В.І. Казановський, А.Г. Африканова,
Н.А. Віштакалюк, О.Л. Дрозденко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано Міністерством аграрної політики та продовольства України як навчальний посібник для студентів аграрних вищих навчальних закладів I–II рівнів акредитації зі спеціальності 5.10010201 "Експлуатація та ремонт машин і обладнання агропромислового виробництва"

Київ
"Аграрна освіта"
2014

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К 14

Гриф надано Міністерством аграрної політики та продовольства України (лист № 18-128-13/278 від 28.02.2012 р.)

Р е ц е н з е н т и :

Цівина Л.М., викладач Хорольського агропромислового коледжу Полтавської ДАА;
Джулай К.І., викладач Новобузького коледжу Миколаївського НАУ;
Вислободська К.М., викладач Золочівського коледжу Львівського НАУ;
Гаран Н.М., Поліхронова В.В., викладачі ВСП "Новокаховський коледж Таврійського ДАТУ"

Вища математика: навчальний посібник / В.І. Казановський, А.Г. Африканова, Н.А. Виштакалюк, О.Л. Дрозденко. – К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

ISBN 978-966-3007-62-6

У навчальному посібнику у доступній для студентів формі викладено основи алгебри і теорії чисел, аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення.

Наведено розв'язки задач, запитання для самоконтролю, що сприяє кращому розумінню і засвоєнню навчального матеріалу.

ISBN 978-966-3007-62-6

ЗМІСТ

ВСТУП

Коротка історична довідка про розвиток математики як науки

Математика є однією з важливих фундаментальних наук. Термін "математика" походить від грецького "матема" – знання. Виникла математика на перших етапах створення людської культури у зв'язку з практичною діяльністю людини. З давніх часів люди, виконуючи різні роботи, зустрічалися з необхідністю виділення і спостереження тих чи інших сукупностей об'єктів, ділянок землі, житлових приміщень тощо. В усіх цих випадках необхідно було встановити кількісні оцінки розглянутих множин, визначати форми плоских і просторових фігур, вимірювати площі і об'єми, порівнювати, обчислювати, перетворювати.

У результаті багатовікової трудової діяльності людей виникли основні абстрактні математичні поняття, такі як число, геометрична фігура, функція, похідна, інтеграл, випадкова подія та її ймовірність. За свою історію математика, що розвивалася в тісному зв'язку з розвитком виробничої діяльності людей і загальнолюдської культури, перетворилася в струнку дедуктивну науку, використовуючи потужний апарат для вивчення навколишнього світу.

Зміст дисципліни та зв'язок її з іншими дисциплінами

Однією з характерних рис сучасного науково-технічного прогресу є суттєве розширення галузей застосування теоретичної і обчислювальної математики на базі широкого застосування методу математичного моделювання й електронно-обчислювальних машин (ЕОМ).

На сьогоднішній день математичні методи і обчислювальна техніка застосовуються не тільки в таких традиційних науках, як механіка, астрономія, фізика, але й в економіці, хімії і навіть у таких, на перший погляд, ніби далеких від математики галузях знань, як соціологія, лінгвістика, біологія, медицина тощо.

Чим пояснити таке широке проникнення математики в інші науки? У першу чергу, більшість напрямів наукової та технічної діяльності людини досягли порівняно високого рівня розвитку і на даному етапі вичерпали можливості описового методу дослідження. У зв'язку з цим подальший успіх можливий лише на базі використання точних кількісних методів дослідження, тобто застосування математичного апарата. По-друге, розвиток самої математики дав можливість створити потужні електронно-обчислювальні машини, які здатні виконувати великі об'єми громіздких обчислень.

Мета вивчення математики у вищих навчальних закладах полягає в тому, щоб поглибити знання з вивчених розділів і ознайомити з деякими новими розділами математики (аналітична геометрія, теорія диференціальних рівнянь, функції багатьох змінних тощо), що розвивають логічне мислення і широко використовуються в математичному моделюванні задач, з якими зустрічається сучасний спеціаліст у своїй практичній діяльності, та збагачують загальну культуру. Крім того, студенти отримують комплекс математичних знань, умінь і навичок, необхідних для вивчення спеціальних дисциплін.

Поняття про математичне моделювання

При вивченні кількісних характеристик складних об'єктів, процесів, явищ використовують метод *математичного моделювання*, який полягає в тому, що закономірності, які розглядаються, формулюються на математичній мові і досліджуються за допомогою відповідних математичних засобів. *Математична модель* об'єкта, який вивчається, записується за допомогою математичних символів і складається із сукупності рівнянь, нерівностей, формул, алгоритмів, програм для ЕОМ, до складу яких входять змінні і постійні величини, різні операції, функції та інші математичні поняття.

Прикладами складання найпростіших математичних моделей є добре відомі з курсу математики середньої школи прийоми розв'язування задач за допомогою рівнянь і системи рівнянь – отримані рівняння чи система рівнянь – це математична модель даної задачі. Це були, як правило, приклади задач з єдиним розв'язком. Але часто зустрічаються задачі, які мають багато розв'язків. У таких випадках на практиці виникає питання про знаходження такого розв'язку, який є найбільш підходящим з тої чи іншої точки зору. Такі розв'язки називаються *оптимальними.* Оптимальні розв'язки визначаються як розв'язки, для яких деяка функція, що називається *цільовою функцією*, приймає при заданих обмеженнях найбільше чи найменше значення. Цільова функція складається з умови задачі і виражає величину, яку потрібно оптимізувати, тобто максималізувати і мінімізувати, наприклад, прибуток, який отримують, кількість ресурсів, що затрачаються, тощо.

Розглянемо типовий приклад задачі оптимального поєднання продукції виробництва.

Для виготовлення двох видів продукції (А і Б), які обробляються на токарних і фрезерних станках, використовується певна кількість сталі і кольорових металів. Прибуток від реалізації одиниці продукції виду А – 3 тис. грн, виду Б – 8 тис. грн. Дані про витрати і ресурси подано в таблиці.

Матеріал, обладнання	Затрати на один виріб		Ресурси
	А	Б	
Сталь (кг)	10	70	3200
Кольорові метали (кг)	20	50	4200
Токарні станки (станко-години)	300	400	62000
Фрезерні станки (станко-години)	200	100	34000

Необхідно визначити такий план виробництва продукції, який забезпечує найбільший прибуток за умови, що час роботи фрезерних станків повинен бути використаний повністю. Побудову математичної моделі задачі почнемо з введення позначень для основних характеристик плану: x – кількість одиниць продукції А, y – продукції Б. Знайдемо відношення між характеристиками плану $(x;\ y)$. На виготовлення продукції за планом $(x;\ y)$ піде $10x + 70y$ кг сталі і $20x + 50y$ кг кольорових металів. Оскільки затрати ресурсів не можуть перевищувати їх запаси, отримуємо нерівності:

$$10x + 70y \le 3200$$

$$20x + 50y \le 4200.$$

Далі час обробки всіх виробів за планом $(x;\ y)$ на токарних станках становить $300x + 400y$ годин, і ця кількість не повинна перевищувати число 62000, а на фрезерних станках – $200x + 100y$

годин і повинно складати 34000. Таким чином, отримуємо співвідношення:

$$300x + 400y \le 62000$$

$$200x + 100y = 34000$$

Враховуючи, що величини x і y не можуть бути від'ємними, отримуємо систему обмежень:

$$\begin{cases} 10x + 70y \le 3200 \\ 20x + 50y \le 4200 \\ 300x + 400y \le 62000 \\ 200x + 100y = 34000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

Довільний розв'язок системи (1) допускається планом у нашому виробництві. З умови задачі легко підрахувати, що прибуток, який дає план ($x;y$), дорівнює $3x+8y$ тис. грн. Позначимо отриманий вираз через F ($x;y$), прийдемо до функції, яка є цільовою:

$$F(x; y) = 3x + 8y \tag{2}$$

Таким чином, математична модель задачі складається з системи (1) і цільової функції (2). Для розв'язку задачі необхідно знайти значення x і y, які задовольняють систему (1), для яких цільова функція (2) приймає найбільші значення.

Дану задачу підібрано так, що вона може бути розв'язана елементарними методами. З четвертого співвідношення виразимо y через x:

$$y = 240 - 2x, \tag{3}$$

підставимо значення y в інші співвідношення, одержимо

$$\begin{cases} x + 7(340 - 2x) \le 320 \\ 2x + 5(340 - 2x) \le 420 \\ 3x + 4(340 - 2x) \le 620` \\ x \ge 0 \\ 170 - x \ge 0. \end{cases}$$

Розв’язуючи кожну з цих нерівностей окремо, знаходимо, що всіх їх задовольняють значення x з відрізка (160; 170), тобто $160 \le x \le 170$. З виразу для цільової функції $F = (x; y) = 3x + 8y = 3x + 8(340–2x) = 2730 - 13x$ видно, що найбільше її значення одержимо при найменш допустимих значеннях x, тобто при $x = 160$. Тоді з (3) отримаємо $y = 20$.

Таким чином, план $x = 160$, $y = 20$ дає найбільший прибуток, який дорівнює F(160; 20) = 640 (тис. грн).

1. АЛГЕБРА І ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1.1. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Наближені значення і похибки наближень (абсолютна і відносна). В практичній діяльності людині доводиться вимірювати різноманітні величини, враховувати матеріали і продукти праці, проводити різноманітні обчислення. Результатами різноманітних вимірювань, підрахунків і обчислень є числа. Числа, що їх одержали в результаті вимірювання, лише наближено, з деяким ступенем точності характеризують шукані величини. Точні вимірювання неможливі в зв'язку з неточністю вимірювальних приладів, недосконалістю наших органів зору та й самі об'єкти, що вимірюються, іноді не дають змоги визначити їхню величину з деякою точністю.

Так, наприклад, відомо, що довжина Суецького каналу – 160 км, відстань залізницею від Києва до Одеси – 502 км. Тут ми маємо результати вимірювань, проведених з точністю до кілометра. Якщо, наприклад, довжина прямокутної ділянки 29 м, ширина 12 м, то вимірювання проведено з точністю до метра, а частками метра знехтували.

Перш ніж провадити яке-небудь вимірювання, необхідно вирішити, з якою точністю його слід виконати, тобто які частки одиниці вимірювання потрібно при цьому брати до уваги, а якими знехтувати.

Якщо маємо деяку величину a, істинне значення якої невідоме, а наближене значення (наближення) цієї величини дорівнює x, то пишуть $a \approx x$.

При різних вимірюваннях тієї самої величини матимемо різні наближення. Кожне з цих наближень відрізняється від істинного значення вимірювальної величини, що дорівнює, наприклад, a, на деяку величину, яку називатимемо *похибкою*.

Означення. Якщо число x є наближеним значенням (наближенням) деякої величини, істинне значення якої дорівнює числу a, то модуль різниці чисел a і x називається абсолютною похибкою цього наближення і позначається $\Delta_a x$ або Δ_a.

Отже, за означенням,

$$\Delta_a x = |a - x|. \tag{4}$$

Із цього означення випливає, що

$$a = x \pm \Delta_a x\,. \tag{5}$$

Якщо відомо, про яку величину йде мова, то в позначенні $\Delta_a x$ індекс a опустимо і рівність (6) запишемо так:

$$a = x \pm \Delta x\,. \tag{6}$$

Приклад. Як відомо, $\dfrac{1}{3} = 0{,}333...$

Обчислимо абсолютну похибку наближення 0,333:

$$\Delta x = \left|\frac{1}{3} - 0{,}333\right| = \left|\frac{1000}{3000} - \frac{9999}{3000}\right| = \frac{1}{3000}\,.$$

Оскільки істинне значення шуканої величини часто невідоме, то неможливо знайти й абсолютну похибку наближення цієї величини. Можна лише вказати в кожному конкретному випадку додатне число, більшим за яке не може бути ця абсолютна похибка. Це число називається *межею абсолютної похибки* наближення величини a і позначається h_a.

Отже, якщо x – довільне наближення величини a при заданій процедурі одержання наближень, то

$$\Delta_a x = |a - x| \le h_a\,. \tag{8}$$

Із сказаного вище випливає, що коли h_a є межею абсолютної похибки наближення величини a, то й будь-яке число, яке більше ніж h_a, також буде межею абсолютної похибки наближення величини a.

На практиці прийнято межею абсолютної похибки брати якомога менше число, що задовольняє нерівність (8).

Розв’язавши нерівність $|a - x| \le h_a$, дістанемо, що a взяте в межах

$$x - h_a \le a \le x + h_a .$$

Точніше поняття межі абсолютної похибки можна сформулювати так.

Нехай X – множина будь-яких можливих наближень x величини a при заданій процедурі одержання наближень. Тоді будь-яке число h, що задовольняє умову $|a - x| \le h$ при будь-якому $x \in X$, називається *межею абсолютної похибки* наближень на множині X. Позначимо через h_a найменше з відомих чисел h. Це число h_a і вибирають на практиці як межу абсолютної похибки.

Приклад. Запис $\pi \approx 3{,}14$ означає, що 3,14 – наближене значення (наближення) числа π. Абсолютна похибка цього наближення

$$|\pi - 3{,}14| = 0{,}0015926..$$

Оскільки $0{,}0015926.. < 0{,}002$, то як межу абсолютної похибки можна взяти число 0,002.

Абсолютна похибка наближення не характеризує якості вимірювань. Справді, якщо ми вимірюємо з точністю до 1 см якусь-небудь довжину, то у випадку, коли йдеться про визначення довжини олівця, це буде недостатня точність. Якщо з точністю до 1 см визначити довжину або ширину волейбольного майданчика, то це буде висока точність.

Розглянемо ще один приклад. Отримали результати вимірювань довжини і діаметра провідника: довжина провідника $l = 10{,}0 \pm 0{,}1$ м, діаметр $D = 2{,}5 \pm 0{,}1$ мм. Яке з цих вимірювань більш точне?

При вимірюванні довжини провідника допущено похибку 0,1 м = 100 мм, а при вимірюванні діаметра провідника – 0,1 мм. Здавалось би, що точніше виміряний діаметр провідника. Але це не так.

При вимірюванні довжини провідника допущено абсолютну похибку, яка становить 100 мм на 10000 мм довжини, і, таким чином, похибка становитиме $\dfrac{100}{10000} = 0{,}01 = 1\%$ вимірюваної величини. При вимірюванні діаметра похибка становить

$\frac{0,1}{2,5} = 0,04 = 4\%$ вимірюваної величини. Отже, вимірювання довжини провідника виконано точніше.

Для характеристики точності вимірювань вводять поняття відносної похибки.

Означення. Якщо $\Delta_a x$ є абсолютною похибкою наближення x деякої величини, істинне значення якої дорівнює числу a, то відношення $\Delta_a x$ до модуля числа x називається відносною похибкою наближення і позначається $\omega_a x$ або ωx.

Отже, за означенням,

$$\omega_a x = \frac{\Delta_a x}{|x|}. \tag{9}$$

Відносну похибку, як правило, виражають у відсотках.

У розглянутому вище прикладі відносна похибка при вимірюванні довжини провідника дорівнює 1%, при вимірюванні діаметра провідника – 4%.

На відміну від абсолютної похибки, яка найчастіше буває розмірною величиною, відносна похибка – безрозмірна величина.

В п. 1 вказано на труднощі визначення абсолютної похибки наближення. Це можна сказати й про відносну похибку. Тому на практиці розглядають не відносну похибку, а так звану межу відносної похибки, тобто таке число E_a, більше за яке не може бути відносна похибка наближення шуканої величини.

Отже, $\omega_a x \le E_a$.

Якщо h_a – межа абсолютної похибки наближень величини a, то $\Delta_a x \le h_a$ і, отже,

$$\omega_a x = \frac{\Delta_a x}{|x|} \le \frac{h_a}{|x|}.$$

Очевидно, що будь-яке число E, яке задовольняє $\frac{h_a}{|x|} \le E$, буде межею відносної похибки. На практиці, як правило, відомі деяке наближення x величини a і межа абсолютної похибки. Тоді за межу відносної похибки беруть число

$$E_a = \frac{h_a}{|x|}. \tag{10}$$

Приклад. Якщо $\pi \approx 3{,}14$, то $\Delta_\pi < 0{,}002$,

$$\omega_\pi x < \frac{0{,}002}{3{,}14} < 0{,}0007$$

і, таким чином, $E_\pi = 0{,}07\%$.

Іноді зручно замість E_a писати $E(a)$.

Поняття межі відносної похибки можна дати і так.

Нехай X – множина різних наближень x величини a при заданому процесі одержання наближень. Тоді будь-яке число E, що задовольняє умову $\dfrac{\Delta_a x}{|x|} \le E$ при будь-якому $x \in X$, називається *межею відносної похибки* наближень із множини X. Через E_a позначимо найменше з відомих чисел E. Це число E_a й вибиратимемо як межу відносної похибки.

Запис наближень. При записі числа, знайденого в результаті вимірювання, як правило, показують межу його абсолютної похибки.

Наприклад, якщо результат вимірювання, виконаного з точністю до 0,5 см, дорівнює 112 см, то записують це так:

112 см $\pm$ 0,5 см.

Однак при обчисленнях часто буває важко вказувати поряд з наближеннями їхні похибки. При записі наближень без вказівки похибки потрібно, щоб на основі цього запису можна було робити висновок про межу його похибки. Для цього вводять поняття правильної цифри.

Цифра α в запису наближення називається *правильною*, якщо межа абсолютної похибки не перевищує одиниці того розряду, в якому записано цю цифру.

Наприклад, в наближенні числа π, що дорівнює 3,14, всі цифри правильні, оскільки його межа абсолютної похибки $0{,}002 < 0{,}01$.

Зрозуміло, що коли α правильна цифра, то й всі попередні цифри також правильні.

Якщо межа абсолютної похибки наближення більша за одиницю деякого його розряду, то цифру цього розряду (і всіх наступних розрядів) називають *сумнівною*.

Рекомендують записувати наближення, якщо не вказано межу його абсолютної похибки, так, щоб усі записані цифри були правильні.

Наприклад, якщо записано число 23,47, яке є наближенням деякої величини, то це означає, що всі цифри числа 23,47 правильні, а межа абсолютної похибки цього числа не перевищує 0,01.

Якщо при обчисленнях ці числа мають кілька сумнівних цифр, то їх потрібно попередньо округлити, зберігаючи при цьому одну сумнівну цифру. Знайдений результат слід округлити так, щоб в ньому всі цифри були правильними, причому всі його сумнівні цифри відкидають за правилами округлення, якщо це десяткові знаки числа, і замінюють нулями, якщо це цифри цілої частини числа.

Приклад. Нехай число 14535 є наближення деякої шуканої величини, межа абсолютної похибки якого дорівнює 50. Останні дві цифри числа 14535 сумнівні. Тоді при округленні числа 14535 одержимо число 14500; однак в іншому якому-небудь випадку можемо одержати число 14500, в якого всі цифри правильні. Щоб розрізнити ці два випадки, число, в якому нулі записано замість сумнівних цифр, запишемо так: $145 \cdot 10^2$, або $14{,}5 \cdot 10^3$.

Нехай число x є наближенням деякої шуканої величини. Усі правильні цифри числа x, крім нуля, які розміщені ліворуч від першої відмінної від нуля цифри, називаються *значущими цифрами*.

Наприклад, у числі 3,14 – три значущі цифри, у числі 0,01255 – чотири, у числі 0,108 – три, у числі 0,1200 – чотири, у числі $126 \cdot 10^3$ – три значущі цифри.

Округлення чисел. Похибка округлення. При виконанні обчислень часто виникає потреба в округленні чисел, тобто в заміні їх числами з меншою кількістю значущих цифр.

Існують три способи округлення чисел:

1. *Округлення з недостачею* до k-ї значущої цифри полягає у відкиданні всіх цифр, починаючи з $(k+1)$-ї.

2. *Округлення з надлишком* відрізняється від округлення з недостачею тим, що остання збережена цифра збільшується на 1.

3. *Округлення з найменшою похибкою* відрізняється від округлення з надлишком тим, що збільшення на одиницю останньої збереженої цифри проводиться лише в тому випадку, коли перша з відкинутих цифр більша за 4.

Виняток: якщо округлення з найменшою похибкою зводиться до відкидання лише однієї цифри 5, то остання збережена цифра не змінюється, якщо вона парна, і збільшується на 1, якщо вона непарна.

Для ілюстрації цих означень розглянемо таблицю.

Число 274,67	Результат округлення		
	з недостачею	з надлишком	з найменшою похибкою
До 4-ї значущої цифри	274,6	274,7	274,7
До 3-ї значущої цифри	274	275	275
До 2-ї значущої цифри	$27\cdot10^1$	$28\cdot10^1$	$27\cdot10^1$
До 1-ї значущої цифри	$2\cdot10^2$	$3\cdot10^2$	$3\cdot10^2$

Із вказаних вище правил округлення наближених чисел випливає, що похибка, зумовлена округленням з найменшою похибкою, не перевищує половини одиниці останнього збереження розряду, а при округленні з недостачею або з надлишком похибка може бути і більша за половину одиниці останнього збереження розряду, але не більша за цілу одиницю цього розряду.

Розглянемо це на прикладі.

Приклад. Дано $x = 723{,}467$. Після округлення до 5-ї значущої цифри з найменшою похибкою матимемо $x \approx 723{,}47$, причому

$$\Delta x = 0{,}003 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$$

Якщо число x є наближенням деякої величини, то при округленні чисел x до його початкової похибки додається ще похибка, зумовлена округленням.

Приклад. Число 7,436 є наближенням шуканої величини, істинне значення якої дорівнює числу a, тобто $a \approx 7{,}436$. Згідно з правилом запису наближень межа абсолютної похибки цього наближення дорівнює 0,001. Округлимо число 7,436 до 2-ї значущої цифри. Тоді $a \approx 7{,}4$ з похибкою $\Delta a = 0{,}001 + 0{,}036 = 0{,}037$, де число 0,036 – похибка округлення.

Похибки обчислень з наближеними даними (похибка суми, різниці, добутку, частки, степеня і кореня) Нехай x – деяке наближення величини a, y – деяке наближення величини b. Нехай Δx і Δy – абсолютні похибки відповідних наближень x і y. Знайдемо межу абсолютної похибки h_{a+b} суми $x + y$, яка буде наближенням суми $a + b$. Маємо $a = x + \Delta x$, $b = y + \Delta y$.

Додамо до першої рівності другу, одержимо

$$a + b = x + y + \Delta x + \Delta y .$$

Очевидно, що похибка суми наближень x і y дорівнює сумі похибок доданків, тобто

$$\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y .$$

Відомо, що модуль суми менший або дорівнює сумі модулів доданків. Тому

$$\left|\Delta(x + y)\right| = \left|\Delta x + \Delta y\right| \le \left|\Delta x\right| + \left|\Delta y\right|. \tag{11}$$

Звідси випливає, що абсолютна похибка суми наближень не перевищує суми абсолютних похибок доданків. Отже, за межу абсолютної похибки суми можна взяти суму меж абсолютних похибок доданків.

Позначивши границю абсолютної похибки величини a через h_a, а величину b через h_b, одержимо

$$h_{a+b} = h_a + h_b . \tag{12}$$

Приклад. Щоб знайти периметр трикутника, виміряли його сторони. Отримали: $a = 63{,}4 \pm 0{,}1$ м, $b = 47{,}8 \pm 0{,}1$ м, $c = 73{,}1 \pm 0{,}1$ м. Тоді

$$P \approx a + b + c = 63{,}4 \text{ м} + 47{,}8 \text{ м} + 73{,}1 \text{ м} \approx 184{,}3 \text{ м},$$

$$h_{a+b+c} = h_a + h_b + h_c = 0{,}3 \text{ м}$$

Отже, $P = 184{,}3 \pm 0{,}3$ м.

Із формули (12) випливає, що межа абсолютної похибки суми не може бути менша за межу абсолютної похибки кожного наближення, навіть найменш точного. З яким би ступенем точності не було визначено другий доданок, ми не можемо за його рахунок збільшити точність суми.

Звідси випливає правило додавання наближень, яке іноді застосовують при обчисленнях.

При додаванні чисел – наближень деяких величин у сумі потрібно залишити стільки цифр після коми, скільки їх має те наближення, яке входить до суми з найменшим числом цифр після коми.

Приклад. Обчислити суми наближень

$$3{,}21017 + 0{,}43 + 0{,}027215 .$$

Округлимо перший і третій доданки так, щоб після коми було дві цифри, і виконаємо додавання. Одержимо $3{,}21 + 0{,}43 + 0{,}03 = 3{,}67$.

Якщо б ми виконали додавання, не округлюючи доданків, то в сумі дістали б число 3,667385, межа абсолютної похибки якого дорівнює 0,010011. Отже, в числі 3,667385 цифри останніх чотирьох розрядів сумнівні і їх потрібно відкинути.

Нехай Δx і Δy – похибки наближень x і y відповідно величин a і b. Тоді

$$a = x + \Delta x,\ b = y + \Delta y .$$

Віднімемо від першої рівності другу. Одержимо

$$a - b = (x - y) + (\Delta x - \Delta y) .$$

Очевидно, що похибка різниці наближень дорівнює різниці похибок зменшуваного і від’ємника, тобто

$$\Delta(x - y) = \Delta x - \Delta y,$$

або

$$\Delta(x - y) = \Delta x + (-\Delta y).$$

Далі, міркуючи так, як і у разі додавання, матимемо

$$\left|\Delta(x - y)\right| = \left|\Delta x + (-\Delta y)\right| \le \left|\Delta x\right| + \left|\Delta y\right|.$$

Звідси випливає, що абсолютна похибка різниці не перевищує суми абсолютних похибок зменшуваного і від’ємника.

За межу абсолютної похибки різниці можна взяти суму меж абсолютних похибок зменшуваного і від'ємника. Отже:

$$h_{a-b} = h_a + h_b\,. \tag{13}$$

Приклад. Маса ящика з цукерками дорівнює $m = 7{,}3 \pm 0{,}05$ кг, порожнього $m_1 = 0{,}82 \pm 0{,}05$ кг. Знайти масу цукерок m_2:

$$m_2 \approx m - m_1 = 7{,}3 - 0{,}82 = 6{,}48\,(\text{кг}),$$

$$h_{m_2} = h_m + h_{m_1} = 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}1\,(\text{кг}).$$

Отже, $m_2 = 6{,}48 \pm 0{,}1$ кг, або після округлення $m_2 = 6{,}5 \pm 0{,}12$ кг. Тут до похибки різниці 0,1 додали похибку округлення 0,02.

Із формули (13) випливає, що межа абсолютної похибки різниці не може бути менша за межу абсолютної похибки кожного наближення. Звідси випливає правило віднімання наближень, яке іноді застосовують при обчисленнях.

При відніманні чисел, які є наближеннями деяких величин, в різниці потрібно залишити стільки цифр після коми, скільки їх має наближення з найменшим числом цифр після коми.

Приклад. Знайти різницю 1541,23 –20,1143. У від'ємнику, без шкоди точності різниці, досить після коми зберегти дві цифри. Саму дію віднімання треба провести так:

$$1541{,}23 - 20{,}1143 \approx 1541{,}23 - 20{,}11 = 1521{,}12\,.$$

Розглянемо добуток чисел x і y– наближень величин a і b. Позначимо через Δx похибку наближення x, а через Δy– похибку наближення y. Маємо:

$$a = x + \Delta x,\; b = y + \Delta y\,.$$

Перемноживши ці дві рівності, одержимо

$$ab = xy + \Delta x \cdot y + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y\,.$$

Абсолютна похибка добутку xy дорівнює

$$|ab - xy| = |\Delta x \cdot y + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y|,$$

і тому

$$|ab - xy| \le |\Delta x \cdot y| + |x \cdot \Delta y| + |\Delta x \cdot \Delta y|\,.$$

Розділивши обидві частини знайденої нерівності на $|xy|$, одержимо

$$\frac{|ab - xy|}{|xy|} \le \frac{|\Delta x \cdot y|}{|xy|} + \frac{|x \cdot \Delta y|}{|xy|} + \frac{|\Delta x \cdot \Delta y|}{|xy|}.$$

Врахувавши, що модуль добутку дорівнює добутку модулів співмножників, матимемо

$$\frac{|ab - xy|}{|xy|} \le \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|} + \frac{|\Delta x|}{|x|} \cdot \frac{|\Delta y|}{|y|}.$$

Ліва частина нерівності є відносною похибкою добутку xy, $\frac{|\Delta x|}{|x|}$ – відносною похибкою наближення x, $\frac{|\Delta y|}{|y|}$ – відносною похибкою наближення y. Отже, відкидаючи тут малу величину $\frac{|\Delta x|}{x} \cdot \frac{|\Delta y|}{y}$, одержимо нерівність

$$\omega_{ab} xy \le \omega_a x + \omega_b y.$$

Таким чином, відносна похибка добутку наближення не перевищує суми відносних похибок співмножників. Звідси випливає, що сума меж відносних похибок співмножників є межею відносної похибки добутку, тобто

$$E_{ab} = E_a + E_b \tag{14}$$

Приклад. Визначимо площу кімнати за такими даними: ширина $a = 4{,}0 \pm 0{,}05$ м, довжина $b = 5{,}4 \pm 0{,}05$ м.

Оскільки $S \approx 4{,}0 \cdot 5{,}4 = 21{,}6\,(\text{м}^2)$ і $E_S \approx E_a + E_b = \frac{0{,}05}{4{,}0} + \frac{0{,}05}{5{,}4}$, то можемо знайти границю абсолютної похибки $h_S = S \cdot E_S = 0{,}47$. Отже, $S = 21{,}6 \pm 0{,}47\,(\text{м}^2)$.

Із формули (14) випливає, що межа відносної похибки добутку не може бути менша за межу відносної похибки найменш точного із співмножників. Тому тут, як і в попередніх діях, немає смислу зберігати в співмножниках зайву кількість значущих цифр.

Іноді при обчисленнях для скорочення обсягу роботи корисно керуватися таким правилом: при перемноженні наближень з неоднаковим числом значущих цифр в добутку слід зберегти стільки значущих цифр, скільки їх має наближення з найменшим числом значущих цифр.

Приклад. Знайти добуток наближень $x_1 = 16{,}43$ і $x_2 = 2{,}7539$.

Перемноживши числа x_1 і x_2 та округливши результат множення до четвертої значущої цифри, одержимо $x_1 \cdot x_2 = 45{,}25$.

Якщо x – наближення величини a, похибка якого Δx, а y – наближення величини b з похибкою Δy, то

$$a = x + \Delta x,\ b = y + \Delta y,\ \frac{a}{b} = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y}.$$

Обчислимо спочатку абсолютну похибку частки:

$$\left|\Delta \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{\Delta x \cdot y - x \cdot \Delta y}{y(y + \Delta y)}\right|,$$

потім відносну похибку:

$$\omega_{\frac{a}{b}} \frac{x}{y} = \frac{\left|\Delta \frac{x}{y}\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \left|\frac{\Delta x \cdot y - x \cdot \Delta y}{x(y + \Delta y)}\right| = \left|\frac{y}{y+\Delta y} \cdot \frac{\Delta x}{x} - \frac{y}{y+\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{y}\right| = \left|\frac{y}{y+\Delta y}\right| \cdot \left|\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}\right|$$

.

Взявши до уваги, що Δy мале порівняно з y, абсолютну величину дробу $\frac{y}{y + \Delta y}$ можна вважати такою, що дорівнює одиниці. Тоді

$$\omega_{\frac{a}{b}} \frac{x}{y} = \left|\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}\right| \le \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

Із останньої формули випливає, що відносна похибка частки не перевищує суми відносних похибок діленого і дільника. Отже, можна вважати, що межа відновної похибки частки дорівнює сумі меж відносних похибок діленого і дільника, тобто

$$E_{\frac{a}{b}} = E_a = E_b. \qquad (15)$$

Приклад. Обчислити $u = \dfrac{x}{y}$, якщо

$$x = 47{,}2 \pm 0{,}5\,,\;\; y = 19{,}4 \pm 0{,}1\,.$$

Маємо:

$$u \approx \frac{47{,}2}{19{,}4} \approx 2{,}43\,,$$

$$E_u = \frac{0{,}5}{47{,}2} + \frac{0{,}1}{19{,}4} \approx 0{,}0158\,,$$

$$h_u = u \cdot E_u \approx 2{,}43 \cdot 0{,}0158 \approx 0{,}039\,,$$

$$u = 2{,}43 \pm 0{,}039\,,$$

або після округлення $u = 2{,}43 \pm 0{,}04$.

1) Нехай $u = a^n$, де n – натуральне число, і нехай $a \approx x$. Тоді, якщо E_a – межа відносної похибки наближення x величини a, то

$$u = a^n \approx x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-співмножників}$$

і тому

$$E_u = \underbrace{E_a + E_a + \ldots + E_a}_{n \;\; доданків} = n \cdot E_a \cdot$$

Отже, межа відносної похибки степеня дорівнює добутку межі відносної похибки основи на показник степеня, тобто

$$E_u = n \cdot E_a\,. \tag{16}$$

2) Нехай $u = \sqrt[n]{a}$, де n – натуральне число, і нехай $a \approx x$.

За формулою (1) $E_u = n \cdot E_a$ і, отже,

$$E_u = \frac{E_a}{n}\,. \tag{17}$$

Таким чином, межа відновної похибки кореня n-го степеня в n раз менша за межу відновної похибки підкореневого числа. Розглянемо задачу, в якій використовуються наведені вище формули.

Задача. Знайти густину ρ матеріалу, з якого виготовлено кулю маси $m = 34{,}7 \pm 0{,}05$ кг, якщо діаметр кулі $D = 2{,}49 \pm 0{,}01$ дм.

Розв'язання.

1. Виведемо формулу для обчислення густини:

$$\rho = \frac{m}{\upsilon}, \text{ де } \upsilon = \frac{1}{6}\pi D^3 \text{ – об'єм кулі}$$

Тоді

$$\rho = \frac{6m}{\pi D^3}.$$

2. Складемо схему обчислень. Візьмемо $\pi = 3{,}142 \pm 0{,}0005$:

m	34,7
$6m$	208,2
π	3,142
D	2,49
D^2	6,200
D^3	15,44
πD^3	48,51
$\rho = \dfrac{6m}{\pi D^3}$	4,29 кг/дм^3

3. Обчислимо межу відносної похибки:

$$E(\rho) = E(m) + E(\pi) + 3E(D),$$

$$E(m) = \frac{0{,}05}{34{,}7} < 0{,}0015,$$

$$E(\pi) = \frac{0{,}0005}{3{,}142} < 0{,}00016,$$

$$3E(D) = \frac{3 \cdot 0{,}01}{2{,}49} = \frac{1}{83} < 0{,}0121,$$

$$E(\rho) = 0{,}0138.$$

4. Обчислимо межу абсолютної похибки:

$$h_\rho = \rho \cdot E(\rho) = 4{,}29 \cdot 0{,}0139 < 0{,}0597 < 0{,}06,$$

тоді $\rho = 4{,}29 \pm 0{,}06$ кг/дм^3, або після округлення $\rho = 4{,}3 \pm 0{,}07$ кг/дм^3.

Відсоткові розрахунки. Перед розглядом питання *"Відсоткові розрахунки"* необхідно повторити саме поняття відсоток (або процент) та найпростіші задачі на відсотки.

У практичних обчисленнях деякі дроби одержали спеціальну назву. Так, одну другу називають половиною, одну четверту – чвертю. Спеціальну назву має й одна сота. Вона називається процентом. Процент позначають знаком %.

За означенням $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01.$ Звідси $2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02;$ $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05;$ $27\% = \frac{27}{100} = 0{,}27;$ $100\% = \frac{100}{100} = 1;$ $243\% = \frac{243}{100} = 2{,}43$ тощо.

Взагалі будь-яке число, наприклад $\frac{4}{5}$, можна записати як $\frac{8}{10}$, $\frac{80}{100}$, 80 %. Отже, *проценти* – це одна із можливих форм запису чисел.

Проценти широко застосовують у фінансових операціях (прибутки з капіталу, сплата внесків, різні касові операції та інше), для характеристики виконання виробничих планів, при визначенні зростання чи зниження продуктивності праці, режиму економії, собівартості та якості продукції, у госпрозрахунках. У сільському господарстві проценти застосовують при визначенні питомої ваги окремих культур у загальних планах сільськогосподарського виробництва, при визначенні вологості, схожості насіння і т.д.

Проценти широко використовують і у шкільних курсах, зокрема у математиці і фізиці, для обчислень відносної похибки вимірювань і наближених обчислень, у хімії при обчисленні концентрації розчинів.

Для розв’язування задач на проценти треба вміти записувати будь-яке число у вигляді процентів і розв’язувати обернену задачу – виражати відоме число процентів у вигляді дробового чи цілого числа.

Щоб перетворити дане число у проценти, потрібно це число помножити на 100. Наприклад:

а) $0{,}245 = (0{,}245 \cdot 100)\% = 24{,}5\%$;

б) $0{,}009 = (0{,}009 \cdot 100)\% = 0{,}9\%$;

в) $\frac{3}{7} = \left(\frac{3}{7} \cdot 100\right)\% = \frac{300}{7}\% = 42\frac{6}{7}\%$;

г) $1\frac{3}{4} = \left(1\frac{3}{4} \cdot 100\right)\% = \left(\frac{7}{4} \cdot 100\right)\% = \frac{700}{4}\% = 175\%$;

д) $3 = (3 \cdot 100)\% = 300\%$.

Щоб перетворити дане число процентів у дріб чи ціле число, слід розділити дане число процентів на 100. Наприклад:

а) $52\% = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$;

б) $27\frac{2}{3}\% = \frac{27\frac{2}{3}}{100} = \frac{83}{3} : 100 = \frac{83}{3 \cdot 100} = \frac{83}{300}$;

в) $250\% = \frac{250}{100} = 2{,}5$ = 2,5.

Існують три основних види задач на проценти: 1) знаходження процентів від числа; 2) знаходження числа за відомими його процентами; 3) знаходження процентного відношення двох чисел.

Проценти від числа знаходяться або двома діями – діленням на 100 і множенням одержаного результату на кількість процентів, або однією дією – множенням числа на дріб, в який перетворені проценти. Розглянемо ці два способи розв’язання на прикладі.

Задача 1. Місячна зарплата робітника становить 280 грн. Крім того, він одержав премію, яка становить 24% від місячної зарплати. Скільки гривень становить премія?

Розв’язання. Перший спосіб. Визначимо, скільки гривень становить 1%. Для цього розділимо 280 грн на 100. Одержимо 2,8 грн. Обчислимо, скільки гривень становлять 24% від 280. Для цього 2,8 грн · 24 = 67,2 грн.

Відповідь. Премія становить 67,2 грн.

Узагальнивши цю задачу, одержимо правило: ***щоб знайти число b, що становить p % від числа a, треба число a поділити на 100 і помножити на число p, тобто*** $b = \frac{a}{100} \cdot p$.

Другий спосіб. Користуючись означенням процента як дробу, вимогу до задачі можна сформулювати так: $\frac{24}{100}$ = 0,24 від числа 280. Отже, знаходження 24% від числа 280 є не що інше, як знаходження дробу $\frac{24}{100} = 0{,}24$ від числа 280. Відомо, що для цього досить число 280 помножити на дріб 0, 24. Отже, $280 \cdot 0{,}24 = 67{,}2$ (грн).

Узагальнивши цей спосіб розв'язання, одержимо правило: ***щоб знайти проценти від числа, потрібно ці проценти записати звичайним або десятковим дробом і дане число помножити на здобутий дріб.***

Число за його процентами також можна знайти двома способами. Перший зводиться до знаходження числа, яке становить один процент, а потім числа, яке відповідає заданій кількості процентів. Другий спосіб ґрунтується на знаходженні числа за відомим його дробом.

Задача 2. Після помелу пшениці вихід борошна становить 80%. Скільки пшениці треба змолоти, щоб одержати 520 кг борошна?

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі треба знайти таке число, 80% якого дорівнюють 520.

Перший спосіб. Знайдемо число, яке дорівнює 1 %. Для цього 520 треба розділити на 80. Одержимо $\frac{520}{80} = \frac{13}{2}$. Знайдемо число, яке дорівнює 100 %. Для цього число $\frac{13}{2}$ треба помножити на 100. Одержимо $\frac{13}{2} \cdot 100 = \frac{13 \cdot 100}{2} = 650$.

Другий спосіб. Запишемо проценти у вигляді звичайного або десяткового дробу: $80\% = \frac{80}{100} = 0{,}8$. Отже, треба знайти число, 0,8 якого становить 520, тобто знайти число за відомим його дробом. Воно знаходиться шляхом ділення даного числа на дріб. Розділимо 520 на дріб 0,8. Одержимо $\frac{520}{0{,}8} = \frac{5200}{8} = 650$ кг.

Відповідь. Треба змолоти 650 кг пшениці.

Узагальнивши цю задачу, одержимо правило: ***щоб знайти число за його процентами, треба проценти записати у вигляді звичайного або десяткового дробу і розділити дане число на цей дріб.***

Задачі знаходження процентного відношення двох чисел розв'язують, наприклад, при визначенні процентів успішності, відвідування, жирності молока, вологості, усушки. Тут відношення двох чисел показує, яку частину становить перше число від другого. При цьому важливо правильно зорієнтуватися, яке з двох чисел треба вважати першим, а яке – другим, тобто основним (за основне беруть те, з яким порівнюють число).

Задача 3. З чотирьох деталей, які було заплановано як нормо-завдання, токар виточив три. На скільки процентів токар виконав завдання?

Розв'язок. Визначимо, яку частину завдання виконав токар. Одержимо 3: $4 = \frac{3}{4}$. Перетворимо $\frac{3}{4}$ у проценти, для цього помножимо $\frac{3}{4}$ на 100. Одержимо $\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$.

Відповідь. На 75 %.

Узагальнивши цю задачу, одержимо правило: ***щоб визначити процентне відношення двох чисел, слід знайти їх відношення і виразити його в процентах, тобто помножити знайдене відношення на 100 і поставити знак процента.***

Між процентами і відношеннями існує така залежність: ***збільшити число на р процентів означає збільшити його у р разів.*** Інакше кажучи, збільшення числа на р процентів слід розуміти не як збільшення даного числа на р, а як збільшення цього числа у р разів. Наприклад, збільшення числа на 50% – це збільшення його у 1,5 разу, оскільки 150% = 1,5. У загальному випадку: якщо число а збільшилося, наприклад на 30%, то воно становить $a + 0{,}3a = 1{,}3a$, тобто збільшилось у 1,3 раза.

Крім того, якщо величина зменшилась, наприклад, у 1,2 раза, тобто у $\frac{6}{5}$ раза, то вона становить $\frac{6}{5}$ свого попереднього значення (оскільки $1 : \frac{6}{5} = \frac{5}{6}$). Навпаки, якщо після зменшення величина становить $\frac{5}{6}$ свого попереднього значення, то вона зменшилась у $\frac{6}{5}$ раза.

Залежністю між процентами і відношеннями можна пояснити такі факти: зі зниженням трудомісткості праці на $33\frac{1}{3}\%$ продуктивність праці (обернена величина) збільшується на 50%; зниження цін на 20% збільшує купівельну спроможність населення на 25%.

Задача 4. Завдяки вдосконаленню верстата швидкість різання збільшилася із 120 м/хв до 135 м/хв. На скільки процентів збільшилась продуктивність праці?

Розв'язок. Продуктивність праці збільшилась у $\frac{135}{120} = 1\frac{1}{8}$ раза, або у 1,125 раза, тобто становила 112,5% свого попереднього значення.

Відповідь. На 12,5%.

Задача 5. За нормою на виконання виробничого завдання робітник повинен був витратити $4\frac{1}{2}$ год, а фактично він витратив 3 години. На скільки процентів він перевиконав норму?

Розв'язок. Час виконання становить $\frac{3}{4\frac{1}{2}}$ запланованого, тобто $\frac{2}{3}$. Візьмемо норму за 1. Норма виконана з перевищенням у $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ разу, тобто вона виконана на 150%, а перевиконана на 50%.

Відповідь: на 50%.

Задача 6. Обсяг робіт на будівництві збільшився на 40 %. Як треба змінити кількість робітників, якщо передбачено збільшити продуктивність праці на 10 %?

Розв'язок. Обсяг робіт збільшився у 1,4 раза, тому й кількість робітників треба збільшити у 1,4 раза. Вона буде становити 1,4 від початкової кількості, яку візьмемо за 1. Оскільки продуктивність праці треба збільшити у 1,1 раза (на 10%), то для виконання запланованого обсягу робіт кількість робітників треба зменшити у 1,1 раза.

Отже, необхідна кількість робітників повинна становити 1,4:1,1 = 1,27 від початкової кількості. Це означає, що їх кількість треба збільшити на 27 %.

Відповідь. Кількість робітників треба збільшити на 27 %.

Задача 7. Обсяг продукції заводу зріс за перший рік на 20%, за другий – на 25 %. На скільки процентів зріс обсяг продукції за 2 роки?

Розв'язок. Нехай початковий обсяг продукції заводу становив p одиниць. Наприкінці першого року обсяг продукції збільшився на 20%, тобто у 1,2 раза, і становив $1{,}2p$ одиниць. На кінець другого року обсяг продукції збільшився на 25 %, тобто у 1,25 раза порівняно з $1{,}2p$, і становив $1{,}2p \cdot 1{,}25 = 1{,}5p$. Це означає, що за два роки він збільшився у 1,5 разу порівняно з р, тобто на 50%.

Відповідь. На 50%.

У складніших прикладних задачах на відсотки часто йдеться про збільшення або зменшення величини на кілька відсотків. У таких випадках треба добре зрозуміти, від чого беруться відсотки. Наприклад, коли говорять, що заробітна плата підвищилась на 10%, то розуміють, що вона збільшилась на 10% від попередньої заробітної плати. При цьому, якщо значення x більше від y на p%, то значення y менше від x на p%. Збільшенню в два рази відповідає збільшення на 100%, а зменшення в два рази – зменшення на 50% (рис. 1). Ціна товару теоретично може збільшуватись на будь-яке число відсотків, а зменшитись, наприклад, на 120% не може.

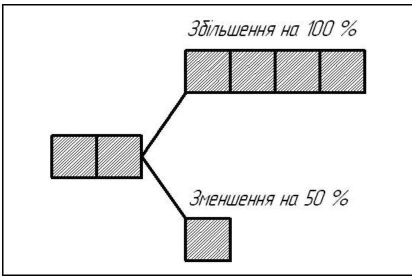


Рис. 1.

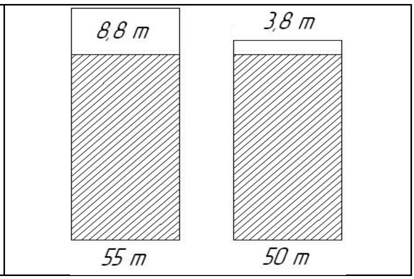


Рис. 2

Розглянемо одну із задач на відсотки.

Задача. Просушили 55 т зерна 16% вологості, після чого його стало 50 т. Знайдіть відсоток вологості просушеного зерна (рис. 2).

