	220	0,16	0,13	–	–
110	0,52	0,43	–	0,25					

Додаток 8

	A^Φ	B^Φ
	$\frac{Fl^2}{16}$	$\frac{Fl^2}{16}$
	$\frac{Fab(l+b)}{6l}$	$\frac{Fab(l+a)}{6l}$
	$\frac{Fa(l-a)}{2}$	$\frac{Fa(l-a)}{2}$
	$\frac{ql^3}{24}$	$\frac{ql^3}{24}$

Література

1. Улитин Н.С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975.
2. Улитин Н.С. Першин А.Н., Лауенбург Л.В. Сборник задач по технической механике. – М.: Высшая школа, 1978.
3. Баляев Н.М Сопротивление материалов. – М.: Издательство “Наука”, 1965.
4. Портаев Л.П., Петраков А.А., Портаев В.Л. Техническая механика. – М.: Стройиздат, 1987.
5. Тимко И.А. Сопротивление материалов. – Харьков: Издательство Харьковского университета, 1971.
6. Ганич Д.И., Олейник И.С. Русско-украинский словарь. – К.: Радянська школа, 1962.

Навчальне видання

В'ячеслав Станіславович Грабчук

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Навчальний посібник

Українською мовою

Відповідальна за випуск *О. Ткачук*

Редактор *Н. Цибенко*
Комп'ютерна верстка *Т. Кудін*
Дизайнер *І. Понайда*

Підписано до друку 06.10. 2009 р.
Умов. друк. арк. 11,7
Наклад 1000 прим. Зам. № 443

Редакційно-видавничий відділ
Наукметодцентру
Міністерства аграрної політики України
Технікумівська, 1, смт Немішаєве
Бородянського Київської
т/ф (04577) 41-2-69

Свідцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єкта видавничої справи ДК № 2435