Розв'язання. Зерно спочатку мало вологи 0,16·55=8,8 (т). Випарувалось вологи 5 т (55–50=5), тому залишилось її в зерні

8,8–5=3,8 (т).

Отже відсоток вологості просушеного зерна дорівнює 3,8:50=0,076=7,6%.

Відповідь. 7,6%.

Можна розв'язати задачу і інакше, наприклад, склавши рівняння

$$0{,}16 \cdot 55 - \frac{x}{100} \cdot 50 = 5.$$

Особливо часто доводиться розв'язувати задачі на відсотки бухгалтерам і працівникам банків. Розглянемо для прикладу задачі, пов'язані з нарахуванням відсоткових грошей.

Припустимо, що вкладник дав Ощадбанку під 9% річних 1000 грн. Це початковий капітал. Через рік банк нарахує вкладнику за це 90 грн відсоткових грошей (9% від 1000 грн). Після цього на рахунку вкладника стане 1090 грн, бо 1000(1+0,09)=1090. За другий рік відсоткових грошей йому нараховують уже 9% від 1090 грн; нарощений капітал вкладника після двох років дорівнюватиме $1000(1+0{,}09)^2$ грн. Зрозуміло, що через n років нарощений капітал становитиме $1000(1+0{,}09)^n$ грн.

Взагалі, вкладений в Ощадбанк початковий капітал A_0 під p% річних через n років перетвориться в нарощений капітал.

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Це формула складних відсотків. За цією формулою можна розв'язувати також задачі, не пов'язані з нарощенням капіталу.

Відсоткові гроші за неповний рік нараховуються пропорційно до числа днів. Наприклад, якщо 350 грн, віддані під 11% річних, були в банку 183 дні, тобто 0,5 року, то за це вкладник одержить <u>0,5·350·0,11</u> (грн). Нарощений капітал вкладника дорівнюватиме <u>369,25 грн.</u>

Подібні до поняття відсотка – проміле і проба.

Проміле – це одна тисячна (1‰ =0,001). Наприклад, розчин солі, концентрація якого 5 проміле – це розчин, 1000 г якого містить 5 г солі.

Пробами характеризують сплави дорогоцінних металів. Так, золото 875-ї проби – це сплав, 1000 г якого містить 875 г чистого золота.

Тригонометричні функції кута

У курсі середньої школи було введено означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута як відношення сторін у прямокутному трикутнику (рис. 3).

Синусом гострого кута прямокутного трикутника (позначається $\sin\alpha$ ***) називається відношення протилежного катета*** a ***до гіпотенузи*** c***:***

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Косинусом гострого кута a ***прямокутного трикутника (позначається*** $\cos a$***) називається відношення прилеглого катета*** b ***до гіпотенузи*** c:

$$\cos a = \frac{b}{c}$$

Тангенсом гострого кута a ***прямокутного трикутника (позначається*** $tg\alpha$ ***) називається відношення протилежного катета*** a ***до прилеглого*** b***:***

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

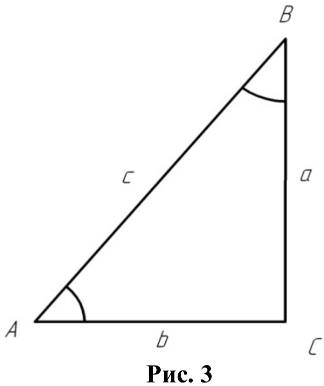


Рис. 3

Було доведено, що синус і косинус гострого кута трикутника залежить лише від значення кута і не залежить від довжини сторін трикутника, його розміщення, тобто синус, косинус, а значить, і тангенс є функціями кута. Пізніше для кутів від 0° до 180° означення цих функцій було введено за допомогою кола радіуса R у системі координат (координатний спосіб означення).

Радіанне вимірювання кутів

Будь-який кут можна розглядати як результат обертання променя в площині навколо початкової точки. Обертаючи промінь навколо точки O від початкового положення OA до кінцевого положення OB, одержимо кут AOB (рис. 4).

Поняття про вимірювання кутів відоме з геометрії. При вимірюванні кутів беруть деякий певний кут за одиницю вимірювання і за її допомогою вимірюють інші кути.

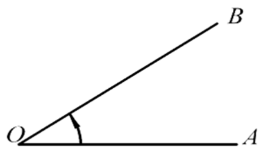


Рис. 4

За одиницю вимірювання можна взяти будь-який кут. На практиці вже більше трьох тисячоліть за одиницю вимірювання кута беруть $\frac{1}{360}$ частину повного оберту, яку називають *градусом*. У техніці за одиницю вимірювання кутів беруть повний оберт. У мореплавстві за одиницю вимірювання кутів узято румб, який дорівнює $\frac{1}{32}$ частині повного оберту. В артилерії за одиницю вимірювання кутів узята $\frac{1}{60}$ частина повного оберту, яку називають великим поділом кутоміра (0,01 частину великого поділу кутоміра називають малим поділом кутоміра).

У зв’язку з розвитком техніки виникла потреба вимірювати колові рухи (тобто повороти на як завгодно великі кути і різноманітні коливальні процеси, пов’язані з коловим рухом). Виникла потреба в новій, універсальній одиниці вимірювання дуг і кутів. Такою одиницею стала радіанна (радіусна) міра кута, вона з’явилась у працях Ньютона (1643–1727) та Лейбніца (1646–1716) і ввійшла в науку завдяки працям академіка Петербурзької Академії наук Леонарда Ейлера (1707–1783).

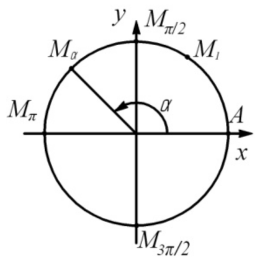


Рис. 5

Нехай дано деяке одиничне коло, тобто коло з центром у деякій точці O і з радіусом, який дорівнює одиниці масштабу. Виберемо на цьому колі деяку точку A (рис. 5). Кожному числу $\alpha \in [0;\ 2\pi]$ ставимо у відповідність точку M_α даного одиничного кола таку, що довжина дуги AM_α дорівнює α, причому дуга AM_α відкладається від точки A проти годинникової стрілки. Числу 0 і числу 2π поставимо у відповідність точку A. Таким чином, між точками одиничного кола й числами проміжку $[0;\ 2\pi]$ встановлено взаємно однозначну відповідність.

Число α називається *радіанною мірою* дуги AM_α та відповідного кута AOM_α.

З цього означення випливає, що кут, радіанна міра якого дорівнює 1, – це кут, який конгруентний центральному куту одиничного кола і спирається на дугу одиничної довжини.

З формули для обчислення довжини дуги кола випливає формула, яка пов'язує радіанну і градусну міри кута. Справді, якщо α – довжина дуги одиничного кола, градусна міра якої дорівнює β, то

$$\alpha = \frac{\pi}{180^0} \cdot \beta .$$

Отже, 1 радіан дуги містить $\frac{180^0}{\pi}$ градусів: $\frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17' 45''$

1^0 дуги містить $\frac{\pi}{180^0}$ радіанів: $\frac{\pi}{180^0} \approx 0{,}0175$.

Для перетворення міри кута з градусної в радіанну й навпаки існують таблиці (див., наприклад: В.М. Брадіс. Чотиризначні математичні таблиці.).

Наведемо таблицю для кутів і дуг, які часто зустрічаються.

Градуси	360^0	180^0	90^0	60^0	45^0	30^0	18^0	15^0	10^0	1^0	β^0
Радіани	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180} \cdot \beta$

Знову розглянемо одиничне коло з вибраною точкою A (рис. 5). Кожному числу $\alpha \in \left]-2\pi;\ 0\right[$ ставимо у відповідність точку M_α даного одиничного кола таку, що довжина дуги AM_α дорівнює $|\alpha|$, і дуга AM_α відкладається від точки A за годинниковою стрілкою (рис. 6). Числу -2π поставимо у відповідність точку A. Довільне число α подамо у такому вигляді:

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi,$$

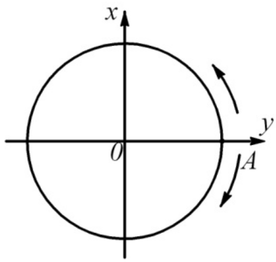


Рис. 6

де k – деяке ціле число, $\alpha_0 \in \left]-2\pi;\ 2\pi\right[$. Зауважимо, що для будь-якого α таке подання можливе. Тепер числу α поставимо у відповідність ту саму точку, що й числу α_0, тобто точки M_α і M_{α_0} збігаються.

Отже, вище здійснено побудову відповідності між дійсними числами і точками одиничного кола. З самої побудови цієї відповідності випливає, що точки $M_{\alpha+2\pi}$, $M_{\alpha-2\pi}$, M_α збігаються. Про точку M_α кажуть, що вона утворюється з точки A обертанням на $|\alpha|$ радіанів проти годинникової стрілки, якщо $\alpha > 0$, і за годинниковою стрілкою, якщо $\alpha < 0$. Обертання проти годинникової стрілки іноді називають обертанням у додатному напрямку, а обертання за годинниковою стрілкою – обертанням у від'ємному напрямку.

Тригонометричні функції числового аргументу. У попередньому пункті встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною всіх дійсних чисел та множиною точок одиничного кола. Кожному дійсному числу α поставлено у відповідність точку M_α одиничного кола.

Нехай на площині вибрано прямокутну систему координат так, що її початок збігається з центром даного одиничного кола, а одинична точка осі абсцис збігається з точкою A.

Нехай x_α, y_α – координати точки M_α. Тоді кожному числу α поставлено у відповідність два числа x_α і y_α. Число y_α

називають *синусом* α і позначають $\sin\alpha$, а число x_α називають *косинусом* α і позначають $\cos\alpha$.

Функція $\sin\alpha$, $\alpha \in \mathrm{R}$ називається *синусом*, а функція $\cos\alpha$, $\alpha \in \mathrm{R}$ – *косинусом*.

Із означення синуса і косинуса випливає, що

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

для будь-якого $\alpha \in \mathrm{R}$.

Приклад 1. Знайти синус числа $\alpha = \frac{13}{6}\pi$.

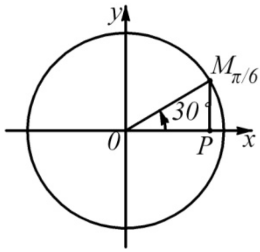


Рис. 7

Розв'язання. Оскільки $\frac{13}{6}\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, то цьому числу відповідає та сама точка $M_{\pi/6}$, що й числу $\pi/6$. Опустимо з точки $M_{\pi/6}$ перпендикуляр $M_{\pi/6}P$ на вісь Ox (рис. 7), маємо $\left|M_{\pi/6}P = y\right|$. У прямокутному трикутнику *POM* довжина гіпотенузи $OM_{\pi/6}$ дорівнює 1 (тому що коло одиничне), довжина катета $M_{\pi/6}P$ дорівнює 0,5 (як катет, що лежить проти кута 30^0). Отже, ордината точки $M_{\pi/6}$ дорівнює числу 0,5.

Відповідь. $\sin\frac{13}{6}\pi = 0{,}5$.

Тангенсом дійсного числа α називається відношення $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і позначається $tg\alpha$. Неважко помітити, що $tg\alpha$ визначений для всіх дійсних чисел $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Функція $tg\alpha$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, називається *тангенсом*.

Котангенсом дійсного числа α називається відношення $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ й позначається $ctg\alpha$. Неважко помітити, що $ctg\alpha$ визначений для всіх дійсних чисел $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$.

Функція $ctg\alpha$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$ називається *котангенсом*. Із означення тангенса і котангенса випливає, що

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

для всіх значень α, для яких і $tg\alpha$, і $ctg\alpha$ мають зміст, тобто при всіх $\alpha \in R$, крім $\alpha = k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

Приклад 2. Знайти $tg\dfrac{3}{4}\pi$ й $ctg\dfrac{3}{4}\pi$.

Розв'язання. Числу $\dfrac{3\pi}{4}$ на числовому колі відповідає точка M, яка є кінцем дуги, що містить 135^0. Опустимо з точки M перпендикуляр на вісь Ox. Трикутник OMN прямокутний і рівнобедрений (рис. 8).

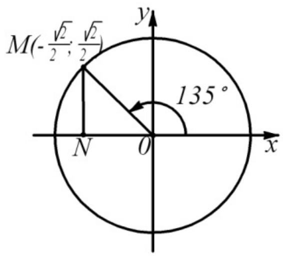


Рис. 8

Координати точки M є $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, $$tg\frac{3}{4}\pi = \frac{y}{x} = -1;\ ctg\frac{3}{4}\pi = \frac{x}{y} = -1.$$

Відповідь. $tg\dfrac{3}{4}\pi = ctg\dfrac{3}{4}\pi = -1$.

Зробимо кілька зауважень відносно знаків значень тригонометричних функцій. Нехай, як і вище, M_α – точка одиничного кола з центром у початку координат, яка відповідає числу α. Тоді, згідно з означенням, $\cos\alpha$ – абсциса, а $\sin\alpha$ – ордината точки M_α. Тому, якщо M_α міститься в першій чверті координатної площини, то $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ додатні, і якщо M_α – у другій чверті, то $\cos\alpha$ від'ємний, а $\sin\alpha$ додатний; якщо M_α – у третій чверті, то $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ від'ємні; якщо M_α – у четвертій чверті, то $\cos\alpha$ додатний, а $\sin\alpha$ від'ємний.

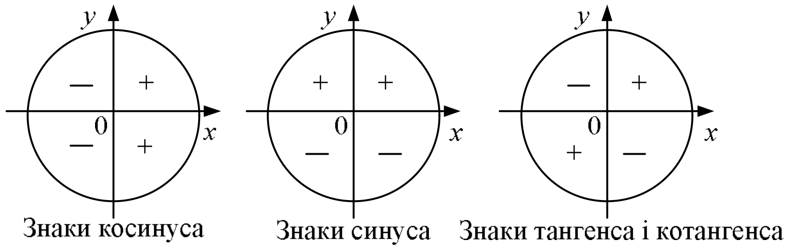


Рис. 9

Знаки синуса, косинуса, тангенса й котангенса відповідно для кожної чверті зображено на рис. 9. Тангенс і котангенс додатні, якщо M_α міститься у першій або у третій чвертях, від'ємні, якщо M_α міститься у другій або четвертій чвертях.

Приклад 1. Дано $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайти $\cos\alpha$.

Розв'язання. Точка M_α міститься в першій чверті; отже, $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

Відповідь. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Приклад 2. Дано $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайти $\cos\alpha$.

Розв'язання. Точка M_α міститься в другій чверті, отже, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. *Відповідь.* $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Найпростіші властивості тригонометричних функцій

Теорема 1. *Косинус – функція парна, синус – непарна.*

Доведення. Нехай M_α – точка одиничного кола з центром у початку координат, яка відповідає числу α, а $M_{-\alpha}$ – точка того ж кола, що відповідає числу $-\alpha$. За означенням синуса і косинуса точка M_α має координати $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$, а точка $M_{-\alpha}$ – координати $\cos(-\alpha)$ і $\sin(-\alpha)$ (рис. 10). Оскільки точки M_α і $M_{-\alpha}$ симетричні відносно осі Ox, їх абсциси збігаються, а ординати протилежні. Отже,

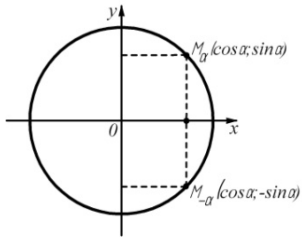


Рис. 10

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

для будь-якого $\alpha \in R$. Теорему 1 доведено.

Наслідок. *Тангенс і котангенс – функції непарні.*

Справді,

$$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha,$$

$$ctg(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -ctg\alpha$$

Приклад.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -tg\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ ctg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -ctg\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

Теорема 2. *Функції синус і косинус – періодичні. Найменший додатний період синуса і косинуса дорівнює 2π.*

Доведення. Числам α, $\alpha + 2\pi$ і $\alpha - 2\pi$ відповідає та сама точка одиничного кола з центром у початку координат, тому

$$\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha, \qquad \sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha$$

для будь-якого $\alpha \in R$. Отже, число 2π є періодом синуса і косинуса.

Функція $\sin\alpha$ на відрізку $[0;\ 2\pi]$ обертається в нуль при $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ і $\alpha = 2\pi$. Тому, якщо синус має додатний період, менший за 2π, то він дорівнює π. Однак π не може бути періодом синуса, оскільки

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \text{але}\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1.$$

Отже, 2π – найменший додатний період синуса. Аналогічно доводять, що 2π – найменший додатний період косинуса.

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що період функції, як правило, є її найменший додатний період, і тому теорему 2 часто формулюють так: *синус і косинус – функції періодичні з періодом* 2π.

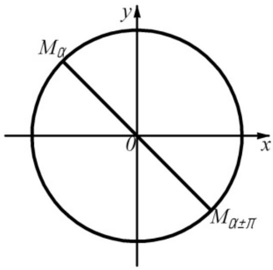


Рис. 11

Перш ніж довести теорему про періодичність тангенса і котангенса, зазначимо, що

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha \qquad (2)$$

для будь-якого $\alpha \in R$. Справді, числам α і $\alpha \pm \pi$ на одиничному колі (рис. 11) відповідають точки M_α і $M_{\alpha\pm\pi}$, симетричні відносно початку координат, і тому справедливі формули (1) і (2).

Теорема 3. *Тангенс і котангенс – періодичні функції. Найменший додатний період тангенса і котангенса дорівнює* π.

Доведення. Із формул (1) і (2) випливає, що

$$tg(\alpha \pm \pi) = tg\alpha, \qquad ctg(\alpha \pm \pi) = ctg\alpha$$

для будь-якого допустимого $\alpha \in R$, тобто число π – період тангенса і котангенса. А оскільки відстань між сусідніми нулями і у тангенса і у котангенса дорівнює π, то π – найменший період. Теорему 3 доведено.

Коротко теорему 3 можна сформулювати так: *тангенс і котангенс – функції періодичні з періодом* π.

Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

З визначення синуса, косинуса, тангенса і котангенса зразу випливають основні тригонометричні тотожності:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Основою для виведення інших тригонометричних формул є формули додавання:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}, \quad tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}.$$

Також відомі формули суми та різниці синусів і косинусів, що дають можливість перетворити їх в добуток

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Із формул додавання, припускаючи, що $\alpha = \beta$, виводяться формули *подвійного аргументу*:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha ,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha , \ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 , \ tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} .$$

Підставляючи в формули $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ і $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ значення $t = \frac{\alpha}{2}$, отримаємо формули половинного аргументу:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} , \ \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} .$$

Поділивши почленно $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, отримаємо:

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} .$$

Формули зведення

Формули зведення дають можливість виразити тригонометричні функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ через тригонометричні функції кута (табл. 1)

При застосуванні формул зведення рекомендують користуватися такими правилами:

1.Якщо α відкладається від осі *Ox*, то назва зведеної функції, тобто функція аргументу $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, не змінюється. Якщо ж α відкладається від осі *Oy*, то назва звідної функції, тобто функція аргументу $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, змінюється на кофункцію (синус – на косинус, тангенс – на котангенс і навпаки)

Таблиця 1

	Аргумент	Функція			
		sin	$\cos\alpha$	*tg*	*ctg*
1	2	3	4	5	6
1	$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
2	$\frac{\pi}{2}-\alpha\ (90^0-\alpha)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
3	$\frac{\pi}{2}+\alpha\ (90^0+\alpha)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
4	$\pi-\alpha\ (180^0-\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
5	$\pi+\alpha\ (180^0+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
6	$\frac{3\pi}{2}-\alpha\ (270^0-\alpha)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
7	$\frac{3\pi}{2}+\alpha\ (270^0+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
8	$2\pi-\alpha\ (360^0-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
9	$2\pi+\alpha\ (360^0+\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$

2. Знак, з яким треба вибрати тригонометричну функцію в правій частині, знаходять за знаком лівої частини, коли припустити, що

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

Значення тригонометричних функцій найбільш вживаних кутів:

Таблиця 2

		I чверть				II чверть			
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не існує
		III чверть				IV чверть			
	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не існує

Теорема синусів і косинусів. Розв'язування трикутників

Теорема 1 (теорема синусів). ***Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів.***

Доведення. Нехай ABC – трикутник із сторонами *a, b, c* і протилежними кутами α, β, γ (рис. 12). Доведемо, що

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Опустимо з вершини *C* висоту *CD*.

З прямокутного трикутника *ACD*, якщо кут α гострий, маємо: $CD = b\sin\alpha$ (рис. 1.12, а). Якщо кут α тупий, то $CD = b\sin\left(180^\circ - \alpha\right) = b\sin\alpha$ (рис. 12,б).

Аналогічно з трикутника *BCD* одержимо $CD = a\sin\beta$. Отже,

$$a\sin\beta = b\sin\alpha .$$

Звідси $$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}.$$

Аналогічно доводимо рівність

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

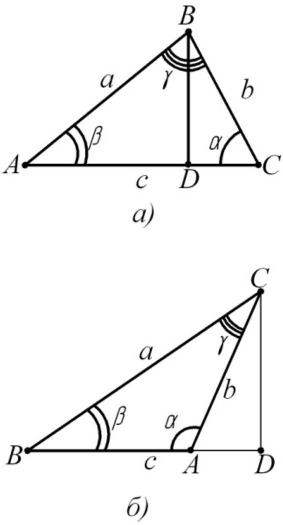


Рис. 12

Для доведення цього твердження слід провести висоту трикутника з вершини *A* на сторону *BC*.
Теорему доведено.

Задача. Доведіть, що бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

Розв'язання. Нехай *ABC* – даний трикутник, а *BD* – його бісектриса (рис. 13). Доведемо, що $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AB}{BC}$.

Застосуємо теорему синусів до трикутників *CBD* і *ABD*:

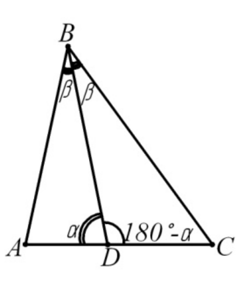


Рис. 13

$$\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\alpha};\ \frac{CD}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\left(180^\circ-\alpha\right)}=\frac{BD}{\sin\alpha}.$$

Якщо першу рівність поділити на другу, одержимо:

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC},$$

що й треба було довести.

З теореми синусів випливає, що коли в трикутнику із сторонами a,b і протилежними кутами α,β буде $\alpha>\beta,$ то $a>b.$ І навпаки, якщо $a>b,$ то $\alpha>\beta.$ Висновок. **У трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, проти більшої сторони лежить більший кут.**

Теорема 2 (теорема косинусів). ***Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.***

Доведення. Нехай ABC – даний трикутник (рис. 14). Доведемо, що $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A.$

Маємо векторну рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$ Звідси $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$ Запишемо цю рівність у вигляді квадрата, одержимо: $\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Звідки: $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A.$

Теорему доведено.

Зауважимо, що $\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A$ за абсолютною величиною дорівнює проекції AD сторони AC на сторону AB (рис. 14, а) або на її продовження (рис. 14, б). Знак $\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A$ залежить від кута A: якщо кут A гострий, то добуток береться “+”, якщо тупий, то “–”. Звідси маємо наслідок: **квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох**

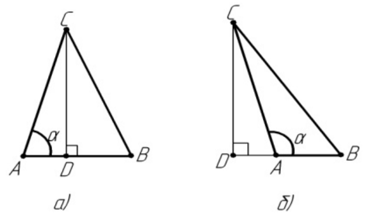


Рис. 14

інших сторін $\pm$ подвоєний добуток однієї з них на проекцію другої. Знак "+" слід брати тоді, коли протилежний кут тупий, а знак "–", коли цей кут гострий.

Задача. Сторони трикутника *a, b, c*. Знайдіть висоту трикутника, опущену на сторону *c*.

Розв'язання. Маємо: $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2c \cdot AD$ (рис. 15). Звідси:

$$AD = \pm\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}.$$

За теоремою Піфагора:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} =$$

$$= \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$

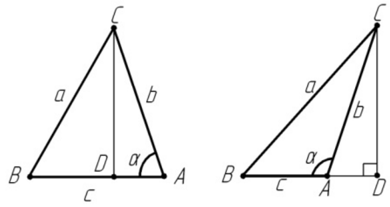


Рис. 15

З теореми косинусів випливає, що ***сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.*** Справді, нехай *ABCD* – паралелограм (рис. 16). Застосуємо теорему косинусів до трикутників *ABC* і *ABD*. Одержимо:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$$

Додаючи ці рівності та зваживши, що $\cos\beta = -\cos\alpha$, $BC = AD$, $AB = CD$, матимемо:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BD^2 + CD^2 + AD^2,$$

що й треба було довести.

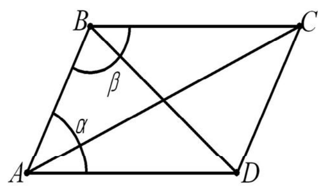


Рис. 16

Розв'язування трикутників

Розв'язуючи задачі прикладного характеру, часто доводиться мати справу з обчисленням тих чи інших елементів трикутника за даними значеннями певних його елементів. Ці задачі називаються задачами на розв'язування трикутників.

1. Розв'язування прямокутних трикутників

Нехай ABC – прямокутний трикутник, $\angle C = 90°$, a і b – катети, протилежні кутам A і B, c – гіпотенуза (рис. 17). Тоді:

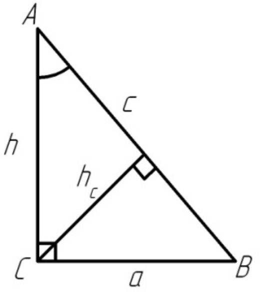


Рис. 17

1. $c^2 = a^2 + b^2$.
2. $\angle A + \angle B = \angle C = 90°$.
3. $a = c\sin A = c\cos B$
4. $a = btgA = bctgB$
5. $c = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{a}{\cos B}$
6. $S = \dfrac{1}{2}ab$

Для розв'язування прямокутних трикутників необхідне задання двох елементів, з яких хоча б один лінійний. При обчисленнях можна користуватися таблицями і мікрокалькуляторами.

Зауваження. При розв'язуванні прямокутних трикутників потрібно врахувати, що використання результатів проміжних дій веде до втрати точності обчислень.

Розглядають чотири основні випадки розв'язування прямокутних трикутників:

1) за гіпотенузою і одним з гострих кутів;
2) за катетом і одним з гострих кутів;
3) за катетом і гіпотенузою;
4) за двома катетами.

Приклад. Розв'язати трикутник, якщо дано два катети 8,3 см, 12,4 см (рис. 18).

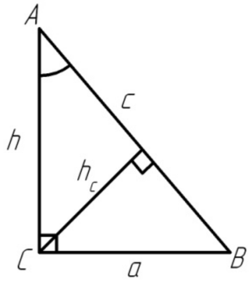


Рис. 18

Дано: $\Delta\, ABC$, $\angle C = 90°$,

AC =12,4 см, BC = 8,3 см,

Знайти: AB, $\angle A$, $\angle B$.

Розв'язання.

За теоремою Піфагора знайдемо гіпотенузу $\Delta\, ABC$

$AB^2=AC^2+BC^2$.

$AB^2=(8{,}3)^2+(12{,}4)^2= 222{,}65$

$AB \approx 14{,}92$ (см).

За допомогою співвідношень в прямокутному трикутнику знайдемо: $\angle A$.

$$a = btgA$$

$$tgA = \frac{a}{b} = \frac{8{,}3}{12{,}4} \approx 0{,}6694.$$

За таблицями знаходимо: $\angle A \approx 33°48'$.

Звідси із співвідношення $\angle A + \angle B = 90°$ знаходимо

$$\angle B = 90° - \angle A \approx 90° - 33°48' \approx 56°12'.$$

Відповідь: $AB \approx 14{,}92$, $\angle A \approx 33°48'$, $\angle B \approx$ '56°12'.

Приклад. Дано гіпотенузу c = 79,79см і $\angle A = 66°\,40'$.Знайти інші елементи трикутника (рис. 19).

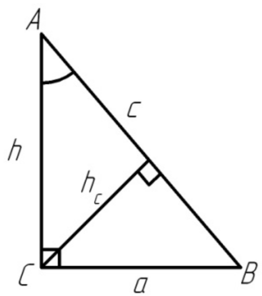


Рис. 19

Дано: $\Delta\, ABC$, $\angle C = 90°$,

AB = 79,79 см, $\angle A = 66°\,40'$

Знайти: AC, BC, $\angle B$.

Розв'язання.

Із співвідношення $\angle A + \angle B = 90°$ знаходимо $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 66°40' = 23°20'$.

За допомогою співвідношень в прямокутному трикутнику знайдемо катети:

$$a = c \sin A$$

$$b = c \cos A$$

$$a = BC = 79{,}7 \cdot \sin 23°40' \approx 79{,}7 \cdot 0{,}4014 \approx 32{,}03 \text{ см},$$

$$b = AC = 79{,}79 \cdot \cos 23°40' \approx 79{,}79 \cdot 0{,}9155 \approx 73{,}05 \text{ см}.$$

Відповідь: $AC \approx 73{,}05$ *см*, $BC \approx 32{,}03$ *см*, $\angle B \approx 23°20'$.

2. Розв'язування косокутних трикутників

Нехай ABC – довільний трикутник, a, b, c – сторони трикутника, A, B, C – протилежні їм кути, S – площа, P – периметр, R – радіус кола описаного навколо трикутника, r – радіус вписаного кола (рис. 20). Тоді:

1. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

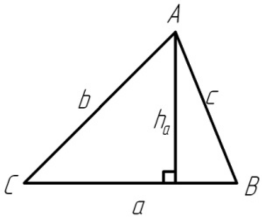


Рис. 20

2. *<u>Теорема синусів</u>:* У всякому трикутнику сторони пропорційні синусам протилежних кутів. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

3. *<u>Теорема косинусів:</u>* Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
4. $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ – радіус описаного кола
5. $S = \dfrac{1}{2} a h_a$
6. $S = \dfrac{1}{2} ab\sin C = \dfrac{1}{2} ac\sin B = \dfrac{1}{2} bc\sin A$
7. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Для розв'язування косокутних трикутників необхідне завдання трьох основних елементів, з яких хоча б один лінійний. Для відшукання невідомих елементів складають три рівняння. В якості одного з них беруть рівність $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, два інших – теореми синусів чи косинусів. При обчисленнях можна користуватися таблицями і мікрокалькуляторами.

Розглядають чотири основні випадки розв'язування косокутних трикутників:

1) за стороною і двома кутами;
2) за двома сторонами і кутом між ними;
3) за двома сторонами і кутом проти однієї з них (задача може не мати жодного розв'язку);
4) за трьома сторонами.

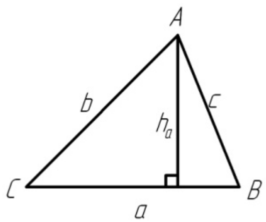


Рис. 21

Приклад. Дано сторону $a=$ 4,15 см, $\angle A = 40°2'$, $\angle C = 60°4'$. Знайти інші елементи трикутника (рис. 21).

Дано: $\Delta\, ABC$, $\angle A = 40°2'$,
$BC =$ $a=$ 4,15 см, $\angle C = 60°4'$
Знайти: *AB, AC,* $\angle B$.

Розв'язання.

Із співвідношення $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ знайдемо кут *B*: $\angle B$=180º- $\angle A$ - $\angle C$=180º- 40º2'- 60º4' = 79º54'

За теоремою синусів знайдемо сторони *AC і AB* Δ *ABC*:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{BC}{\sin A}\sin B = \frac{4{,}15 \cdot \sin 79°54'}{\sin 40°2'} \approx$$

$$\approx \frac{4{,}15 \cdot 0{,}9845}{0{,}6432} \approx 6{,}35$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC}{\sin A}\sin C = \frac{4{,}15 \cdot \sin 60°4'}{\sin 40°2'} \approx$$

$$\approx \frac{4{,}15 \cdot 0{,}8666}{0{,}6432} \approx 5{,}59$$

Отже, *AB ≈ 5,59 см, AC ≈ 6,35 см.*

Відповідь: *AB ≈ 5,59 см, AC ≈ 6,35 см,* $\angle$ *B* = 79º54'.

Приклад. Дано сторони $a=$ 49,4см, *b* = 26,4см і $\angle C = 47°20'$. Знайти інші елементи трикутника (рис. 22).

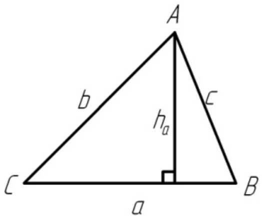


Рис. 22

Дано: Δ *ABC, AC*=*b*=26,4 см

BC= *a* =49,4 см, $\angle C = 47°20'$

Знайти: *AB*, $\angle$ *A*, $\angle$ *B*.

Розв'язання.

За теоремою косинусів знайдемо сторону $AB = c$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C$

$AB^2 = (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot \cos 47°20' \approx 2440,36 + 696,96 - 2608,32 \cdot 0,6778 \approx 1369,4007$

$AB \approx 37,01$ см

За теоремою синусів знайдемо кут *A* Δ *ABC*:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{AB}\sin C = \frac{49,4 \cdot \sin 47°20'}{37,01} \approx$$

$$\approx \frac{49,4 \cdot 0,7353}{37,01} \approx 0,9815$$

За таблицями знаходимо: $\angle$ A ≈ 78º57'

За співвідношенням $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ знайдемо кут *B*: $\angle B = 180° - \angle A - \angle C \approx 180° - 78°57' - 47°20' \approx = 53°43'$

Відповідь: *AB ≈ 37,01 см,* $\angle$ *A* ≈ 78º57', $\angle$ *B* ≈ 53º43'.

3. Вимірювання ліній і кутів на місцевості

В багатьох задачах практичного характеру потрібно взнати відстань між точками земної поверхні і кути між лініями на ній. Безпосереднє вимірювання цих відстаней і кутів дуже часто буває неможливим.

Розв'язування трикутників дозволяє знайти відстань між двома точками не проводячи безпосереднього вимірювання, вимірюючи лише кути і відстані між доступними точками. (Вимірювання кутів за допомогою теодолітів – кут між напрямленням на точку і його горизонтальною проекцією).

Задача 1. Обчислення відстані від доступної точки до недоступної.

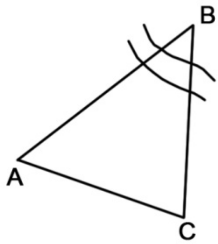


Рис. 23

Нехай точка A доступна, а точка B – недоступна. Для відшукання відстані AB вибирають доступну точку C, з якої видно точки A і B. Вимірюють відстань CA і кути $CAB=\alpha$, $ACB=\gamma$. Тоді задача зводиться до розв'язування трикутника за стороною і двома кутами (рис 23).

Задача 2. Обчислення відстаней між недоступними точками.

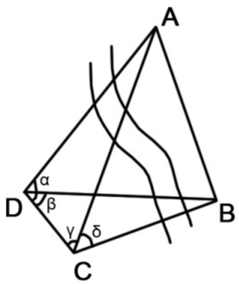


Рис. 24

Нехай A і B – дві недоступні точки. Вибираємо дві доступні точки C і D, з яких видно точки A і B. Вимірюють відстань CD і $\angle ADC=\alpha$, $\angle BDC=\beta$, $\angle ACD=\gamma$, $\angle BCD=\delta$. Розв'язуючи ΔACD і ΔBCD за стороною і двома кутами знаходять сторони AC і BC. Розв'язуючи ΔABC за двома сторонами і кутом між ними $\angle ACB=\delta-\gamma$, знаходять шукану відстань (рис. 24).

Задача 3. Обчислення висоти предмета.

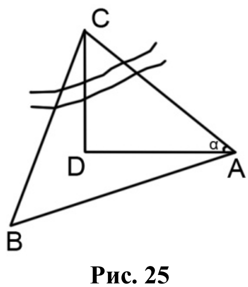


Рис. 25

Нехай C – недоступна точка, D – її горизонтальна проекція, A і B – дві доступні точки, з яких видно точку C. З ΔABC знаходимо АС (аналогічно задачі 1). Вимірюємо $\angle CAD=\alpha$ між AC і AD. З ΔADC – прямокутний, знаходимо DC (рис. 25).

Приклад. Визначити відстань від даної точки *A* до недоступної точки *B*, якщо виміряли базис *AC*=36,5 м, $\angle BAC = 45°48'$, $\angle ACB = 66°42'$ (рис. 26).

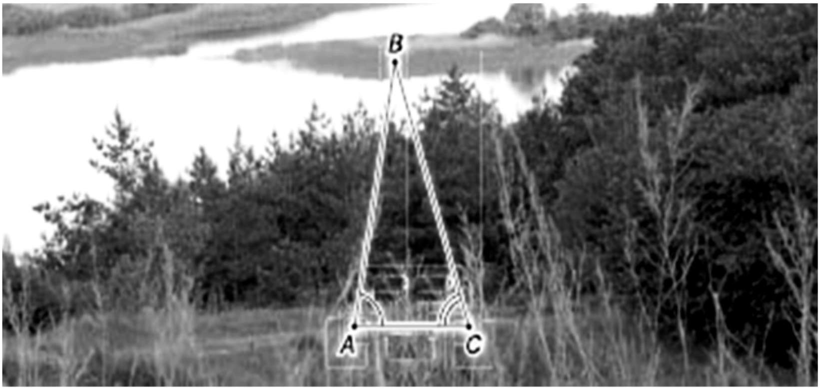


Рис. 26

Дано: ΔABC, $AC=b=36{,}5$ м

$\angle BAC = 45°48'$, $\angle ACB = 66°42'$

Знайти: *AB*.

Розв'язання.

За співвідношенням $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$ знайдемо кут *ABC*:

$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle ACB = 180° - 45°48' - 66°42' = 67°30'$

За теоремою синусів знайдемо сторону *AB* ΔABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{\sin\angle ACB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sin\angle ABC}\sin\angle ACB = \frac{36{,}5\cdot\sin 66°42'}{\sin 67°30'} \approx$$

$$\approx \frac{36{,}5\cdot 0{,}9184}{0{,}9239} \approx 36{,}3(\text{м})$$

Відповідь: *AB≈36,3 м*.

Приклад. Обчислити висоту предмета *C*, якщо *D* – горизонтальна проекція предмета, *A* і *B* – довільно вибрані пункти, з яких видно предмет C при наступних вимірах: AB = 80 м, $\angle CAB = 47°32'$, $\angle ABC = 59°20'$, $\angle CAD = 74°$ (рис. 27).

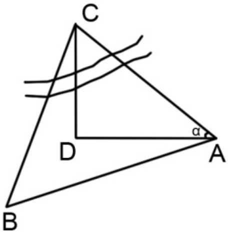


Рис. 27

Дано: Δ ABC, AB = 80 м, $\angle CAB = 47°32'$, $\angle ABC = 59°20'$, $\angle CAD = 74°$ $CD \perp AD$

Знайти: CD.

Розв'язання.

З трикутника ABC із співвідношення $\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 180°$ знайдемо кут ACB:

ABC=180º-47º32'-59º20' = 73º8'

З ΔABC за теоремою синусів знайдемо сторон\у AC з ΔABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{\sin\angle ACB} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\sin\angle ACB}\sin\angle ABC = \frac{80\cdot\sin 59°20'}{\sin 73°8'} \approx$$

$$\approx \frac{80\cdot 0{,}8602}{0{,}9570} \approx 72(\text{м})$$

Розглянемо трикутник CAD. Він прямокутний, бо $CD \perp AD$.

За допомогою співвідношення $a = c\sin A$ в прямокутному трикутнику знайдемо катет CD:

$b=CD=AC\cdot \sin\angle CAD$=72·sin73º8' ≈ 72·0,9570 ≈ 68,9 м ≈ 70 м.

Відповідь: CD ≈ 70 м.

Приклад. Знайдіть висоту вежі, яка відокремлена від вас річкою (рис. 28).

Розв'язання.

На горизонтальній прямій, яка проходить через основу вежі, позначимо дві точки A_1 і C_1. Вимірюємо $A_1C_1=b$, $\angle DAB=\alpha$ і $\angle DCB=\beta$. За теоремою синусів з трикутника ABC одержимо:

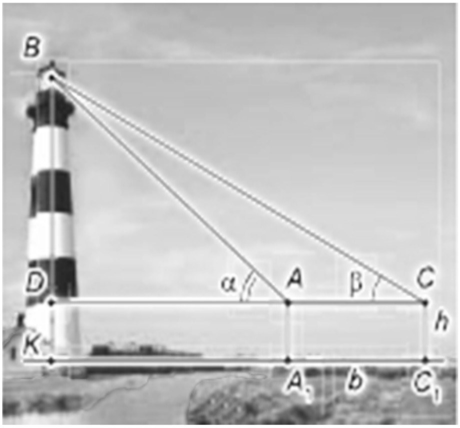


Рис. 28

$$AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin B}$$

З прямокутного трикутника ABD: $BD=AB \sin\alpha$.

Отже, $BD = \dfrac{b\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

Додавши до BD висоту приладу $AA_1=DK=h$, яким вимірювали кути, одержимо формулу для обчислення висоти вежі:

$$BK=BD+DK=\frac{b\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}+h.$$

Нехай результати вимірювання такі: b = 12 м, h = 1,5 м, $\alpha = 42°$, $\beta = 37°$.

Тоді $BK = \dfrac{12\sin 42°\sin 37°}{\sin(42°-37°)} + 1{,}5 \approx \dfrac{12\cdot 0{,}6691\cdot 0{,}6018}{0{,}0872} + 1{,}5 \approx 56{,}9$.

Відповідь: 56,9 м

Властивості та графіки тригонометричних функцій

Вище було показано, що функція $y=\sin x$, $x \in R$, неперервна, періодична з періодом 2π, непарна і обмежена, причому $|\sin x| \le 1$ для будь-якого $x \in R$. Графік функції $y=\sin x$, який називається *синусоїдою,* зображено на рис. 29.

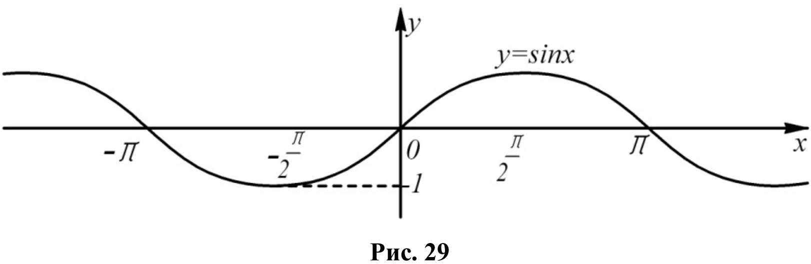


Рис. 29

Функція $y=\cos x$, $x\in R$, неперервна, періодична з періодом 2π, парна і обмежена: $|\cos x|\le 1$ для будь-якого $x\in R$. Оскільки $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ для будь-якого $x\in R$, то графік функції $\cos x$, $x\in R$, одержують з графіка функції $\sin x$, $x\in R$, зміщенням вздовж осі абсцис ліворуч на відрізок довжиною $\frac{\pi}{2}$. Отже, графіком косинуса буде зміщена синусоїда (рис. 30).

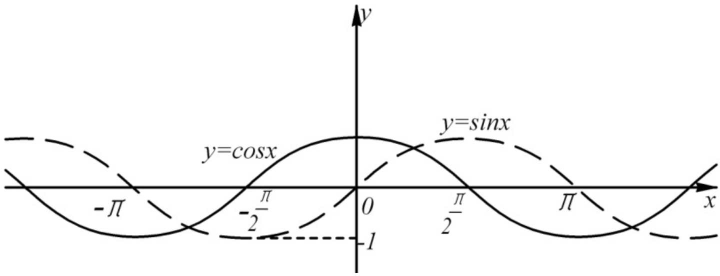


Рис. 30

Функція $y=tgx$ (рис. 31)

1) Областю визначення є множина всіх дійсних чисел, крім $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, де $n\in Z$

2) Областю значень є множина всіх дійсних чисел.

3) Функція непарна.

4) Періодична з періодом $n\pi$, $n\in Z$; найменшим додатним періодом число π.

5) Функція набуває значень, що дорівнюють 0 (нулі функції), якщо $x=n\pi$, де $n\in Z$

6) Проміжками зростання є $(-\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi)$, де $n\in Z$

7) Проміжки, де тангенс додатний, є $(n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi)$, а від'ємний – $(-\frac{\pi}{2}+n\pi;n\pi)$ при $n\in Z$

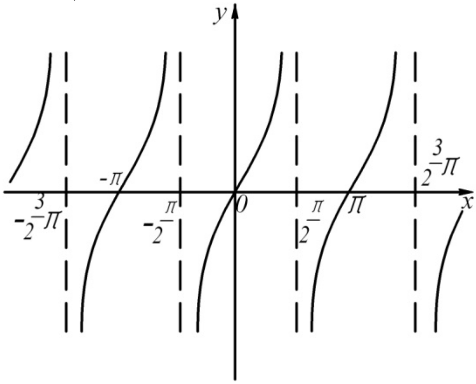


Рис. 31. Графік функції $y=tgx$

Функція $y=ctgx$ (рис. 32)

1) Областю визначення є множина всіх дійсних чисел, крім $x=n\pi$, де $n\in Z$

2) Областю значень є множина всіх дійсних чисел.

3) Функція непарна.

4) Періодична з періодом $n\pi$, $n\in Z$; найменшим додатним періодом число π.

5) Функція набуває значень, що дорівнюють 0 (нулі функції), якщо $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, де $n\in Z$

6) Проміжками спадання є $(n\pi;\pi+n\pi)$, де $n\in Z$

7) Проміжками, де котангенс додатний, є $(n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi)$, а від'ємний $-(-\frac{\pi}{2}+n\pi;n\pi)$ при $n\in Z$.

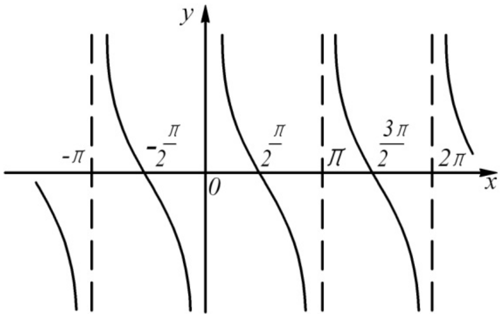


Рис. 32. Графік функції $y = ctgx$

Нехай дано дві функції $y = \sin x$ і $y = 3\sin x$. Побудуємо графіки даних функцій на одному рисунку (рис. 33). Неважко помітити, що при тому самому значенні x ордината графіка функції $y = 3\sin x$ у три рази більша від ординати графіка функції $y = \sin x$. Можна сказати, що графік функції $y = 3\sin x$ можна утворити з графіка функції $y = \sin x$ розтягуванням уздовж осі ординат у 3 рази.

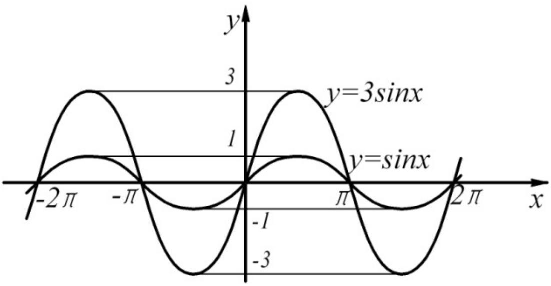


Рис. 33

Взагалі графік функції $y = k\sin x$, $k > 0$ утворюють з графіка функції $y = \sin x$ розтяганням у k раз уздовж осі ординат. Якщо

$k < 0$, то графік функції $y = k\sin x$ симетричний відносно осі абсцис графіку функції $y = |k|\sin x$. Число $|k|$ при вивченні гармонічних коливань називають *розмахом, або амплітудою коливання*.

Властивості та графіки обернених тригонометричних функцій

1. Функція арксинус та її графік. Функція $y = \sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ зростає і неперервна; отже, вона має обернену функцію, зростаючу і неперервну.

Функція, обернена до функції $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, називається *арксинусом* і позначається arcsin.

Згідно з означенням оберненої функції областю визначення арксинуса є відрізок $[-1; 1]$, а множиною значень – відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

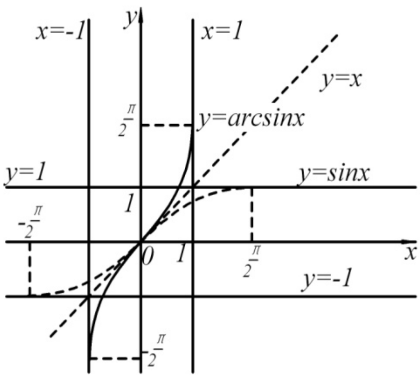


Рис. 34

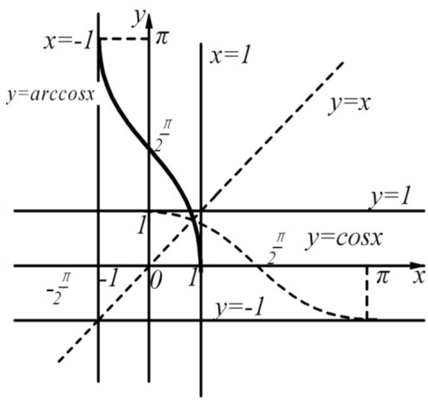


Рис. 35

Зазначимо, що графік функції

$$y = \arcsin x, \qquad x \in [-1;\ 1],$$

симетричний графіку функції $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ відносно бісектриси координатних кутів першої і третьої чвертей (рис. 34).

Обчислимо деякі значення арксинуса:

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$; отже, $\quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$;

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; отже, $\quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; отже, $\quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; отже, $\quad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

$\sin 0 = 0$; отже, $\quad \arcsin 0 = 0$;

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; отже, $\quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$; отже, $\quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$;

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; отже, $\quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; отже, $\quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Інші значення функції $\arcsin$ знаходять за допомогою таблиць.

2. Функція арккосинус та її графік. Функція $y = \cos x$ на відрізку $[0;\ \pi]$ спадає й неперервна, отже, вона має обернену функцію, спадну й неперервну.

Функція, обернена для функції $y = \cos x$, $x \in [0;\ \pi]$, називається *арккосинусом* і позначається $\arccos$.

Згідно з означенням обернених функцій її областю визначення є відрізок $[-1;\ 1]$, а множиною значень – відрізок $[0;\ \pi]$. Графік функції $y=\arccos x$, $x\in[-1;\ 1]$, симетричний графіку функції $y=\cos x$, $x\in[0;\ \pi]$ відносно бісектриси координатних кутів першої і третьої чвертей (рис. 35).

Обчислимо кілька значень функції $\arccos$:

$\cos 0=1$; отже, $\arccos 1=0$;

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; отже, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$;

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; отже, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$;

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; отже, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$;

$\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$; отже, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi$;

$\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; отже, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi$;

$\cos\pi=-1$; отже, $\arccos(-1)=\pi$.

3. Функція арктангенс і її графік. Функція тангенс неперервна і строго зростаюча на інтервалі $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, отже, вона має обернену функцію, яка неперервна і строго зростає.

Функція, обернена для функції $y=tgx$, $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, називається *арктангенсом* і позначається arctg.

Згідно з означенням обернених функцій областю її визначення буде інтервал $]-\infty;\infty[$, а множиною її значень – інтервал $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$

.

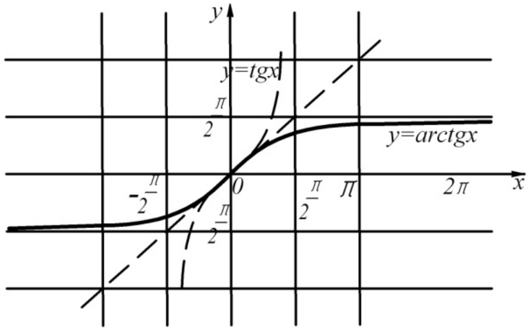


Рис. 36

Графік функції $y = \text{arctg}x$, $x \in R$, симетричний графіку функції $y = tgx$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, відносно бісектриси координатних кутів першої і третьої чвертей (рис. 36).

Обчислимо кілька значень арктангенса:

$tg\frac{\pi}{4} = 1$; отже, $\text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$;

$tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$; отже, $\text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$;

$tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; отже, $\text{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$;

$tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$; отже, $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

$tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; отже, $\text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$;

$tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; отже, $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Інші значення арктангенса знаходять з таблиць.

4. Функція арккотангенс та її графік

На інтервалі $]0;\ \pi[$ функція котангенс спадає, крім того, вона неперервна в кожній точці інтервалу $]0;\ \pi[$; отже, на інтервалі $]0;\ \pi[$ ця функція оборотна, тобто має обернену функцію.

Функція, обернена для функції $y = ctgx$, $x \in]0;\ \pi[$, називається арккотангенсом і позначається arcctg.

Згідно з означенням оберненої функції областю її визначення є інтервал R, а множиною значень – інтервал $]0;\ \pi[$. Графік функції $y = \mathrm{arcctg} x$, $x \in R$ дано на (рис. 37). Цей графік симетричний графіку функції $y = ctgx$, $x \in]0;\ \pi[$ відносно бісектриси координатних кутів першої і третьої чвертей.

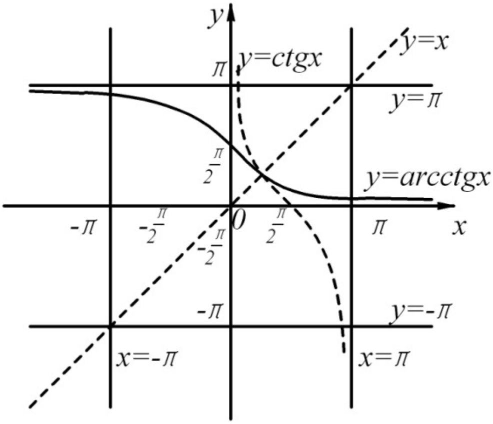


Рис. 37

Обчислимо кілька значень арккотангенса:

$ctg\dfrac{\pi}{4} = 1;$ отже, $\mathrm{arcctg}1 = \dfrac{\pi}{4};$

$ctg\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1;$ отже, $\mathrm{arcctg}(-1) = \dfrac{3\pi}{4};$

$ctg\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; отже, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$;

$ctg\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; отже, $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$;

$ctg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$; отже, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$;

$ctg\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$; отже, $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

Інші значення арккотангенса знаходять з таблиць.

❓ Запитання для самоконтролю

1. Які відомі тригонометричні функції числового аргументу?
2. Радіанне вимірювання кутів.
3. Які ви знаєте основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу?
4. Формули зведення.
5. Які співвідношення між сторонами і кутами у прямокутному трикутнику?
6. Сформулюйте теорему синусів та теорему косинусів.
7. Властивості та графіки тригонометричних функцій.
8. Назвіть обернені тригонометричні функції.
9. Сформулюйте властивості обернених тригонометричних функцій.
10. Який вигляд мають графіки обернених тригонометричних функцій.
11. Сформулюйте теорему синусів (косинусів).
12. Що означає розв’язати трикутник?
13. Скільки елементів повинно бути задано, щоб розв’язати косокутний (прямокутний) трикутник?
14. Як формулюється теорема Піфагора?
15. Як обчислити відстань від доступної точки до недоступної, між двома недоступними точками, не проводячи безпосереднього вимірювання?

1.2. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

1.2.1. ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

У сучасній математиці, а також у ряді розділів фізики і техніки (електротехніки, електроніки, механіки, гідродинаміки), крім дійсних чисел, використовуються числа більш загальної природи, що називаються *комплексними числами.* В історії розвитку математики комплексні числа виникли у зв'язку з розв'язуванням алгебраїчних рівнянь.

Як відомо, дійсні корені квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами $x^2 + px + q = 0$ (1) знаходяться за формулою:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad (18)$$

Якщо вираз, що стоїть під знаком квадратного кореня, $D = p^2 - 4q$, який називають *дискримінантом* квадратного рівняння (1), невід'ємний, то за формулою (2) знаходимо два дійсні і різні корені рівняння (1). Якщо ж дискримінант $D = p^2 - 4q < 0$ від'ємний, то в множині дійсних чисел не можна добути квадратний корінь з від'ємного числа, формула (2) не застосовується. Для прикладу розглянемо таку задачу.

Знайти квадрат, площа якого на чотири одиниці менша за півсуму всіх його сторін. Позначимо через x сторону шуканого квадрата, одержимо рівняння виду:

$$x^2 + 4 = 2x \text{ або } x^2 - 2x + 4 = 0 .$$

Оскільки $D = p^2 - 4q = 2^2 - 4 \cdot 4 = -12 < 0,$ то для цього рівняння формула (2) не підходить. Відповідно до загального положення дане рівняння не має коренів: для будь-якого дійсного числа x маємо $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \neq 0$, звідки випливає, що $x^2 + 4 \neq 2x$, тобто потрібного квадрата не існує.

Таким чином, якщо яка-небудь конкретна задача (геометрична, фізична або з іншої галузі), сформульована на мові теорії дійсних чисел, зводиться до квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами і з від'ємним дискримінантом, то це є ознакою того, що ця задача зовсім не має розв'язку в множині дійсних чисел.

Незалежно від того, з яких передумов ми виходили, щоб розширити поняття дійсного числа (алгебраїчних, геометричних та інших), завжди прийдемо до необхідності введення таких нових чисел, які є коренями квадратного рівняння $x^2+1=0$, що в множині дійсних чисел не має розв'язків. Таким чином, для розширення поняття дійсного числа необхідно ввести нове число, яке повинно бути коренем цього рівняння. Таке число позначають символом ***i*,** який є деяким значенням виразу $\sqrt{-1}$. Отже, це нове число повинно задовольняти співвідношення $i^2=-1$. Приєднавши до множини дійсних чисел число *i*, визначивши певним чином операції додавання і множення, отримаємо числову систему, яка називається множиною комплексних уявних чисел і позначається буквою С.

Основні співвідношення. Алгебраїчна форма комплексного числа

Комплексними числами називаються числа виду $a+bi$, де a і b – дійсні числа, а уявна одиниця *i* визначається рівністю $i^2=-1$.

Запис комплексного числа у вигляді $z=a+bi$ називається *алгебраїчною формою запису* комплексного числа.

Дійсне число a називається *дійсною* частиною комплексного числа $z=a+bi$, а вираз bi – *уявною* частиною, дійсне число b – коефіцієнт при уявній частині.

Будь-яке число a міститься в множині комплексних чисел, його можна записати так: $a=a+0\cdot i$. Числа 0, 1, i записують відповідно у вигляді $0=0+0\cdot i, 1=1+0\cdot i$ та $i=0+1\cdot i$.

При $a=0$ комплексне число $a+bi$ перетворюється в суто уявне число bi.

Комплексне число $a-bi$ називається *комплексно-спряженим* із числом $a+bi$, його позначають через $\bar{z}$, тобто $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$.

Комплексні числа вигляду $a+bi$ і $-a-bi$ називаються *протилежними.*

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ називається число

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Модуль комплексного числа завжди є дійсне невід’ємне число: $|z| \geq 0$, причому $|z| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $z = 0$.

З означення модуля комплексного числа випливає, що для будь-яких комплексних чисел справедливі співвідношення:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \ |z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|, \text{ якщо } z_2 \neq 0;$$

$$|z^n| = |z|^n \text{ для будь-якого цілого числа } n.$$

Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі

Для цих чисел поняття рівності та дії додавання і множення означені так:

два комплексні числа $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ називаються *рівними*, якщо $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$;

сумою двох комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ називається комплексне число $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;

добутком двох комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ називається комплексне число $(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

Щоб виконати *ділення* двох комплексних чисел, ділене і дільник множать на комплексне число, спряжене дільнику. Дії додавання, віднімання і множення знаходять формально як дії з двочленами.

Приклад 1. Знайти суму і добуток комплексних чисел :

$$z_1 = 5 - 2i \text{ і } z_2 = 3 + 4i.$$

Розв’язок. Суму знаходимо формальним додаванням двочленів $5 - 2i$ і $3 + 4i$:

$$z_1 + z_2 = (5 - 2i) + (3 + 4i) = 5 - 2i + 3 + 4i = 8 + 2i.$$

Добуток знаходимо формальним множенням двочленів $5 - 2i$ і $3 + 4i$ із заміною i^2 на -1:

$$z_1 \cdot z_2 = (5 - 2i) \cdot (3 + 4i) = 15 - 6i + 20i - 8i^2 = 15 + 14i + 8 = 23 + 14i.$$

Приклад 2. Дано комплексні числа $z_1 = 3 - 2i$ і $z_2 = 6 - 17i$. Знайти різницю $z_2 - z_1$ і частку z_2 / z_1.

Розв’язок. Різницю знаходимо формальним відніманням двочленів $6 - 17i$ і $3 - 2i$:

$$z_1 - z_2 = (6 - 17i) - (3 - 2i) = 6 - 17i - 3 + 2i = 3 - 15i.$$

Щоб знайти частку $\frac{z_1}{z_2}$, помножимо чисельник і знаменник цього дробу на число, спряжене знаменнику z_1:

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{6-17i}{3-2i}=\frac{(6-17i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{18-51i+12i-34i^2}{9-4i^2}=\frac{18-39i+34}{9+4}=\frac{52-39i}{13}=$$

$$=\frac{52}{13}-\frac{39}{13}i=4-3i.$$

Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Домовились комплексне число $z=a+bi$ зображати точкою площини з координатами *(a; b)*. Дійсні числа зображуються точками осі абсцис, яку називають *дійсною віссю*, а суто уявні числа – точками осі ординат, яку називають *уявною віссю.*

Кожній точці площини з координатами *(a; b)* відповідає один і тільки один вектор з початком у точці *O (*0;0) і кінцем у точці *M(a;b)*. Тому комплексне число $a+bi$ можна зобразити у вигляді вектора $\overrightarrow{OM}=\vec{z}$ з початком у точці $z=0$ і кінцем у точці $z=a+bi$ (рис. 38).

Точка *M(a; b),* яка відповідає комплексному числу $z=a+bi$, називається *афіксом* даного комплексного числа.

З геометричної інтерпретації комплексного числа випливають такі властивості:

1°. Довжина вектора $\vec{z}$ дорівнює $|z|$.

2°. Точки, які зображають числа $z=a+bi$ і $z=a-bi$, – симетричні відносно дійсної осі.

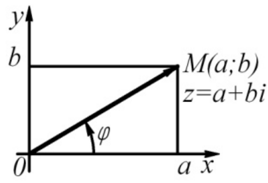


Рис. 38

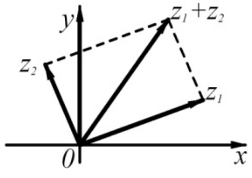


Рис. 39

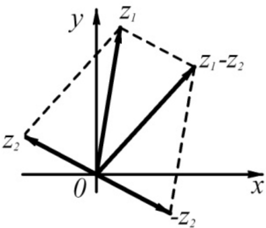


Рис. 40

3°. Точки z і $-z$ симетричні відносно точки $z = 0$.

4°.Числа $(z_1 + z_2), (z_1 - z_2)$ геометрично зображаються як вектори, побудовані за правилом додавання векторів, які відповідають точкам z_1 і z_2 $(z_1\ i\ -z_2)$ (рис. 39, 40).

5°. Відстань між точками z_1 і z_2 дорівнює $|z_1 - z_2|$ (рис. 40).

Кут φ між дійсною віссю Ox і вектором $\overrightarrow{OM}$, який відлічують від додатного напрямку дійсної осі, називається аргументом комплексного числа $z\neq 0$ (рис. 38).

Аргумент φ комплексного числа $z = a + bi$ записують так:

$$\varphi = \arg z \text{ або } \varphi = \arg(a + bi).$$

Для числа $z = 0$ аргумент не визначено.

Аргумент комплексного числа визначається неоднозначно: будь-яке комплексне число $z = 0$ має нескінченну множину аргументів, які відрізняються один від одного на число, кратне 2π. Найменше за абсолютною величиною значення аргументу з проміжку $[-\pi; \pi]$ називається *головним значенням* аргументу.

З означення тригонометричних функцій випливає, що коли $\varphi = \arg(a + bi)$, то виконуються рівності:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{r}.$$

Справедливе й обернене твердження, тобто якщо виконуються обидві рівності, то $\varphi = \arg(a + bi)$. Отже, всі значення аргументу φ можна знаходити, розв'язуючи сумісно ці рівняння.

Значення аргументу комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ можна знаходити і так:

1) визначити, у якій чверті лежить точка $z = a + bi$ (використати геометричну інтерпретацію числа $z = a + bi$);

2) знайти в цій чверті кут φ, розв'язавши одне з попередніх рівнянь або рівняння $tg\varphi = b/a$;

3) знайти всі значення аргументу числа z за формулою:

$$\arg z = \varphi + 2\pi\kappa,\ \kappa \in Z.$$

Полярні координати точки на площині

Декартова система координат не єдиний спосіб визначати за допомогою чисел місце знаходження точки на площині. Для цієї мети використовують багато інших координатних систем.

Найважливішою після прямокутної системи координат є *полярна система координат*. Вона задається точкою *O*, яка називається *полюсом*, і променем *Op*, який виходить з полюса і називається *полярною віссю*. Задаються також одиниці масштабу: лінійна – для вимірювання довжин відрізків і кутові – для вимірювання кутів (рис. 41). Нехай $c = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ – відстань від точки *O* до точки *M* і

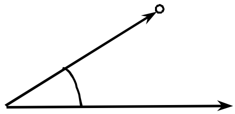


Рис. 41

$\varphi = \left(\widehat{Op, \overrightarrow{OM}}\right)$ – кут, на який треба повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором $\overrightarrow{OM}$.

Полярними координатами точки *M* називаються числа ρ і *φ*. При цьому число ρ вважається першою координатою і називається *полярним радіусом*, а число *φ* – другою координатою і називається *полярним кутом*. Точка *M* з полярними координатами ρ і *φ* позначається так: $M(c;\varphi)$. Очевидно, полярний радіус може набувати довільних невід'ємних значень: $0 \le c < +\infty$ полярний кут вважатимемо таким, що змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$. Іноді розглядають кути *φ*, більші від 2π, а також від'ємні кути, тобто такі, що відкладаються від полярної осі за годинниковою стрілкою.

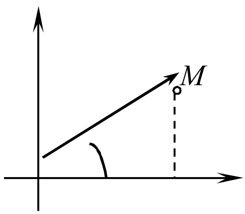


Рис. 42

Виразимо декартові координати точки *M* через полярні.

Вважатимемо, що початок прямокутної системи збігається з полюсом, вісь *Ox* – з полярною віссю *Op*. Якщо точка *M* (рис. 42) має декартові координати *x* і *y* і полярні ρ і *φ*, то

$$x = c\cos\varphi,\ y = c\sin\varphi, \tag{1}$$

звідки

$$c = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \qquad (2)$$

Зауважимо, що друга з формул (2) дає два значення кута *φ*, оскільки він змінюється від 0 до 2π. З цих двох значень кута треба взяти те, для якого задовольняються формули (1). Формули (1) називають *формулами переходу від полярних координат до декартових*, а формули (2) – *формулами переходу від декартових координат до полярних*.

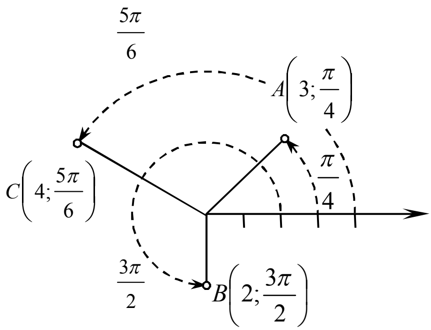


Рис. 43

Приклад. Побудувати точки за полярними координатами: $A\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2;\frac{3\pi}{2}\right)$ і $C\left(4;\frac{5\pi}{6}\right)$.

Дані точки показано на рис. 43.

Тригонометрична форма комплексного числа. Перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної.

Нехай $r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ – модуль, а φ – одне із значень аргументу комплексного числа $a+bi$. Оскільки із співвідношень випливає, що $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, то $a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Таким чином, будь-яке комплексне число $a+bi \neq 0$ можна записати за формулою $a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r – модуль, а φ – одне із значень аргументу цього числа.

Справедливе й обернене твердження: якщо комплексне число $a + bi$ подано у вигляді $a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де $r > 0$, то $r = |a+bi|$, $\varphi = \arg(a+bi)$.

Зображення комплексного числа у вигляді $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де $r > 0$, називається *тригонометричною формою* запису комплексного числа.

Щоб записати комплексне число $z = a + bi$ в тригонометричній формі, треба знайти модуль цього числа; одне із значень аргументу цього числа. Через багатозначність *arg z* тригонометрична форма комплексного числа також неоднозначна.

Приклад. Записати число $z = -1 - i$ в тригонометричній формі.

Розв'язок. Знаходимо модуль $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$ Знаходимо кут $\alpha = arctg\left|\frac{-1}{-1}\right| = arctg1 = \frac{\pi}{4}$. Вектор, який відповідає даному числу, лежить у ІІІ координатній чверті, тому одним із аргументів є $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, тобто $z = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4})$.

1.2.2. ПОКАЗНИКОВА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Поняття комплексного числа в показниковій формі

Перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до показникової

Степінь e^z з комплексним показником $z = x + iy$ визначається рівністю:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \tag{19}$$

Можна довести, що

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \tag{20}$$

тобто

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{21}$$

Зокрема, при $x = 0$ одержимо співвідношення

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \tag{22}$$

яке називається формулою Ейлера.

Для комплексних показників справджуються основні правила дій з показниками; наприклад, при множенні чисел показники додаються, при діленні – віднімаються, при піднесенні до степеня – перемножуються.

Показникова функція має період, який дорівнює *2πi*, тобто $e^{z+2\pi i}=e^z$. Зокрема, при $z=0$ одержимо співвідношення: $e^{2\pi i}=1$.

Щоб записати комплексне число $z=a+bi$ в показниковій формі, треба знайти модуль і одне із значень аргументу цього числа. Через багатозначність аргументу комплексного числа $\arg z$ показникова форма комплексного числа також неоднозначна. Зображення комплексного числа у вигляді $z=re^{\varphi i}$, де $r>0$, називається *показниковою формою* запису комплексного числа.

Тригонометричну форму комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ можна замінити показниковою формою $z=re^{\varphi i}$.

1.2.3. ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ, ЗАДАНИМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧНІЙ ТА ПОКАЗНИКОВІЙ ФОРМІ

Модуль комплексного числа. Виконання дій над комплексними числами

Добуток комплексних чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ і $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ знаходять за формулою: $r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$, тобто $|z_1z_2|=r_1\cdot r_2=|z_1||z_2|$, $\arg(z_1\cdot z_2)=\varphi_1+\varphi_2$.

Отже, при множенні двох комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, їх модулі перемножують, а аргументи додають.

Частку комплексних чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ *і* $z_2=r_2(\cos\varphi_2+\ +i\sin\varphi_2)$ знаходять за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

$$\text{тобто } \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\varphi_1-\varphi_2.$$

Отже, при діленні комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, їх модулі ділять, а аргументи віднімають.

Для піднесення комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ до n-го степеня використовують формулу Муавра:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in Z\ .$$

Для добування кореня n-го степеня з комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ використовують формулу:

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + \sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right),$$

де $\sqrt[n]{r}$ – арифметичний корінь, k =0, 1, 2,...., n-1.

Приклад. Дано комплексні числа $z_1 = 4(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$ і $z_2 = \frac{1}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$. Знайти їх добуток і частку. Відповідь записати в алгебраїчній формі.

Розв'язок. Застосовуючи правила множення і ділення комплексних чисел, маємо:

$$z_1 z_2 = 4\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(120^\circ + 30^\circ\right) + i\sin\left(120^\circ + 30^\circ\right)\right) = 2\left(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ\right) =$$

$$2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i\ ;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 4 : \frac{1}{2}\left(\cos\left(120^\circ - 30^\circ\right) + i\sin\left(120^\circ - 30^\circ\right)\right) = 8\left(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ\right) =$$

$$8(0 + i\cdot 1) = 8i\ .$$

Приклад. Обчислити $\left(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ\right)^{15}$.

Розв'язок. $\left(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ\right)^{15} = \cos 300^\circ + i\sin 300^\circ = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Множення, ділення, піднесення до цілого додатного степеня і добування кореня цілого додатного степеня для комплексних чисел, заданих у показниковій формі, виконують за такими формулами:

$$r_1\cdot e^{i\varphi_1}\cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1\cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi};$$

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n}};$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1).$$

Формула Ейлера встановлює зв'язок між тригонометричними функціями і показниковою функцією. Замінивши в ній y на φ і на –φ, одержимо:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Додавши і віднявши ці рівності, одержимо:

$$\cos\varphi = \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)/\,2;$$

$$\sin\varphi = \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)/\,2i.$$

Ці дві прості формули, які також визначаються формулами Ейлера і виражають тригонометричні функції через показникові, дають можливість алгебраїчно одержати основні формули тригонометрії.

? Запитання для самоконтролю

1. Що розуміють під множиною?
2. Які операції можна виконувати над множинами?
3. Які числа називаються дійсними?
4. Які числа називаються комплексними ?
5. Які комплексні числа називаються спряженими?
6. Як зображуються комплексні числа на площині?
7. Які форми запису комплексних чисел ви знаєте?
8. Які дії можна виконувати з комплексними числами?
9. Як додати два комплексних числа?
10. Як помножити два комплексних числа?
11. Для чого застосовують формулу Муавра?

1.3. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.3.1. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ. ВИЗНАЧНИКИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ПРАВИЛА КРАМЕРА

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}. \tag{23}$$

Знайдемо розв'язки системи (23) (якщо, звичайно, вони є).

Під розв'язком системи (23) розуміють таку пару чисел $x=\alpha;$ $y=\beta,$ при підстановці яких у кожне рівняння отримують тотожність.

Помножимо перше рівняння системи (23) на $a_{22} \neq 0$, а друге – на $a_{12} \neq 0$ і віднімемо від першого рівняння друге. Маємо: $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot x = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$.

Помножимо перше рівняння системи (23) на $a_{21} \neq 0$, а друге – на $a_{11} \neq 0$ і віднімемо від другого рівняння перше. Отримаємо: $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot y = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$.

Як відомо, додавання або віднімання від одного рівняння системи іншого рівняння цієї системи, помноженого на деяке число, приводить до нової системи, яка є рівносильною (еквівалентною) до попередньої системи. Дві *системи* називають *еквівалентними* (рівносильними), якщо вони мають одні й ті ж самі розв'язки або одночасно розв'язків не мають. Тому система (24) буде еквівалентною системі (23):

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \end{cases}. \tag{24}$$

Зауваження. Перший нижній індекс вказує, у якому рядку знаходиться елемент, а другий – у якому стовпці.

Означення. Визначником (детермінантом) другого порядку називають число $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ і позначають $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

З урахуванням означення визначника другого порядку систему (24) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases} \text{(25), де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ (дельта), складений з коефіцієнтів при невідомих системи (23), називають визначником системи. Зазначимо, що визначники Δ_x і Δ_y утворюються з визначника Δ відповідно заміною першого і другого стовпців вільними членами.

Система (25) є наслідком заданої системи (23) і тому розв'язок системи (25), якщо він існує, є розв'язком і системи (23).

Під час розв'язування системи (25) можуть бути такі три випадки:

1) $\Delta \neq 0$ Тоді система (25) має один розв'язок:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \tag{26}$$

який є розв'язком системи (23). У цьому неважко впевнитися, підставивши значення x і y, знайдені за формулами (25), у систему (23). Кожне рівняння системи (23) перетвориться в тотожність. Формули (26) називають ф о р м у л а м и К р а м е р а;

2) $\Delta=0$, $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$. Тоді система (25) розв'язку не має, отже і система (23) *розв'язку не має, тобто система* (23) *несумісна;*

3) $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$. Система (23) зводиться до одного з рівнянь цієї системи і має безліч розв'язків.

Основні властивості визначника**:**

ВЛАСТИВІСТЬ 1. *Величина визначника не зміниться, якщо його рядки зробити стовпцями, а стовпці – рядками, не змінюючи нумерації їх.*

Доведення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Отже, Δ=Δ'.

ВЛАСТИВІСТЬ 2. *Якщо помножити всі елементи деякого стовпця (або рядка) на те саме число k, то значення визначника також помножиться на те саме число k.*

Доведення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{11} - ka_{12}a_{21} = k\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = k \cdot \Delta \cdot$$

ВЛАСТИВІСТЬ 3. *Якщо у визначнику поміняти місцями рядки або стовпці, то визначник змінить знак на протилежний.*

Доведення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\Delta$$

ВЛАСТИВІСТЬ 4. *Якщо елементи двох рядків або стовпців однакові, то визначник дорівнює нулю.*

Доведення

Переставимо ці рядки місцями. Тоді Δ'=-Δ, але Δ'=Δ (переставлені рядки однакові). Отже, Δ'=-Δ, 2Δ=0, Δ=0.

Наслідок. *Якщо у визначнику елементи двох рядків або стовпців пропорційні, то визначник дорівнює нулю.*

ВЛАСТИВІСТЬ 5**.** *Величина визначника не змінюється, якщо до елементів одного рядка або стовпця додати елементи другого рядка або стовпця, помножені на те саме число.*

Доведення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,;\ \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\left(a_{11} + ka_{21}\right)a_{22} - \left(a_{12} + ka_{22}\right)a_{21} = a_{11}a_{22} + ka_{2122} - a_{12}a_{21} - k_{21}a_{22} = \Delta$$

1.3.2. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА ЗМІННИМИ

Визначники третього порядку

Нехай задано систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (27)$$

(коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ і вільні члени b_1, b_2, b_3 вважаються заданими). Коефіцієнти при невідомих x, y, z позначатимемо однією буквою a_{ij} з двома індексами, де перший відповідає номеру рівняння, а другий – номеру невідомого.

Нагадаємо, що трійку чисел x_0, y_0, z_0 називають розв'язком системи, якщо внаслідок підстановки цих чисел замість x, y, z у систему кожне з трьох рівнянь системи перетворюється в тотожність.

Систему розв'яжемо способом додавання. Для цього помножимо обидві частини кожного рівняння відповідно на такі вирази:

$$a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \neq 0,\ -a_{12} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{32} \neq 0,\ a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \neq 0.$$

Потім додамо ці рівняння і згрупуємо члени *з x, y і z*. Одержимо:

$$\left(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}\right)x +$$
$$\left(a_{12}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{32}\right)y +$$
$$\left(a_{12}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{33}\right)z =$$
$$b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{22}a_{33} - a_{12}b_2a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}b_3 - b_3a_{22}a_{13}.$$

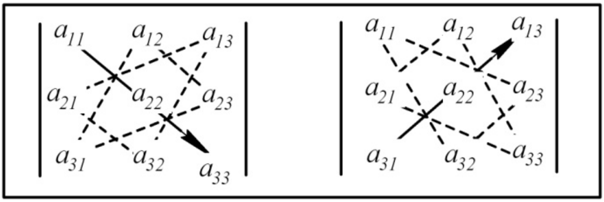
(28)

Коефіцієнти при y і z дорівнюють нулю. Запишемо вираз, що стоїть при x, у вигляді таблички, яку називають визначником (детермінантом) третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Визначник третього порядку складається з $3^2 = 9$ елементів.

Обчислювати визначник третього порядку можна за правилом, поданим на схемі:



На лівій фігурі проведено головну діагональ визначника, що йде зліва направо зверху вниз, побудовано два трикутники, що мають по одній, паралельній до цієї діагоналі, стороні; на правій фігурі побудовано другу діагональ того самого визначника і пару трикутників, які мають по одній, паралельній другій діагоналі стороні. Щоб обчислити визначник, беремо зі знаком плюс добуток елементів, що стоять на першій діагоналі, і добутки елементів, які стоять на вершинах трикутників фігури зліва. Потім беремо зі знаком мінус добуток елементів, що стоять на другій діагоналі, і добутки елементів, що стоять на вершинах трикутників фігури справа.

Вираз, що становить праву частину рівності (28), відрізняється від визначника Δ тим, що елементи першого стовпця Δ, які є коефіцієнтами при *x,* замінено відповідно вільними членами b_1, b_2, b_3. Позначимо цей вираз через Δ_x. Отже,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Після введення таких позначень рівняння (28) можна записати у вигляді:

$$x \cdot \Delta = \Delta_x. \qquad (29)$$

Аналогічно, помноживши обидві частини кожного рівняння системи (27) відповідно на вирази $-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} + a_{23}a_{31} \neq 0$, $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \neq 0$, $-a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13} \neq 0$ і додавши рівняння, після деяких перетворень маємо:

$$y \cdot \Delta = \Delta_y, \qquad (30)$$

де Δ_y – визначник, утворений з визначника Δ заміною коефіцієнтів при y вільними членами.

Якщо обидві частини кожного рівняння системи (27) помножимо відповідно на вирази $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\neq 0$, $a_{11}a_{32}+a_{12}a_{31}\neq 0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ і додамо всі три рівняння, то матимемо: $z\cdot\Delta=\Delta_z$,

де Δ_z – визначник, утворений з визначника Δ заміною коефіцієнтів при z вільними членами. Отже, одержимо систему:

$$\begin{cases}\Delta x=\Delta_x\\ \Delta y=\Delta_y,\\ \Delta z=\Delta_z\end{cases} \tag{31}$$

яка є наслідком системи (27). Таким чином, розв'язок системи (31), якщо він існує, є розв'язком системи (27).

При розв'язуванні системи (31) можуть бути випадки.

1) Якщо $\Delta\neq 0$, то з рівнянь системи (9) невідомі x, y, z визначаються однозначно, тобто

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{32}$$

Це і є розв'язок системи (27). Формули (32) називають формулами Крамера, а Δ – визначником системи.

За формулами Крамера можна розв'язати систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими лише тоді, коли визначник системи не дорівнює нулю.

2) Якщо $\Delta=0$, а $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ не дорівнюють нулю, то система (27) розв'язку не має.

3) Якщо $\Delta=0,\Delta_x=0,\Delta_y=0,\Delta_z=0$, то система має безліч розв'язків. Як знаходити розв'язки таких систем, покажемо пізніше.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases}x-y+z=0\\ x+2y=1\\ x+y-z=-2\end{cases}$$

Розв'язок. Знайдемо визначник системи Δ і визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+1-2-1=-4\,, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+4-1=4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2-1=-4\,, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-1-1-2=-8$$

За формулами (32) маємо:

$x=\Delta_x/\Delta=4/-4=-1$; $y=\Delta_y/\Delta=-4/-4=1$; $z=\Delta_z/\Delta=-8/-4=2$.

Визначники третього порядку мають ті самі основні властивості 1-5, що й визначники другого порядку. Розглянемо ще дві властивості, які використовують для обчислення визначників *n-го* ($n \geq 3$) порядку і при розв'язанні систем n лінійних рівнянь з n невідомими.

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} (i,j=1,2,3) визначника третього порядку Δ називають визначник другого порядку, який утворюється з Δ в результаті викреслення рядка і стовпця, що містять a_{ij}.

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Згідно з означенням мінором M_{ij} елемента a_{ij} (наприклад, мінором елемента a_{32}) є визначник $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$. Його можна одержати, викресливши у визначнику третій рядок і другий стовпець.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку називають його мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$.

ВЛАСТИВІСТЬ 6. *Кожний визначник третього порядку можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка або стовпця на їхні алгебраїчні доповнення.*

Доведення. Доведемо цю властивість для суми добутків елементів другого стовпця на їхні алгебраїчні доповнення. Нехай дано визначник третього порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Згрупуємо члени з елементами другого стовпця:

$$\Delta = a_{12}\left(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}\right)+a_{22}\left(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}\right)+a_{32}\left(a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}\right)=$$

$$=a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right)+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right).$$

Маємо:

$$-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=A_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=A_{22}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=A_{32}.$$

Тоді $\Delta = a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$.

Аналогічно доводять властивість суми добутків елементів інших рядків (стовпців) на їхні алгебраїчні доповнення.

ВЛАСТИВІСТЬ 7. *Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) визначника третього порядку на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли елементи, наприклад, першого стовпця, помножено на алгебраїчні доповнення відповідних елементів другого стовпця, тобто коли матимемо суму

$$a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}.$$

Нехай

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Знайдемо A_{12}, A_{22}, A_{32}:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31},$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31},$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=-a_{11}a_{23}+a_{13}a_{21}.$$

Підставивши ці значення в задану суму, одержимо:

$$a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}=a_{11}(-a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31})+a_{21}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})+$$
$$+a_{31}(a_{11}a_{23}+a_{13}a_{21})=-a_{11}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{31}+a_{11}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{21}a_{31}-$$
$-a_{11}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{31}=0$, що й треба було довести.

ВЛАСТИВОСТІ 6 і 7 ми вже використовували, коли підбирали вирази, на які треба помножити рівняння системи (27), щоб після додавання зникли відразу два невідомих. У першому випадку множили рівняння на алгебраїчні доповнення елементів першого стовпця визначника Δ, у другому і третьому – на алгебраїчні доповнення елементів відповідно другого і третього стовпців визначника Δ. Користуючись властивостями визначників, можна обчислювати визначники, не застосовуючи схему.

Приклад. Обчислити визначник, користуючись властивістю 6:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Застосуємо властивість 6. Подамо у вигляді суми добутків елементів першого рядка на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

У даному випадку $a_{11}=1$, $a_{12}=3$, $a_{13}=-2$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2-1=-3; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4+3=-1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2+3=5\cdot$$

Отже, $\Delta = 1(-3)+3(-1)-2\ 5=-3-3-10=-16$.

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Якщо визначник системи n лінійних рівнянь з n невідомими відмінний від нуля, то систему рівнянь можна розв'язати за формулами Крамера. Розглянемо ще один метод розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими. Це так званий метод Гаусса.

Нехай маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2. \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (33)$$

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Розділимо обидві частини першого рівняння на a_{11}:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad (34)$$

Віднімемо від другого і третього рівнянь системи (33) рівняння (34), помножене спочатку на a_{21}, а потім на a_{31}:

$$\left(a_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2+\left(a_{23}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}\right)x_3=b_2-\frac{b_1}{a_{11}}a_{21};$$

$$\left(a_{32}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31}\right)x_2+\left(a_{33}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31}\right)x_3=b_3-\frac{b_1}{a_{11}}a_{31}\cdot$$

Введемо позначення:

$$a_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}=a'_{22};a_{23}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}=a'_{23};b_2-\frac{b_1}{a_{11}}a_{21}=b'_2;$$

$$a_{32}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31}=a'_{32};a_{33}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31}=a'_{33};b_3-\frac{b_1}{a_{11}}a_{31}=b'_3.$$

Тоді

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}. \qquad (35)$$

Нехай тепер $a'_{22} \neq 0$. Розділимо обидві частини першого рівняння системи (35) на a'_{22}:

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 = \frac{b'_2}{a'_{22}}. \qquad (36)$$

Віднімемо від другого рівняння системи (35) рівняння (36), помножене на a'_{32}:

$$\left(a'_{33} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}}a'_{32}\right)x_3 = b'_3 - \frac{b'_2}{a'_{22}}a'_{32}.$$

Позначимо:

$$a'_{33} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}}a'_{32} = a''_{33}; b'_3 - \frac{b'_2}{a'_{22}}a'_{32} = b''_3.$$

Тоді $a''_{33} \cdot x_3 = b''_3$.

У результаті цих операцій система рівнянь (33) набуває так званого *трикутного виду*:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 = \frac{b'_2}{a'_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

Тепер визначимо всі невідомі, починаючи з останнього.

Якщо a_{11}=0, то серед коефіцієнтів при x_1 існує хоча б один, відмінний від нуля. Тоді рівняння, що містить x_1, вважатимемо першим. Такий метод розв'язування системи n лінійних рівнянь з n невідомими називають *методом Гаусса.*

Приклад. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \quad III\,p + I\,p,\ II\,p + I\,p \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases} \qquad (37)$$

Розв'язання. Додамо до другого і третього рівняння системи перше рівняння. Матимемо:

$$\begin{cases} 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ 7x_2 + 6x_3 = -2 \end{cases} \quad II\,p\text{ - }7/4\,I\,p \qquad (38)$$

Тепер перше рівняння цієї системи поділимо на 4, а потім помножимо на 7 і віднімемо його від другого рівняння цієї системи (16):

$$x_2 + \frac{5}{4}x_3 = \frac{1}{2}; \qquad (39)$$

$$\left(6 - \frac{35}{4}\right)x_3 = -2 - \frac{7}{2}; \quad -\frac{11}{4}x_3 = -\frac{11}{2}; \quad x_3 = 2.$$

Підставимо значення x_3 в (39) і знайдемо x_2:

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}x_3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Підставивши значення x_3 й x_2 в перше рівняння системи (37), матимемо:

$$x_1 = 1 - 2(-2) - 2 \cdot 2 = 1 + 4 - 4 = 1.$$

Отже, $x_1=1$; $x_2=-2$; $x_3=2$, а$x_1=-2$; $x_2=1$; $x_3=2$.

Метод Гаусса можна застосувати і до розв'язання систем, у яких визначник дорівнює нулю.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 9 \\ 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 15 \end{cases}. \qquad (40)$$

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -10 + 18 + 32 + 12 - 40 - 12 = 0.$$

Отже, за формулами Крамера цю систему розв'язати не можна.

Розв'язуватимемо методом Гаусса. Перше рівняння системи (18) помножимо спочатку на 2 і віднімемо від другого, а потім помножимо його на 4 і віднімемо від третього. Одержимо систему:

$$\begin{cases} -5x_2 - 2x_3 = 3 \\ -5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}. \qquad (41)$$

Ця система складається з двох однакових рівнянь. Розв'яжемо одне з них:

$$x_2 = \frac{3 + 2x_3}{5}.$$

Підставимо це значення в перше рівняння системи (40) і виразимо x_1 через x_3:

$$x_1 = 3 - 2x_2 - 3x_3 = 3 - \frac{2(3 + 2x_3)}{-5} - 3x_3 = \frac{(15 + 6 + 4x_3 - 15x_3)}{-5} =$$

$$= \frac{21 - 11x_3}{5}.$$

Надаючи довільних значень x_3, знайдемо відповідні значення x_2 і x_1. Наприклад, якщо $x_3=1$, *то* $x_2=-1$, $x_1=2$; якщо $x_3=0$, то $x_2 = \frac{-3}{5}$; $x_1 = \frac{21}{5}$ і т.д., тобто система рівнянь має безліч розв'язків.

1.3.3. МАТРИЦІ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. РАНГ МАТРИЦІ

Елементарні перетворення матриці

Таблицю чисел, що містить m рядків і n стовпців виду називають матрицею розмірності $m \times n$, а самі числа a_{ij}, де i приймає значення від 1 до m, а j – від 1 до n, називають елементами або членами цієї матриці.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо $m=n$, то матрицю називають квадратною розмірності n. Надалі для спрощення, у тих випадках, коли це потрібно, матрицю будемо записувати у вигляді: $A=(a_{ij})$, де i приймає значення від 1 до m, а j – від 1 до n.

Означення. Дві матриці називаються рівними, якщо вони однієї розмірності і їх відповідні елементи рівні.

Означення. Якщо в матриці A розмірності $m \times n$ переставити рядки із стовпцями, то отримаємо матрицю A^T розмірності $n \times m$, яку будемо називати транспонованою матрицею.

Означення. У тому випадку, коли матриця складається з одного рядка (матриця-рядок), тобто $B=(b_1 b_2 ... b_n)$, транспонована матриця є матриця-стовпець:

$$B^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Введемо операції над матрицями.

1. *Сумою* двох матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ однакової розмірності називають матрицю C тієї ж розмірності, до того ж $C = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$, тобто відповідні елементи додаються.

2. *Добутком* матриці $A=(a_{ij})$ на число λ називать матрицю C тієї ж розмірності, що і матриця A, до того ж $C=(\lambda a_{ij})$, тобто всі елементи множаться на число λ.

3. *Добутком* матриці $A=(a_{ij})$ розмірності $m\times n$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розмірності $n\times k$ називають матрицю $C=(c_{pg})$ розмірності $m\times k$, до того ж $c_{pg} = a_{p1}b_{1g} + a_{p2}b_{2g} + ... + a_{pn}b_{ng}$.

Зауваження. Для множення матриць має суттєве значення порядок їх слідування. Матрицю A можна множити на матрицю B лише тоді, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Утворення елемента c_{pg} можна отримати як множення *p-го* рядка матриці A на *g-ий* стовпчик матриці B.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot0 & 1\cdot(-1)+2\cdot4+3\cdot1 \\ -1\cdot1+0\cdot2+1\cdot0 & (-1)\cdot(-1)+0\cdot4+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВЛАСТИВОСТІ.

1. Відносно суми:

$A+B=B+A$ (комутативність);

$(A+B)+C=A+(B+C)$ (асоціативність).

2. Відносно добутку на число:

$\lambda A=A\lambda$ (комутативність) ;

$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ (дистрибутивність відносно суми чисел);

$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (дистрибутивність відносно суми матриць).

3. Відносно множення матриць:

$AB \neq BA$ (некомутативність) ;

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (асоціативність);

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, де "$T$" – операція транспонування.

Для кожної квадратної матриці A існує так звана одинична матриця того ж порядку, що і матриця A, а саме така, що $A \cdot E = E \cdot A = A$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю B називають *оберненою* до матриці A, якщо $A \cdot B = E$. Обернену матрицю до матриці A позначають A^{-1}.

Означення. Матрицю називають *не особливою*, якщо визначник цієї матриці відмінний від нуля.

Теорема 3.1. Для будь-якої не особливої квадратної матриці існує, і до того ж єдина, обернена матриця.

Структура оберненої матриці:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для знаходження оберненої матриці можна використати наступну схему:

1) знаходять визначник матриці A;

2) знаходять алгебраїчні доповнення всіх елементів a_{ij} матриці A і записують нову матрицю;

3) міняють місцями стовпці одержаної матриці (транспонують матрицю). Помножити одержану матрицю на $\frac{1}{|A|}$.

Розглянемо матрицю A розмірності $m \times n$. Виділимо в цій матриці k рядків і k стовпців. Зрозуміло, що $k \leq min(m,n)$.

Визначник, побудований на елементах, які знаходяться на перетині вказаних рядків і стовпців, називають *мінором k-того* порядку. Один елемент матриці називають *мінором першого* порядку.

Означення. Рангом матриці називають порядок найвищого мінора цієї матриці, відмінного від нуля.

Іншими словами, число k є *рангом* матриці A, якщо серед мінорів k-порядку є принаймні один, відмінний від нуля, а всі мінори вищих порядків дорівнюють нулю.

Ранг матриці А будемо позначати: $k = rangA$.

Очевидно, ранг матриці, яка містить лише нульові елементи, дорівнює нулю.

Наприклад:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \cdot$$

Для вказаної матриці є лише один мінор третього порядку, до того ж визначник $|K| = 0$, ранг матриці дорівнює 2.

Позначення: rangK=2.

Звичайно, ранг матриці можна знаходити, користуючись означенням. Проте існують більш ефективні методи.

Перед цим розглянемо наступні допоміжні поняття.

Назвемо наступні перетворення *елементарними:*

1. Перестановку двох рядків місцями.
2. Множення елементів рядка на число, відмінне від нуля.
3. Додавання до елементів одного рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на деяке число.

Означення. Матрицю називають *ступінчастою*, якщо кожен її рядок містить, по крайній мірі, один, відмінний від нуля елемент, і, починаючи з другого рядка, перший з ненульових елементів розташовується праворуч від першого з ненульових елементів попереднього рядка.

Зауваження. Із самого означення ступінчастої матриці слідує, що в такій матриці рядків не більш ніж стовпців $m \le n$.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & .... & ...... \\ 0 & 0 & 0... & a_{im}... & a_{in} \end{pmatrix}.$$

Якщо в ступінчастій матриці кількість рядків дорівнює кількості стовпців, таку матрицю називають *трикутною.*

Теорема 3.2. При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Очевидно, ранг матриці не буде змінюватися, якщо відкидати рядки, які містять лише нульові елементи.

Справді. Нехай матриці M і N мають однакові рядки, крім тих, які містять лише нульові елементи, тоді мінори цих матриць будуть відмінні від нуля лише в тому випадку, коли один з рядків їх не буде містити лише нульові елементи. Це означає, що $rangM=rangN.$

Метод елементарних перетворень для визначення рангу матриці.

Теорема 3.3. Будь-яку ненульову матрицю за допомогою елементарних перетворень і відкидання нульових рядків можна звести до матриці ступінчастого виду.

Можна довести, що ранг ступінчастої матриці дорівнює кількості рядків цієї матриці. Таким чином, щоб знайти ранг матриці, потрібно:

за допомогою елементарних перетворень і відкидання нульових рядків звести матрицю до матриці ступінчастого виду;

порахувати кількість рядків матриці ступінчастого виду.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \end{pmatrix} \text{IIр-2Iр,IVр-Iр}\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 5 & 2\\ 0 & -1 & -7 & -9 & -1\end{pmatrix}$$

Отримали матрицю ступінчастого виду, яка містить 2 рядки, тому ранг матриці дорівнює 2.

Означення. Дві матриці називають *еквівалентними,* якщо вони мають однаковий ранг.

Знак ~ означає еквівалентність матриці.

Метод обвідних мінорів для визначення рангу матриці:

Теорема 3.4. Якщо в матриці визначник *r-го* порядку не дорівнює нулю, а всі мінори *(r+1)-го* порядку, які включають у себе даний мінор, дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює *r.*

На основі цієї теореми і побудований метод обвідних мінорів.

Приклад.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1\\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3\end{pmatrix}\ rang\ A\geq 1$$ (оскільки є не нульові елементи)

$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0\,, rang\ A\geq 2$ (оскільки є визначник *II-го* порядку, який не дорівнює нулю*)*.

Розглянемо всі визначники *III-го* порядку, які включають у себе вказаний мінор:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 7\end{vmatrix}=21+8-28-1=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 11\end{vmatrix}=33+24+2-12-44-3=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 9\end{vmatrix}=0\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 14\end{vmatrix}=0\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}=0$$

Всі визначники *III-го* порядку дорівнюють нулю.

Отже, *rang A=2.*

Матрична форма системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь, які містять n невідомих.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + ... + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$ введемо в розгляд матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрицю A називають матрицею системи, B – вектором вільних коефіцієнтів, X – вектором невідомих. Неважко побачити, що дану систему можна записати у вигляді $A\cdot X=B$. Це рівняння в матричній формі.

Припустимо, що матриця A є не особливою, тоді існує до цієї матриці обернена. Помножимо дане рівняння на A^{-1} зліва. Отримаємо:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B.$$

Оскільки $A^{-1}\cdot A = E$, $EX = X$, тоді $X=A^{-1}\cdot B$ – розв'язок системи.

Приклад.

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & =1 \\ 8x_1 & +3x_2 & -6x_3 & =2 \\ 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & =3 \end{cases}\cdot$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ |A| = 1,$$

Розв'язок системи знаходять за формулою: $X=A^{-1}\cdot B$. Для цього необхідно знайти обернену матрицю. Починаємо з алгебраїчних доповнень елементів матриці A.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -6\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-9+6=-3,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8 & -6\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-(-24+24)=0,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=8-12=-4,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -6\end{vmatrix}=-6+3=-3,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-(-3+1)=2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-3+4=1,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 8 & -6\end{vmatrix}=-(-6+8)=-2,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-(1-4)=3,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 8 & 3\end{vmatrix}=3-8=5$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ -4 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ -4 & 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 1 & +2\cdot 2 & +(-3)\cdot 3\\ 0\cdot 1 & +1\cdot 2 & +(-2)\cdot 3\\ (-4)\cdot 1 & +3\cdot 2 & +(-5)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\ -4\\ -13\end{pmatrix}$$

Відповідь. $x_1=-8$, $x_2=-4$; $x_3=-13$.

Застосування систем лінійних рівнянь до розв'язування прикладних задач:

Приклад. Дільниця заводу спеціалізується з випуску комплектуючих трьох типів $П_1$, $П_2$, $П_3$, використовуючи при цьому сировину трьох видів S_1, S_2, S_3. Норми витрат кожної сировини на одну комплектуючу і обсяг витрат сировини на один день задані таблицею

Вид сировини	Норма витрат сировини на одну комплектуючу			Витрати сировини на 1 день
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
S_1	6	4	5	2400
S_2	4	3	1	1450
S_3	5	2	3	1550

Знайти щоденний обсяг випуску кожного типу комплектуючих.

Нехай щоденно завод випускає x_1 комплектуючих типу $П_1$, x_2 комплектуючих типу $П_2$ і x_3 комплектуючих типу $П_3$. Тоді згідно з витратами сировини кожного виду маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550 \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему за формулами Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -21, \qquad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2400 & 4 & 5 \\ 1450 & 3 & 1 \\ 1550 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3150,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2400 & 5 \\ 4 & 1450 & 1 \\ 5 & 1550 & 3 \end{vmatrix} = -5250, \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2400 \\ 4 & 3 & 1450 \\ 5 & 2 & 1550 \end{vmatrix} = -2100,$$

Отже, $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-3150}{-21} = 150,$ $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-5250}{-21} = 250,$

$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-2100}{-21} = 100,$

а це означає, що завод випускає 150 комплектуючих типу $П_1$, 250 комплектуючих типу $П_2$, і 100 комплектуючих типу $П_3$

Система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими. Теорема Кронекера–Капеллі

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь, які містять n невідомих.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \ . \end{cases} \quad (42)$$

Числа n і m є натуральними, до того ж довільними. Сукупність чисел $x_1=\alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, ...,\ x_n=\alpha_n$ називається розв’язком системи (20), якщо при підстановці цих чисел у кожне рівняння системи отримують тотожності.

Систему (42) називають *сумісною*, якщо вона має розв’язок, і *несумісною,* коли вона розв’язків не має.

Систему (42) називають *визначеною,* коли вона має тільки один розв’язок, і *невизначеною*, коли розв’язків багато.

Розглянемо дві матриці, які зв’язані з системою (42):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{nm} & b_m \end{pmatrix}.$$

Матрицю A називають матрицею системи (42), B – розширеною матрицею системи (42).

Приведемо матрицю *B* за допомогою елементарних перетворень і відкидання нульових рядків до матриці ступінчастого виду - B' .

Потрібно розуміти, що все, що ми робимо з рядками матриці B, ми робимо з рівняннями системи (42). Тому, очевидно, системи, які відповідають матриці *B* або B' , рівносильні або *еквівалентні.*

Зрозуміло, що при приведенні *B* до B' – матриці ступінчастого виду, матриця *A* також приводиться до матриці ступінчастого виду, крім випадку, коли останній рядок матриці B' вигляду *0 0...0 C*; до того ж $C \neq 0$. У цьому випадку, щоб отримати ступінчасту матрицю до матриці *A*, потрібно відкинути останній рядок. Це означає, що ранг *A* буде на 1 меншим за ранг матриці *B*. З іншого боку, коли останній рядок матриці B' має вигляд *0 0...0 C;* $C \neq 0$, то це еквівалентно тому, що в системі буде відповідне рівняння виду: $0x_1+0 \cdot x_2+...+0x_n=C$. Зрозуміло, що таке рівняння розв'язку не має. Отже, система буде несумісною.

На цій основі доводиться і теорема.

Теорема 1.7 (Кронекера–Капеллі). Система (42) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи.

Якщо $rang\ A = rang\ B = n$, то система визначена,

коли $rang\ A = rang\ B < n$ – система невизначена.

Нехай $rang\ A = rang\ B = r$.

Якщо $r < m$ (m – кількість рівнянь системи), то це говорить про те, що в системі є лише r лінійно незалежних рівнянь.

Решта (m-r) рівнянь отримується з тих r рівнянь шляхом алгебраїчних перетворень.

Такими рівняннями, які лінійно незалежні, будуть саме ті r рівнянь, на коефіцієнтах яких можна побудувати визначник *r-го* порядку, відмінний від нуля.

Тільки ці рівняння і потрібно розглядати в системі, решта рівнянь відкидається.

Оскільки в ступінчастій матриці рядків не більше ніж стовпців, то зрозуміло, що лінійно незалежних рівнянь не може бути більше ніж кількості змінних.

Якщо $rang\ A = rang\ B = r = n$, то система визначена.

Розглянемо випадок, коли $rang\ A = rang\ B = r < n$. Тут виділяють r змінних, які називаються *головними*, а решта – (n-r)

змінних називаються *вільними.* За головні змінні потрібно брати саме ті змінні на коефіцієнтах, при яких можна побудувати визначник $r^{го}$ порядку, відмінний від нуля.

Зауваження. Таких комбінацій може бути одна або декілька.

Для того, щоб отримати *загальний розв'язок* системи, потрібно головні змінні виразити через вільні. Розв'язок, отриманий при конкретних значеннях вільних змінних, називається *частковим або окремим.*

Приклад.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14 \end{cases} \ldots\ldots\ldots \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 14 \end{pmatrix} \text{IIp-2Ip,IIIp-4Ip} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що *rang A = rang B = 2* – система сумісна, але невизначена (змінних – 3), дві змінні потрібно взяти як головні. Оскільки визначники

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то як головні змінні можна взяти або x_1 і x_2, або x_1 і x_3, або x_2 і x_3. Візьмемо, наприклад, як головні змінні x_1 і x_2, тоді отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases} \; \begin{cases} x_1 = 5 + 6 + 3x_3 + x_3 \\ x_2 = -6 - 3x_3 \end{cases} \; \begin{cases} x_1 = 11 + 4x_3 \\ x_2 = -6 - 3x_3 \end{cases}$$

❓ Запитання для самоконтролю

1. Що називається визначником системи?

2. Як обчислити визначник третього порядку за схемою трикутника?

3. Що називається мінором?

4. Що називається алгебраїчним доповненням елемента визначника?

5. Як розкласти визначник за елементами стовпця або рядка?

6. Перерахувати властивості визначника.

7. Записати формули Крамера.

8. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса.

9. Що називається матрицею? Які матриці називаються рівними?

10. Операції над матрицями і їх властивості.

11. Яка матриця називається одиничною?

14. Яка матриця називається оберненою по відношенню до даної? Структура оберненої матриці.

15. Ранг матриці. Елементарні перетворення матриці.

16. Матрична форма системи лінійних рівнянь.

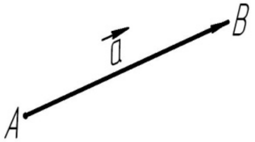
17. Теорема Кронекера–Капеллі.

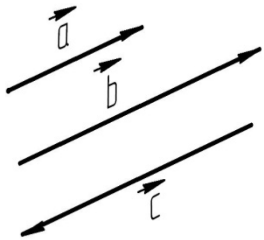
1.4. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.4.1. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ

Базис на площині і в просторі. Розкладання вектора за базисом

Будь-яка пара точок A і B площини (простору) визначає *напрямлений відрізок*, або *вектор*, тобто відрізок, що має певну довжину і певний напрям (*термін „вектор” (від лат. vector – переносник) ввів у 1848 р. Гамільтон).* Першу точку A називають *початком вектора*, а другу B – *кінцем вектора*. *Напрямом вектора* вважають напрям від його початку до кінця. Отже, можна сказати, що в даній інтерпретації ***вектором*** прийнято називати напрямлений відрізок.





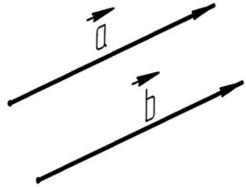


Рис. 44 **Рис. 45** **Рис. 46**

Вектори позначаються малими латинськими літерами зі стрілкою зверху, наприклад, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Вектор, початок якого знаходиться в точці A, а кінець – в точці B, позначається символом $\overrightarrow{AB}$, або $\vec{a}$. Напрям вектора на рисунку вказують стрілкою (рис. 44). Відстань між початком вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і його кінцем називається *довжиною* або *модулем вектора* і позначається $|\vec{a}|$ або $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор $\vec{0}$ називається *нульовим*, якщо його початок і кінець збігаються, напрям нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює нулю, тобто $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Вектор називається *одиничним*, якщо його довжина дорівнює одиниці. *Ортом* даного ненульового вектора $\vec{a}$ називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям збігається з напрямом даного вектора, і який позначається $\vec{a}_o$ або $\vec{a}^o$, причому $|\vec{a}_o| = 1$.

Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ колінеарні (рис. 45): $\vec{a} \,\|\, \vec{b} \,\|\, \vec{c}$. При цьому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ мають різний напрямок: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини та однакові напрями (рис. 46): $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$.

Два вектори називаються *протилежними*, якщо вони колінеарні, протилежно направлені і мають рівні модулі. Вектор, протилежний до $\vec{a}$, позначається через $-\vec{a}$.

Вектори називаються *компланарними,* якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах. Зокрема, вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні. Три вектори також вважаються компланарними у тому випадку, коли хоча б один із них нульовий. Мінімальна можлива кількість компланарних векторів – три.

Дії над векторами

Під *лінійними операціями* над векторами розуміють операцію додавання векторів і операцію множення вектора на дійсне число.

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ ***двох векторів*** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 47).

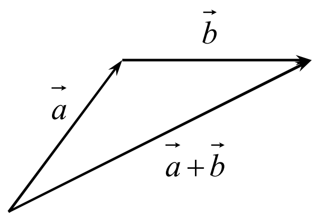


Рис. 47

Поряд із “правилом трикутника”, яке сформульоване вище, часто користуються рівносильним йому “правилом паралелограма”. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведені до спільного початку і на них побудований паралелограм, то сума $\vec{a} + \vec{b}$ є вектор, що збігається з діагоналлю цього паралелограма, яка виходить із спільного початку $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 48).

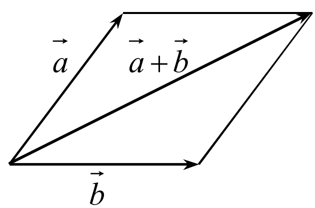


Рис. 48

Властивості операції додавання векторів:

1. Комутативність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2. Асоціативність $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

3. Існування нейтрального елемента – нульового вектора – відносно додавання векторів, тобто для будь-якого вектора $\vec{a}$ має місце рівність $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4. Для кожного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $-\vec{a}$, такий, що $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

Зауваження. Сума кількох векторів може бути знайдена за “правилом многокутника”. Сумою кількох векторів є вектор, початок якого збігається з початком першого доданка, а кінець – з кінцем останнього за умови, що початок кожного наступного доданка збігається з кінцем попереднього (рис. 49).

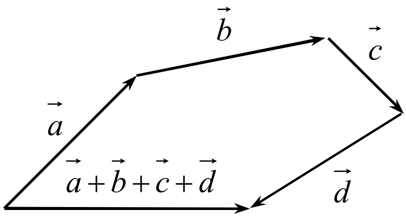


Рис. 49

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ *двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$, із яких перший називається *зменшуваним*, а другим *від’ємником*, називається вектор, який є сумою зменшуваного вектора і вектора, протилежного від’ємнику, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ (рис. 50).

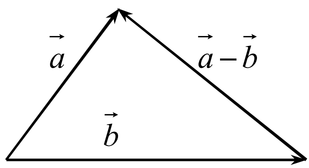


Рис. 50

Добутком $\alpha\vec{a}=\vec{b}$ (або $\vec{a}\alpha$) *вектора* $\vec{a}$ *на дійсне число* α називається вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, який має модуль, рівний добутку модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа α, тобто $\left|\vec{a}\alpha\right|=\left|\alpha\vec{a}\right|=\left|\alpha\right|\left|\vec{a}\right|$, та напрям, який збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний напряму вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha<0$.

Властивості операції множення вектора на число

1. Дистрибутивність числового множника відносно суми векторів $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\vec{b}\alpha$.

2 Дистрибутивність векторного множника відносно суми чисел $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

3 Асоціативність $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}$.

Лінійною комбінацією *n* векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, тобто вираз, що має вигляд

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n \tag{43}$$

Теорема 4.1. *Якщо вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$ і $\left|\vec{a}\right|\neq 0$, то існує дійсне число α таке, що $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.*

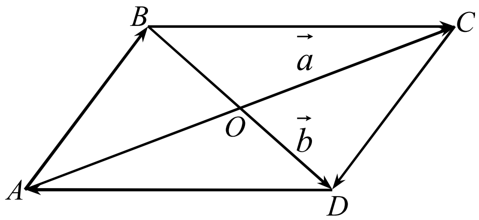


Рис. 51

Приклад 1. Вектори $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ є діагоналями паралелограма $ABCD$. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язок. Нехай *O* – точка перетину діагоналей (рис. 51).

Оскільки $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right|$ і вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{BD}$ мають протилежні напрями, то $\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}\vec{b}$. Аналогічно $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\vec{a}$. Оскільки $\left|\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|$ і вектори $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AC}$ мають однакові напрями, то $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}$. Аналогічно $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{b}$. Із рівності $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ випливає, що $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Аналогічно

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}.$$ ➤

Непорожня множина називається ***векторним простором V***, а її елементи ***векторами***, якщо на ній (цій множині) визначені операції додавання та множення елементів на числа таким чином, що виконуються наступні умови, які називаються **аксіомами векторного простору**:

1) від переставляння місцями двох векторів значення суми не змінюється, тобто $\forall\vec{a}\in V\ \forall\vec{b}\in V \Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\right)$ (*переставний закон додавання*);

2) для того, щоб до суми двох векторів додати третій, достатньо до першого вектора додати суму двох інших, тобто $\forall\vec{a}\in V\ \forall\vec{b}\in V\ \forall\vec{c}\in V \Rightarrow \left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right)$ (*сполучний закон додавання*);

3) у векторному просторі існує, причому єдиний, такий елемент (нуль-вектор), який при додаванні до нього іншого елемента залишає останній без змін, тобто $\exists!\vec{0}:\forall\vec{a}\in V \Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}\right)$ (*закон існування нуля*);

4) для будь-якого елемента даного простору існує такий відповідний елемент, який в сумі з даним утворює нуль, тобто $\forall\vec{a}\in V\ \exists!\left(-\vec{a}\right):\left(\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=0\right)$ (*закон поглинання вектора*);

5) у векторному просторі існує, причому єдиний, одиничний елемент, при множенні якого на даний елемент в результаті отримується даний елемент, тобто $\exists!1:\forall\vec{a}\in V \Rightarrow \left(\vec{a}\cdot 1=1\cdot\vec{a}=\vec{a}\right)$ (*закон множення на одиницю*);

6) $\forall x\in R\ \forall y\in R\ \forall\vec{a}\in V \Rightarrow \left(x\left(y\vec{a}\right)=\left(xy\right)\vec{a}\right)$ (*сполучний закон множення*);

7) $\forall x\in R\ \forall y\in R\ \forall\vec{a}\in V \Rightarrow \left(\left(x+y\right)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}\right)$ (*перший дистрибутивний закон*);

8) $\forall x\in R\ \forall\vec{a}\in V\ \forall\vec{b}\in V \Rightarrow \left(x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=x\vec{a}+x\vec{b}\right)$ (*другий дистрибутивний закон*).

Векторний простір має такі інтерпретації (інтерпретацією абстрактного поняття вважається його конкретне тлумачення):

- *арифметична*, коли векторний простір – це множина всіх впорядкованих пар чисел, тобто $V = \{(a_i ; b_i), i \in [1; \infty)\}$;
- *за допомогою паралельного перенесення*, коли векторний простір – це множина пар відповідних точок площини виду $X \to X'$, отриманих в результаті паралельного перенесення за означенням;
- *за допомогою напрямлених відрізків*.

Ми надалі будемо користуватися останньою інтерпретацією.

Лінійна залежність векторів:

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, і такі, що лінійна комбінація виду (4.1) векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ з цими числами дорівнює нулю, тобто

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0. \tag{44}$$

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність нулю їх лінійної комбінації (43) з числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можлива лише у випадку, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнюють нулю.

Теорема 4.2. *Якщо один із векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ нульовий, то ці вектори є лінійно залежними.*

Теорема 4.3. *Якщо серед n векторів будь-які $n-1$ вектори – лінійно залежні, то і всі n векторів лінійно залежні.*

Теорема 4.4. *Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших.*

Теорема 4.5. *Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.*

Наслідки.

1. *Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то вони лінійно незалежні.*

2. *Серед двох неколінеарних векторів не може бути нульового вектора.*

Теорема 4.6. *Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їхня компланарність.*

Наслідки.

1. *Якщо вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ *не компланарні, то вони лінійно незалежні.*

2. *Серед трьох некомпланарних векторів не може бути ні одного нульового вектора.*

Теорема 4.7. *Будь-які чотири вектори в звичайному просторі лінійно залежні.*

Приклад 2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – лінійно незалежні. Визначити, при якому значенні α вектори $\alpha\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ будуть лінійно незалежні.

Розв'язок. За теоремою (4.5) необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність. Оскільки $\vec{a}-\vec{b}\neq 0$, то з колінеарності векторів $\alpha\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ випливає, що $\alpha\vec{a}+2\vec{b}=\beta\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$, або $\alpha\vec{a}+2\vec{b}-\beta\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{0}\Rightarrow\left(\alpha-\beta\right)\vec{a}+\left(2+\beta\right)\vec{b}=\vec{0}$.

За умовою задачі вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно незалежні. Тому з рівності $\left(\alpha-\beta\right)\vec{a}+\left(2+\beta\right)\vec{b}=\vec{0}$ випливає, що

$$\begin{cases}\alpha-\beta=0,\\ 2+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\beta,\\ \beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=-2.$$ ➤

Приклад 3. Довести, що вектори $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(0;1;2)$, $\vec{c}=(1;3;-1)$ лінійно незалежні.

Розв'язок. Розв'яжемо рівняння $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=\vec{0}$. Маємо

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0,\\ 2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0,\\ 3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0.\end{cases}$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля (перевірте), то система має єдиний розв'язок $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \alpha_3=0$. Отже, задані вектори лінійно незалежні.

Два лінійно незалежні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать на площині, *утворюють базис у цій площині*, якщо довільний вектор $\vec{c}$ цієї площини може бути поданий у вигляді деякої лінійної комбінації векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Три лінійно незалежних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *утворюють в просторі базис*, якщо будь-який вектор $\vec{d}$ може бути поданий у вигляді деякої лінійної комбінації векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Справедливі такі твердження:

1) будь-яка пара неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать в даній площині, утворюють базис у цій площині;

2) будь-яка трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворює базис у просторі.

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$ – довільний базис на площині, тобто довільна пара неколінеарних векторів. Тоді (за означенням базису) для будь-якого вектора $\vec{c}$ знайдуться такі дійсні числа α, β, що буде справедлива рівність

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \tag{45}$$

Рівність (4.3) називається *розкладом вектора* $\vec{c}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, а числа α, β *координатами вектора* $\vec{c}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$ Звичайно пишуть так $\vec{c} = (\alpha, \beta)$.

Вектор $\vec{c}$ може бути розкладений за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$ єдиним способом, тобто координати кожного вектора $\vec{c}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$ визначаються однозначно.

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – довільний базис у просторі, тобто довільна трійка некомпланарних векторів. Тоді (за означенням базису) для будь-якого вектора $\vec{d}$ знайдуться такі дійсні числа α, β, γ, що буде справедлива рівність

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \lambda\vec{c}. \tag{46}$$

Рівність (46) називається *розкладом вектора* $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, а числа α, β, γ *координатами вектора* $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Звичайно пишуть так $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Вектор $\vec{d}$ може бути розкладений за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ єдиним способом, тобто координати кожного вектора $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ визначаються однозначно.

У разі додавання двох векторів їх координати (відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) додаються. При множенні вектора на будь-яке число α всі його координати множаться на це число. У випадку площини мають місце аналогічні твердження.

Приклад 4. В трапеції $ABCD$ відношення основи $\overrightarrow{BC}$ до основи $\overrightarrow{AD}$ дорівнює λ. Беручи за базис вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AB}$, знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ (рис. 52).

<u>Зауваження</u>. Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два колінеарні вектори і $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то число λ називається відношенням вектора $\vec{b}$ до вектора $\vec{a}$.

Розв'язок. За умовою задачі $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AD}$

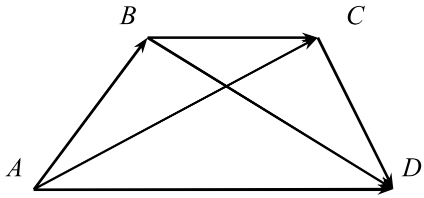


Рис. 52

Визначаємо координати векторів:

1) $\overrightarrow{AB} = 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AB} = (0;1)$;

2) $\overrightarrow{AD} = 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AB} = (1;0)$; $\overrightarrow{DA} = (-1;0)$;

3) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = (1;0) - (0;1) = (1;-1)$;

4) $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AB} = (\lambda;0)$;

5) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = (-\lambda;0) + (1;-1) = (1-\lambda;-1)$;

6) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (0;1) + (\lambda;0) = (\lambda;1)$. ➤

Системи координат. Проекція вектора на вісь

Одним з найбільш ефективних способів “пов’язування” чисел з їхнім геометричним зображенням у вигляді точок є системи координат. Найпростіша з них – числова вісь, яку легко отримати з будь-якої прямої, виконавши такі дії:

- взяти на цій прямій довільну точку і назвати її початком координат (таку точку прийнято позначати буквою *O*);
- вибрати одиницю виміру, тобто умовитися, довжину якого відрізка вважати рівним одиниці (використовуючи такий відрізок як еталон довжини, можна буде визначати відстань між двома будь-якими точками прямої та виражати її чисельно);
- з двох можливих напрямів обрати один, позначити стрілкою і вважати його додатним (за додатний прийнято брати напрям зліва направо), протилежний обраному напрям вважати від’ємним.

Тепер кожній точці числової осі відповідає одне єдине число, і навпаки, тобто маємо взаємно однозначну відповідність. Число, яке відповідає тій чи іншій точці, називається *координатою* цієї точки.

***Проекцією точки** A на вісь x* називається точка A_1, яка є основою перпендикуляра AA_1, опущеного з точки A на дану вісь. Таким чином, проекція A_1 є точкою перетину осі x з площиною, яка проходить через точку A перпендикулярно до осі x.

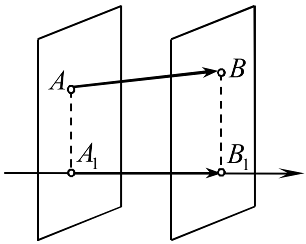


Рис. 53

Нехай у просторі задано вісь x і вектор $\overrightarrow{AB}$. Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь x відповідно початку A та кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 53). ***Проекцією вектора** $\overrightarrow{AB}$ на вісь x* називають додатне число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь x однаково напрямлені, і від’ємне число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь x протилежно напрямлені. Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь x позначають так: $\text{пр}_x\vec{a} = a_x$. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то вважають, що $\text{пр}_x\vec{a} = 0$.

Кутом φ ***між вектором*** $\vec{a}$ ***і віссю x*** (або між двома векторами) називається менший з кутів, на який потрібно повернути один вектор або вісь, щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю: $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, x}\right) = \left(\widehat{\vec{a}, \overrightarrow{x_0}}\right), 0 \le \varphi \le \pi$.

Властивості проекцій:

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь x дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором та віссю, тобто

$$\text{пр}_x \vec{a} = \vec{a} \cos\phi . \tag{47}$$

2. Проекція суми скінченної кількості векторів на дану вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь, тобто

$$\text{пр}_x \left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{a_n}\right) = \text{пр}_x \overrightarrow{a_1} + \text{пр}_x \overrightarrow{a_2} + \ldots + \text{пр}_x \overrightarrow{a_n} . \tag{48}$$

3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число, тобто

$$\text{пр}_x \left(\lambda \vec{a}\right) = \lambda \text{пр}_x \vec{a} . \tag{49}$$

Приклад 5. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють з віссю $\vec{S}$ кути $60°$ і $120°$. Знайти проекцію суми $\vec{a} + 3\vec{b}$ на вісь $\vec{S}$, якщо $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$.

Розв’язок. Оскільки за формулою (4.6) проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків, тобто

$$\text{пр}_{\vec{S}} \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) = \text{пр}_{\vec{S}} \vec{a} + \text{пр}_{\vec{S}} \left(3\vec{b}\right),$$

то досить знайти проекції на вісь $\vec{S}$ кожного з векторів $\vec{a}$ і $3\vec{b}$. Відповідно до формули (48) одержимо:

$$\text{пр}_{\vec{S}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos 60° = 6\frac{1}{2} = 3;$$

$$\text{пр}_{\vec{S}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos 120° = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

За властивістю 3 знаходимо проекцію вектора $3\vec{b}$ на вісь $\vec{S}$: $\text{пр}_{\vec{S}} \left(3\vec{b}\right) = 3\text{пр}_{\vec{S}} \vec{b} = 3(-2) = -6.$

Отже, $\text{пр}_{\vec{S}} \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) = 3 + (-6) = -3.$ ➤

Вектори в декартовій прямокутній системі координат на площині і в просторі. Умови колінеарності двох векторів.

1. Вектори на площині. Декартова прямокутна система координат на площині визначається заданням прямокутного базису ($\vec{i}$, $\vec{j}$) і точки О (рис. 54); де $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1$і $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\vec{i}$ – одиничний вектор вісі абсцис (Ox); $\vec{j}$ – одиничний вектор осі ординат (Oy), O – початок координат.

Справедлива **теорема**: будь-який вектор $\vec{a}$ площини можна розкласти єдиним способом по базисних векторах, тобто $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Коефіцієнти x та y цього розкладу називаються координатами вектора $\vec{a}$ в даній системі координат. Вектор $\vec{a}$ з координатами x та y записують так: $\vec{a} = (x, y)$.

Координати точки A (рис. 4.11) співпадають з відповідними координатами радіус-вектора $\overrightarrow{OA}$. Точку A з координатами x та y записують так A (x, y).

Якщо точка лежить на осі абсцис, то її ордината дорівнює нулю: $B(x;0)$; якщо точка лежить на осі ординат, то її абсциса дорівнює нулю: C $(0, y)$.

Довжина вектора $\vec{a}$ рівна квадратному кореню із суми квадратів його координат (рис. 54)

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Наприклад, довжина вектора $\vec{p} = \{-8, 6\}$ дорівнює 10, так як

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

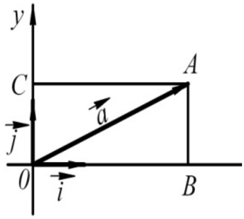


Рис. 54

Якщо вектор заданий двома точками $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$, то координати вектора дорівнюють різниці однойменних координат кінця і початку вектора:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}.$$

Приклад 6. Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{CK}$, якщо $C(-2;7)$; $K(3;-5)$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо координати вектора, $\overrightarrow{CK} = (3-(-2);-5-7) = (5;-12)$. Потім знаходимо його довжину: $\left|\overrightarrow{CK}\right| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$.

В прямокутній системі координат відстань між точками $A(x_1;y_1)$ та $B(x_2;y_2)$) обраховується за формулою

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Це випливає з того, що відстань між двома точками A та B дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$, яка рівна квадратному кореню із суми квадратів координат вектора, а вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати $\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ (від координат кінця вектора віднімаються однойменні координати початку вектора).

Приклад 7. Обчислити відстань між точками M та K, якщо $M(-5;7)$ та $K(7;-9)$.

Розв'язок. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{MK}$: $\overrightarrow{MK} = \{7-(-5);-9-7\} = \{12;-16\}$. Тепер знайдемо його довжину: $\left|\overrightarrow{MK}\right| = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20.$

Приклад 8. Довести, що трикутник з вершинами A $(2;2), B(-1;6)$ та $C(-5;3)$ – прямокутний.

Розв'язок. Спочатку знайдемо довжину кожної сторони трикутника ABC:

$$A\vec{B} = (-1-2;6-2) = (-3;4), |AB| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\ ;$$

$$B\vec{C} = (-5-(-1);3-6) = (-4;-3), |BC| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5;$$

$$A\vec{C} = (-5-2;3-2) = (-7;1), |AC| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Тепер скористуємося теоремою, що є оберненою до теореми Піфагора: якщо в трикутнику сума квадратів двох сторін рівна квадратові більшої сторони, то цей трикутник прямокутний і напроти більшої сторони знаходиться прямий кут.

Так як $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 = AC^2$, то трикутник ABC – прямокутний і величина кута ABC дорівнює 90º.

Нехай дані вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$. При додаванні векторів їх однойменні координати додаються, а при відніманні – віднімаються:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\};\ \vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}.$$

При множенні вектора на число k його координати множаться на число:

$$k\vec{a} = \{kx_1; ky_1\}.$$

Приклад 9. Дані вектори $\vec{m} = \{-2; 3\}$ і $\vec{n} = \{1; -4\}$. Обчислити координати вектора $2\vec{m} - 3\vec{n}$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо координати векторів $2\vec{m}$ та $-3\vec{n}$, а потім складемо ці вектори.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 2\vec{m} = \{-4; 6\} \\ -3\vec{n} = \{-3; 12\} \end{array} \\ \hline 2\vec{m} - 3\vec{n} = \{-7; 18\}. \end{array}$$

Вектори $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$, та $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$ *колінеарні* тоді і лише тоді, коли їх однойменні координати пропорційні:

$$\vec{a} \| \vec{в} \ \text{<=>}\ x_1 = kx_2.\ \ y_1 = ky_2 \ \text{або}\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$$

Наприклад, вектори $\vec{a} = \{-6; 4\}$ та $\vec{b} = \{3; -2\}$ колінеарні, так як $-6 = (-2) \cdot 3$ та $4 = (-2) \cdot (-2)$; крім того ці вектори протилежно направлені, оскільки $\vec{a} = -2\vec{b}$.

2. Вектори в просторі. Декартова прямокутна система координат в просторі визначається задаванням прямокутного базису $(\vec{i}\,;\ \vec{j}\,;\ \vec{k})$ та точки O (рис. 55), де $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ і

$$\left(\vec{i}\,\widehat{,}\,\vec{j}\right) = \left(\vec{j}\,\widehat{,}\,\vec{k}\right) = \left(\vec{k}\,\widehat{,}\,\vec{i}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Вектори $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$ називають *координатними векторами*; $\vec{i}$ – одиничний вектор осі абсцис (Ox); $\vec{j}$ – одиничний вектор осі ординат (Oy); $\vec{k}$ – одиничний вектор осі аплікат (Oz); O – початок координат.

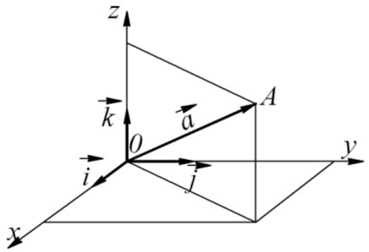


Рис. 55

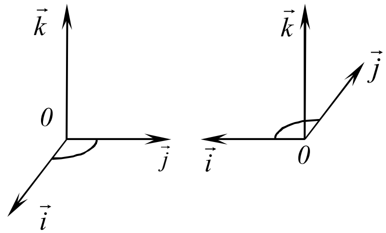


Рис. 56

Зауваження. Система координат $Oxyz$ називається *правою* (*лівою*), якщо поворот на найменший кут від $\vec{i}$ до $\vec{j}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{k}$, відбувається проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою). Аналогічно визначається права (ліва) система координат на площині (рис. 56). Далі завжди розглядатимуться тільки праві системи координат.

Справедлива **теорема:** будь-який вектор $\vec{a}$ можна розкласти по базисних векторах лише одним способом, тобто $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Коефіцієнти x, y та z цього розкладу називаються декартовими прямокутними координатами вектора $\vec{a}$ в даній системі координат.

Вектор $\vec{a}$ з координатами x, y, z записують так: $\vec{a} = \{x; y; z\}$.

Координати точки A (рис. 55) співпадають з відповідними координатами радіус-вектора $\overrightarrow{OA}$ чи $\vec{a}$. Точку A з координатами x, y, z записують так: $A\ (x,\ y,\ z)$.

Якщо точка лежить на осі абсцис, то її координати $(x;\ 0;\ 0)$; якщо на осі ординат, то $(0;\ y;\ 0)$; якщо на осі аплікат, то $(0;\ 0;\ z)$.

Довжина вектора рівна квадратному кореню із суми квадратів його координат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Наприклад, довжина вектора $\vec{m} = \{6;3;-2\}$ рівна 7, так як

$$|\vec{m}| = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7.$$

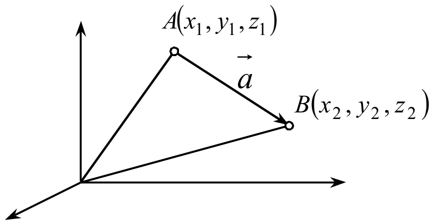


Рис. 57

Якщо вектор заданий двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 57), то координати вектора дорівнюють різниці однойменних координат кінця і початку вектора:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

А його довжину знаходимо за формулою

$$.\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Приклад 10. Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{MK}$, якщо $M(5; -1; -4)$ та $K(2; -5; 8)$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо координати вектора $\overrightarrow{MK} = \{2-5; -5-(-1); 8-(-4)\} = \{-3; -4; 12\}$. Тепер знаходимо його довжину: $\left|\overrightarrow{MK}\right| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$.

В прямокутній системі координат відстань між двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B\ (x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Приклад 11. Обчислити відстань між точками $A(1;\ 2;\ 1)$ та $C\ (7; 4; -2)$.

Розв'язок. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{CA}$ або $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} = \{7-1; 4-2; -2-1\} = \{6; 2; -3\}$. Тепер знайдемо його довжину $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7.$

Приклад 12. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок A (1; -3; 7) та B (5; 7; -5).

Розв'язок. Шукану точку позначимо літерою C, так як вона лежить на осі ординат. То її координати (0; y; 0). За умовою $|AC| = |BC|$, тому знайдемо кожну з цих відстаней:

$$\overrightarrow{AC} = \{0-1; y-(-3); 0-7\} = \{-1; y+3; -7\};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = |AC| = \sqrt{1+(y+3)^2+49} = \sqrt{50+(y+3)^2}.$$

$$\overrightarrow{BC} = \{0-5; y-7; 0-(-5)\} = \{-5; y-7; 5\};$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = |BC| = \sqrt{25+(y-7)^2+25} = \sqrt{50+(y-7)^2}.$$

Так як $|AC| = |BC|$, то $|AC|^2 = |BC|^2$, отримаємо рівняння

$$50+(y+3)^2 = 50+(y-7)^2, (y+3)^2 = (y-7)^2,$$

$$y^2+6y+9 = y^2-14y+49;\ 20y = 40;\ y=2$$

Точка C (0; 2; 0) рівновіддалена від точок A та B.

Нехай дані вектори $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ та $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$. При додаванні векторів їх однойменні координати додаються, а при відніманні – віднімаються:

$$\vec{a}+\vec{b} = (x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2);\ \vec{a}-\vec{b} = (x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2).$$

При множенні вектора на число його координати множаться на це число:

$$k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1).$$

Приклад 13. Дані вектори $\vec{a} = (-2;1;3)$ та $\vec{b} = (3;-2;-4)$. Обчислити координати вектора $3\vec{a}-4\vec{b}$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо координати векторів $3\vec{a}$ та $-4\vec{b}$, а потім додамо ці вектори:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 3\vec{a} = \{-6;3;9\} \\ -4\vec{b} = \{-12;8;16\} \end{array} \\ \hline 3\vec{a}-4\vec{b} = \{-18;11;25\}. \end{array}$$

Вектори $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *та* $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ *колінеарні тоді і лише тоді, коли їх однойменні координати пропорційні:*

$$\vec{a}\|\vec{в} \Leftrightarrow x_1=kx_2.y_1=ky_2.z_1=kz_2 \text{ або } \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=k$$

Наприклад, вектори $\vec{m}=\{1;-8;6\}$ та $\vec{n}=\{0,5;-4;3\}$ колінеарні, так як $1/0,5=(-8)/(-4)=6/3=2;$ крім того, ці вектори мають один напрямок, оскільки $\vec{m}=2\vec{n}$.

Скалярний добуток векторів на площині і в просторі. Кут між векторами

Скалярним добутком двох ненульових векторів на площині називається число, рівне добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \qquad (50)$$

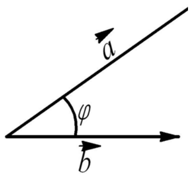


Рис. 58

де $\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 58). Якщо з двох векторів хоча б один нульовий, то скалярний добуток цих векторів вважається рівним нулю.

Оскільки за формулою (47) $|\vec{a}|\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, $|\vec{b}|\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, то за формулою (50) маємо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}. \qquad (51)$$

Формула (51) виражає **геометричний зміст скалярного добутку**: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з цих векторів на проекцію другого вектора на вісь, що визначається першим з указаних векторів.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1. *Комутативність* множення: $(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{b}\cdot\vec{a})$.

2. *Асоціативність* відносно множення на число:

$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

3. *Дистрибутивність* відносно додавання векторів:

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

Геометричні властивості скалярного добутку:

1. Необхідною і достатньою умовою ортогональності двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку, тобто добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.

2. Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють гострий (тупий) кут тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток додатний (від'ємний) або якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, коли $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ – гострий, і $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, коли $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ – тупий.

3. Добуток $(\vec{a}\cdot\vec{a})$ позначається через $\vec{a}^2$ і називається *скалярним квадратом*. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату довжини вектора, тобто

$$(\vec{a}\cdot\vec{a})=|\vec{a}|^2, \tag{52}$$

звідки

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}. \tag{53}$$

Теорема. *Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами $\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2)$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат, тобто*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2. \tag{54}$$

Знайдемо, наприклад, скалярний добуток векторів $\vec{a}=\{-3;4\}$ та $\vec{b}=\{2;-5\}$: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = -3·2 + 4 (-5) = -6-20 = -26.

Приклад 14. Дані вектори $\vec{a}=\{-5;2\}$; та $\vec{b}=\{3;-1\}$. Обчислимо скалярний добуток $(3\vec{a}-\vec{b})\cdot 2\vec{b}$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо координати векторів $3\vec{a}-\vec{b}$ та $2\vec{b}$:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 3\vec{a}=\{-15;6\} \\ -\vec{b}=\{-3;1\} \end{array} \\
\hline
3\vec{a}-\vec{b}=\{-18;7\};\ 2\vec{b}=\{6;-2\}.
\end{array}
$$

Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат:

$$(3\vec{a}-\vec{b})\cdot 2\vec{b}=-18\cdot 6+7\cdot(-2)=-108-14=-122.$$

Обчислення кута між двома векторами**:**

За означенням скалярного добутку двох векторів маємо $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, звідки

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},\ \text{де}\ \vec{a}\neq 0,\ \text{та}\ \vec{b}\neq 0$$

чи, в координатах,

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Приклад 15. Обчислити кут між векторами $\vec{a}=\{2;-3\}$, $\vec{b}=\{1;5\}$.

Розв'язок. Для обчислення кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ скористаємось наведеною формулою, але спочатку знайдемо скалярний добуток векторів, їх довжини та добуток довжин векторів:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 1-3\cdot 5=-13;\ |\vec{a}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13};\ |\vec{b}|=\sqrt{1+25}=\sqrt{26};$$

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}=\sqrt{13\cdot 26}=\sqrt{13\cdot 13\cdot 2}=13\sqrt{2}.$$

Тоді $cos\varphi$ = -13/(13 $\sqrt{2}$) = -1/ $\sqrt{2}$ = - $\sqrt{2}$ / 2, φ = $arccos$ (- $\sqrt{2}$ /2) = $3\pi/4$.

Умови перпендикулярності двох векторів. Вектори $\vec{a}=\{x_1;y_1\}$ та $\vec{b}=\{x_2;y_2\}$ перпендикулярні тоді і лише тоді, коли їх скалярний добуток рівний нулю, тобто

$$\vec{a}\perp\vec{в} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{в}=0, \text{ або } x_1x_2+y_1y_2=0.$$

Наприклад, вектори $\vec{m}=\{-2;7\}$ та $\vec{n}=\{14;4\}$ перпендикулярні, так як $\vec{m}\cdot\vec{n}=2\cdot 4+7\cdot 4=-28+28=0$.

Визначення проекції вектора $\vec{a}(x_1,y_1)$ на вектор $\vec{b}(x_2,y_2)$.

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \tag{55}$$

Скалярний добуток двох векторів у просторі. Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ та $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ в просторі називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi. \tag{56}$$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат векторів:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{57}$$

Знайдемо, наприклад, скалярний добуток векторів $\vec{m}=(4;-2;-4)$ та $\vec{n}=(6;-3;2)$:

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=4\cdot 6+(-2)\cdot(-3)+(-4)\cdot 2=24+6-8=22.$$

*Обчислення кута між векторами***.** Кут φ між векторами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ та $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}, \text{ де } \vec{a}\neq 0, \text{ та } \vec{b}\neq 0 \tag{58}$$

або в координатах

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Приклад 16. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = \{4;-10;1\}$ та $\vec{b} = \{11;-8;-7\}$.

Розв'язок. Для обчислення кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ користуємося даною формулою, але спершу знайдемо скалярний добуток векторів, їх довжини і добуток довжин векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 11 + (-10) \cdot (-8) + 1 \cdot (-7) = 44 + 80 - 7 = 117;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{16 + 100 + 1} = \sqrt{117}; |\vec{b}| = \sqrt{121 + 64 + 49} = \sqrt{234};$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{117} \cdot \sqrt{234} = \sqrt{117 \cdot 117 \cdot 2} = 117\sqrt{2}.$$

Тоді $cos\varphi = 117/(117\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2, \varphi = \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4.$

Приклад 17. Дано координати вершин піраміди $A_1(-1;0;1)$, $A_2(4;3;2)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(0;4;-1)$. Знайти кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4.

Розв'язок. Оскільки $\overrightarrow{A_1A_2} = (5;3;1)$ та $\overrightarrow{A_1A_4} = (1;4;-2)$, то косинус кута між векторами згідно з формулою (4.16) $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$ має вигляд

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}\hat{\ }\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4})}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 1(-2)}{\sqrt{25 + 9 + 1}\sqrt{1 + 16 + 4}} =$$

$$= \frac{15}{\sqrt{35}\sqrt{21}} = \frac{15}{7\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Тоді

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\hat{\ }\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Величина кута між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ дорівнює величині кута між ребрами A_1A_2 і A_1A_4, тому

$$\left(A_1A_2\hat{\ }A_1A_4\right) = \left(\overrightarrow{A_1A_2}\hat{\ }\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \arccos\frac{\sqrt{15}}{7}. \blacktriangleright$$

Умови перпендикулярності двох векторів. Вектори $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ та $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярні тоді і лише тоді, коли їх скалярний добуток рівний нулю, тобто

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ або } x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 .$$

Наприклад, вектори $\vec{a} = (2;3;-6)$ та $\vec{b} = (-3;4;1)$ перпендикулярні, так як $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + (-6) \cdot 1 = -6 + 12 - 6 = 0.$

Приклад 18. Дано вершини чотирикутника *A* (1;2;3), *B* (7;3;2), *C* (-3; 0; 6) та *D* (9; 2; 4). Довести, що його діагоналі *AC* та *BD* взаємно перпендикулярні.

Розв'язок. Спочатку знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{AC} = (-3-1; 0-2; 6-3) = (-4; -2; 3); \quad \overrightarrow{BD} = (9-7; 2-3; 4-2) = (2; -1; 2).$$

Тепер знайдемо скалярний добуток цих двох векторів:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = -8 + 2 + 6 = 0.$$

Так як скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{BD}$ рівний нулю, то ці вектори перпендикулярні; отже, перпендикулярні й діагоналі чотирикутника *ABCD*.

Поділ відрізка в даному відношенні . Нехай задано відрізок *AB* точками *A* ($x_1; y_1$) та *B* ($x_2; y_2$). Знайдемо на відрізку таку точку $M(x; y)$, яка ділить цей відрізок у відношенні $|AM| : |MB| = \lambda$ (рис. 59). Розглянемо вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$ так, як вони колінеарні, то справедлива рівність $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$. Перепишемо цю рівність в координатній формі

$$(x - x_1; y - y_1) = \lambda(x_2 - x; y_2 - y),$$

звідки $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$$

З першого рівняння знайдемо *x*, а з другого *y*. Остаточно координати точки ділення *M* знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо точка *M* ділить відрізок *AB* пополам, то $\lambda = 1$ та координати точки *M* знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Рис. 59

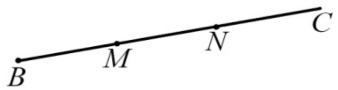


Рис. 60

Кожна координата середини відрізка рівна півсумі однойменних координат початку і кінця відрізка.

Приклад 19. Дані точки *B* (-2; 7) і *C* (10; -23). Знайти координати точок *M* та *N*, які поділяють відрізок *BC* на три рівні частини.

Розв'язок. Точка *N* ділить відрізок *BC* (рис. 60) у відношенні $\lambda = |BN| : |NC| = 2 : 1 = 2.$

Тоді $x_N = \dfrac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda}, y_N = \dfrac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda}.$ Підставимо в ці формули координати точок *B* та *C*:

$$x_N = \frac{-2 + 2\cdot 10}{1+2} = \frac{-2+20}{3} = \frac{18}{3} = 6;$$

$$y_N = \frac{7 + 2\cdot(-23)}{1+2} = \frac{7-46}{3} = \frac{-39}{3} = -13,$$

тобто *N*(6; -13).

Точка *M* ділить відрізок *BN* пополам: отже. $x_M = (x_B + x_N)/2,$ $y_M = (y_B + y_N)/2; x_M = (-2+6)/2 =$ $=4/2 = 2, y_M = (7 + (-13))/2 = -6/2 = -3,$ тобто M (2; - 3).

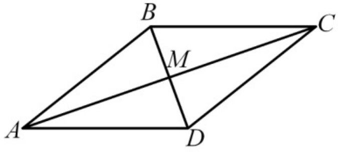


Рис. 61

Приклад 20. Дано дві суміжні вершини паралелограма *A* (-3; 5), *B* (1; 7) та точка перетину діагоналей *M* (1; 1). Обчисліть координати двох інших вершин паралелограма (рис. 61).

Розв'язок. Діагоналі паралелограма *ABCD* точкою *M* діляться пополам, тобто точка *M* – середина відрізків *AC* та *BD*. Маємо:

$x_M = (x_A + x_C)/2, \quad y_M = (y_A + y_C)/2$, звідки

$x_C = 2x_M - x_A = 2\cdot 1-(-3) = 2+3 = 5; y_C = 2y_M - y_A = 2\cdot 1 - 5 = 2-5 = -3;$
$C(5;-3)$; $x_M = (x_B + x_D)/2$, $y_M = (y_B + y_D)/2$, звідки

$$x_D = 2x_M - x_B = 2\cdot 1 - 1 = 2-1 = 1;$$

$$y_D = 2y_M - y_B = 2\cdot 1 - 7 = 2-7 = -5; \; D\,(1; -5).$$

Приклад 21. Дані вершини трикутника *A* (2; - 1; 4), *B* (3; 2; -6) та *C* (-5; 0; 2).

Обчислити довжину медіани, яка проведена з вершини *A*.

Розв'язок. Нехай *AD* – медіана (рис. 62), тоді точка *D* ділить відрізок *BC* пополам.

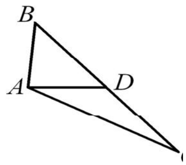


Рис. 62

Отже,

$$x_D = (x_B + x_C)/2, y_D = (y_B + y_C)/2, z_D = (z_B + z_C)/2,$$

тобто

$$x_D = (3-5)/2 = -2/2 = -1,$$

$$y_D = (2-0)/2 = 2/2 = 1,$$

$$z_D = (-6+2)/2 = -4/2 = -2.$$

Так, D(-1;1;-2). Тепер знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD} = (-1-2; 1-(-1); -2-4) = (-3; 2; -6)$. Його довжина дорівнює $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$.

Напрямні косинуси вектора в декартовій прямокутній системі координат

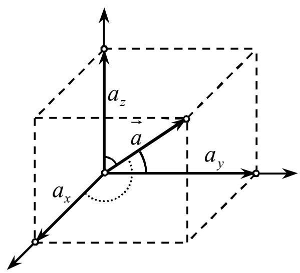


Рис. 63

Нехай в прямокутній системі координат *Oxyz* (рис. 63) задано вектор $\vec{a}$. Це означає, що в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, який задає обрану систему координат, вектор $\vec{a}$ можна розкласти у просторі за базисом таким чином: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де числа a_x, a_y, a_z – координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі. Але з властивостей проекції випливає, що

$$a_x = \text{пр}_{Ox}\,\vec{a},\; a_y = \text{пр}_{Oy}\,\vec{a},\; a_z = \text{пр}_{Oz}\,\vec{a} \qquad (59)$$

Отже, координати вектора в системі координат *Oxyz* – це його проекції на осі координат. Вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда (рис. 4.20) з вимірами $|a_x|$, $|a_y|$, $|a_z|$, тому довжина цього вектора дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad (60)$$

Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ визначається кутами α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат (рис. 63).

$$\text{б} = \left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right),\; \text{в} = \left(\widehat{\vec{a},\vec{j}}\right),\; \text{г} = \left(\widehat{\vec{a},\vec{k}}\right),\; 0 \le \text{б},\text{в},\text{г} \le \pi\,.$$

Косинуси цих кутів називаються *напрямними косинусами*. Формули для напрямних косинусів одержимо з формул (47) і (59):

$$\cos\text{б} = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\; \cos\text{в} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\; \cos\text{г} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}\,. \qquad (61)$$

Підносячи обидві частини кожної з рівностей (61) до квадрата і підсумовуючи, з урахуванням формули (59), одержимо

$$\cos^2\text{б} + \cos^2\text{в} + \cos^2\text{г} = 1\,, \qquad (62)$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює одиниці.

Приклад 22. Задано точки $A(0;-1;2)$ і $B(-1;1;4)$. Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язок. З формул (8.14), (8.15) і (60) маємо:

$$\overrightarrow{AB} = (-1;2;2);\; |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = 3;\; \cos\text{б} = -\frac{1}{3};\; \cos\text{в} = \cos\text{г} = \frac{2}{3}.$$ ➤

Приклад 23. Чи може вектор утворювати з осями координат кути $б = в = 60^\circ$, $г = 30^\circ$?

Розв'язок. $\cos^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ = \dfrac{5}{4} \neq 1$, тому згідно з формулою (4.20) отримаємо на це запитання негативну відповідь. ➤

1.4.2. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

Умова колінеарності векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що позначається символами $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ і визначається такими трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів .

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

1. *Антикомутативність* множення:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right),$$

тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак. Це випливає з того, що вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ мають однакові модулі, колінеарні і трійка векторів $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a} \times \vec{b}\right)$ і $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{b} \times \vec{a}\right)$ протилежної орієнтації (рис. 64).

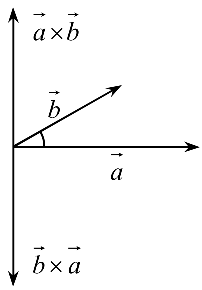


Рис. 64

2. *Асоціативність відносно скалярного множника* λ:

$$\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right); \vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \text{ (сполучний закон)}.$$

3. *Дистрибутивність відносно додавання векторів*:

$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *(розподільний закон).*

Алгебраїчні властивості векторного добутку дають змогу при множенні лінійних векторів виконувати дії так само, як з алгебраїчними многочленами. Проте при виконанні векторного множення слід пам’ятати, що воно некомутативне: при переставлянні співмножників знак векторного добутку змінюється на протилежний.

Геометричні властивості векторного добутку

1. ***Умова колінеарності векторів.*** Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.

2. ***Геометричний зміст векторного добутку.*** Модуль $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (63)$$

Відомо, що площа паралелограма дорівнює $S=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$, а це є модуль вектора $\vec{a}\times\vec{b}$. Отже, $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. На підставі цієї властивості векторний добуток $\vec{a}$ на $\vec{b}$ виражається формулою: $\vec{a}\times\vec{b}= S\vec{e}$, де $\vec{e}$ – орт, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і утворює з ними праву трійку векторів (рис. 65).

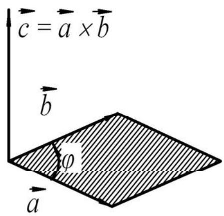


Рис. 65

3. ***Фізичний зміст векторного добутку.*** Якщо $\vec{F}$ – сила, а $\vec{r}$ – радіус-вектор точки її прикладання, що має початок в точці О, то момент сили $\vec{F}$ відносно точки О є вектор, який дорівнює векторному добутку $\vec{r}$ на $\vec{F}$**,** тобто $m_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}$.

4. Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0, \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Приклад 24. Обчислити $\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язок.

$$\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=3\left(\vec{a}\times\vec{a}\right)-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+2\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)=$$

$$=-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\vec{a}\times\vec{b}=-5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right);\left|-5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=5\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\frac{\pi}{2}=5\cdot3\cdot4\cdot1=60$$ ➤

Векторний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ та $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, заданих своїми координатами в прямокутній системі координат, обчислюють так:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}= \quad (64)$$

$$=\left(y_1z_2-z_1y_2\right)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\,\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}$$

Площа трикутника, заданого координатами вершин

Нехай трикутник *ABC* задано своїми вершинами – точками *A* $(x_1;y_1;z_1)$, *B* $(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$. Треба визначити площу трикутника *ABC*. Доповнимо трикутник *ABC* до паралелограма *ABDC*.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|. \quad (65)$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1);\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1).$$

Тоді

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\|\left(\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\right)\right\|=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2},$$

тобто

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}. \quad (66)$$

Якщо трикутник ABC лежить у координатній площині xOy, то для всіх його вершин координата z дорівнює нулю, тобто $z_1=z_2=z_3=0$, і формула (66) набирає вигляду

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{matrix}\right\|$$

Справді, якщо в останньому визначнику від другого і третього рядків віднімемо перший рядок і розкриємо визначник за елементами третього стовпця, то одержимо передостанній визначник.

Приклад 25. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1;2;0)$, $B(0;-2;1)$, $C(-1;0;2)$.

Розв'язок. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Оскільки $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-2;2)$ і за формулою (64)

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{k},$$

то за формулою (65) площа $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2}=3\sqrt{2}$. ➤

1.4.3. МІШАНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ

Об'єм тетраедра, заданого координатами вершин. Умова компланарності трьох векторів

Означення. *Мішаним, або скалярно-векторним, добутком трьох векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, скалярно помножений на вектор $\vec{c}$, тобто* $(\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{c}$.

З означення видно, що мішаний добуток трьох векторів є число. Справді, векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ є вектор, а скалярний добуток цього вектора на вектор $\vec{c}$ є число.

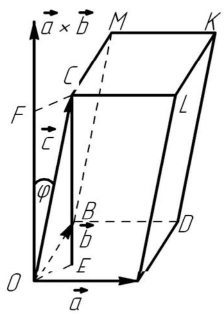


Рис. 66

Теорема. *Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ чисельно дорівнює об'єму V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$* (рис. 66).

Мішаний добуток трьох векторів у координатах:

Нехай вектори $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ задані своїми координатами: $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$

Знайдемо векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

Помноживши вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ скалярно, одержимо:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3\right)= \qquad (67)$$

Умова компланарності трьох векторів:

Якщо мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює нулю, то вектори компланарні, і навпаки.

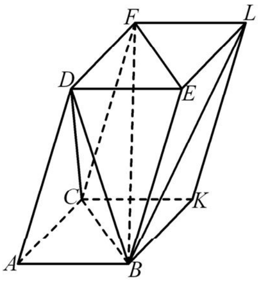


Рис. 67

Нехай тетраедр задано своїми вершинами $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$, $D(x_4;y_4;z_4)$ і треба визначити його об'єм. Добудуємо тетраедр до трикутної призми *ABCDEF*, а трикутну призму до паралелепіпеда *ABKCDELF* (рис. 67). Позначимо об'єм паралелепіпеда V', а трикутної призми – через V_1. Відомо, що $V' = \left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right|$,

$$V_1 = \frac{1}{2}V'; V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_1 = \frac{1}{6}V'.$$

Отже, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}V' = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right|.$

Визначимо вектори $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$A\vec{C} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$A\vec{D} = (x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1).$$

Отже,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{matrix}\right\|, \text{ або}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{matrix}\right\| \tag{68}$$

Справді, якщо в останньому визначнику від елементів другого, третього, четвертого рядків відняти перший рядок і розкрити знайдений визначник за елементами останнього стовпця, то матимемо попередній визначник.

Приклад Обчислити об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(5;4;2)$, $B(0;0;1)$, $C(0;2;0)$, D(3;0;0).

Згідно з формулою (68):

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}5&4&2&1\\0&0&1&1\\0&2&0&1\\7&0&0&1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}5&4&2&1\\-5&-4&-1&0\\-5&-2&-2&0\\-2&-4&-2&0\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-5&-4&-1\\-5&-2&-2\\-2&-4&-2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-5&6&4\\-5&8&3\\-2&0&0\end{matrix}\right\|=\frac{2}{6}\left\|\begin{matrix}6&4\\8&3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{3}\left|(18-32)\right|=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається вектором; довжиною вектора; напрямком вектора; нульовим вектором?
2. Дайте визначення колінеарних векторів.
3. Дайте визначення рівних векторів.
4. Як знайти координати вектора, заданого парою не співпадаючих точок?
5. Як знайти довжину вектора?
6. Дайте визначення скалярного добутку двох векторів.
7. Напишіть формулу для визначення скалярного добутку двох векторів за їх координатами.
8. Сформулюйте умови колінеарності двох векторів.
9. Сформулюйте умови перпендикулярності двох векторів.
10. Напишіть формулу для визначення кута між двома векторами.
11. Як знайти відстань між двома точками?
12. Як знайти координати середини відрізка?

1.5. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1.5.1. ПРЕДМЕТ І МЕТОДИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. МЕТОД КООРДИНАТ

Мета та завдання аналітичної геометрії. Геометрія – це наука про форму, розміри і взаємне розміщення геометричних фігур. Під фігурою в геометрії розуміють будь-яку множину точок: це може бути окрема точка, сукупності кількох точок, відрізок, промінь, пряма, кут, коло, многокутник, циліндр тощо.

Предметом аналітичної геометрії є вивчення геометричних фігур (об'єктів) засобами алгебраїчного аналізу, а її *методом* є метод координат, за допомогою якого реалізується застосування алгебраїчної теорії в геометрії до вивчення найпростіших фігур.

Ідея координат є однією з найдавніших. Астрономи і географи ще в стародавні часи користувались сферичними координатами (широтою і довготою), щоб описати положення точки на сферичній поверхні.

Основоположником координатного методу, а разом з цим і аналітичної геометрії, вважають великого французького математика і філософа Ране Декарта (1596–1650), який виклав основи цього методу у своїй "Геометрії", опублікованій у 1637 р., як частині його філософського твору "Міркування про метод".

Декарт запропонував положення точки на площині визначити за допомогою двох чисел – її координат, а кожну лінію на площині розглядати як множину точок з певною властивістю. Цю властивість записують у вигляді рівняння, яке називається рівнянням даної лінії. Такий метод дослідження геометричних образів називають *методом координат*. Останнім часом при дослідженні геометричних образів широко використовується, крім методу координат, апарат *векторної алгебри*.

Координатний метод (хоч його застосовували спочатку тільки до площини) ми розглядатимемо послідовно на прямій лінії (один вимір), на площину (два виміри) і в просторі (три виміри) .

В аналітичній геометрії провідна роль належить обчисленням, оперуванню формулами, а побудови відіграють допоміжну, ілюстративну роль.

Суть методу координат полягає в тому, що кожній точці на прямій, на площині, в просторі за певним правилом ставлять у відповідність певні числа, її координати, що надає змогу за допомогою чисел засобами алгебри описувати положення точок і досліджувати властивості фігур (прямих і кривих ліній, площин, поверхонь тощо).

Метод координат відкрив шлях у математику змінним величинам, а потім диференціальному та інтегральному численню.

Аналітична геометрія мала великий вплив на розвиток диференціальної і проективної геометрії, аналітичної механіки і багатьох інших розділів математики і фізики.

Основні задачі, які розв'язуються в аналітичній геометрії, такі:

✓ задано геометричний образ – треба знайти його рівняння;

✓ задано рівняння – треба знайти відповідний йому геометричний образ.

У розділі "Аналітична геометрія" розглядатиметься перша з цих задач, друга розглядатиметься в розділі "Математичний аналіз".

1.5.2. ПОНЯТТЯ РІВНЯННЯ ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ

Загальне рівняння прямої та його окремі випадки. Різні види рівнянь прямої. Нормальне рівняння прямої. Рівняння першого ступеня відносно змінних x і y, тобто рівняння вигляду $Ax + By + C = 0$ (1) за умови, що коефіцієнти A і B одночасно не дорівнюють нулю, називається загальним рівнянням прямої.

Спинимось на окремих випадках загального рівняння прямої.

Значення коефіцієнтів	Вид рівняння	Положення прямої
$C = 0$	$Ax + By = 0$ $(y = kx)$	Проходить через початок координат
$A = 0$	$By + C = 0$ $(y = b)$	Паралельна осі Ox
$B = 0$	$Ax + C = 0$ $(x = a)$	Паралельна осі Oy
$A = C = 0$	$y = 0$	Збігається з віссю Ox
$B = C = 0$	$x = 0$	Збігається з віссю Oy

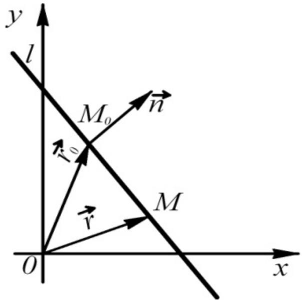


Рис. 68. Пряма, побудована за точкою $M_0(x_0, y_0)$ і нормальним вектором $\vec{n} = (A, B)$

Векторне рівняння прямої. Нехай l – пряма на площині xOy (рис. 68), $M_0(x_0,y_0)$ – точка на цій прямій, а $\vec{n} = (A,B)$ – ненульовий вектор, перпендикулярний до прямої l (він називається нормальним вектором прямої). Якщо $M\ (x,y)$ – довільна точка на прямій l, відмінна від M_0, то вектор $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0} = (x - x_0;\ y - y_0)$ перпендикулярний до вектора $\vec{n} = (A, B)$, тобто скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \tag{69}$$

Рівняння (2) називається векторним рівнянням прямої. Якщо його записати в координатній формі, то одержимо рівняння:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{70}$$

Канонічне та параметричне рівняння прямої. Нехай $M_0(x_0,y_0)$ – задана точка прямої, *а* $\overline{q} = (m; n)$ – вектор, колінеарний прямій (він називається напрямним вектором прямої). Якщо $M(x,y)$ – довільна точка на прямій, то вектори $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ і $\vec{q} = (m; n)$ колінеарні, тобто координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{(x - x_0)}{m} = \frac{(y - y_0)}{n} \tag{71}$$

Рівняння (4) називається канонічним рівнянням прямої.

Якщо в рівнянні (4) кожне з відношень позначити через t, тобто

$$\frac{(x-x_0)}{m}=t, \quad \frac{(y-y_0)}{n}=t,$$

то координати x і y поточної точки через t запишуться рівняннями

$$x=x_0+mt\ ,\ y=y_0+nt, \tag{72}$$

які називаються параметричними рівняннями прямої лінії; t є змінним параметром прямої.

Рівняння прямої у відрізках на осях

Рівняння прямої у відрізках на осях має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{73}$$

де a і b – відповідно абсциса і ордината точок перетину прямої з осями Ox і Oy.

Задача. Побудувати пряму $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння так:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1,$$

тобто a = 2 *і* b = -3. Отже, одержуємо точки A(2;0) і B(0;-3). Пряма, проведена через точки A і B, – шукана (рис. 69)

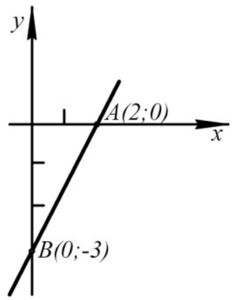


Рис. 69. Графік прямої $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y = kx + b, \tag{74}$$

де $k = tg\ \alpha$ – кутовий коефіцієнт, який дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox; b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

Якщо $\alpha = 0$, то $k = 0$, тобто пряма паралельна осі Ox.

При $\alpha=90°$ кутового коефіцієнта k немає, тобто пряма, перпендикулярна до осі Ox, не має кутового коефіцієнта.

Якщо на прямій, що проходить через початок координат, взято точку $A(x_A; y_A)$, то:

$$k = tg\alpha = \frac{y_A}{x_A} \tag{75}$$

Задача. Складіть рівняння прямої, якщо її кутовий коефіцієнт $k = -3$, а $b=2$.

Розв'язання. Підставивши в рівняння (74) значення k і b, одержимо: $y = -3x + 2$.

Рівняння прямої, яка проходить через дану точку в заданому напрямі

Рівняння прямої, яка проходить через дану точку $A(x_A; y_A)$ в заданому напрямі, має вигляд

$$y - y_A = k(x - x_A), \tag{76}$$

де $k = tg\ \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої.

Рівняння (76) можна розглядати як рівняння пучка прямих, тобто множини прямих, які проходять через ту саму точку площини – точку $A(x_A; y_A)$.

Зазначимо, що тільки одна з усіх прямих, що проходять через точку A, а саме пряма, перпендикулярна до осі Ox, не виражається рівнянням вигляду (76). Її рівняння має вигляд $x = x_A$.

Задача. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(5;-1)$ і має кутовий коефіцієнт $k = 3$.

Розв'язання. За умовою $x_A = 5$, $y_A = -1$, $k = 3$. Підставивши ці значення в рівняння, одержимо $y + 1 = 3(x - 5)$ або $3x - y - 16 = 0$.

Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $A(x_A;y_A)$ і $B(x_B;y_B)$, має вигляд:

$$y-y_A=\frac{(y_B-y_A)}{(x_B-x_A)}(x-x_A). \qquad (77)$$

Кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки A і B, визначаємо із співвідношення:

$$k_{AB}=\frac{(y_B-y_A)}{(x_B-x_A)}. \qquad (78)$$

Задача. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(2;-3)$ і $B(-1;4)$.

Розв'язання. За умовою $x_A = 2$, $x_B = -1$, $y_A = -3$ *і* $y_B = 4$. Підставивши ці значення в рівняння (76), одержимо:

$$y+3=\frac{(4+3)}{(-1-2)}(x-2) \quad \text{або } 7x + 3y - 5 = 0.$$

Нормальне рівняння прямої. Визначення відстані від точки до прямої

Нехай на площині xOy дано пряму. Проведемо через початок координат перпендикуляр до даної прямої і назвемо його нормаллю. Позначимо через P точку перетину нормалі з даною прямою і встановимо додатний напрям нормалі від точки O до точки P. Якщо α – полярний кут нормалі, p – довжина відрізка OP, тоді рівняння даної прямої матиме вигляд $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0$, рівняння цього виду називається *нормальним* (рис. 70).

Нехай дана будь-яка пряма і певна точка M^*, позначимо через d відстань точки M^* від даної прямої. Відхилення δ точки M^* від прямої називається числом $+d$, якщо дана точка і початок координат лежать по різні сторони від даної прямої, і $-d$, якщо дана точка і початок координат розміщені по одну сторону від даної прямої. Для точок, які лежать на самій прямій, $\delta=0$. Якщо дані координати x^*, y^* точки M^* і нормальне рівняння прямої $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0$, то відхилення δ точки M^* від прямої може бути визначено за формулою:

$$\delta = x^*\cos\alpha + y^*\sin\alpha - p.$$

Отже, щоб знайти відхилення будь-якої точки M^* від даної прямої, потрібно в ліву частину нормального рівняння цієї прямої замість цих координат підставити координати точки M^*. Знайдене число буде рівне шуканому відхиленню.

Щоб знайти відстань d від точки до прямої, достатньо знайти відхилення і взяти його модуль: $d = |\delta|$. Якщо дано загальне рівняння прямої $Ax+By+C=0$, то, щоб звести його до нормального вигляду, потрібно всі члени цього рівняння помножити на нормуючий множник μ, який знаходиться за формулою:

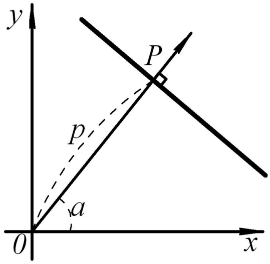


Рис. 70. Нормальне рівняння прямої:
$\overrightarrow{OP}$ – напрям нормалі;
α – полярний кут нормалі;
P – точка перетину нормалі з прямою

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак нормуючого множника вибираємо протилежним знаку вільного члена нормуючого рівняння.

Приклад. Звести рівняння прямої $x - 2y + 6 = 0$ до нормального виду.

Розв'язок. Знайдемо нормуючий множник:

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{1+4}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Помноживши обидві частини рівняння прямої на $-\frac{1}{\sqrt{5}}$, одержимо $-\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{6}{\sqrt{5}} = 0$ – це нормальне рівняння прямої.

Перетин двох прямих

Якщо дано дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, які перетинаються, то, щоб визначити координати точки перетину цих прямих, треба розв'язати систему рівнянь даних прямих.

Задача 1. Знайдіть точку перетину прямих $3x - 4y + 11 = 0$ і $4x - y - 7 = 0$.

Розв'язання. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0 \\ 4x - y - 7 = 0, \end{cases}$$

одержимо: $x = 3$ і $y = 5$. Отже, (3;5) – точка перетину цих прямих.

Задача 2. Знайти точки перетину прямої $4x - 3y - 12 = 0$ з осями координат.

Розв'язання. Нехай A – точка перетину прямої з віссю Ox. Припустивши, що в даному рівнянні $y = 0$, одержимо $4x - 12 = 0$, звідки $x = 3$, тобто $A(3;0)$. Нехай B – точка перетину прямої з віссю Oy. При $x = 0$ одержимо $3y - 12 = 0$, звідки $y = -4$, тобто $B(0;-4)$.

Кут між двома прямими

Кут φ між двома прямими, заданими загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, обчислюють за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (79)$$

Кут φ між двома прямими, заданими рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b$ і $y = k_2x + b$, обчислюють за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (80)$$

Кут φ між двома прямими, заданими канонічними рівняннями $\frac{(x - x_1)}{m_1} = \frac{(y - y_1)}{n_1}$ і $\frac{(x - x_2)}{m_2} = \frac{(y - y_2)}{n_2}$, обчислюють за формулою

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (81)$$

Формули (79) – (81) визначають значення тригонометричної функції одного з двох кутів (гострого або тупого) між заданими прямими. Щоб знайти гострий кут між прямими, вирази в правій частині цих формул треба брати за модулем.

Задача. Знайти гострий кут між прямими $y = 5x$ і $y = 2x$ (рис. 71).

Розв'язання. Кутові коефіцієнти даних прямих дорівнюють 5 і 2.

Скористаємось формулою (13), причому праву її частину беремо за модулем: $tg\ \varphi = \left|(2-5)/(1+2\cdot 5)\right| = 3\ /\ 11 = 0{,}2727;$ $\varphi \approx 15°15'$.

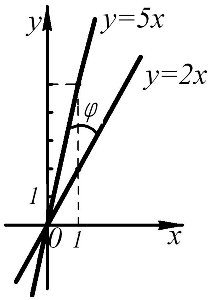


Рис. 71. Прямі $y = 5x$, $y = 2x$, φ – кут між прямими

Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих

Умова паралельності двох прямих, заданих загальними рівняннями

$A_1x + B_1y + C_1 + 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Умова паралельності прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b$ і $y = k_2x + b$, має вигляд: $k_1 = k_2$.

Умова паралельності двох прямих, заданих канонічними рівняннями

$$\frac{(x-x_1)}{m_1} = \frac{(y-y_1)}{n_1} \text{ і } \frac{(x-x_2)}{m_2} = \frac{(y-y_2)}{n_2},$$

має вигляд: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Задача 1. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2;4)$ паралельно прямій $2x - 3y + 6 = 0$ (рис. 72).

Розв'язання. Записавши рівняння даної прямої у вигляді $y = \frac{2}{3}x + 2$, знайдемо її кутовий коефіцієнт $k_1 = \frac{2}{3}$. Оскільки дана і шукана пряма паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні, тобто $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$. Шукана пряма проходить через точку M(-2;4) і має кутовий коефіцієнт $k_2 = \frac{2}{3}$. Тому її рівняння записують у вигляді $y - 4 = \frac{2}{3}(x + 2)$ або $2x - 3y + 16 = 0$.

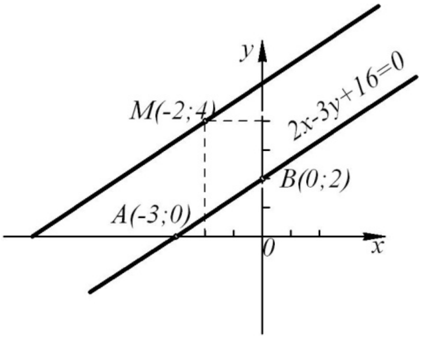


Рис. 72. Пряма $2x - 3y + 16 = 0$

Умова перпендикулярності двох прямих, заданих загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, має вигляд $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Умова перпендикулярності прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, має вигляд: $k_2 = 1/k_1$, або $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Умова перпендикулярності двох прямих, заданих канонічними рівняннями

$$\frac{(x - x_1)}{m_1} = \frac{(y - y_1)}{n_1} \quad \text{і} \quad \frac{(x - x_2)}{m_2} = \frac{(y - y_2)}{n_2},$$

має вигляд: $m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

Задача 2. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку *M(2;3)* перпендикулярно до прямої $5x - 4y - 20 = 0$ (рис. 73).

Розв'язання. Знайдемо кутовий коефіцієнт даної прямої $k_1 = \frac{4}{5}$. Тоді кутовий коефіцієнт шуканої прямої $k_2 = -\frac{4}{5}$ і, отже, її рівняння має вигляд $y - 3 = -\frac{4}{5}(x - 2)$ або $4x + 5y - 23 = 0$

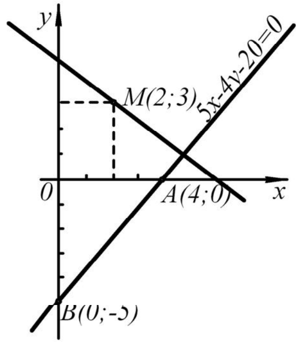


Рис. 73. Пряма $5x - 4y - 20 = 0$

Запитання для самоконтролю

1. Що є предметом вивчення аналітичної геометрії?
2. Системи координат на прямій, на площині і в просторі.
3. Яким чином можливо визначити положення прямої на площині?
4. Напишіть загальне рівняння прямої та окремі його випадки.
5. Як перевірити, чи лежить дана точка на даній прямій?
6. Що називають кутом нахилу прямої?
7. Напишіть рівняння прямої у відрізках на осях.
8. Напишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
9. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через дану точку в заданому напрямі.
10. Напишіть рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.
11. Напишіть нормальне рівняння прямої.
12. Умова паралельності і перпендикулярності двох прямих.

1.5.3. ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Загальне рівняння та його дослідження

Нехай площину π задано точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і вектором $\vec{N}=(A,B,C)\neq 0$, перпендикулярним до площини π. Точка M_0 і вектор $\vec{N}$ однозначно визначають площину (рис. 74). Щоб скласти рівняння площини π, візьмемо на ній довільну точку $M(x;y;z)$ і знайдемо залежність між її координатами та відомими сталими параметрами, що визначають положення площини відносно декартової прямокутної системи координат у просторі. Розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$.

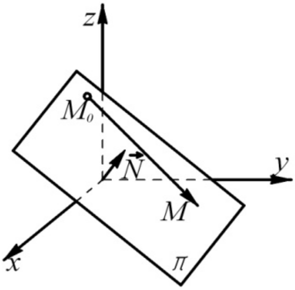


Рис. 74

При будь-якому положенні точки M на площині π вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до вектора $\vec{N}$. Отже, скалярний добуток цих двох векторів дорівнює нулю

$$\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0 \qquad (82)$$

Виразимо ліву частину рівняння **(1)** через координати векторів $\vec{N}$ і $\overrightarrow{M_0M}$.

Одержимо $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

(83)

Це є рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{N}$.

Розкриємо дужки в рівнянні (83) і позначимо $-Ax_0-By_0-Cz_0$ через D.

Матимемо

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (84)$$

Це рівняння називається *загальним рівнянням площини*. Як бачимо, загальне рівняння площини є рівнянням першого степеня (або лінійне) відносно x, y, z. Вектор $\vec{N}$ називають *нормальним вектором площини*.

Покажемо, що кожне лінійне рівняння відносно x, y, z є рівнянням площини.

Нехай задано лінійне рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (85)$$

Покажемо, що це рівняння площини. Виберемо на поверхні точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ Координати цієї точки задовольняють рівняння (85)

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D = 0. \qquad (86)$$

Віднявши почленно тотожність (86) від рівняння (85), одержимо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (87)$$

Рівняння (87) виражає ту саму поверхню, що й рівняння (85). Проте рівняння (87) є рівнянням площини, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (A, B, C)$. Отже, і рівняння (85) є рівнянням площини. Звідси маємо, що кожне лінійне рівняння є рівнянням площини.

Рівняння (83) є рівнянням площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (A, B, C)$. Якщо вектор $\vec{N}$ буде змінним, то рівняння (83) зображує не одну площину, а безліч площин, що проходять через точку M_0. Тому рівняння (83) називають *ще рівнянням в'язки площин*.

Дослідження неповного рівняння площини

Рівняння площини називають *неповним*, якщо в ньому немає деяких членів. Різні види неповного рівняння площини характеризують особливості розміщення площини в системі координат.

1) Якщо в рівнянні площини немає вільного члена, тобто $D=0$, то площина проходить через початок координат. Справді, координати точки $O(0;0;0)$ задовольняють рівняння

$$Ax+By+Cz=0$$

2) Якщо в рівнянні площини $A=0$, то площина $By+Cz+D=0$ паралельна осі Ox. Справді, нормальний вектор площини $\vec{N}=(0,B,C)$ перпендикулярний до осі Ox, а площина, перпендикулярна до нього, паралельна осі Ox.

Аналогічно, якщо в рівнянні площини $B=0$, то площина $Ax+Cz+D=0$ паралельна осі Oy, а якщо $C=0$, то площина $Ax+By+D=0$ паралельна осі Oz.

3) Якщо в рівнянні площини $A=B=0$, то площина $Cz+D=0$ паралельна координатній площині xOy. Справді, площина паралельна осі Ox і осі Oy. *Отже,* вона паралельна площині xOy.

Аналогічно, якщо $A=C=0$, то площина $By+D=0$ паралельна координатній площині xOz,, а якщо $B=C=0$, то площина $Ax+D=0$ паралельна координатній площині yOz.

4) Якщо в рівнянні площини $A=D=0$, то площина $By+Cz=0$ проходить через вісь Ox. Справді, оскільки $A=0$, то площина паралельна осі Ox, а оскільки $D=0$, то вона проходить через початок координат, отже, – через вісь Ox.

Аналогічно, якщо $B=D=0$, то площина $Ax+Cz=0$ проходить через вісь Oy, а якщо $C=D=0$, то площина проходить через вісь Oz.

5) Якщо в рівнянні площини $A=B=D=0$, то площина $Cz=0$, або $z=0$, суміщається з площиною xOy. Аналогічно, якщо $B=C=D=0$, то площина $Ax=0$, або $x=0$, суміщається з площиною yOz, якщо $A=C=D=0$, то площина $By=0$, або $y=0$, суміщається з площиною xOz.

Нормальне рівняння площини в просторі

Нехай площину π задано нормаллю OP (рис. 75). *Нормаллю площини* називають перпендикуляр, опущений з початку координат на площину. Нехай задано довжину нормалі $OP = p$ і кути α, β, γ, які утворює нормаль відповідно з осями Ox, Oy, Oz, тобто $(OP, Ox) = \angle\alpha$, $(OP, Oy) = \angle\beta$, $(OP, Oz) = \angle\gamma$.

Щоб вивести рівняння площини, знайдемо координати нормального вектора площини π як проекції нормалі $\vec{OP}$ на координатні осі.

Маємо

$$\vec{OP} = (\text{пр}_{Ox}\vec{OP}, \text{пр}_{Oy}\vec{OP}, \text{пр}_{Oz}\vec{OP}) = (p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma)$$

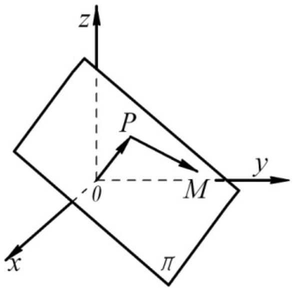


Рис. 75

Визначимо координати точки P, яка лежить на площині π. Її координати дорівнюють координатам вектора $\vec{OP}$ (початок збігається з початком координат, а координати вектора дорівнюють різницям координат кінця і початку).

Отже, маємо

$$P(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma)$$

Знаючи одну точку площини і нормальний вектор площини, запишемо її рівняння у вигляді (2)

$$p\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + p\cos\beta(y - p\cos\beta) + p\cos\gamma(z - p\cos\gamma) = 0. \quad (88)$$

Скоротивши рівняння (7) на p і розкривши дужки, одержимо

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 0,$$

де α, β, γ – напрямні кути вектора. Сума квадратів напрямних косинусів вектора дорівнює одиниці, тобто

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (89)$$

Отже, остаточно

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \quad (90)$$

Рівняння (90) є нормальним рівнянням площини. Воно має такі *властивості*:

1°. *Вільний член нормального рівняння площини завжди від'ємний.*

2°. *Сума квадратів коефіцієнтів при* x, y, z *дорівнює одиниці.*

Зведення загального рівняння площини до нормального виду

Нехай задано загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \qquad (91)$$

Треба перетворити його так, щоб воно стало нормальним рівнянням. Помножимо обидві частини рівняння (10) на число $m \neq 0$. Матимемо

$$Amx + Bmy + Cmz + Dm = 0 . \qquad (92)$$

Від цього еквівалентність рівнянь не порушиться.

Підберемо число m так, щоб рівняння (11) стало нормальним. Для цього необхідно, щоб виконувалися дві властивості нормального рівняння:

1°. $Dm < 0$.

2°. $(Am)^2 + (Bm)^2 + (Cm)^2 = 1$

З другого рівняння знаходимо

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Знак перед дробом беремо таким, щоб Dm було менше нуля, тобто знак m протилежний знаку D.

Число m називають *нормуючим множником*.

Отже, щоб звести загальне рівняння площини до нормального виду, слід обидві частини цього рівняння помножити на нормуючий множник:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

Приклад. Звести рівняння площини $x - 2y + 2z + 6 = 0$ до нормального виду.

Розв'язання. Знайдемо нормуючий множник:

$$m = -\frac{1}{\sqrt{1+4+4}} = -\frac{1}{3}.$$

Помноживши обидві частини рівняння площини на $-\frac{1}{3}$, одержимо $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 2 = 0$ – це нормальне рівняння площини.

Відхилення і відстань точки від площини

Нехай задано нормальне рівняння площини $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ і точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, яка не лежить на площині π. Треба знайти відстань d точки M_0 від площини π.

Для цього через точку M_0 (рис. 76) проведемо площину π', паралельну площині π. Оскільки площини π і π' паралельні, то їхні нормалі лежатимуть на одній прямій і утворюватимуть з осями координат однакові кути. Довжина нормалі p' площини π' дорівнюватиме довжині нормалі p площини π плюс d, якщо точки M_0 і 0 лежать по різні боки від площини π, і мінус d, якщо точки M_0 і 0 лежать по один бік від площини π, тобто $p' = p \pm d$.

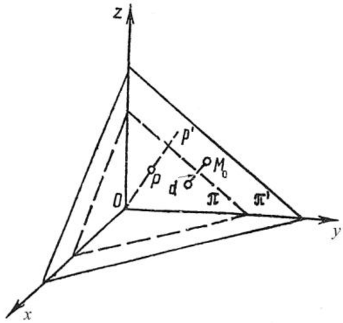


Рис. 76

Тоді рівняння площини π матиме вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - (p \pm d) = 0\,. \qquad (93)$$

Точка M_0 належить π', отже, її координати задовольняють рівняння (93)

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - (p \pm d) = 0 \qquad (94)$$

З рівняння (94) знайдемо відстань d – завжди додатна, а результат підстановки координат точки в ліву частину нормального рівняння може бути як додатним, так і від'ємним числом. Це число називають відхиленням точки від площини і позначають буквою δ. Отже,

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p, \tag{95}$$

а відстань $d = |\delta|$, тобто

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p| \tag{96}$$

Приклад. Знайти відхилення точки $M_0(1;\ 2;\ 3)$ від площини $2x + 2y + z + 9 = 0$.

Розв'язання. Зведемо рівняння площини до нормального виду. Для цього обидві частини рівняння помножимо на нормуючий множник

$$m = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = -\frac{1}{3}.$$

Знак нормуючого множника протилежний знаку вільного члена загального рівняння.

Нормальне рівняння площини

$$-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0,$$

а відхилення

$$\delta = -\frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 3 - 3 = -6\cdot$$

Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай на площині π задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій, тобто $\overrightarrow{M_1M_2}$ непаралельний $\overrightarrow{M_1M_3}$. Візьмемо на площині довільну (поточну) точку $M(x, y, z)$. Щоб скласти рівняння площини π, треба пов'язати координати x, y, z довільної (поточної) точки площини з відомими сталими параметрами, які визначають положення площини відносно декартової прямокутної системи координат. Такими сталими параметрами є 9 чисел – координати точок M_1, M_2 і M_3.

Розглянемо три вектори:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

Ці вектори лежать у площині π, отже, вони компланарні. Умовою компланарності їх є те, що мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто

$$(\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}) = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{97}$$

Це рівняння площини, що проходить через три точки.

Якщо розкрити визначник за елементами першого рядка, то одержимо

$$(x - x_1)A_{11} + (y - y_1)A_{12} + (z - z_1)A_{13} = 0, \tag{98}$$

де

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Приклад. Через точки $A(1;\ 0;\ 2)$, $B(0;\ 1;\ -1)$, $C(2;\ 0;\ -1)$ провести площину.

Розв'язання. Використаємо рівняння (97). Тоді

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ 0 - 1 & 1 - 0 & -1 - 2 \\ 2 - 1 & 0 - 0 & -1 - 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Розкривши визначник за елементами першого рядка, матимемо

$$(x-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -3\end{vmatrix}+y(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & -3\end{vmatrix}+(z-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0,$$

або $-3(x-1)-6y-(z-2)=0$, $\quad 3x+6y+z-5=0$.

Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай задано відрізки a, b, c, які площина відтинає відповідно на осях координат Ox, Oy, Oz (рис. 77). Отже, відомі три точки площини $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$. Запишемо рівняння площини, що проходить через ці три точки. Маємо

$$\begin{vmatrix}x-a & y-0 & -0\\ 0-a & b-0 & 0-0\\ 0-a & 0-0 & c-0\end{vmatrix}=0,$$

або $(x-a)bc+yac+zab=0$.

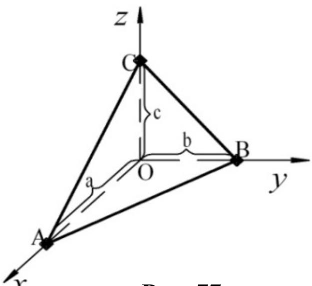


Рис. 77

Розкриємо дужки, перенесемо в праву частину вільний член і поділимо на нього обидві частини рівняння. Одержимо

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (99)$$

Приклад. Знайти відрізки, які відтинає площина $2x-4y+3z-12=0$ на осях координат і побудувати площину.

Розв'язок. Запишемо рівняння заданої площини у відрізках на осях. Для цього перенесемо в праву частину вільний член і розділимо на нього обидві частини рівняння. Матимемо

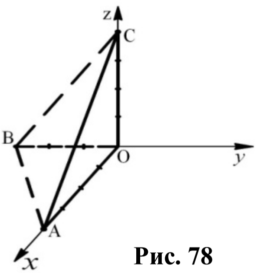


Рис. 78

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1.$$

Отже, $a=4$, $b=-3$, $c=4$.

Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, ми тим самим знаємо три точки $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ -3;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 4)$ перетину площини відповідно з осями координат Ox, Oy, Oz і три прямі AB, AC, BC перетину площини відповідно з координатними площинами xOy, xOz, yOz. Точки перетину площини з осями координат і прямі перетину площини з координатними площинами називають *слідами площини*. Щоб побудувати площину в системі координат, треба побудувати її сліди (рис. 78).

Кут між двома площинами в просторі. Умова паралельності та перпендикулярності площин. Відстань від точки до площини

Нехай задано дві площини π_1 і π_2 відповідно загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Двогранний кут між двома площинами вимірюється лінійним кутом. На підставі теореми про рівність кутів із взаємно перпендикулярними сторонами, лінійний кут дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ цих площин (рис. 79).

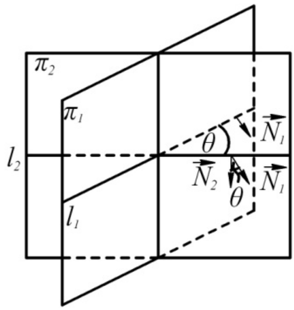


Рис. 79

Кут між векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ знайдемо за формулою

$$\cos\theta = \pm\frac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|},$$

або

$$\cos\theta = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Знаки “плюс” і “мінус” у даній формулі відповідають косинусам двох суміжних двогранних кутів, утворених площинами при перетині.

Якщо площини π_1 і π_2 паралельні, то їхні нормальні вектори паралельні, отже, координати їх пропорційні, тобто

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (100)$$

є умова паралельності двох площин.

Якщо площини π_1 і π_2 перпендикулярні, то їхні нормальні вектори перпендикулярні, отже, скалярний добуток їх дорівнює нулю

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 - \text{умова перпендикулярності двох площин} \qquad (101)$$

1.5.4. ПРЯМА ЛІНІЯ В ПРОСТОРІ

Залежно від того, яким чином задається пряма, існують різні форми рівняння прямої в просторі. Розглянемо їх.

Різні види рівнянь прямої в просторі. Взаємне розміщення двох прямих у просторі.

Припустимо, що в деякій системі координат пряма a задана точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$, через яку вона проходить, і вектором $\vec{p}(l;m;n)$, до якого вона паралельна. Нехай $M(x;y;z)$– довільна точка прямої a (рис. 80). Ця точка лежить на прямій a тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{p}$ колінеарні. Ці вектори будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли їхні координати пропорційні:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \qquad (102)$$

Таким чином, точка $M(x;y;z)$ належить даній прямій a тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють рівняння (102). Тому рівняння (102) є рівняннями даної прямої. Вони називаються *канонічними рівняннями прямої*.

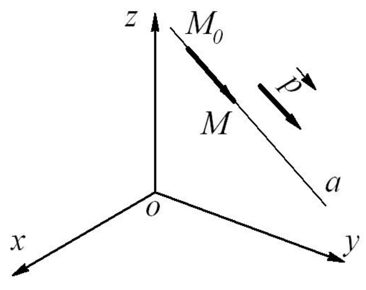


Рис. 80

Рівняння (102) – це, по суті, система трьох рівнянь:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{z-z_0}{n},\ \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

з яких незалежних лише два, а третє – наслідок двох інших.

Вектор $\vec{p}(l;m;n)$ називається *напрямним вектором* прямої a, а його координати l, m, n – *напрямними коефіцієнтами* прямої. Якщо пряма задана двома точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, через які вона проходить, то її напрямним вектором буде вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$. Взявши до уваги, що цій прямій належить точка M_1, її рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Параметричні рівняння прямої

Нехай пряма задана канонічними рівняннями (102). Покладемо

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

Тоді

$$\begin{cases} x=x_0+l\cdot t\\ y=y_0+m\cdot t\\ z=z_0+n\cdot t\end{cases} \tag{103}$$

Рівняння (2) називаються *параметричними рівняннями прямої*; t – параметр, $t\in R$.

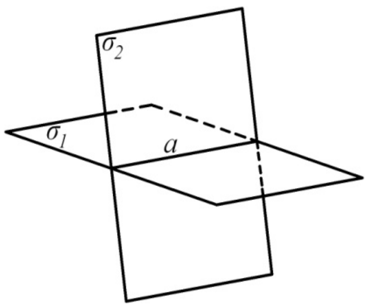


Рис. 81

Рівняння прямої, заданої як перетин двох площин

Нехай в деякій системі координат дві площини, що перетинаються, задані своїми рівняннями (рис. 81) :

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{104}$$

Тоді пряма їх перетину задається системою рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (105)$$

Виникає питання: як від системи рівнянь (105) перейти до канонічних рівнянь прямої?

Виявляється, що напрямним вектором прямої, заданої системою рівнянь (105), є вектор

$$\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Дійсно, оскільки

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то за лемою $\vec{p} \| \sigma_1$. Аналогічно встановимо, що $\vec{p} \| \sigma_2$. Отже, вектор $\vec{p}$ паралельний до лінії перетину цих площин, тобто є напрямним вектором прямої, заданої системою (105).

Знайшовши який-небудь розв'язок системи (105), матимемо координати точки M_0, через яку проходить дана пряма. За точкою і напрямним вектором знайдемо канонічні рівняння прямої.

Зазначимо, що коли система координат прямокутна, то вектор $\vec{p} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, де $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_1(A_2; B_2; C_2)$ – нормальні вектори даних площин, звідки одразу випливає, що цей вектор паралельний до кожної з площин, а, отже, і до прямої їх перетину.

Приклад. Пряма задана системою рівнянь

$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 4 = 0, \\ 2x + y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

Скласти канонічні рівняння цієї прямої.

Розв'язок. Віднявши від першого рівняння друге, одержимо рівносильну систему:

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0, \\ 2x + y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

Поклавши в ній $y = 0$, одержимо

$$\begin{cases} x + 2 = 0, \\ 2x + 2z + 2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2, \\ z = 1. \end{cases}$$

Отже, пряма проходить через точку $M_0(-2;\ 0;\ 1)$.

Знайдемо напрямний вектор:

$$\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-4;-2;5).$$

Отже, канонічні рівняння прямої мають вигляд:

$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{5}.$$

Відповідь. $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{5}.$

Нехай у просторі дві прямі a_1 і a_2 задані відносно системи координат їхніми канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad (a_1) \qquad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}. \quad (a_2)$$

Можливі такі випадки їх *взаємного розташування*:

1. Якщо у двох прямих простору немає жодної спільної точки, але вони лежать в одній площині, то такі прямі паралельні.

2. Якщо ж прямі не лежать в одній площині, то вони мимобіжні.

3. Коли у двох прямих є тільки одна спільна точка, то вони перетинаються.

4. Якщо ж у двох прямих є хоча б дві спільні точки, то вони збігаються.

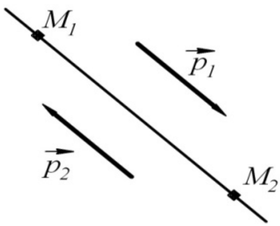


Рис. 82

Розглянемо аналітичні умови, які визначають кожний із випадків.

1. Прямі a_1 і a_2 збігатимуться тоді і тільки тоді, коли їхні напрямні вектори $\vec{p}_1(l_1;m_1;n_1)$ і $\vec{p}_2(l_2;m_2;n_2)$ будуть колінеарними, а точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ прямої a_1 належатиме і прямій a_2 (рис. 82). Ці умови будуть виконаними тоді і тільки

тоді, коли координати векторів $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ будуть пропорційними, а координати точки M_1 задовольнятимуть рівняння прямої a_2:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{106}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{l_2} = \frac{y_1 - y_2}{m_2} = \frac{z_1 - z_2}{n_2}. \tag{107}$$

2. Прямі a_1 і a_2 будуть паралельними тоді і тільки тоді, коли їхні напрямні вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ будуть колінеарними, а точка M_1 не належатиме прямій a_2 (рис. 83). Це матиме місце тоді і тільки тоді, коли виконується умова (106), але не виконується умова (107).

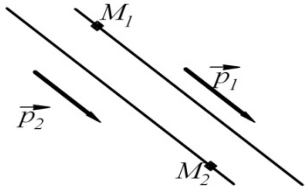


Рис. 83

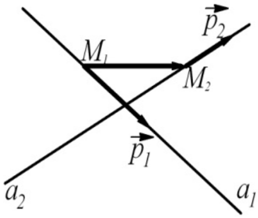


Рис. 84

3. Прямі a_2 і a_3 будуть перетинатися тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ будуть неколінеарними, а вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ – компланарними (рис. 84).

Перше твердження виконується, коли не виконана умова (106). Друга умова виконується тоді і тільки тоді, коли визначник, складений із координат усіх трьох векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$, дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{108}$$

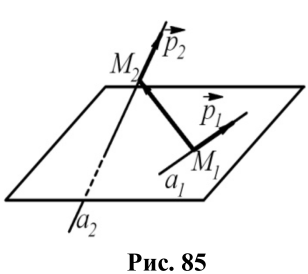


Рис. 85

Отже, прямі перетинаються тоді і тільки тоді, коли виконана умова (108) і не виконана умова (106).

4. Прямі мимобіжні, якщо не виконана ні умова (106), ні умова (108) (рис. 85). Оскільки умова (108) не

виконується тільки в цьому випадку, а в усіх трьох попередніх вона виконується (бо в кожному із перших трьох випадків прямої a_1 і a_2 належать одній площині), то саме її невиконання є необхідною і достатньою умовою мимобіжності прямих.

Таким чином, прямі a_1 і a_2 мимобіжні тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{109}$$

Приклад. Дослідити взаємне розміщення таких пар прямих:

а) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$ і $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$;

б) $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-t \end{cases}$ і $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.

Розв'язок.

а) Випишемо координати напрямних векторів даних прямих: $\vec{p}_1(3\ ;2;\ -3)$, $\vec{p}_2(2\ ;-1;\ 3)$. Перевіримо умову (106): $\dfrac{3}{2}\neq\dfrac{2}{-1}$. Умова (106) не виконана, тому прямі або перетинаються, або мимобіжні. Перевіримо, яка умова виконується – (108) чи (109). Маємо: $M_1(3;\ -1;\ 1)$; $M_2(5;\ -2;\ 4)$; $\overrightarrow{M_1M_2}(2;-1;3)$;

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Отже, виконується умова (108), тому прямі перетинаються.

б) У цьому випадку напрямні вектори такі: $\vec{p}_1(2\ ;3;\ -1)$, $\vec{p}_2(4\ ;3;\ 2)$. Оскільки координати цих векторів непропорційні, то прямі не паралельні. Перевіримо умови (108), (109).

Маємо: $M_1(1;\ -2;\ 0)$; $M_2(1;\ 5;\ -1)$; $\overrightarrow{M_1M_2}(0;7;-1)$;

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50 \neq 0$$

Отже, прямі мимобіжні.

Кут між двома прямими в просторі. Умова паралельності і перпендикулярності двох прямих у просторі

Нехай у просторі дві прямі задані їхніми рівняннями відносно деякої прямокутної системи координат:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \qquad (a_1)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}. \qquad (a_2)$$

Нагадаємо, що кутом між прямими, які перетинаються, називається менший із кутів, утворених при їх перетині.

Якщо прямі мимобіжні, то кут між ними дорівнює куту між прямими, що перетинаються і, відповідно, паралельними кожній із даних мимобіжних прямих. Кут між паралельними прямими вважається рівним 0.

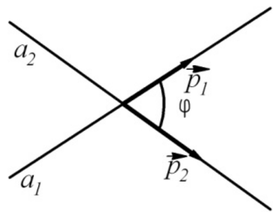


Рис. 86

При знаходженні кута між прямими можливі два випадки.

1. Кут φ між прямими дорівнює куту між їх напрямними векторами: $\varphi = (\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2)$ (рис. 86).

Тоді $\cos\varphi = \cos(\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2) = \left|\cos(\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2)\right|$, бо цей кут не перевищує $\dfrac{\pi}{2}$, і його косинус невід'ємний.

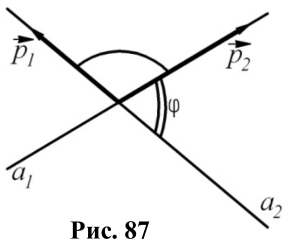


Рис. 87

2. Кут φ між прямими є доповняльним до кута між напрямними векторами. Тоді $\varphi = \pi - (\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2)$ (рис. 87).

$$\frac{\pi}{2} < (\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2) < \pi, \text{ тому } \cos(\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2) < 0, \quad \text{а}$$

$$\cos\varphi = \cos(\pi - (\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2)) = -\cos(\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2) = \left|\cos(\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2)\right|.$$

В обох випадках $\cos\varphi = \left|\cos(\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2)\right|$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{p}_1\vec{p}_2\right|}{\left|\vec{p}_1\right| \cdot \left|\vec{p}_2\right|}, \text{ або } \cos\varphi = \frac{\left|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2\right|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (110)$$

Формула (110) є формулою косинуса кута між двома прямими.

Якщо прямі a_1 і a_2 взаємно перпендикулярні, то кут φ між ними дорівнює 90^o, а $\cos 90^o = 0$. Це буде тоді і тільки тоді, коли у формулі (110) чисельник дорівнює нулю.

Отже, дві прямі a_1 і a_2, задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, (a_1)$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \qquad (a_2)$$

будуть взаємно перпендикулярними тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

Якщо прямі a_1 і a_2 паралельні, то їхні напрямні вектори $\vec{p}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ і $\vec{p}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ також паралельні, а координати цих векторів пропорційні: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

Приклад. У прямокутній системі координат дано дві прямі

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{6} \text{ і } \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

Обчислити кут між цими прямими.

Розв'язок. Знаходимо напрямні вектори даних прямих:

$$\vec{p}_1(2\ ;-3;\ 6),\ \ \vec{p}_2(-1\ ;2;\ -2).$$

За формулою (110) матимемо:

$$\cos\varphi = \frac{|-2-6-12|}{\sqrt{4+9+36}\cdot\sqrt{1+4+4}} = \frac{20}{21}.$$

Отже, $\varphi = \arccos\frac{20}{21}$

Відповідь. $\varphi = \arccos\frac{20}{21}$

Взаємне розміщення прямої і площини

Пряма в просторі може перетинати площину, бути паралельною до неї або лежати в площині. З'ясуємо аналітичні умови для кожного з цих випадків.

Нехай у деякій системі координат площина σ задана загальним рівнянням $Ax+By+Cz=0$, а пряма a – канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

Пряма a перетинатиме площину σ тоді і тільки тоді, коли напрямний вектор прямої $\vec{p}(l;m;n)$ не буде паралельним до цієї площини (рис. 88), тобто коли виконується умова

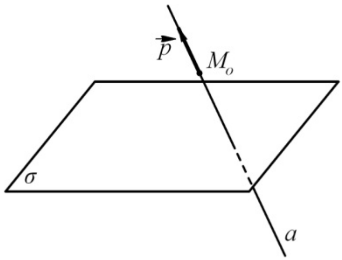


Рис. 88

$$Al+Bm+Cn \neq 0 \qquad (111)$$

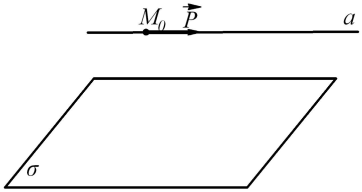


Рис. 89

Пряма a буде паралельною до площини σ тоді і тільки тоді, коли вектор $\vec{p}(l;m;n)$ паралельний до площини σ, а точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ прямої a не належить площині σ (рис. 89), тобто коли виконані умови

$$\begin{cases} Al+Bm+Cn=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0. \end{cases} \qquad (112)$$

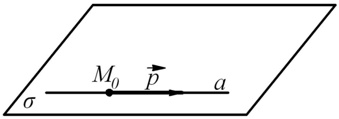


Рис. 90

Пряма a лежатиме в площині σ тоді і тільки тоді, коли вектор $\vec{p}$ паралельний до площини σ, а точка M_0 прямої a належить і площині σ (рис. 90), тобто виконані умови

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \qquad (113)$$

Приклад. Дослідити взаємне розміщення прямої

$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1}$ і площини $x - 3y - 3z + 5 = 0$.

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{p}(3;2;-1)$. Перевіримо, чи паралельний він до даної площини:

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) = 0.$$

Отже, вектор $\vec{p}$ паралельний до площини. Перевіримо, чи лежить точка $M_0(2;-1;3)$ даної прямої у даній площині:

$$2 - 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 + 5 = 1 \neq 0.$$

Отже, виконані умови (112), тому дані пряма і площина паралельні.

Кут між прямою і площиною

Нехай відносно прямокутної системи координат площина σ задана загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

а пряма a канонічними рівняннями: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$.

Тоді нормальним вектором площини σ буде вектор $\vec{n}(A;B;C)$, напрямним вектором прямої a – вектор $\vec{p}(l;m;n)$.

Виведемо формулу для знаходження кута φ між прямою a і площиною σ.

Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою і її проекцією на цю площину.

Розглянемо два випадки, зображені на рисунках.

У першому випадку (рис. 91) $\varphi + (\vec{n}\wedge\vec{p}) = \dfrac{\pi}{2}$. Звідки $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - (\vec{n}\wedge\vec{p})$.

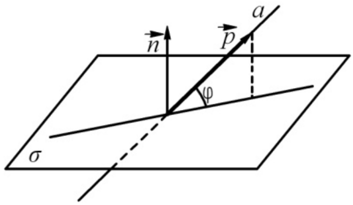


Рис. 91

Тоді $\begin{aligned} &\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\vec{n},\ ^{\wedge}\ \vec{p}\right)\right) = \\ &= \cos(\vec{n},\ ^{\wedge}\ \vec{p} = \left|\cos(\vec{n},\ ^{\wedge}\ \vec{p})\right|, \end{aligned}$ бо кут $(\vec{n},\ ^{\wedge}\ \vec{p})$ гострий.

У другому випадку (рис. 92) $\phi + \dfrac{\pi}{2} = (\vec{n}\wedge\vec{p})$, звідки $\varphi = (\vec{n}\wedge\vec{p}) - \dfrac{\pi}{2}$.

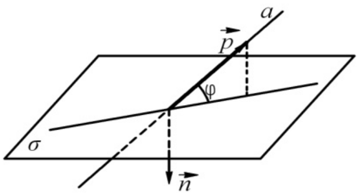


Рис. 92

Тоді $\begin{aligned} &\sin\varphi = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\vec{n},\ ^{\wedge}\ \vec{p}\right)\right) = \\ &= -\cos(\vec{n},\ ^{\wedge}\ \vec{p} = \left|\cos(\vec{n},\ ^{\wedge}\ \vec{p})\right|, \end{aligned}$ оскільки кут $(\vec{n},\ ^{\wedge}\ \vec{p})$ тупий.

В обох випадках

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{n},\ ^{\wedge}\ \vec{p})\right| = \frac{|\vec{n}\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|},\text{або}$$

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (114)$$

Умова паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Пряма a і площина σ будуть паралельними тоді і тільки тоді, коли нормальний вектор площини і напрямний вектор прямої перпендикулярні, тобто їх скалярний добуток або $Al + Bm + Cn = 0$ (рис. 93). У цьому випадку вважається, що кут між прямою і площиною дорівнює 0, і формула (114) також справедлива.

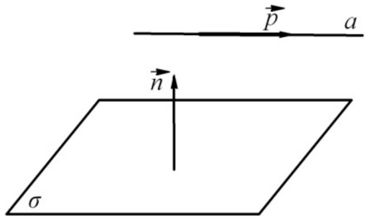


Рис. 93

Пряма a буде перпендикулярною до площини σ (рис. 94) тоді і тільки тоді, коли нормальний вектор площини і напрямний вектор прямої колінеарні, тобто

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

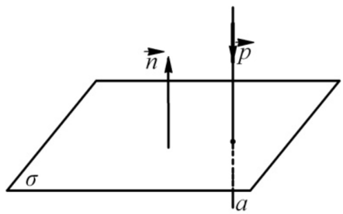


Рис. 94

Введемо коефіцієнт пропорційності і перевіримо виконання формули (114) у цьому випадку. Маємо: $A = lk$, $B = mk$, $C = nk$. Підставивши ці значення у праву частину формули (114), одержимо:

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} =$$

$$= \frac{|l^2k + m^2k + n^2k|}{\sqrt{l^2k^2 + m^2k^2 + n^2k^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{|k|(l^2 + m^2 + n^2)}{|k|(l^2 + m^2 + n^2)} = 1.$$

Але якщо пряма перпендикулярна до площини, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $\sin\varphi = 1$. Отже, і в цьому випадку формула (114) справджується.

Таким чином, у будь-якому випадку кут між прямою і площиною обчислюється за формулою (114).

Приклад. Обчислити кут між прямою $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$ і площиною $2x-y-3z+4=0,$ заданими в прямокутній системі координат.

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{p}(2;3;-1),$ а нормальний вектор площини $\vec{n}(2;-1;-3).$ За формулою (114) матимемо:

$$\sin\varphi=\frac{|4-3+3|}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{4+1+9}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}.$$

Отже, $\varphi=\arcsin\dfrac{2}{7}.$

Відповідь. $\varphi=\arcsin\dfrac{2}{7}.$

Основні задачі на пряму і площину в просторі

Розглянемо найбільш типові задачі на пряму і площину, які розв'язуються методами аналітичної геометрії.

Задача 1. У прямокутній системі координат дві прямі задані рівняннями

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}, \qquad (a_1)$$

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}. \qquad (a_2)$$

Довести, що ці прямі мимобіжні і знайти відстань між ними.

Розв'язок. Прямі мимобіжні тоді і тільки тоді, коли виконується умова (8). Перевіримо її. Для цього складемо визначник, рядками якого є координати векторів $\overrightarrow{M_1M_2}(-2;0;1),$ $\vec{p}_1(1;2;-1),$ $\vec{p}_2(2;-2;1)$

$$\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=-6\neq 0 \;\cdot$$

Отже, дані прямі мимобіжні.

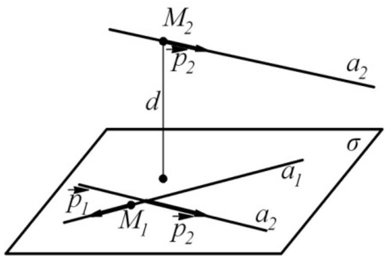


Рис. 95

Щоб знайти відстань між цими прямими, проведемо через пряму a_1 площину σ, паралельну до a_2 (рис. 95). Відстань між мимобіжними прямими a_1 і a_2 дорівнює відстані від точки M_2 прямої a_2 до площини σ.

Площина σ проходить через точку $M_1(1;\ 1;\ -1)$ і має напрямний підпростір $V_2(\vec{p}_1;\vec{p}_2)$ з базисними векторами $\vec{p}_1(1;\ 2;\ -1)$ і $\vec{p}_2(2;\ -2;\ 1)$. Її рівняння

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$y + 2z + 1 = 0.$$

Знайдемо відстань від точки $M_2(-1;\ 1;\ 0)$ до цієї площини:

$$d = \frac{|1+1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь. $d = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$

Задача 2. Знайти відстань від точки $M_0(-1;\ 2;\ 1)$ до прямої $a:\ \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{1}$. Система координат прямокутна декартова.

Розв’язок.

1. Знайдемо рівняння площини σ, що проходить через точку M_0 і перпендикулярна до прямої a (рис. 96).

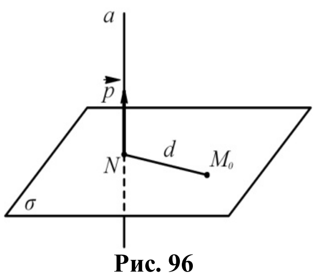


Рис. 96

Напрямний вектор прямої $\bar{p}(-1;\ 2;\ 1)$ є нормальним вектором площини σ.

Тому її рівняння:

$$-(x+1)+2(y-2)+(z-1)=0;\ x-2y-z+6=0.$$

2. Знайдемо координати точки N перетину прямої a і площини σ. Для цього складемо і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=-t+1, \\ y=2t, \\ z=t-2, \\ x-2y-z+6=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-t+1, \\ y=2t, \\ z=t-2, \\ -t+1-4t-t+2+6=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} t=\dfrac{3}{2}, \\ x=-\dfrac{1}{2}, \\ y=3, \\ z=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, координати точки $N\left(-\dfrac{1}{2};\ 3;\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

3. $M_0N \perp a$, бо M_0N лежить у площині σ, а площина σ перпендикулярна до прямої a. Тому відстанню від точки M_0 до прямої a є довжина відрізка M_0N. Знайдемо її.

$$d=M_0N=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2+(3-2)^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Відповідь. $d=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Запитання для самоконтролю

1. Напишіть рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.
2. Напишіть загальне рівняння площини та окремі його випадки.
3. Напишіть нормальне рівняння площини.
4. Як звести загальне рівняння площини до нормального?
5. Напишіть рівняння площини, що проходить через три точки.
6. Напишіть рівняння площини у відрізках на осях.

7. Як вимірюється кут між площинами?

8. Які форми рівняння прямої у просторі ви знаєте?

9. Які випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі ви знаєте?

10. Як визначаються кути між двома прямими та прямою і площиною?

11. Які випадки можуть бути при взаємному розміщенні прямої і площини?

1.5.5. ПОНЯТТЯ ПРО ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола

Рівняння другого степеня з двома невідомими визначає на площині криву другого порядку і при цьому єдину. Таке рівняння має вигляд:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

У цьому рівнянні коефіцієнти можуть приймати будь-які дійсні значення за умови, що коефіцієнти *A, B* і *C* одночасно не дорівнюють нулю (оскільки в протилежному випадку рівняння не буде рівнянням другого степеня).

Щоб за умовою задачі скласти рівняння кривої, заданої множиною точок на площині, потрібно встановити залежність між координатами x і y деякої точки, яка належить до цієї множини, і параметри (постійні величини, які задані в умові задачі) та записати цю залежність у вигляді рівняння.

Колом називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.

Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом r має вигляд:

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (115)$$

Рівняння кола з центром у точці $O(a,\ b)$ і радіусом r має вигляд:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \qquad (116)$$

Рівняння кола в загальному вигляді записують так:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0, \qquad (117)$$

де *A, B, C, D* – сталі коефіцієнти.

Задача 1. Складіть рівняння кола, яке має центр у точці (5;-7) і проходить через точку (2;-3).

Розв'язання. Знайдемо радіус кола як відстань від центра до даної його точки:

$$r = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-(-7))^2} = 5.$$

Тепер у рівняння (116) підставимо координати центра і знайдену величину радіуса:

$$(x-5)^2 + (y+7)^2 = 25.$$

Задача 2. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(3;1)$, $B(-2;6)$ і $C(-5;-3)$.

Розв'язання. Нехай $O_1(a;b)$ – центр шуканого кола; тоді $|O_1A| = |O_1B| = |O_1C|$ як радіуси того самого кола.

Маємо: $$\begin{cases} \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + (b-6)^2}, \\ \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+5)^2 + (b+3)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 3 = 0, \\ 2a + b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a = -2, b = 1); O_1(-2;1).$$

Знаходимо $r = |O_1A| = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-1)^2} = 5.$

Отже, шукане рівняння кола має вигляд: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала ($2a$), більша за відстань між фокусами ($2c$).

Складемо рівняння еліпса з фокусами в точках F_1 і F_2. Для цього виберемо прямокутну систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 пополам.

Позначивши $F_1F_2=2c$, одержимо F_1 $(c;\ 0)$ *і* F_2 $(-c;0)$. Нехай M (x, y) – деяка точка еліпса.

Означення. Відстані $r_1=F_1M$ і $r_2=F_2M$ називаються фокальними радіусами точки M (рис. 97).

Допустимо, що $r_1+r_2=2a$ (118), тоді відповідно до визначення еліпса $2a$ – величина стала, причому $2a>2c$. Отже, $a>c$. За формулою відстані між двома точками знаходимо $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ і $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Підставимо знайдені значення r_1 і r_2 в рівняння (118) і одержимо рівняння еліпса $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ (119). Перетворимо рівняння (119) так: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$,

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$ тобто

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Отже, коли $a > c$, то $a^2-c^2>0$. Введемо заміну $a^2-c^2=b^2$, після цього рівняння має вигляд: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (120) \quad (a>\mathrm{b}).$$

Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox,

де a – довжина великої півосі; b – довжина малої півосі (рис. 97).

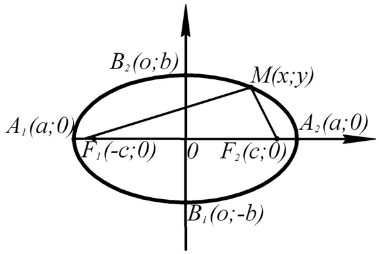


Рис. 97. Еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, фокуси якого лежать на осі O_x

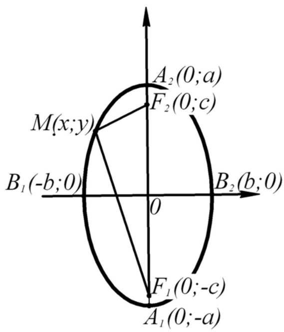


Рис. 98. Еліпс $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, фокуси якого лежать на осі O_y.

Залежність між параметрами a, b, c виражається співвідношенням:

$$a^2-b^2=c^2. \tag{121}$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані $2c$ до великої осі $2a$:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1. \qquad (122)$$

Якщо фокуси еліпса лежать на осі Oy (рис. 98), то його рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b). \qquad (123)$$

В усіх задачах на еліпс передбачено, що осі симетрії еліпса збігаються з осями координат.

Задача 1. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо дано його осі $2a = 12$ і $2b = 8$.

Розв'язання. Для складання рівняння еліпса треба знати параметри a і b. За умовою $a = 6$ і $b = 4$. Підставивши ці значення в рівняння еліпса (3), одержимо:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Гіперболою називають множину точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала ($2a$), менша за відстань між фокусами ($2c$).

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox, має вигляд:

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$ (124) (доведення аналогічне еліпсу),

де a – довжина дійсної півосі; b – довжина уявної півосі (рис. 99).

Залежність між параметрами a, b, c визначається співвідношенням

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad (125)$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення фокусної відстані до її дійсної осі:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1. \qquad (126)$$

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких

$$y = \pm\left(\frac{b}{a}\right)x. \qquad (127)$$

Якщо дійсна і уявна вісь гіперболи рівні (тобто $a = b$), то гіпербола називається рівносторонньою. Рівняння рівносторонньої гіперболи записують у вигляді:

$$x^2 - y^2 = a^2, \tag{128}$$

а рівняння її асимптот: $y = \pm x$ (129)

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі Oy (рис. 100), то її рівняння має вигляд:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1, \quad (130),$$

а рівняння асимптот такої гіперболи:

$$y = \pm\left(\frac{a}{b}\right)x. \tag{131}$$

Формули (125), (126) для гіперболи з фокусами на осі Oy не змінюються.

Гіперболи (124, (132) називаються спряженими.

Рівняння рівносторонньої гіперболи з фокусами на осі Oy має вигляд:

$$y^2 - x^2 = a^2. \tag{132}$$

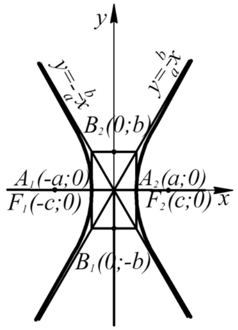


Рис. 99. Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

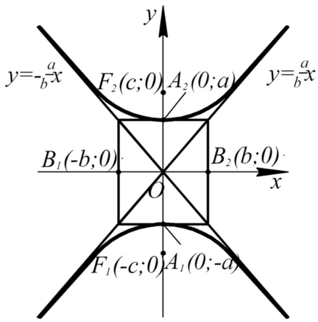


Рис. 100. Гіпербола $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

В усіх задачах на гіперболи передбачено, що осі симетрії гіперболи збігаються з осями координат.

Задача 1. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо її дійсна вісь дорівнює 16, а уявна вісь дорівнює 8.

Розв'язання. Для складання рівняння гіперболи треба знати параметри a і b. За умови маємо: $2a = 16$, $a = 8$ і $2b = 8$, $b = 4$.

Підставивши ці значення a і b в рівняння гіперболи (124), одержимо:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Параболою називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки, яку називають фокусом, і від даної прямої, яку називають директрисою.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox і вітки напрямлені вправо (рис. 101 а), має вигляд:

$$y^2 = 2px, \qquad (133)$$

де $p > 0$ (параметр параболи) і відстань від фокуса до директриси. Рівняння її директриси : $x = -p/2$.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox і вітки напрямлені вліво (рис. 101 б), має вигляд:

$$y^2 = -2px \;\; (p > 0). \qquad (134)$$

Рівняння її директриси: $x = p/2$.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy і вітки напрямлені вгору (рис. 102 а), має вигляд:

$$x^2 = 2py \quad (p > 0) \qquad (135)$$

Рівняння її директриси $y = -\dfrac{p}{2}$.

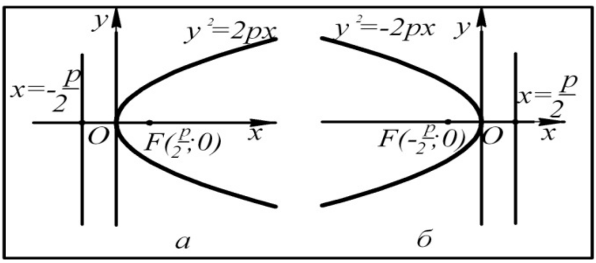


Рис. 101. Парабола: ***а***) $\boldsymbol{y^2=2px}$, ***б***) $\boldsymbol{y^2= -2px}$

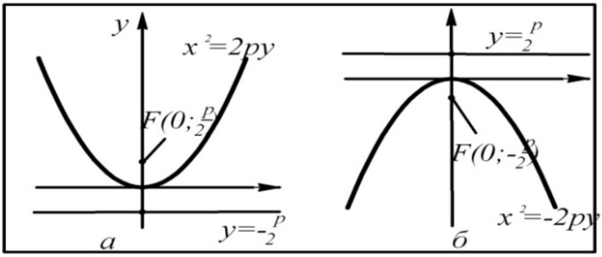


Рис. 102. Парабола: ***а*) $x^2= 2p$, *б*) $x^2= -2py$**

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь *Oy* і вітки напрямлені вниз (рис. 102 б), має вигляд:

$$x^2 = -2py \quad (p > 0). \tag{136}$$

Рівняння її директриси $y = \frac{p}{2}$.

В усіх задачах цього параграфа передбачено, що віссю симетрії параболи є одна з осей координат.

Задача 1. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус лежить у точці $F(3;0)$.

Розв'язання. Фокус параболи лежить на додатній півосі *Ox*, отже, рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$ (формула (135)). Оскільки координати фокуса $F(p/2;0)$, то $p/2 = 3$, звідки $p = 6$. Підставивши значення p в рівняння, одержимо $y^2 = 12x$.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення лінії другого порядку.
2. Які лінії другого порядку ви знаєте?
3. Дайте визначення еліпса, гіперболи, параболи.

1.6. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ І ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

1.6.1. ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Багато важливих задач економіки і планування господарства, управління промисловістю, виробничими і технологічними процесами тісно пов'язані з відшукання оптимального (тобто найбільш ефективного) плану використання обмежених ресурсів.

Задача лінійного програмування передбачає відшукання оптимального (найбільшого або найменшого) значення заданої лінійної функції

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

за умови, що на змінні $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *накладені обмеження у вигляді лінійних рівнянь або нерівностей*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \ge 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \ge 0; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 ... + a_{nn}x_n + b_n \ge 0 \end{cases}$$

і граничних умов

$$x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n).$$

Лінійна функція L, максимум чи мінімум якої відшукується в задачі лінійного програмування, називається *цільовою функцією*, або *функцією цілі*.

Сукупність значень змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$, які задовольняють умови задачі лінійного програмування і утворюють область визначення функції L, називається *областю допустимих значень змінних,* або просто *допустимою областю* і позначається Ω.

Набір значень змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$, при яких цільова функція L приймає найбільше (найменше) значення при вказаних обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \ge 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \ge 0; \quad x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \ldots + a_{nn}x_n + b_n \ge 0, \end{cases}$$

називається *розв'язком задачі лінійного програмування,* або *оптимальним планом.*

Графічний спосіб розв'язування двомірних задач лінійного програмування

Дано задачу лінійного програмування:

$$L = c_1x_1 \quad + \quad c_2x_2 \quad (\max);$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,2}\right)$$

в яку входять тільки дві невідомі x_1 і x_2.

Кожна з нерівностей системи обмежень визначає на координатній площині x_1Ox_2 деяку півплощину. Отже, допустимою областю Ω є переріз скінченого числа півплощин, тобто деяка многокутна область на площині x_1Ox_2.

Для розв'язування задачі графічним методом, перш за все потрібно побудувати многокутну область Ω, а потім перпендикулярно вектору $\vec{L} = (c_1, c_2)$ провести пряму l так, щоб вона перетнула область Ω.

Пряма l пересувається паралельно сама собі в напрямку вектора $\vec{L}$ до того часу, поки вона перестане перетинати область Ω (для задачі мінімізації потрібно пересувати пряму l в протилежному напрямку).

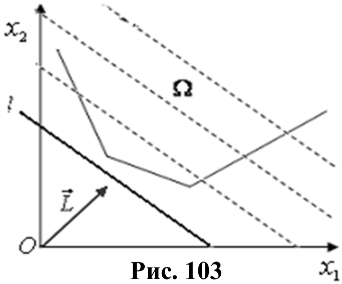


Рис. 103

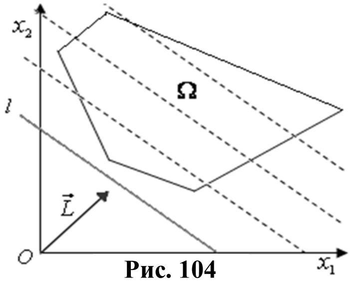


Рис. 104

Якщо при такому переміщенні пряма l весь час буде перетинати область Ω (рис. 103), то цільова функція не обмежена зверху на допустимі множині і задача не має оптимального розв'язку.

В протилежному випадку, перетин області Ω з прямою l в тому її положенні, коли подальше її переміщення дає порожній переріз з Ω (рис. 104), є множиною оптимальних розв'язків задачі.

Приклад

Побудувати на площині множину розв'язків системи лінійних обмежень нерівностей

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24; \\ x_1 + x_2 \ge 2; \\ x_1 - 2x_2 \le 2; \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$$

і геометрично знайти найбільше і найменше значення лінійної функції $z = -5x_1 - 2x_2 + 20$ в цьому багатокутнику.

Розв'язання

Будуємо многокутник розв'язків, який складається з перетину чотирьох півплощин розв'язків.

Граничні прямі проходять через такі точки:

(l_1) $4x_1 + 3x_2 = 24$, $A_1(0;8)$, $A_2(6;0)$;

(l_2) $x_1 + x_2 = 2$, $B_1(0;2)$, $B_2(2;0)$;

(l_3) $x_1 - 2x_2 = 2$, $C_1(0;-1)$, $B_2(2;0)$;

(l_4) $-2x_1 + 3x_2 = 6$, $B_1(0;2)$, $D_1(-3;0)$.

Щоб дізнатися з якого боку від граничної прямої міститься півплощина розв'язків, потрібно взяти будь-яку точку, яка не належить прямій і її координати підставити в нерівність. Якщо одержали правильну числову нерівність, то півплощина розв'язків розміщена з боку вибраної точки, якщо ні, то у протилежному від неї. Як правило, за точку порівняння беруть початок координат. Многокутник розв'язку показано на рис. 105**.**

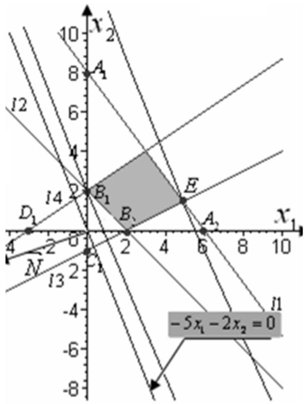


Рис. 105

Для відшукання оптимальної точки будуємо вектор нормалі $\vec{N}$ з початком у точці O(0;0) і кінцем у точці (–5;–2). Рухаючись за лініями рівня в напрямку вектора $\vec{N}$, бачимо, що найбільше значення функція $z=-5x_1-2x_2+20$ досягає в точці B_1, а найменше в точці E.

Обчислюємо оптимальні значення. Точка B_1 є перетином граничних прямих l_2 та l_4. Для знаходження її координат розв'язуємо систему: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ -2x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$ Звідки $x_2 = 2$. $B_1(0;2)$.

$$z_{\max} = -5\cdot 0 - 2\cdot 2 + 20 = 16.$$

Точка E є перетином граничних прямих l_1 і l_3. Її координати знаходимо розв'язавши систему:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24; \\ x_1 - 2x_2 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{54}{11}; \\ x_2 = \dfrac{1`6}{11}. \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{54}{11};\frac{16}{11}\right).$$

$$z_{\min} = -5\cdot\frac{54}{11} - 2\cdot\frac{16}{11} + 20 = -\frac{82}{11}.$$

Відповідь: $z_{\max} = 16;\ z_{\min} = -\dfrac{82}{11}.$

Приклад

Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x_1 + 3x_2 - 8$ за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_1 > 0; \\ x_2 > 0; \\ x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ 5x_1 + x_2 \geq 10. \end{cases}$$

Розв'язання

Будуємо многокутник розв'язків, який складається з перетину чотирьох півплощин розв'язків (рис. 106).

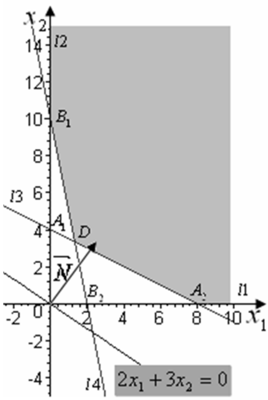


Рис. 106

Граничні прямі проходять через такі точки:

(l_1) $x_2=0$ – вісь Ox_1;
(l_2) $x_1=0$ – вісь Ox_2;
(l_3) $x_1 + 2x_2 = 8$, $A_1(0;4)$, $A_2(8;0)$;
(l_4) $5x_1 + x_2 = 10$, $B_1(0;10)$, $B_2(2;0)$.

Всі півплощини розв'язків напрямлені від початку координат.

Многокутник розв'язків необмежений. Вектор $\vec{N}(2;3)$ вказує на те, що $z_{\max}$ не існує, а $z_{\min}$ знаходиться в точці D перетину прямих l_3 та l_4.

Координати точки D знаходимо як розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8; \\ 5x_1 + x_2 = 10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}; \\ x_2 = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Значення $z_{\min}$ дістаємо, підставивши у цільову функцію координати точки $D\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right)$: $\quad z_{\min} = 2\cdot\frac{4}{3} + 3\cdot\frac{10}{3} - 8 = \frac{14}{3}$.

Відповідь: $z_{\max}$ не існує; $z_{\min} = \dfrac{14}{3}$.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = -x_1 + 2x_2$ при таких обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0; \\ x_1 - 4x_2 \leq 8. \end{cases}$$

Розв'язання

Будуємо многокутник розв'язків, який складається з перетину трьох півплощин розв'язків.

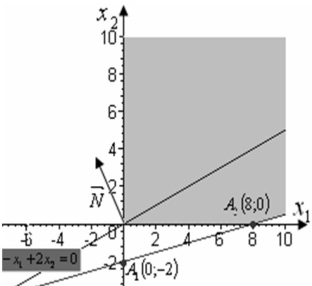


Рис. 107

Граничні прямі проходять через такі точки:

(l_1) $x_2=0$ – вісь Ox_1;

(l_2) $x_1=0$ – вісь Ox_2;

(l_3) $x_1 + 4x_2 = 8$, $A_1(0;-2)$, $A_2(8;0)$;

З рис. 107 випливає, що функція $z = -x_1 + 2x_2$ при вказаних обмеженнях не має ні максимуму, ні мінімуму.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x_1 + 2x_2 - 8$ за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_1 > 0; \\ x_2 > 0; \\ x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ 5x_1 + x_2 \geq 10. \end{cases}$$

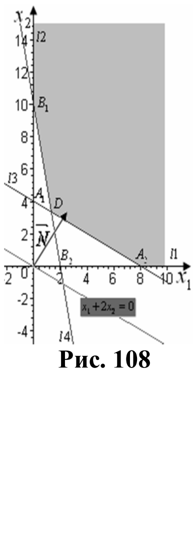


Рис. 108

Розв'язання

Будуємо многокутник розв'язків, який складається з перетину чотирьох півплощин розв'язків (рис. 108).

Граничні прямі проходять через такі точки:

(l_1) $x_2=0$ – вісь Ox_1;

(l_2) $x_1=0$ – вісь Ox_2;

(l_3) $x_1 + 2x_2 = 8$, $A_1(0;4)$, $A_2(8;0)$;

(l_4) $5x_1 + x_2 = 10$, $B_1(0;10)$, $B_2(2;0)$.

Всі півплощини розв’язків напрямлені від початку координат.

Многокутник розв’язків необмежений. Вектор $\vec{N}(1;2)$ вказує на те, що $z_{\max}$ не існує, а $z_{\min}$ знаходиться на відрізку A_2D, де D – точка перетину прямих l_3 та l_4. $z_{\min}$ = (права частина $x_1 + 2x_2 = 8$ на відрізку A_2D дорівнює 8)

Відповідь: $z_{\max}$ не існує; $z_{\min} = 0$.

Задача. В чотирьох цехах заводу випускається два види виробів.

Потрібно скласти план випуску виробів, щоб мати максимальний прибуток від цих виробів. При цьому накладаються такі обмеження: час роботи першого цеху не перевищує 40 год, другого цеху – 24 год, третього цеху – 20 год, четвертого цеху – 20 год.

Час, потрібний на виготовлення кожного з цих двох виробів у цеху, подано у таблиці:

Вироби	Дільниці			
	I	II	III	IV
I	6	2	4	–
II	8	8	–	5
Можливий час роботи цеху в годинах	40	24	20	20

Заводу нараховується прибуток: 2 тис. грн від реалізації одного виробу першого виду і 3 тис. грн від реалізації одного виробу другого виду.

Розв’язання

Позначимо через x_1 число виробів першого виду, через x_2 – число виробів другого виду.

В першому цеху затрачається $6x_1$ годин на виготовлення виробів першого виду і $8x_2$ годин на вироблення виробів другого виду. Так як час роботи першого цеху не перевищує 40 годин, то $6x_1 + 8x_2 \leq 40$.

В другому цеху затрачається $2x_1$ годин на виробництво виробів першого виду і $8x_2$ годин другого виду, всього не більше 24 годин, тобто $2x_1 + 8x_2 \leq 24$.

В третьому цеху витрачається $4x_1$ години на виробництво виробів першого виду, вироби другого виду не виготовляються, тобто $4x_1 \le 20$.

В четвертому цеху витрачається $5x_2$ години на виробництво виробів другого виду, вироби першого виду не виготовляються, тобто $5x_2 \le 20$.

Від реалізації x_1 виробів першого виду заводові нараховується прибуток $2x_1$, від реалізації x_2 виробів другого виду – $3x_2$ тис. грн. Загальний прибуток заводу становить $2x_1 + 3x_2$ (тис. грн), де $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Складаємо математичну модель задачі: знайти найбільше значення цільової функції $z = 2x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \le 40; \\ 2x_1 + 8x_2 \le 24; \\ 4x_1 \le 20; \\ 5x_2 \le 20; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Використаємо графічний спосіб розв'язування двовимірних задач лінійного програмування.

Побудуємо многокутну область Ω (рис. 109). Многокутна область є п'ятикутник *OABCD*. Координати його вершин знаходимо як точки перетину відповідних прямих: точки *A* – прямих $2x_1 + 8x_2 = 24$ та $x_1 = 0$; точки *B* – прямих $2x_1 + 8x_2 = 24$ та $6x_1 + 8x_2 = 40$; точки *C* – прямих $6x_1 + 8x_2 = 40$ та $4x_1 = 20$.

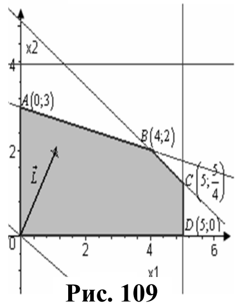


Рис. 109

Перпендикулярно вектору $\vec{L}(2;3)$ проведемо пряму l так, щоб вона перетнула область Ω.

Пряма l пересувається паралельно сама собі в напрямку вектора $\vec{L}$ до того часу, поки вона перестане перетинати область Ω. Вершина $B(4;2)$ є вершиною, в якій функція $z = 2x_1 + 3x_2$ набуває максимального значення.

Значення функції в цій точці: $z(4;2) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$.

Отже, найбільший прибуток від реалізації двох видів виробів становить 14 тис. гривень. Його буде досягнуто, коли завод виробить чотири одиниці виробів першого виду і два вироби другого виду.

Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування при додаткових обмеженнях

При кількості невідомих $n>2$ основну задачу лінійного програмування геометрично розв'язати важко. Розглянемо один з найвідоміших методів розв'язування цієї задачі – симплекс-метод – при додаткових обмеженнях:

1) всі коефіцієнти цільової функції L невід'ємні, тобто

$$c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, \dots , c_n \geq 0;;$$

2) всі невідомі невід'ємні, тобто $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots , x_n \geq 0$.

Розглянемо алгоритм симплекс-методу (елементарне перетворення):

1) запишемо задачу в стандартному вигляді: знайти найменше значення функції

$$L = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + d$$

за умови

$$\begin{cases} x_1 \geq 0;\ \dots;\ x_n \geq 0;\ \left(c_1 \geq 0;\ \dots;\ c_n \geq 0\right); \\ a_{11}x_1 + a_{21}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + b_m \geq 0, \end{cases}$$

2) введемо додаткові змінні за формулами

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+m} = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + b_m, \end{cases}$$

3) утворюємо основну матрицю задачі

L	c_1	...	c_n	d
x_{n+1}	a_{11}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
x_{n+m}	a_{m1}	...	a_{mn}	b_m
	x_1	...	x_n	

4) в основній матриці знаходимо припустимий елемент, для цього:

a) у стовпці вільних членів знаходимо довільний від'ємний елемент b_i (якщо в стовпці вільних членів немає від'ємних елементів, то задача лінійного програмування розв'язана: значення невідомих, які стоять в рядку, дорівнюють нулю; значення невідомих, які стоять в стовпці, – відповідним елементам стовпця вільних членів; мінімальне значення цільової функції – першому елементу стовпця вільних членів);

b) у рядку основної матриці з вибраним елементом b_i відзначаємо всі додатні елементи a_{ij} (якщо додатних елементів немає, то задача лінійного програмування не має розв'язку);

c) знаходимо частку від ділення коефіцієнта цільової функції c_j на елемент a_{ij} для кожного j у випадку $a_{ij} \geq 0$;

d) назвемо припустимим той елемент a_{ij} основної матриці, для якого частка $\frac{c_j}{a_{ij}}$ мінімальна;

5) виконаємо елементарне перетворення матриці основної задачі для знайденого припустимого елемента a_{ij}:

a) переставляємо місцями невідомі x_{n+i} і x_i (невідомі, які стоять в одному рядку й стовпці з припустимим елементом), а решту невідомих залишаємо на місці;

b) у новій матриці замінюємо a_{ij} на $\dfrac{1}{a_{ij}}$;

c) решту елементів рядка, в якому стоїть припустимий елемент a_{ij}, ділимо на a_{ij};

d) решту елементів стовпця, в якому стоїть припустимий елемент a_{ij}, ділимо на a_{ij};

e) якщо елемент p матриці задачі не стоїть в одному рядку або стовпці з припустимим елементом, знаходимо елемент q, який стоїть в одному рядку з a_{ij} і в одному стовпці з p, елемент r, який стоїть в одному стовпці з a_{ij} і в одному рядку з p, обчислюємо число $\dfrac{1}{a_{ij}}\left(pa_{ij} - qr\right)$, яке ставимо замість елемента p в новій матриці.

Одержану після елементарних перетворень матрицю розглядаємо як матрицю нової задачі лінійного програмування і вказаний алгоритм застосовуємо до неї. Мета елементарних перетворень – одержати матрицю, до якої алгоритм застосувати неможливо.

Приклад

За допомогою симплекс-методу знайти мінімальне значення функції

$$L = x_1 + x_2 + 2x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 4; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 3; \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2. \end{cases}$$

Розв'язання

Перепишемо систему обмежень у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 \ge 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 4; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 3; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \ge -2. \end{cases}$$

Записуючи систему нерівностей у стандартному вигляді, введемо додаткові змінні

$$\begin{cases} x_4 = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4; \\ x_5 = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3; \\ x_6 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2. \end{cases}$$

Умову задачі подамо у вигляді матриці

L	1	1	2	-0
x_4	-1	2	3	-4
x_5	$\boxed{2}$	-1	1	-3
x_6	3	1	-2	2
	x_1	x_2	x_3	

У стовпці вільних членів вибираємо від'ємний елемент, наприклад, -3. Додатними в цьому рядку будуть числа 2 і 1. Для них знаходимо частки $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{1}$. Меншою є частка $\frac{1}{2}$, то припустимим елементом буде число 2, яке стоїть у другому рядку і виділене кольором.

Будуємо нову матрицю, переставляючи невідомі x_1 і x_5 та відповідно до алгоритму обчислюємо елементи цієї матриці.

L	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\boxed{\frac{7}{2}}$	$-\frac{11}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_6	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{13}{2}$
	x_5	x_2	x_3	

В одержаній матриці існує припустимий елемент у першому рядку основної матриці, тому задача лінійного програмування не розв'язана. Виконуємо ще раз дії, вказані в алгоритмі, і одержуємо матрицю:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
L & \frac{5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{27}{7} \\
\hline
x_3 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{11}{7} \\
x_1 & \frac{4}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\
x_6 & 1 & \frac{28}{7} & -1 & \frac{1}{4} \\
\hline
 & x_5 & x_2 & x_4 &
\end{array}$$

Застосувати алгоритм до одержаної матриці неможливо, оскільки відсутній від'ємний елемент у стовпці вільних членів. Можемо записати відповідь:

$$x_5 = x_2 = x_4 = 0,\ x_3 = \frac{11}{7},\ x_1 = \frac{5}{7},\ x_6 = \frac{1}{4},\ L_{\min} = \frac{27}{7}.$$

Відповідь: $L_{\min} = \frac{27}{7},\ x_1 = \frac{5}{7},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{11}{7}$

Транспортна задача. Поняття транспортної задачі. Розв'язування транспортної задачі

Традиційна *транспортна задача* передбачає пошук найбільш оптимального економічного плану перевезення однорідного продукту з пунктів виробництва до пунктів споживання, ефективність якого оцінюють за критерієм найменшої вартості перевезень.

Нехай на m пунктах відправлення зосереджено a_1, a_2, ..., a_n одиниць деякого вантажу. Цей вантаж необхідно перевезти в n пунктів призначення, причому в кожен з них потрібно перевезти відповідно b_1, b_2, ..., b_n одиниць цього вантажу. Вартість перевезення c_{ij} одиниці вантажу з пункту i в пункт j вважається заданою.

Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задачу називають транспортною задачею з правильним балансом.

Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задачу називають транспортною задачею з неправильним балансом.

Будемо розглядати транспортну задачу з правильним балансом.

Кількість вантажу, необхідного для перевезення з пункту i в пункт j для того, щоб план перевезення був оптимальним, позначимо через x_{ij}.

Кількість вантажу, який планується перевезти до пункту j з усіх пунктів відправлення, з одного боку дорівнює $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, з іншого – b_j. Так як загальна сума запасів дорівнює загальній сумі потреб, то ці величини рівні між собою, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

З кожного пункту відправлення до пунктів призначення відправлено таку кількість вантажу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Разом системи $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ і $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = 1, 2, \ldots, m)$.

складають систему обмежень транспортної задачі. В розгорнутому вигляді вона має вид:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m; \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases} \qquad (137)$$

Вартість перевезення вантажу з пункту i в пункт j дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. Загальна вартість перевезень знаходиться за формою:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{sj} . \tag{138}$$

Сформулюємо математичну модель задачі: серед усіх невід’ємних розв’язків системи рівнянь (137) знайти такий, при якому лінійна функція (138) набуває найменшого значення.

Розглянемо це на прикладі задачі:

Задача *“Поставка автомобілів”*. Два заводи поставляють автомобілі для двох автопідприємств, потреби яких становлять відповідно 200 і 300 автомобілів. Перший завод випустив 350 автомобілів, другий – 150. Витрати на перевезення автомобілів з першого заводу на перше підприємство 15 у. г. о./км, на друге підприємство – 20 у. г. о./км, з другого заводу на перше підприємство – 8 у. г. о./км, на друге підприємство – 25 у. г. о./км. Знайти оптимальний план перевезень та мінімальні витрати при цьому перевезенні.

Розв’язання

Запишемо вихідні дані у вигляді таблиці:

Заводи	Автопідприємства		Обсяг випуску
	A_1	A_2	
$З_1$	15	20	350
$З_2$	8	25	150
Потреби	200	300	

Знайдемо опорний розв’язок задачі методом мінімального елемента за рядком. Мінімальні транспортні витрати в першому рядку дорівнюють 15 і відповідають клітинці (1;1). Оскільки попит першого автопідприємства повністю задовольняється за рахунок першого заводу, записуємо в клітинку (1;1) число 200 і більше перший стовпчик не розглядаємо. На першому заводі залишилося

150 автомобілів. Записуємо число 150 у клітинку (1;2). Переходимо до розгляду другого рядка. Оскільки перший стовпчик не розглядається, то в клітину $(2;2)$ записуємо число 150. Після цих перетворень одержимо таблицю:

Заводи	Автопідприємства		Обсяг випуску
	A_1	A_2	
$З_1$	15 200	20 150	350
$З_2$	8	25 150	150
Потреби	200	300	

Одержаний опорний розв'язок є невиродженим, оскільки зайнятих клітинок (і, отже, базисних змінних) три, тобто $m+n-1$.

Для перевірки на оптимальність знайдемо потенціали u_i та v_j. Покладемо $u_1 = 0$ з тієї простої причини, що там найбільше заповнених клітинок, а решту знайдемо за правилом: невідомий потенціал дорівнює різниці між транспортними витратами c_{ij} зайнятої клітинки і відомим потенціалом.

Заводи	Потенціали	Автопідприємства		Обсяг випуску
		A_1	A_2	
		$v_1=15$	$v_2=20$	
$З_1$	$u_1 = 0$	15 200	20 150	350
$З_2$	$u_2 = 5$	8	25 150	150
Потреби		200	300	

Перевіримо одержаний опорний розв'язок на оптимальність, обчисливши для вільних клітинок $p_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$:

$$p_{21} = 5 + 15 - 8 = 20 - 8 = 12 \cdot$$

Оскільки $p_{21} > 0$, то план не оптимальний.

Переходимо до нового опорного розв'язку.

Запишемо в клітинку (2;1) число t .

В результаті цієї дії стало $m + n = 4$ заповнених клітинок, тобто на одиницю більше, ніж потрібно, а сума поставок у першому стовпці і другому рядку збільшилась на t одиниць більше, ніж відповідно потреби першого підприємства і виробництво другого заводу, тобто порушився баланс у першому стовпці і другому рядку. Тому розглянемо перший стовпчик.

Оскільки в першому стовпці зайнята одна клітинка, то зменшимо величину поставок у цій клітинці на t . Тепер сума поставок у першому стовпці є збалансованою, але сума поставок у першому рядку зменшилась на t . Щоб відновити баланс у цьому рядку, потрібно збільшити на t одиниць величину поставок у клітинці (1;2). В другому стовпці сума поставок стала на t одиниць більша, ніж попит другого підприємства. Отже, потрібно збалансувати другий стовпець. Величину поставок в клітинці зменшимо на t . Збалансувавши суму поставок у другому стовпці, одночасно збалансували і суму поставок у другому рядку.

Заводи	Автопідприємства		Обсяг випуску
	A_1	A_2	
$З_1$	15 $200 - t$	20 $150 + t$	350
$З_2$	8 t	25 $150 - t$	150
Потреби	200	300	

Знайдемо тепер t, прирівнявши до нуля найменшу з різниць $x_{ij} - t$. Бачимо, що найменшою є різниця $150 - t$ в клітинці (2;2). Отже, $150 - t = 0$ і клітинка (2;2) стає вільною, а $t = 150$.

Знайшовши значення t, тим самим знайшли новий опорний розв'язок, який запишемо в наступну таблицю:

Заводи	Потенціали	Автопідприємства		Обсяг випуску
		A_1	A_2	
		$v_1=15$	$v_2=20$	
$З_1$	$u_1 = 0$	15 50	20 300	350
$З_2$	$u_2 = -7$	8 150	25	150
Потреби		200	300	

Знову знайдемо потенціали постачальників і споживачів, поклавши $u_1 = 0$ і перевіримо новий розв'язок на оптимальність: $p_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -7 + 20 - 25 = -12$. $p_{22} < 0$.

Одержаний розв'язок є оптимальним, оскільки $p_{22} < 0$.

Таким чином, оптимальний план поставок автомобілів такий $x_{11} = 50$, $x_{12} = 30$, $x_{21} = 150$, а мінімальні транспортні витрати становлять $F = 50 \cdot 15 + 300 \cdot 20 + 150 \cdot 8 = 7950$ у.г.о.

Задача *"Холодильники"*. Завод холодильників "NORD" має можливість випускати холодильники двох типів: *А* і *Б*. При цьому виробнича потужність механічних цехів дозволяє випускати в місяць до 600 комплектів деталей для холодильників типу *А* або до 1200 комплектів деталей для холодильників типу *Б*, а також комплекти деталей для холодильників обох типів у відповідній пропорції. Виробнича потужність цеху збору холодильників складає 1200 холодильників типу *А* або 800 холодильників типу *Б*. Ціна одного холодильника кожного типу відома.

Потрібно визначити виробничу програму заводу, яка забезпечує максимальний випуск готової продукції в грошовому вираженні для наступних випадків:

a) ціни холодильників обох типів однакові;

b) холодильник типу *А* в два рози дорожчий за холодильник типу *Б*;

c) холодильники типу *Б* на 75% дорожчі за холодильники типу *А*, проте заводу заплановано випускати в місяць не менше 400 холодильників типу *А*.

Розв'язання

а) Нехай при кількості холодильників типу *А,* рівній x, а кількості холодильників типу *Б,* рівній y, завод одержує максимальний прибуток. Ціни холодильників обох типів рівні 1 у. г. о.

Випуск готової продукції в грошовому вираженні описується функцією

$$F = x + y.$$

Оскільки виробнича потужність механічних цехів дозволяє випускати в місяць до 600 комплектів деталей для холодильників типу *А* або до 1200 комплектів деталей для холодильників типу *Б*, а також комплекти деталей для холодильників обох типів у відповідній пропорції, то

$$2x + y \leq 1200 \; 2x + y \leq 1200$$

і

$$x \leq 600.$$

Так як виробнича потужність цеху збору холодильників складає 1200 холодильників типу *А* або 800 холодильників типу *Б*, то

$$x + \frac{2}{3}y \leq 1200$$

і

$$y \leq 800.$$

Математична модель задачі матиме вигляд:

знайти максимальне значення цільової функції

$$F = x + y \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x & + & y & \leq & 1200; \\ x & + & \frac{3}{2}y & \leq & 1200; \\ x & & & \leq & 600; \\ & & y & \leq & 800, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 2x + y \le 1200; \\ 2x + 3y \le 2400; \\ x \le 600; \\ y \le 800, \end{cases}$$

умови невід'ємності

$$x \ge 0; y \ge 0.$$

Маємо стандартну задачу лінійного програмування. Щоб розв'язати цю задачу симплексним методом, запишемо її в канонічній формі, переходячи від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь шляхом введення чотирьох додаткових змінних.

$$F = x + y \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x + y + s_1 = 1200; \\ 2x + 3y + s_2 = 2400; \\ x + s_3 = 600; \\ y + s_4 = 800; \end{cases}$$

$$x \ge 0;\ y \ge 0;\ s_i \ge 0\ \left(i = \overline{1;4}\right).$$

Розв'яжемо задачу симплекс-методом.

Складаємо першу симплекс-таблицю:

Вільні члени	$c_{баз}$	$c_1 = 1$	$c_2 = 1$	$c_3 = 1$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
s_1	0	2	1	1	0	0	0	1200
s_2	0	2	3	0	1	0	0	2400
s_3	0	1	0	0	0	1	0	600
s_4	0	0	1	0	0	0	1	800
$\Delta_j = z_j - c_j$	-1	-1	0	0	0	0	0	0

Оскільки серед оцінок Δ_j є від'ємні і притому рівні між собою, за припустимий стовпчик можна взяти перший стовпець. Мінімальним відношенням $\dfrac{b_i}{a_{1i}}$ є відношення $\dfrac{b_1}{a_{11}}$, тому припустимим елементом буде $a_{11} = 2$.

Виконавши симплекс-перетворення відносно елемента $a_{11} = 2$, одержимо таблицю:

Вільні члени	$c_{баз}$	$c_1 = 1$	$c_2 = 1$	$c_3 = 1$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
s_1	1	1	1/2	1/2	0	0	0	600
s_2	0	0	2	-1	1	0	0	1200
s_3	0	0	- 1/2	- 1/2	0	1	0	0
s_4	0	0	1	1	0	0	1	800
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	- 1/2	1/2	0	0	0	600

Серед оцінок Δ_j лише одна від'ємна. За припустимий стовпець беремо другий стовпець. $\min\left(\frac{b_i}{a_{2i}}\right) = \frac{b_2}{a_{22}} = 600$, то за припустимий елемент беремо $a_{22} = 2$.

Після симплекс-перетворення одержуємо таблицю:

Вільні члени	$c_{баз}$	$c_1 = 1$	$c_2 = 1$	$c_3 = 1$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
s_1	1	1	0	3/4	- 1/4	0	0	300
s_2	1	0	1	- 1/2	1/2	0	0	600
s_3	0	0	0	- 3/4	1/4	1	0	300
s_4	0	0	0	1 1/2	- 1/2	0	1	200
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	0	1/2	1/4	0	0	900

Серед оцінок Δ_j від'ємних немає, тому оптимальний розв'язок канонічної задачі $X_{опт} = (300; 600; 0; 0; 300; 200)$, а оптимальний розв'язок нашої математичної моделі є розв'язок $X_{опт} = (300; 600)$ і йому відповідає максимальне значення цільової функції $F_{\max} = 900$.

$b)$ Нехай при кількості холодильників типу *А*, рівній x, і кількості холодильників типу *Б*, рівній y, завод одержує максимальний прибуток. Ціна холодильників типу *А* рівна 1 у. г. о., ціна холодильників типу *Б* рівна 1 у. г. о.

Тоді випуск готової продукції в грошовому вираженні описується функцією

$$F = 2x + y.$$

Умови, які висуваються механічними цехами і цехом зборки залишаються без змін.

Математична модель матиме вигляд:

знайти максимальне значення цільової функції

$$F = 2x + y \to \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x + y \le 1200; \\ 2x + 3y \le 2400; \\ x \le 600; \\ y \le 800, \end{cases}$$

умови невід'ємності

$$x \ge 0;\ y \ge 0.$$

Одержали стандартну задачу лінійного програмування. Щоб розв'язати цю задачу симплексним методом, запишемо її в канонічній формі, переходячи від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь шляхом введення чотирьох додаткових змінних.

$$F = 2x + y \to \max$$

$$\begin{cases} 2x + y + s_1 = 1200; \\ 2x + 3y + s_2 = 2400; \\ x + s_3 = 600; \\ y + s_4 = 800; \end{cases}$$

$$x \ge 0;\ y \ge 0;\ s_i \ge 0\ \left(i = \overline{1;4}\right).$$

Розв'яжемо задачу симплекс-методом.

Складаємо першу симплекс-таблицю:

Базисні змінні	$c_{баз}$	$c_1 = 1$	$c_2 = 1$	$c_3 = 1$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
s_1	0	**2**	1	1	0	0	0	1200
s_2	0	2	3	0	1	0	0	2400
s_3	0	1	0	0	0	1	0	600
s_4	0	0	1	1	0	0	1	800
$\Delta_j = z_j – c_j$		-2	-1	0	0	0	0	0

Виконуємо симплекс-перетворення відносно елемента $a_{11} = 2$ (від'ємне Δ_j найбільше по модулю рівне -2, $\min \frac{b_i}{a_{1i}} = \frac{b_1}{a_{11}} = 600$).

Базисні змінні	$c_{баз}$	$c_1 = 1$	$c_2 = 1$	$c_3 = 1$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
x	2	1	1/2	1/2	0	0	0	600
s_2	0	0	**2**	-1	1	0	0	1200
s_3	0	0	- 1/2	- 1/2	0	1	0	0
s_4	0	0	1	1	0	0	1	800
$\Delta_j = z_j – c_j$		0	0	1	0	0	0	**1200**

В останній симплекс-таблиці всі оцінки Δ_j невід'ємні. План оптимальний.

Знайдений розв'язок не є єдиним, оскільки нульові оцінки відповідають не тільки базисним змінним, а і небазисній змінній y. Ненульові оцінки при небазисних змінних означають, що кожну з них можна ввести до числа базисних і отримати інші оптимальні розв'язки, яким відповідає те ж саме максимальне значення цільової функції:

$$F_{\max} = 1200.$$

$c)$ Нехай при кількості холодильників типу *А*, рівній x, і кількості холодильників типу *Б*, рівній y, завод одержує максимальний прибуток. Ціна холодильників типу *А* рівна 1 у. г. о., ціна холодильників типу *Б* рівна 1,75 у. г. о.

Тоді випуск готової продукції в грошовому вираженні описується функцією

$$F = x + 1{,}75y.$$

Умови, які висуваються механічними цехами і цехом зборки наступні:

$$\begin{cases} 2x + y \le 1200; \\ 2x + 3y \le 2400; \\ x \le 600; \\ y \le 800; \\ x \ge 400. \end{cases}$$

Математична модель матиме вигляд:

знайти максимальне значення цільової функції

$$F = x + 1{,}75y \to \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x + y \le 1200; \\ 2x + 3y \le 2400; \\ x \le 600; \\ y \le 800; \\ x \ge 400, \end{cases}$$

умови невід'ємності

$$x \ge 0;\ y \ge 0.$$

Одержали чергову стандартну задачу лінійного програмування. Щоб розв'язати цю задачу симплексним методом, запишемо її в канонічній формі, переходячи від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь шляхом введення п'яти додаткових змінних.

$$F = x + 1{,}75y \to \max$$

$$\begin{cases} 2x + y + s_1 = 1200; \\ 2x + 3y + s_2 = 2400; \\ x + s_3 = 600; \\ y + s_4 = 800; \\ x - s_5 = 400; \end{cases}$$

$$x \ge 0;\ y \ge 0;\ s_i \ge 0\ \left(i = \overline{1;5}\right).$$

Помножимо обидві частини останнього рівняння системи на -1. Форма набере вигляду:

$$F = x + 1{,}75y \to \max$$

$$\begin{cases} 2x + y + s_1 = 1200; \\ 2x + 3y + s_2 = 2400; \\ x + s_3 = 600; \\ y + s_4 = 800; \\ x - s_5 = 400; \end{cases}$$

$$x \ge 0;\ y \ge 0;\ s_i \ge 0\ \left(i = \overline{1;5}\right).$$

Перш ніж складати симплексні таблиці, зауважимо, що оскільки права частина останнього рівняння системи обмежень канонічної задачі від'ємна, то в першій симплекс-таблиці припустимий елемент будемо визначати з умови $\max\left(\frac{b_5}{a_i}\right)\rangle 0$. Це дозволить у другій таблиці перейти до чергового опорного розв'язку і далі розв'язувати задачу звичайним симплексним методом.

Заповнюємо першу симплексну таблицю:

Базисні змінні	$c_{баз}$	$c_1 = 1$	$c_2 = 1{,}75$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	$c_7 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
s_1	0	2	1	1	0	0	0	0	1200
s_2	0	2	3	0	1	0	0	0	2400
s_3	0	1	0	0	0	1	0	0	600
s_4	0	0	1	0	0	0	1	0	800
s_5	0	-1	0	0	0	0	0	1	-400
$\Delta_j = z_j – c_j$		-1	-1,75	0	0	0	0	0	0

Виконавши симплекс-перетворення відносно елемента $a_{15} = -1$ одержимо таблицю:

Базисні змінні	$c_{баз}$	$c_1 = 1$	$c_2 = 1{,}75$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	$c_7 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
s_1	0	0	1	1	0	0	0	2	400
s_2	0	0	3	0	1	0	0	2	1600
s_3	0	0	0	0	0	1	0	1	200
s_4	0	0	1	0	0	0	1	0	800
x	1	1	0	0	0	0	0	-1	400
$\Delta_j = z_j – c_j$		0	-1,75	0	0	0	0	-1	400

Всі вільні члени додатні, найбільша по модулю від'ємна оцінка 1,75, $\min \frac{b_i}{a_{2i}} = \frac{b_1}{a_{21}} = 400.$ За припустимий елемент беремо $a_{21} = 1$ і, виконавши чергове симплекс-перетворення, одержимо таблицю:

Базисні змінні	$c_{баз}$	$c_1 = 1$	$c_2 = 1,75$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	$c_7 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
y	1,75	0	1	1	0	0	0	2	400
s_2	0	0	0	-3	1	0	0	-4	400
s_3	0	0	0	0	0	1	0	1	200
s_4	0	0	0	-1	0	0	1	-2	400
x	1	1	0	0	0	0	0	-1	400
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	0	1,75	0	0	0	2,5	1100

Серед оцінок Δ_j від'ємних немає, тому оптимальний розв'язок канонічної задачі $X_{опт}$ = (400; 400; 0; 400; 200; 400; 0), а оптимальний розв'язок нашої математичної моделі є розв'язок $X_{опт}$ = (400; 400) і йому відповідає максимальне значення цільової функції $F_{max} = 1100$.

Задача "Складання кормового раціону". До добового раціону харчування тварин входять два продукти $П_1$ і $П_2$, причому продукту $П_1$ не більше 200 одиниць. Вартість одиниці продукту $П_1$ становить 0,2 у. г. о., вартість одиниці продукту $П_2$ становить 0,3 у. г. о. Вміст поживних речовин у продуктах наведено в таблиці.

Поживні речовини	Мінімальна норма споживання	Вміст поживних речовин у одиниці продукту	
		$П_1$	$П_2$
А	120	0,2	0,1
Б	160	0,3	0,2
В	180	0,3	0,4

Визначте оптимальний раціон мінімальної вартості.

Розв'язання.

Побудуємо математичну модель нашої задачі. З цією метою позначимо через x кількість продукту $П_1$, через y – кількість продукту $П_2$, які входять до раціону, а через F – їх вартість.

При споживанні $X = (x, y)$ вартість становитиме

$$F = 0,2x + 0,3y.$$

Залежність між вмістом поживних речовин і мінімальним розміром споживання описується системою нерівностей:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,1y \geq 120; \\ 0,3x + 0,2y \geq 160; \\ 0,3x + 0,4y \geq 180. \end{cases}$$

Оскільки до добового раціону продукту $П_1$ входить не більше 200 одиниць, то

$$x \leq 200.$$

Таким чином математична модель нашої задачі є такою.

Знайти найбільше значення лінійної функції

$$F = 0,2x + 0,3y \rightarrow \min,$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 0,2x + 0,1y \geq 120; \\ 0,3x + 0,2y \geq 160; \\ 0,3x + 0,4y \geq 180; \\ x \leq 200; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Бачимо, що математична модель являє собою стандартну задачу лінійного програмування.

Помножимо перші три нерівності системи обмежень на -1:

$$\begin{cases} -0,2x - 0,1y \leq -120; \\ -0,3x - 0,2y \leq -160; \\ -0,3x - 0,4y \leq -180; \\ x \leq 200; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Щоб розв’язати задачу мінімізації цільової функції симплексним методом, ми будемо замість мінімуму функції F шукати максимум функції

$$-F = -0,2x - 0,3y \rightarrow \max.$$

Запишемо задачу в канонічній формі, переходячи від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь шляхом введення чотирьох додаткових змінних s_1, s_2, s_3, s_4.

$$-F = -0{,}2x - 0{,}3y \to \max,$$

обмеження по кормах:

$$\begin{cases} -0{,}2x - 0{,}1y + s_1 = -120; \\ -0{,}3x - 0{,}2y + s_2 = -160; \\ -0{,}3x - 0{,}4y + s_3 = -180; \\ x + s_4 = 200; \\ x \ge 0; \\ y \ge 0; \\ s_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

Перш ніж складати симплексні таблиці, зауважимо, що праві частини перших трьох рівнянь системи обмежень канонічної задачі від'ємні, то в першій симплекс-таблиці напрямний елемент будемо визначати за умови $\max\left(b_i / a_{ik}\right) > 0$:

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{-120}{-0{,}2} = 600;\ \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{-120}{-0{,}1} = 1200;\ \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{-160}{-0{,}3} = \frac{1600}{3} = 533\frac{1}{3};$$

$$\frac{b_2}{a_{22}} = \frac{-160}{-0{,}2} = 800;\ \frac{b_3}{a_{31}} = \frac{-180}{-0{,}3} = 600;\ \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{-180}{-0{,}4} = 450$$

$$\max\left(b_i / a_{ik}\right) = \frac{b_1}{a_{12}} = 1200$$

За припустимий елемент беремо елемент $a_{12} = -0{,}1$.

Базисні змінні	$c_{баз}$	$c_1 = -0{,}2$	$c_2 = -0{,}3$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
s_1	0	-0,2	-0,1	1	0	0	0	-120
s_2	0	-0,3	-0,2	0	1	0	0	-160
s_3	0	-0,3	-0,4	0	0	1	0	-180
s_4	0	1,0	0	0	0	0	1	200
$\Delta_j = z_j - c_j$		0,2	0,3	0	0	0	0	

Виконавши симплекс-перетворення цієї таблиці відносно елемента $a_{12} = -0,1$, одержимо таблицю:

Базисні змінні	$c_{баз}$	$c_1 = -0,2$	$c_2 = -0,3$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
y	-0,3	2	1	-10	0	0	0	120
s_2	0	0,1	0	-2	1	0	0	80
s_3	0	0,5	0	-4	0	1	0	300
s_4	0	1	0	0	0	0	1	200
$\Delta_j = z_j - c_j$		-0,4	0	3	0	0	0	-360

Виконаємо симплекс-перетворення останньої таблиці відносно елемента $a_{41} = 1$ $\left(a_{41} = \min\left(\frac{b_i}{a_{ij}} \right) \right)$:

Базисні змінні	$c_{баз}$	$c_1 = -0,2$	$c_2 = -0,3$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	Вільні члени
		x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
y	-0,3	0	1	-10	0	0	-2	800
s_2	0	0	0	-2	1	0	-0,1	60
s_3	0	0	0	-4	0	1	-0,5	200
x	-0,2	1	0	0	0	0	1	200
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	0	3	0	0	0,4	-280

В останній таблиці всі оцінки $\Delta_j \geq 0$. Тому розв'язок канонічної задачі $X_{опт} = (200, 800, 0, 60, 200, 0)$, $F_{min} = -F_{max} = 280$.

Розв'язок вихідної задачі $X_{опт} = (200, 800)$, $F_{min} = 280$.

Отже, для забезпечення оптимального раціону мінімальної вартості потрібно взяти 200 одиниць продукту $П_1$ і 800 одиниць продукту $П_2$.

Запитання для самоконтролю

1. Загальний вигляд нерівності з двома змінними.
2. Розв’язок нерівності з двома змінними.
3. Загальний вигляд системи нерівностей з двома змінними.
4. Розв’язок системи нерівностей з двома змінними.
5. Рівносильні системи нерівностей.
6. Лінійні нерівності та їх системи.
7. Задача лінійного програмування.
8. Цільова функція.
9. Допустима область.
10. Розв’язок задачі лінійного програмування, або оптимальний план.
11. Алгоритм розв’язання задачі лінійного програмування графічним способом.
12. Алгоритм симплекс-методу розв’язування задач лінійного програмування при додаткових обмеженнях.
13. Сформулювати транспортну задачу.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

2.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1.1. ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

Почнемо з визначення δ і ε околів точок x_0 і A. Під δ-околом точки x_0 розуміють інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$. Під ε-околом точки A розуміють інтервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$ (рис. 110).

Означення. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого числа $e > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon)>0$, що для будь-якого x, яке задовольняє нерівність $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ (139), виконується нерівність $|f(x) - A| \langle \varepsilon$ (140). У цьому випадку пишуть $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$.

Дамо геометричне тлумачення означення границі функції.

Насамперед зауважимо, що згідно з властивостями модуля, нерівності (139) та (140) рівносильні відповідно нерівностям

$$x_0 - \delta \langle x \langle x_0 + \delta\,,\ x \neq x_0; A - \varepsilon \langle f(x) \rangle A + \varepsilon$$

$$\text{або } f(x) \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$$

$$\text{при } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ x \neq x_0 \quad (141).$$

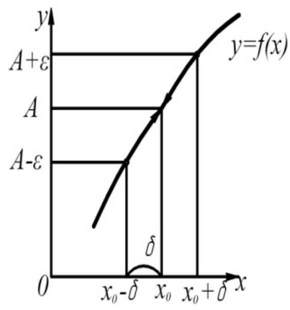


Рис. 110

Співвідношення (141) геометрично означає, що для всіх $x \neq x_0$ з δ-околу точки x_0 відповідні значення функції $f(x)$ містяться в ε-околі точки A. Таким чином, якщо $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$, то яка б не була смуга площини xOy, обмежена прямими $y = A - \varepsilon$ і

$y = A + \varepsilon$, на осі Ox знайдеться інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ такий, що частина графіка $y = f(x)$, яка відповідає точкам цього інтервалу, крім, можливо, точки x_0, міститиметься всередині цієї смуги (рис. 110).

Покажемо, наприклад, що:

а) якщо $f(x) = c$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} c = c$;

б) якщо $f(x) = x$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$

для будь-якої точки x_0.

Для даного ε>0 в цьому випадку за δ можна взяти будь-яке додатне число. Тоді при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$, маємо:

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 \langle \varepsilon .$$

Отже,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c \cdot$$

Для даного ε>0 в цьому випадку за δ можна взяти будь-яке число, яке задовольняє умову 0< δ ≤ ε. Тоді при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$, маємо:

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| \langle \delta \leq \varepsilon .$$

Отже,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 .$$

Означення. Границею функції $y = f(x)$ зліва (справа) для $x < x_0 (x > x_0)$, якщо вона існує, називають вираз $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \left[\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \right]$ і позначають символом $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$.

Наприклад.

Нехай $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x > 0 \end{cases}$

Графік функції зображено на рис. 111.

Односторонні границі: $\lim\limits_{x \to 0\ 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 1$

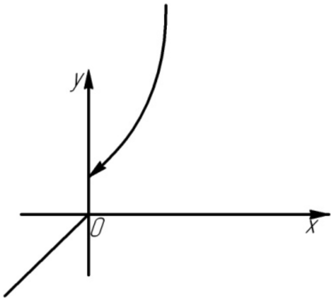


Рис. 111. Графік функції *f(x)*

Означення. Функція називається *нескінченно малою* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Означення. Функція називається *нескінченно великою* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Основні теореми про границі (без доведення)

Теорема 1. Границя суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) їхніх границь, якщо останні існують :

$$\lim_{x\to x_0}\bigl(f(x) \pm g(x)\bigr) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 2. Границя добутку функцій дорівнює добутку їхніх границь, якщо останні існують

$$\lim_{x\to x_0}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Наслідок 1. Сталий множник можна винести за знак границі, тобто:

$$\lim_{x\to x_o} cf(x) = c\lim_{x\to x_o} f(x), \text{ якщо } \lim_{x\to x_o} f(x) \text{ існує}$$

Наслідок 2. Границя цілого додатного степеня функції *f(x)* у точці x_0 дорівнює степеню границі цієї ж функції:

$$\lim_{x\to x_0} f^n(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n.$$

Теорема 3. Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню їхніх границь, якщо останні існують і границя дільника відмінна від нуля :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \textit{якщо} \quad g(x) \neq 0.$$

Границя функції на нескінченності

Досі ми розглядали поняття границі функції в точці x_0, де x_0 – певне дійсне число. Досліджуючи функції, областю визначення яких є інтервали $(-\infty;+\infty)$, $(-\infty;b)$, $(a;+\infty)$, де a і b – дійсні числа, часто доводиться вивчати поведінку цих функцій при як завгодно великих за модулем значеннях аргументу. Тому доцільно ввести поняття границі при $x\to\pm\infty$**.**

Означення. Число A називається *границею функції f(x)* при $x\to\infty(x\to+\infty, x\to-\infty)$**,** якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $M(\varepsilon) > 0$, що нерівність $|f(x) - A|\langle\varepsilon$ виконується для всіх *x,* які задовольняють умову $|x| > M(\varepsilon)$ $(x>M, x<-M)$

Записують так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A)$.

Обчислення границь функції

Розглянемо кілька прикладів на обчислення границі функції.

1. Границя многочлена.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$.

$$\lim_{x\to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7) = \lim_{x\to 2} 5x^3 + \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 7 =$$
$$= 5(\lim_{x\to 2} x)^3 + 2(\lim_{x\to 2} x)^2 - 3\lim_{x\to 2} x + 7 = 5\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 7 = 49.$$

Таким чином, для обчислення границі многочлена достатньо замість змінної x підставити значення $x_{o,}$ до якого вона прямує, і виконати відповідні дії.

2. Границя відношення двох многочленів $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}$*, де* x_o *– число.*

Спочатку розглянемо приклад безпосереднього знаходження границі функції в точці, його застосовують коли $g(x_o) \neq 0$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x^2+1}$.

Для даного виразу існують $\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=2$ і $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$.

Тому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x^2+1}=\dfrac{2}{1}=2.$

Якщо $g(x_o)=0$, то теорему про застосування границі частки застосувати не можна. Щоб знайти границю частки двох функцій, де границі діленого і дільника дорівнюють нулю, треба перетворити функцію таким чином, щоб виділити в діленому і дільнику множник, границя якого дорівнює нулю, і, скоротивши дріб на цей множник, знайти границю частки.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)}=\frac{2\cdot 2}{3}=\frac{4}{3}.$$

3. *Границя відношення двох многочленів* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *де* $x\to\infty$.

Щоб знайти таку границю, треба чисельник і знаменник поділити на найвищий степінь аргументу.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0.$

4. *Границі деяких ірраціональних функцій.*

На практиці при обчисленні границь трапляються випадки, коли в граничній точці є невизначеність типу $\infty-\infty$. У таких випадках множать і ділять функцію на спряжений вираз.

Приклад. Обчислити

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-4x})(x+\sqrt{x^2-4x})}{(x+\sqrt{x^2-4x})}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=\frac{4}{2}=2.$$

5. *Застосування важливих границь* $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1.$

При обчисленнях границь широко використовують такі важливі границі:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ і $\lim\limits_{x\to\infty} = (1+\frac{1}{x})^x = e$, що відомі вам з курсу середньої школи. Користуючись цими формулами, можна обчислити цілий ряд границь.

Приклади. Знайти границі:

$$1).\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^{\frac{x}{1}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x}{1}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\right] = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right) = e^2$$

$$2).\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{3\cdot\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Неперервність основних елементарних функцій

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в усіх точках деякого проміжку. Візьмемо два довільні значення аргументу з цього проміжку x_0 (початкове) і $x_0+\Delta x$ (нарощене). Тоді різницю між нарощеним і початковим значенням аргументу називатимемо приростом аргументу і позначимо $\Delta x = x - x_0$, а різницю між нарощеним і початковим значенням функції називатимемо приростом функції і позначимо $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x)$.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають неперервною в точці x_0, якщо:

- ця функція визначена в точці x_0;

• приріст функції Δy у точці x_0 прямує до нуля при $\Delta x \to 0$, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_o)) = 0 .$$

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = x^2$.

$\Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left((x_0 + \Delta x)^2 - x_0{}^2\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(2x_0 \Delta x + \Delta x^2\right) = 0$. Отже, функція в точці x_0 неперервна.

Часто використовують ще одне, рівносильне даному, означення неперервності.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають неперервною в точці x_o, якщо границя функції в точці існує і дорівнює значенню функції в точці, тобто: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

З означення неперервності функції в точці та властивостей границі слідує, що у випадку, коли функції $f(x)$ і $g(x)$ є неперервними в точці x_o, то функції $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (за умови, що $g(x) \neq 0$) також будуть неперервними в точці x_o.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається неперервною зліва (справа) в точці x_o, якщо $\lim\limits_{x \to x_o - o} f(x) = f(x_o) \cdot \left(\lim\limits_{x \to x_o + o} f(x) = f(x_o) \right)$.

Зрозуміло, що функція буде неперервною в точці, якщо вона неперервна в точці зліва і справа.

Означення. Функція $y = f(x)$ є неперервною на інтервалі *(a;b),* якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу.

Приклад. Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна при будь-якому x. Знайдемо приріст функції:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Очевидно, що $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, тобто функція неперервна при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Можна довести, що будь-яка елементарна функція неперервна в будь-якій точці з її області визначення.

Означення. Точку x_o називають *точкою розриву* функції $y = f(x)$, якщо в цій точці функція невизначена або не є неперервною.

Можливі такі випадки:

1. Якщо в точці функція *f(x)* має скінченну границю зліва і справа і вони дорівнюють одна одній, але не дорівнюють значенню функції *f(x)* у точці або значення $f(x_0)$ не існує, то точку називають точкою *усувного розриву* функції.

Наприклад. Для функції $f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$ точка $x = 0$ є точкою усувного розриву.

2. Якщо в точці функція *f(x)* має границю зліва і справа, причому ці границі нерівні, то точку називають точкою *розриву із скінченним стрибком.*

Точки усувного розриву та розриву функції із скінченним стрибком називають точками *розриву 1-го роду.*

Точки розриву, у яких хоч одна з односторонніх границь не існує, називаються *точками розриву 2-го роду.*

Наприклад. Функція $y = \frac{1}{x}$ має розрив 2-го роду в точці x=0**.**

Запитання для самоконтролю

1. Границя функції в точці.
2. Сформулювати основні теореми про границі функції.
3. Які функції називаються неперервними в точці?
4. Які точки називають точками розриву?

2.1.2. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Розглянемо дві задачі, які приводять до поняття похідної.

1. Задача про швидкість руху. Нехай рівняння нерівномірного прямолінійного руху *S=f(t)* визначене на множині (a, β).

Зафіксуємо послідовно два моменти часу t_0 і t_1, $(t_0, t_1 \in (a, \beta))$ і позначимо $\Delta t = t_1 - t_0$.

Середня швидкість руху, яка відповідає деякому проміжку часу Δt, дорівнює відношенню пройденого за цей проміжок шляху ΔS до Δt:
$$\vartheta_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Середня швидкість не характеризує рух у певні моменти часу. Для того, щоб знайти швидкість руху в даний момент t_0, необхідно зменшити проміжок часу $\Delta t = t_1 - t_0$. Чим менший проміжок Δt, тим менше середня швидкість відрізняється від швидкості в даний момент, тобто від миттєвої. Точне значення швидкості $\vartheta_{мит}$ рівне границі $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, тобто: $\vartheta_{мит} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

2. Задача про нахил дотичної. Нехай неперервна функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_o. На графіку функції візьмемо точку $M_0(x_0, y_0)$ і довільну точку *M(x,y),* проведемо січну M_oM; її кут нахилу позначимо через β (рис. 112).

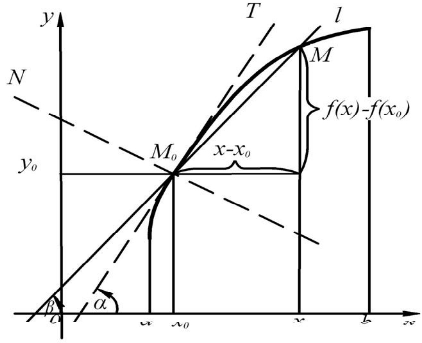


Рис. 112. Геометричний зміст похідної

Дотичну до графіка функції в точці $M_0(x_0, y_0)$ ми отримаємо як граничне положення січної, коли точка M наближається до точки M_o.

Зрозуміло, що $tg\beta = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Виконаємо граничний перехід, коли $M \to M_0$ і відповідно
$$\Delta x \to 0: \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

Тобто тангенс кута нахилу tgб дотичної дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля.

В обох задачах ми прийшли до необхідності обчислити границі одного типу.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_o називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ до приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ при $\Delta x \to 0$, якщо ця границя існує.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Похідну функції $y = f(x)$ позначають $f'(x)$, $y'(x))$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, причому всі ці позначення рівноправні.

Означення. Операція знаходження похідної називається *диференціюванням.*

Необхідна умова існування похідної випливає з наступної теореми.

Теорема. Якщо функція диференційована в точці, то вона неперервна в цій точці.

Геометричний зміст похідної полягає в тому, що похідна функції в точці x_o дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка даної функції в його точці з абсцисою x_o:

$$f'(x_0) = k.$$

Це випливає із задачі про нахил дотичної $\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = tg\alpha = k \right)$ і означення похідної $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Механічний зміст похідної. Враховуючи рівність $V_{мит} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ і означення похідної, робимо висновок, що похідна від шляху за часом дорівнює швидкості нерівномірного прямолінійного руху в даний момент t_0, тобто миттєвій швидкості при $t=t_0$:

$$V_{мит} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t_0).$$

Диференціювання функцій

Теорема. Нехай функції *f(x) і q(x)* є диференційованими, тоді:

1) Похідна алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних

$$\left(f(x) \pm q(x)\right)' = f'(x) \pm q'(x)$$

2) Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію.

$$\left(f(x)\cdot q(x)\right)' = f'(x)q(x) + f(x)q'(x)$$

3) Похідна частки двох функцій дорівнює частці від ділення різниці добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію поділене на квадрат другої функції. За умови, що $q(x) \neq 0$

$$\left(\frac{f(x)}{q(x)}\right)' = \frac{f'(x)q(x) - f(x)q'(x)}{q^2(x)}.$$

Теорему доведемо лише для добутку. Інші доведення аналогічні.

Надамо аргументу x приросту Δx .

$$\left(f(x)g(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)q(x+\Delta x) - f(x)q(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)q(x+\Delta x) - f(x)q(x+\Delta x) + f(x)q(x+\Delta x) - f(x)q(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} q(x+\Delta x) + f(x)\frac{q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x}\right) =$$

$$= f'(x)q(x) + f(x)q'(x).$$

Нагадаємо таблицю похідних, яку ви вивчали в школі.

1. $(c)' = 0$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha\ x^{\alpha-1}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot ln\ a$
4. $(\ell^x)' = \ell^x$
5. $(log_a x)' = \dfrac{1}{x\ \ ln\ \ a}$
6. $(ln\,x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(sin\ x)' = cos\ x$
8. $(cos\ x)' = -\ sin\ x$
9. $(tq\ x) = \dfrac{1}{cos^2 x}$
10. $(ctq\ \ x)' = -\dfrac{1}{sin^2 x}$
11. $(arcsinx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(arccos\,x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(arctqx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(arcctqx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Правило диференціювання складеної функції. Якщо *y* є функція від *u*: $y = f(u)$, де *u* у свою чергу є функція від аргументу *x*: $u=\varphi(x)$, тобто якщо *y* залежить від *x* через проміжний аргумент *u*, то *y* називається *складеною* функцією (функцією від функції) $y = f(\varphi(x))$.

Теорема. *Похідна складеної функції* дорівнює добутку похідної зовнішньої функції по проміжній змінній y'_u і похідної внутрішньої функції по незалежній змінній u'_x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ або } y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Доведення. Нехай задана диференційована функція $y = f(x)$, яка є складеною і має проміжний аргумент *u*, який залежить від *x*. За означенням похідної ми можемо записати $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Помножимо чисельник і знаменник виразу, який знаходиться під знаком границі, на приріст проміжної змінної Δu, маємо:

$$f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

Оскільки Δx прямує до нуля, то в силу неперервності функції *u(x)* приріст Δu також прямує до нуля. Тоді маємо:

$$f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u u'_x.$$

Це правило інколи називають правилом ланцюжка. Воно залишається справедливим і тоді, коли складена функція складається з будь-якого скінченного числа простих функцій.

Приклад. Знайти похідну функції $y = sin^2 4x$.

Порядок слідування проміжних функцій такий: $y = u^2$; $u = sin v$; $v = 4x$. Значить,

$$y' = 2sin 4x(sin 4x)' = 2sin 4x cos 4x\cdot(4x)' = 2sin 4x cos 4x\cdot 4 = 4sin 8x.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається похідною функції?
2. У чому полягає геометричний зміст похідної?
3. У чому полягає фізичний зміст похідної?
4. Сформулювати основні теореми про похідну функції.
5. Як знайти похідну складеної функції?
6. Записати таблицю похідних.

2.1.3. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

У застосуванні математики до розв'язання конкретних задач доводиться мати справу з величинами, числові значення яких отримані шляхом вимірювань і точне їх значення невідоме.

Якщо вихідні дані містять похибки вимірювань, то застосування точних методів обчислень недоцільне. Для спрощення і полегшення обчислень у таких випадках краще використовувати наближені методи.

Теоретичною основою одного з простіших прийомів наближених обчислень є поняття диференціала.

Нехай дана диференційована на (a, b) функція $y = f(x)$, $x_0 \in (a,b)$. Запишемо визначення похідної функції:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}.$$

За малих $|\Delta x|$ саме відношення $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x$ мало відрізняється від $f'(x)$, тобто можна прийняти, що $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x \approx f'(x_0)$ або $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Ліва частина є приростом функції y, тому маємо:

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Це наближене значення приросту функції (чим менше Δx, тим точніше буде обчислене Дy) називається диференціалом функції і позначається dy:

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Означення. Диференціалом функції називається добуток похідної функції на приріст незалежної змінної.

Якщо $y = x$, то $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$. Будемо називати диференціалом незалежної змінної диференціал функції $y = x$. Тоді приріст незалежної змінної та її диференціал рівні між собою: $\Delta x = dx$, тому $dy = f'(x_0)dx$.

Звідси отримуємо:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y,$$
$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx.$$

Нове (нарощене) значення функції наближено дорівнює її початковому значенню плюс диференціал функції. Цю формулу застосовують у наближених обчисленнях.

Обчислювати диференціал функції достатньо просто. Слід знайти похідну функції і помножити її на диференціал аргументу.

Геометричний зміст диференціала. Нехай дано функцію $y = f(x)$.

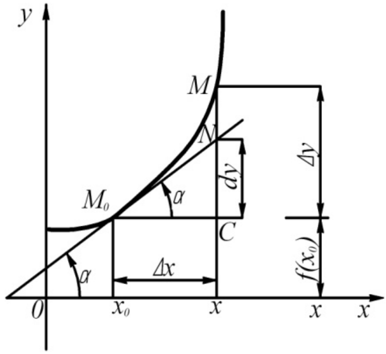


Рис. 113. Геометричний зміст диференціала

Побудуємо її графік (рис. 113). З ΔNCM_0 маємо: $NC / M_0C = tg\alpha = f'(x_0) \Leftrightarrow NC = f'(x_0) \cdot M_0C$, $M_0C = \Delta x$, $NC = f'(x_0)\, \Delta x \Leftrightarrow NC = dy$. З рисунка малюнка видно, що диференціал дорівнює зміні ординати дотичної, проведеної до графіка функції в точці $(x_0; y_0)$ при зміні x_0 на величину Δx. У цьому є геометричний зміст диференціала.

Заміна приросту функції її диференціалом означає заміну частини графіка функції M_0M відрізком дотичної M_0N. Чим менше Δx, тим менше дотична відхиляється від графіка функції, тим точніше наближена формула.

Знаходження диференціала функції називають *диференціюванням*, так само як і знаходження похідної.

Диференціалом другого порядку називають диференціал від диференціала першого порядку:

$$d^2 y = f''(x) dx^2,$$

тобто диференціал другого порядку функції $y = f(x)$ дорівнює добутку другої похідної цієї функції на квадрат диференціала аргументу.

Застосування диференціала до наближених обчислень

1. *Обчислення наближеного значення приросту функції за допомогою диференціала.*

Нехай дано функцію $y = f(x)$; приріст цієї функції $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$, її диференціал $dy = f'(x)dx.$ При досить малих (близьких до нуля) приростах аргументу $\Delta\ x$ вважатимемо, що $\Delta y \approx dy$, тобто, що приріст функції наближено дорівнює її диференціалу.

2. *Наближене обчислення степенів.* Розглянемо функцію $f(x) = x^n$. Нехай аргумент x набуває малого приросту Δx. Обчислимо наближене значення функції $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$, застосовуючи формулу:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Маємо: $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$; $f(x) = x^n$; $f'(x)\Delta x = nx^{n-1}\Delta x,$

звідки $(x + \Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x.$

Окремі випадки формули:

1) $n = 2, (x + \Delta x)^2 \approx x^2 + 2x\Delta x;$

2) $n = 3, (x + \Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2\Delta x;$

3) $x = 1, (1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x.$

3. *Наближене обчислення коренів.* Розглянемо функцію

$$f(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Нехай аргумент x набуває малого приросту Δx. Обчислимо наближене значення функції $f(x + \Delta x) = \sqrt[n]{x + \Delta x}$, застосовуючи формулу:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$ Маємо: $f(x + \Delta x) = \sqrt[n]{x + \Delta x}$;

$f(x) = \sqrt[n]{x}; f'(x)\Delta x = \dfrac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$. Звідки $\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \dfrac{\Delta x}{n\sqrt[n]{\sqrt{x^{n-1}}}}$.

Окремі випадки формули:

1) $n = 2, \sqrt[2]{x + \Delta x} \approx \sqrt[2]{x} + \Delta x / 2\sqrt{x};$

2) $n = 3, \sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \Delta x / 3\sqrt[3]{x^2};$

3) $x = 1, \sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \Delta x / n.$

Задача 1. Закон накопичення сухої біомаси у винограді сорту Шасла визначається рівнянням $y = 0{,}03x - 0{,}0004x^2$, де x – число днів від розпускання бруньок, y – накопичення біомаси в кілограмах на один кущ. Рівність відображає залежність величин x і y як середній результат масових спостережень. Визначити, як змінюється суха біомаса куща при зміні x від 50 до 60 днів.

Розв'язок. Зміна біомаси – це приріст біомаси, замінимо його диференціалом:

$$\Delta y \approx dy = \left(0{,}03x - 0{,}0004x^2\right)' dx = (0{,}03 - 0{,}0008x)dx.$$

Підставляємо числові значення $x = 50$, $dx = 10$. Маємо:

$$dy = (0{,}03 - 0{,}0008 \cdot 50) \cdot 10 = 0{,}01(кг).$$

Задача 2. Визначити наближено похибку обчислення площі квадрата, якщо при вимірюванні довжини сторони в 60 м припущена похибка 0,2 м.

Розв'язок. Площа квадрата $S = x^2$. Похибку обчислення площі заміняємо диференціалом площі: $dS = S'dx = 2xdx$.

Підставляємо числові значення $x = 60$, $dx = 0{,}2$. Маємо:

$$dS = 2 \cdot 60 \cdot 0{,}2 = 24\left(м^2\right).$$

Точне значення $\Delta S = (60{,}2)^2 - 60^2 = 3624{,}04 - 3600 = 24{,}04\left(м^2\right)$.

Відносна похибка $|24{,}04 - 24| / 24 = 0{,}04 / 24 = 0{,}0017$.

Задача 3. Дослідним шляхом встановлено, що масу тварини при встановленому режимі відкорму можна вважати функцією часу відкорму t, t>49 дн., $P = 5\sqrt{t}$, де P – маса, кг, t – час, дн. Знайти приріст тварини за десять днів, починаючи з 64-го дня годування.

Розв'язок. Приріст тварини дорівнює приросту маси ΔP:

$$\Delta P \approx dP = P'dt = \frac{5}{2\sqrt{t}}dt, dP = 5 \cdot 10 / 2 \cdot 8 = 50/16 = 3{,}125(кг).$$

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення диференціала функції.
2. Чому дорівнює диференціал незалежної змінної (аргументу)?
3. За яким правилом знаходять диференціал функції?
4. Дайте геометричне тлумачення диференціала функції.
5. Як застосовують диференціал функції в наближених обчисленнях?

2.1.4. ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a,b).

Означення. Функція $f(x)$ називається *зростаючою* в деякому інтервалі, якщо в точках цього інтервалу більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, і *спадною*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Отже, згідно з означенням зростаючої (спадної) на деякому інтервалі функції маємо: якщо $x_2>x_1$, то $f(x_2)>f(x_1)(f(x_2)<f(x_1))$.

Необхідна умова зростання (спадання) функції

Теорема. Якщо диференційована функція $y=f(x)$ зростає (спадає) в деякому інтервалі, то похідна цієї функції не від'ємна (не додатна).

Доведення. За означенням зростаючої функції, якщо $x_2>x_1$, то $f(x_2)>f(x_1)$ і якщо $x_2<x_1$, то $f(x_2)<f(x_1)$. Отже, якщо $x_2-x_1>0$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$, якщо $x_2-x_1<0$, то $f(x_2)-f(x_1)<0$.

Оскільки різниці, розміщені в лівих частинах нерівності, є приростами аргументу і функції, то приходимо до висновку, що якщо $\Delta x>0$, то $\Delta y>0$, якщо $\Delta x<0$, то $\Delta y<0$, тобто прирости аргументу і функції мають однакові знаки. Тоді в обох випадках відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$. Оскільки функція диференційована, то, переходячи до границі при $\Delta x\to 0$, отримаємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$, а це значить що $f'(x)>0$.

Аналогічно можна довести, що для спадної функції її похідна від'ємна, тобто $f'(x)<0$.

Геометрично твердження теореми означає, що дотична до графіка зростаючої (спадної) функції утворює гострі (тупі) кути з додатним напрямом осі Ox або, можливо, в окремих точках дотична паралельна осі Ox; значить $f'(x)=tga>0(f'(x)=tga<0)$.

Інтервали, на яких функція тільки зростає або спадає, називаються інтервалами *монотонності*, а сама функція називається *монотонною*.

При доведенні теореми про достатні умови монотонності використаємо теорему Лагранжа, яку запишемо без доведення.

Теорема Лагранжа. Якщо функція неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційована на інтервалі *(a;b)*, то знайдеться така точка *C*, яка належить цьому інтервалу: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Достатня умова зростання (спадання) функції

Теорема. Якщо похідна функції $f(x)$ додатна (від'ємна) в деякому інтервалі, то функція в цьому інтервалі монотонно зростає (спадає).

Нехай x_1 і x_2 – дві довільні точки інтервалу, причому $x_2 > x_1$. Тоді, за теоремою Лагранжа, існує така точка $c \in (a;b)$, що $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$.

Оскільки за умовою $f'(c)>0$ і $x_2-x_1>0$, то $f(x_2)> f(x_1)$. А це значить, що функція зростаюча.

Аналогічно можна довести і достатню умову спадання функції.

Означення. Точку x_o називають точкою максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує δ-окіл точки x_o, який міститься в проміжку $(a;b)$, і такий, що для всіх значень x, взятих з δ-околу, виконується умова: $f(x)<f(x_o)$, $(f(x)>f(x_o))$.

Зауваження. Не слід точки максимуму і мінімуму змішувати з найбільшим і найменшим значенням. Точок максимуму і мінімуму функція може не мати, а може мати багато.

Зауважимо, що точки максимуму і мінімуму називають *екстремальними* точками, а сам максимум і мінімум *екстремумами* функції.

Необхідна умова існування точок екстремуму

Теорема (Ферма). Якщо функція $f(x)$ у внутрішній точці x_o проміжку (a, b) має екстремум, то в цій точці похідна $f'(x)$, якщо вона існує, дорівнює нулю.

Доведемо методом від супротивного. Нехай x_o – точка екстремуму і похідна $f'(x_o)\neq 0$. Припустимо, що $f'(x_o)>0$, тоді в точці x_o функція зростає. Якщо $f'(x_o)<0$, то функція в точці x_o спадає. А це суперечить тому, що точка x_o є точкою екстремуму. Отже, екстремум може існувати тільки в тих точках, де похідна дорівнює нулю.

Умови теореми Ферма є тільки необхідними для існування точок екстремуму і не є достатніми умовами.

Розглянемо функцію $y=x^3$, тоді $y'= 3x^2$, $y'(0)=0$, але точка $x_o=0$ не є точкою екстремуму. У точці екстремуму похідна може і не існувати, наприклад, похідна функції $y = |x|$ у точці x=0 не існує.

Стаціонарні точки – це точки, у яких похідна $f'(x_o)=0$.

Критичні точки – це точки, у яких похідна дорівнює нулю або не існує.

Достатня умова існування точок екстремуму

Теорема (перша достатня умова). Якщо похідна $f'(x)$ при переході x через x_o міняє знак, то x_o є точкою екстремуму функції.

Нехай при переході x через x_o похідна міняє знак з плюса на мінус. Тоді зліва від x_o похідна додатна і значить функція зростає. Справа від x_o похідна від'ємна, а значить функція спадає. Точка, яка відділяє інтервал зростання від інтервалу спадання, є точкою максимуму.

Аналогічно доводиться, що якщо при переході x через x_o похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_o є точкою мінімуму.

Щоб дослідити функцію на екстремум, треба:

1. Знайти похідну $f'(x)$.

2. Знайти критичні точки.

3. Розбити область визначення функції критичними точками на проміжки.

4. Встановити знаки похідної при переході через критичні точки і виписати точки екстремуму.

5. Обчислити значення функції $f'(x)$ у кожній екстремальній точці.

Наприклад: 1.Дослідити на екстремум функцію $y=x^3-3x$.

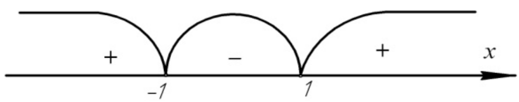
Знайдемо похідну: $y'=3x^2- 3=3(x-1)(x+1)$.

Прирівняємо похідну до нуля: $3(x-1)(x+1)=0$.

Знайдемо стаціонарні точки $x_1=-1$, $x_2=1$.

Знайдемо знаки похідної при переході через стаціонарні точки

y':



Таким чином, при переході через стаціонарні точки похідна міняє знак. Значить стаціонарні точки будуть точками екстремуму. Отже, x_{max}= -1, x_{min}=1

2. Дослідити на екстремум функцію $y=|x|$.

$$y=\begin{cases}-x, \text{якщо } x\le 0\\ x, \quad \text{якщо } \ x>0\end{cases}$$

Знайдемо похідну

$$y=\begin{cases}-1, \text{якщо } x<0\\ 1, \quad \text{якщо } \ x>0\end{cases}$$

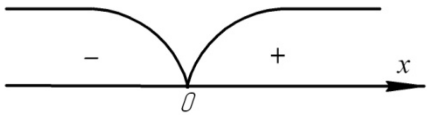


Рис. 114

Зміна знака похідної при переході через критичну точку x=0 для функції $y=\begin{cases}-x, \text{якщо } x\le 0\\ x, \quad \text{якщо } \ x>0\end{cases}$ (рис. 114)

У точці x=0 похідна не існує. Тому критичною є тільки одна точка x=0. Оскільки зліва від x=0 похідна $f'(x)<0$, а справа $f'(x)>0$ і функція в точці x=0 неперервна, то x=0 є точка мінімуму, мінімум функції $f(0)=0$.

Запитання для самоконтролю

1. Яка функція називається зростаючою (спадною)?
2. Що називається точкою максимуму (мінімуму) функції?
3. Сформулювати достатню умову зростання та спадання функції?
4. Сформулювати необхідну умову існування точок екстремуму.
5. Які точки називаються стаціонарними?
6. Які точки називаються критичними?
7. Сформулювати достатню умову існування точок екстремуму.
8. Як знайти найменше та найбільше значення функції?

2.1.5. ДРУГА ПОХІДНА І ЇЇ ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ

Похідну від даної функції називають першою похідною або похідною першого порядку. Очевидно, що похідна також є функцією, і якщо вона диференційована, то від неї у свою чергу можна знайти похідну, яку називають другою похідною або похідною другого порядку і позначають:

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Розглянемо ***фізичний зміст*** другої похідної. Нехай тіло рухається прямолінійно за законом $S = f(t)$. Відомо, що швидкість тіла в даний момент часу дорівнює похідній шляху за часом, тобто $V = s'$.

У свою чергу $V' = \left(s'(t)\right)' = s''(t) = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ визначає швидкість зміни швидкості матеріальної точки. А як відомо з механіки, швидкість зміни швидкості називається прискоренням. Таким чином, прискорення матеріальної точки дорівнює похідній від швидкості за часом або другій похідній від шляху за часом, тобто $a(t) = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$.

Приклад. Тіло рухається прямолінійно за законом $s = 1 - 2t + t^2$. Знайти швидкість і прискорення в момент часу t=3.

$V(t) = s'(t) = \left(1 - 2t + t^2\right)' = -2 + 3t^2$;

$V(3) = -2 + 3 + 3^2 = 25$ (м/с);

$a(t) = V'(t) = (-2 + 3t^2)' = 6t$; $a(3) = 6 \cdot 3 = 18$ (м/с^2)

Теорема (друга достатня умова існування екстремуму*)*. Нехай точка x_o є стаціонарною для функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна другого порядку $f''(x_0)$, яка не дорівнює нулю, $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_o є точкою мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то x_o є точкою максимуму функції $f(x)$.

За умовою теореми x_o є стаціонарною точкою для $f(x)$, тобто $f''(x_0) = 0$. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$, то похідна $f'(x)$, будучи функцією від x, у точці x_o зростає, а, отже, при переході через точку x_o

похідна $f'(x)$ змінює знак з – на +. Значить, за попередньою теоремою, точка x_o є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Аналогічно доводять, що коли в стаціонарній точці x_o друга похідна $f''(x_o)<0$, то x_o є точкою максимуму.

Наприклад. Дослідити на екстремум функцію $y=5x^2+3x$.

Знайдемо $y' = 10x+3$.

Знайдемо стаціонарні точки $10x+3=0$, $x_o=-0{,}3$.

Знайдемо другу похідну $y'' =10$. Оскільки $y''>0$, то в точці $x_o= –0{,}3$ функція має мінімум.

Зауваження. Друга достатня умова використовується для більш вузького класу функцій, ніж перша достатня умова. Її не можна використовувати для дослідження функцій у тих точках, де перша похідна не існує, а також для стаціонарних точок, у яких друга похідна дорівнює нулю. У цих випадках використовують першу достатню умову.

Опуклість, точки перегину графіка функції

Означення. Якщо існує окіл $(x_o - \delta;\ x_o + \delta)$, $\delta > 0$ точки x_o такий, що для всіх x, взятих з цього околу, відповідні точки кривої лежать над дотичною, проведеною до кривої в точці M_o, то криву в точці M_o називають опуклою вниз (рис. 115).

Означення. Якщо існує окіл $(x_o - \delta;\ x_o + \delta)$ точки x_o такий, що для всіх x, взятих з цього околу, відповідні точки кривої лежать під дотичною, проведеною до кривої в точці M_o, то криву в точці M_o називають опуклою вгору (рис. 116).

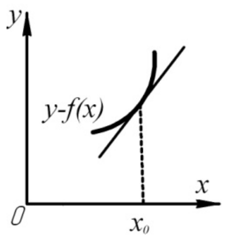


Рис.115. Крива, опукла вниз

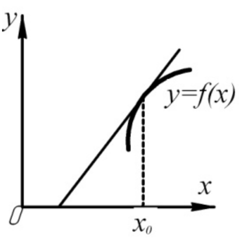


Рис. 116. Крива, опукла вгору

Теорема. Нехай криву задано рівнянням $y = f(x)$ і нехай існує окіл $(x_o - \delta;\ x_o + \delta)$ точки x_o такий, що функція $f(x)$ при кожному x, взятому з околу, має похідні до другого порядку включно, причому $f'(x)$ у точці x_o є неперервною функцією. Тоді, якщо $f''(x_0)>0$, то крива в точці $M_0(x_0;y_0)$ опукла вниз; якщо $f''(x_0)<0$, то крива в точці $M_0(x_0;y_0)$ опукла вгору.

Для знаходження інтервалів опуклості потрібно:

1. Знайти всі точки, у яких або $f''(x)=0$, або $f''(x)$ не існує (ці точки називаються критичними точками функції за другою похідною).

2. Знайти інтервали, на які область визначення розбивається знайденими точками.

3. Встановити знаки другої похідної в кожному інтервалі. Якщо $f''(x_0)>0$, то на цьому інтервалі функція опукла вниз; якщо $f''(x_0)<0$ – опукла вгору.

Наприклад. Знайти інтервали опуклості функції $f(x)=x^3$.

Знайдемо похідні функції $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$. Маємо одну критичну точку за другою похідною $x=0$. Вона розбиває числову пряму на два інтервали $(-\infty;0)$ *і* $(0;\infty)$. Оскільки $f''(x)>0$ для всіх $x>0$, то на інтервалі $(0;\infty)$ графік функції опуклий вниз, а на інтервалі $(-\infty;0)$ $f''(x)<0$, то на цьому інтервалі графік функції опуклий вгору.

Означення. Точка графіка диференційованої функції $y=f(x)$, яка поділяє проміжки опуклості протилежних напрямів цього графіка називається точкою перегину цієї функції (рис. 117).

Точками перегину можуть бути тільки *критичні точки* II роду, тобто точки, які належать до області визначення функції, в яких друга похідна $f''(x)$ перетворюється в нуль або зазнає розриву.

Якщо при переході через критичну точку x_0 друга похідна змінює свій знак, то графік функції має точку перегину $(x_0;f(x_0))$.

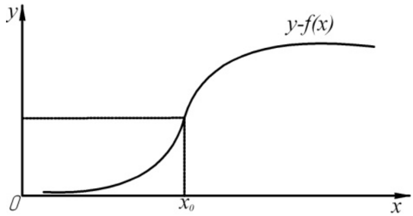


Рис. 117

Теорема (необхідна умова існування перегину). Нехай функція $y = f(x)$ має неперервні похідні другого порядку на інтервалі $a;b$), причому $x_o \in (a; b)$. Для того, щоб точка $(x_0; f(x_0))$ була точкою перегину, необхідно, щоб виконувалася умова $f''(x_0) = 0$.

Оскільки точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину, то зліва і справа від x_o функція $f''(x)$ має різні знаки. Тоді в силу неперервності другої похідної маємо $f''(x) = 0$.

Теорема (достатня умова існування перегину). Якщо функція $y = f(x)$, $x \in (a; b)$ двічі диференційована на інтервалі $(a;b)$ і при переході через $x_0 \in (a;b)$ друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка кривої з абсцисою $x = x_0$ є точкою перегину.

Оскільки $f(x)$ диференційована в $(a;b)$, то існує *дотична* в точці x_o. Нехай $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Тоді при $x < x_0$ графік функції опуклий вгору, а при $x > x_0$ – опуклий вниз. Отже, точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Аналогічно доводимо, що якщо $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Оскільки друга похідна функції $y = f(x)$ може змінювати свій знак при переході не тільки через точки, у яких друга похідна перетворюється в нуль, але і через точки, у яких друга похідна не існує, то точки перегину треба знаходити серед критичних точок другого роду.

Правило знаходження точок перегину графіка функції $y = f(x)$

1.Знайти другу похідну $f''(x)$.

2. Знайти критичні точки II роду функції $y = f(x)$, тобто точки, в яких $f''(x)$ перетворюється в нуль або зазнає розриву.

3. Дослідити знак другої похідної $f''(x)$ в проміжках , на які знайдені критичні точки ділять область визначення функції $f(x)$. Якщо при цьому критична x_o точка поділяє проміжки опуклості протилежних напрямів, то x_o є абсцисою точки перегину графіка функції.

Наприклад. Знайти точки перегину графіка функції
$y = 1/3x^3 - 2x^2 + 7x - 4.$
Задана функція визначена на всій числовій прямій.
Знаходимо $y' = x^2 - 4x + 7,\ y'' = 2x - 4.$
Знаходимо критичні точки другого роду $2x-4=0,\ x=2.$
На інтервалах (-∞; 2) і (2;∞) друга похідна зберігає свій знак.
Знаходимо знак другої похідної на цих інтервалах.
При $x \in (-\infty;\ 2)\ y'' < 0,$ отже, графік функції опуклий вгору; при $x \in (2;\infty)\ \ y'' > 0$ графік опуклий вниз. Значить точка $x=2$ є точкою перегину. Знайдемо значення функції в цій точці $y = f(2) = 4\frac{2}{3}.$ Отже, точка $\left(2;4\frac{2}{3}\right)$ є точкою перегину.

Асимптоти

Означення. Пряма $y = kx + b$ називається похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань точки *М,* що рухається по кривій $y = f(x)$, до цієї прямої прямує до нуля, коли $x \to \infty$.

Використаємо рівняння прямої $y = kx + b$ і згідно з означенням будемо мати $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$.

З цієї формули знайдемо $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Очевидно, коли $k=0,$ то рівняння асимптоти має вигляд $y=b.$
Це і буде рівнянням горизонтальної асимптоти.

Означення. Пряма $x = a$ називається вертикальною асимптотою, якщо $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

Для знаходження вертикальних асимптот треба знайти ті значення *х*, поблизу яких функція $f(x)$ необмежено зростає за модулем. Звичайно, це точки розриву другого роду заданої функції.

Наприклад. Знайти асимптоти кривої $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ (рис. 118)

Знайдемо
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1,$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

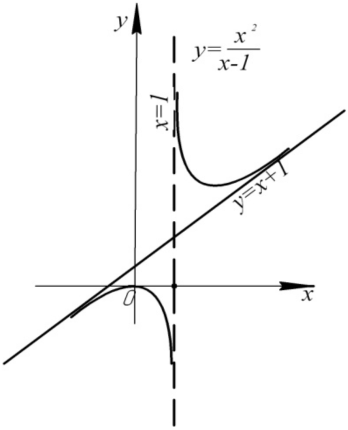


Рис. 118

Таким чином, $k=1$ і $b=1$; отже, при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$ графік функції має похилу асимптоту $y=x+1$.

Якщо $x\to 1$, то $y\to\pm\infty$; отже, пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою (рис. 118).

2.1.6. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ГРАФІКА

При побудові графіків функцій використовують таку схему дослідження:

1. Знайти область визначення функції, якщо вона заздалегідь не вказана.

2. Перевірити функцію на парність і непарність.

3. Дослідити функцію на періодичність.

4. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

5. Дослідити функцію на неперервність. Знайти точки розриву функції.

6. Знайти асимптоти графіка функції.

7. Дослідити функцію на монотонність.

8. Знайти точки екстремуму функції.

9. Знайти точки перегину й інтервали опуклості графіка функції.

10. Побудувати графік.

Наприклад. Дослідити функцію $y = x + \dfrac{4}{x+2}$ та побудувати її графік (рис. 119).

Знайдемо область визначення: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Дослідимо функцію на парність: $f(-x) = -x + \dfrac{4}{-x+2}$. Функція ні парна, ні непарна.

Функція не періодична.

Знайдемо точки перетину з осями координат. Якщо *x=0,* то *y=2*. Якщо *y=0*, то $x + \dfrac{4}{x+2} = 0$; $\dfrac{x^2+2x+4}{x+2} = 0$; $x^2 + 2x + 4 = 0$; $D = -12$. Рівняння розв'язків не має, отже, графік не перетинає вісь *Ox*.

Функція розривна в точці $x = -2$.

$$\lim_{x \to -2+0} \left(x + \frac{4}{x+2}\right) = +\infty; \quad \lim_{x \to -2-0} \left(x + \frac{4}{x+2}\right) = -\infty.$$

Пряма $x = -2$ буде вертикальною асимптотою. Знаходимо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad k = \lim_{x \to \infty} \frac{x + \dfrac{4}{x+2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{4}{x(x+2)}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(x + \frac{4}{x+2} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x+2} = 0;$$

$y = kx + b$, $y = 1x + 0$, $y = x$ – рівняння асимптоти.

Дослідимо функцію на монотонність:

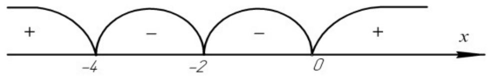
$$y' = (x + \frac{4}{x+2})' = \left(1 + \frac{-4}{(x+2)^2}\right);\ 1 - \frac{4}{(x+2)^2} = 0;\ \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = 0;\ x^2 + 4x = 0;$$

$$x(x+4) = 0; \quad x_1 = 0;\ x_2 = -4.$$

Запишемо проміжки монотонності: $(-\infty;-4)$, $(-4;-2)$, $(-2;0)$, $(0;\infty)$.

Знайдемо знак похідної на кожному з проміжків:

y':



Функція зростає, якщо $x \in (-\infty;-4) \cup (0;+\infty)$.

Функція спадає, якщо $x \in (-4;-2) \cup (-2;0)$.

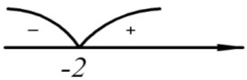
Отже, функція має максимум у точці $x=-4$, $y_{max}=-6$. Функція має мінімум у точці $x=0$, $y_{max}=2$.

Знайдемо проміжки опуклості і точки перегину $y'' = \frac{8}{(x+2)^3}$;

$$y'' = 0; \quad \frac{8}{(x+2)^3} = 0.$$

Рівняння розв'язків не має. Значить точок перегину функція не має. Графік функції опуклий вгору, якщо $x \in (-\infty;-2)$, і опуклий вниз, якщо $x \in (-2;+\infty)$.

y'':



Зберемо всі дані в одній таблиці і побудуємо графік.

x	*(-∞;-4)*	*-4*	*(-4;-2)*	*-2*	*(-2;0)*	*0*	*(0;+∞)*
y'	+	*0*	-	*Не існує*	-	*0*	+
y''	-	-	-	*Не існує*	+	+	+
y	↗	*-6 max*	↘	*Не існує*	↘	*2 min*	↗

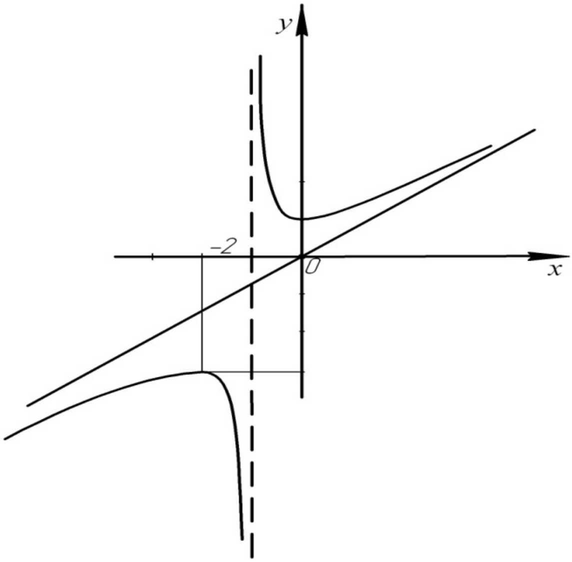


Рис. 119. Графік функції $y = x + \dfrac{4}{x+2}$

2.1.7. ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМУМУ І МІНІМУМУ ФУНКЦІЇ

Щоб дослідити функцію на екстремум за допомогою другої похідної, треба:

1. Знайти похідну функції.
2. Знайти критичні точки даної функції, тобто точки, у яких перша похідна дорівнює нулю.
3. Знайти другу похідну.
4. Дослідити знак другої похідної в кожній з критичних точок. Якщо при цьому друга похідна буде від’ємною, то функція в такій точці має максимум, а якщо додатною, то мінімум. Якщо друга похідна дорівнює нулю, то екстремум треба шукати за допомогою першої похідної.
5. Обчислити значення функції в точках екстремуму.

Розглянемо задачі, зв'язані з практичним застосуванням.

Задача 1. Треба вирити силосну яму об'ємом 32 м^3, яка має квадратне дно, так, щоб на облицювання її дна і стін витратити якнайменше матеріалу. Які повинні бути розміри ями?

Нехай сторона дна дорівнює x, тоді площа основи становить x^2, висота ями $\frac{32}{x^2}$, а площа стінки $\frac{x \cdot 32}{x^2} = \frac{32}{x}$. Суму площ дна і стінок позначимо через S, тобто $S = x^2 + 4 \cdot \frac{32}{x}$.

Знайдемо похідну:

$$S' = 2x - \frac{4 \cdot 32}{x}; \; S' = 0; \; x = 4 .$$

Оскільки $S'' = 2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 32}{x^3}$, $S''(4) > 0$, то при $x = 4$ функція має мінімум.

Отже, сторона ями дорівнює 4 м, а висота ями становить $\frac{32}{4^2} = 2$ м.

Задача 2. З круглої колоди радіуса R треба вирізати прямокутну балку максимальної міцності. Відомо, що міцність балки прямо пропорційна добутку її ширини на квадрат висоти. Якими повинні бути розміри балки, щоб її міцність була максимальною?

Позначимо ширину балки через *x,* її висоту – через y, а міцність (на згин) – через J, маємо $J = kxy^2$, де k>0 – коефіцієнт пропорційності.

Таким чином, треба знайти максимум функції $J = kxy^2$. Щоб виразити міцність балки через одну з невідомих величин, замітимо, що $x^2 + y^2 = 4R^2$, звідки $y^2 = 4R^2 - x^2$ і $J = kx\left(4R^2 - 3x^2\right)$.

Знайдемо похідну і прирівняємо її до нуля:

$J' = 4kR^2 - 3kx^2 = 0$ або $k\left(4R^2 - 3x^2\right) = 0$.

Оскільки $k \neq 0$, то $4R^2 - 3x^2 = 0$, звідки $x = \frac{\pm 2R}{\sqrt{3}}$.

За змістом задачі дослідженню підлягає тільки додатний корінь $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Оскільки $J' = 6kx < 0$ при $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, то робимо висновок, що при $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ міцність балки буде максимальною.

Задача 3. Загальна вартість вироблених q одиниць продукту А визначається функцією $C = 100000 + 1500q + 0{,}2q^2$ (грн). Скільки одиниць q продукції треба випускати, щоб мінімізувати середню вартість одиниці продукції?

Середня вартість одиниці продукції визначається діленням загальної вартості на кількість вироблених одиниць:

$$c = f(q) = \frac{100000}{q} + 1500 + 0{,}2q.$$

Перша похідна цієї функції є $f'(q) = -100000q^{-2} + 0{,}2$. Якщо $f' = 0$, то $0{,}2 = 100000\,q^{-2} \Rightarrow q^2 = \frac{100000}{0{,}2} = 500000 \Rightarrow q = 707{,}11$.

Перевіримо критичну точку за допомогою другої похідної:

$f'' = 200000q^{-3}$; $f''(707{,}11) = 0{,}0006 > 0$.

Таким чином, відповідний мінімум досягається при $q = 707$.

Отже, мінімальна середня вартість одиниці продукції дорівнює

$$f(707) = \frac{100000}{707} + 1500 + 0{,}2 \cdot 707 = 1782{,}8 \quad \text{грн}$$

Запитання для самоконтролю

1. Як дослідити функцію на екстремум за допомогою другої похідної?
2. Який графік називають опуклим вгору (вниз)?
3. Які точки називаються точками перегину?
4. Сформулювати необхідну умову існування точок перегину.
5. Сформулювати достатню умову існування точок перегину.
6. Яка пряма називається похилою асимптотою?
7. Якою схемою дослідження функції користуються при побудові графіка функції?

2.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.2.1. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Основні поняття. *n*-вимірний евклідів простір

Досі ми розглядали функції однієї змінної. Проте цих функцій зовсім не досить для вивчення різних фізичних процесів. Так, характеризуючи такі фізичні величини, як густина або температура тіла, необхідно враховувати їх зміну при переході від однієї точки до іншої. Якщо координати точки позначити через x, y, z, то густина та температура тіла визначатимуться значеннями трьох змінних x, y, z.

При вивченні нестаціонарних процесів, які змінюються з часом, доводиться розглядати залежність тієї чи іншої фізичної величини від чотирьох змінних: координат x, y, z та часу t. Такого роду залежності зв'язані з функціями багатьох змінних.

Відомо, що кожне дійсне число x, пару дійсних чисел (x,y), трійку дійсних чисел (x,y,z), записаних у певному порядку, можна зобразити відповідно точками числової прямої Ox, площини Oxy та простору $Oxyz$. Дійсні числа x,y,z при цьому називають *координатами точки.* Метод координат дає змогу встановити взаємно однозначну відповідність між множиною дійсних чисел та множиною точок на числовій прямій; між множиною пар дійсних чисел (x,y) та множиною точок площини Oxy; між трійками дійсних чисел (x,y,z) та множиною точок простору $Oxyz$. Тому словом «точка» можна назвати дійсне число x, пару (x, y) або трійку (x,y,z) дійсних чисел. Множину всіх дійсних чисел x називають ще ***числовою прямою (координатною прямою),*** множину всіх впорядкованих пар (x,y) дійсних чисел x і y – ***координатною площиною,*** множину всіх впорядкованих трійок (x,y,z) дійсних чисел x,y,z – ***координатним простором*** або просто відповідно прямою, площиною і простором.

Відстань між двома довільними точками X і Y прямої, площини та простору визначається за формулами:

$$\rho(X,Y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|, \tag{142}$$

де X, Y – точки прямої;

$$\rho(X,Y)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \qquad (143)$$

де $X=(x_1,y_1)$; $Y=(x_2,y_2)$ – точки площини;

$$\rho(X,Y)=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}, \qquad (144)$$

де $X=(x_1 y_1 z_1)$; $Y=(x_2, y_2, z_2)$ – точки простору.

При вивченні функцій багатьох змінних ми користуватимемося також поняттям точки з чотирма, п'ятьма і взагалі, з n координатами.

Сукупність n дійсних чисел $x_1, x_2 \ldots x_n$, записаних у певному порядку, називають *точкою* і позначають $x=(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Числа x_j, $j=1,2,\ldots n$ називають *координатами точки* x.

У множині всіх таких точок введемо операції *додавання і множення дійсних чисел.* Запам'ятайте такі правила:

$$x+y=(x_1; x_2; \ldots; x_n)+(y_1; y_2; \ldots; y_n)=(x_1+y_1; x_2+y_2; \ldots; x_n+y_n),$$

$$\lambda x=\lambda(x_1; x_2; \ldots; x_n)=(\lambda x_1; \lambda x_2; \ldots; \lambda x_n),\ \lambda \text{ – дійсне число.}$$

Для цих операцій, очевидно, виконуються всі ті закони, що й для відповідних операцій над дійсними числами.

Множину всіх точок $x=(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ з введеними вище операціями називають n-вимірним лінійним точковим простором.

Поняття n-вимірної точки та n-вимірного точкового простору було введено *Ріманом*, але термінологія належить *Кантору*.

Очевидно, що при $n=1,2,3$ одержимо відповідно точки координатної прямої, координатної площини та координатного простору. Узагальнення формул (142)–(144) дає формулу для визначення відстані між двома довільними точками $x=(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ і $y=(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ n-вимірного точкового простору

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2} \qquad (145)$$

Точковий лінійний n-вимірний простір, відстань між двома довільними точками x і y якого визначається за формулою (145), називають *n - вимірним евклідовим простором* і позначають $\boldsymbol{R}_n$.

Введення n-вимірного евклідового простору $\boldsymbol{R}_n$ дає змогу побудувати математичний апарат для вивчення функцій багатьох змінних. При цьому пряму *Ox* ($\boldsymbol{R}_1$), площину *Oxy* ($\boldsymbol{R}_2$) та простір *Oxyz* ($\boldsymbol{R}_3$) часто використовуватимемо для геометричного або фізичного тлумачення того чи іншого поняття простору $\boldsymbol{R}_n$.

Нехай задано множину $D \subset \boldsymbol{R}_n$

Якщо кожній точці $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in D$ за певним законом відповідає одне і тільки одне дійсне число y, то кажуть, що на множині D визначено функцію від n – змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ і записують

$$y = f(x_1, x_2 ... x_n), \text{ або } y = f(x).$$

Множину D при цьому називають ***областю визначення*** або ***областю існування функції***.

При n = 2,3 маємо функції двох і трьох змінних, які позначатимемо $z = f(x,y)$ та $u = f(x,y,z)$.

2.2.2. ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Основні поняття і способи їх завдання

Розпочнемо вивчення функцій багатьох змінних з важливого в теоретичному і практичному відношенні випадку функції двох змінних.

Наприклад. Площа S прямокутника зі сторонами, довжини яких рівні x і y, є функція від x і y, яка задається формулою $S = xy$. Областю визначення цієї функції, яка задана формулою $f(x, y) = xy$ є вся площина Oxy.

Означення 1. Правило, яке кожній парі (x,y) значень змінних x і y, що належать деякій множині пар D, ставить у відповідність одне і тільки одне число $z \in R$, називається функцією двох змінних.

У цьому випадку пишуть $z = f(x, y)$ і читають: "*зет* дорівнює *еф* від *ікс ігрек*". Так, наприклад, рівняння виду $z = x^2 + y^2$, $z = x^3 - y^3$, $z = xy$ ставлять у відповідність до пари (x, y) значення z. Під символом f для першої з них розуміється послідовність дій: спочатку x підносять до квадрата, потім ігрек підносять до квадрата і отримані результати додають.

Означення 2. Множина D пар чисел x, y, на якій визначена функція $z = f(x,y)$, називається областю визначення функції $D(f)$.

У найпростіших випадках область може мати вигляд прямокутника, $a \le x \le b, c \le y \le d$ або кола з границею, яка задається рівнянням $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

При дослідженні функцій двох змінних часто звертаються до їх геометричної інтерпретації. Кожній точці (x, y) області визначення функції f ставиться у відповідність точка $(x; y; f(x,y))$, тобто (x,y,z), де $z = f(x,y)$, у тривимірному просторі.

Означення 3. Множина всіх точок $(x;y)$ області D, у яких функція $z = f(x;y)$ приймає одне й те саме значення h, називається лінією рівня.

Лінію рівня, яка відповідає значенню $z = h,$ можна отримати як проекцію на площину Oxy ліній перетину поверхні $z = f(x, y)$ з площиною $z = h.$ Зробивши декілька таких перерізів площинами $z = h$, які містяться одна від одної на рівних відстанях, і накресливши лінії рівня, можна скласти уявлення про саму поверхню. Там, де лінії проходять близько одна до одної, поверхня піднімається круто, а значить і функція змінюється швидше порівняно зі зміною функції в тих місцях, де відстань між лініями більша (рис. 120, 121).

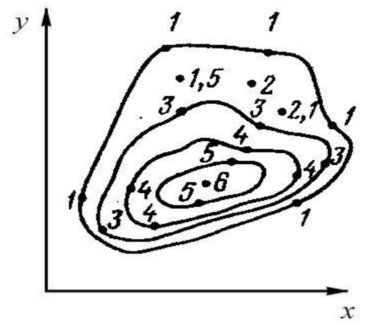


Рис. 120

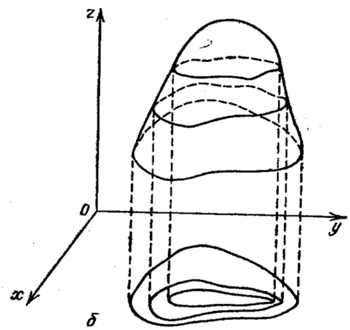


Рис. 121

Способи завдання функцій. Як і у випадку функції однієї змінної, функції двох змінних можуть задаватися декількома способами.

Аналітичний спосіб. Відповідність між парами чисел x і y і значеннями функції Z задається у вигляді формули. Цей спосіб зручний для виконання над функцією математичних дій, але не завжди наочний. Відповідність між змінними величинами не завжди можна записати у вигляді формули. У багатьох випадках формула буває невідома або шукати і писати формулу є недоречним. Для вираження функціональної залежності можна скористатися іншими більш зручними способами.

Табличний спосіб. Цей спосіб є найбільш простим. У одному стовпці записують всі значення x, y, а в другому – значення $f(x, y)$ відносно кожної пари чисел (x,у). Табличний спосіб зручний для використання, він особливо широко застосовується при обліку результатів дослідів, лабораторних аналізів тощо. До недоліків способу відноситься те, що представлення про функціональну залежність тут не є повним, оскільки неможливо помістити в таблиці всі значення x, y. Але все ж таки корисно представляти функцію як нескінченну кількість стовпців або рядків такої таблиці.

Алгоритмічний спосіб. Цей спосіб задання функції виник у зв'язку з широким розвитком і впровадженням у виробництво електронно-обчислювальних машин. Задається він у програмі для обчислення значень функцій на *ЕОМ*, які зберігаються в пам'яті *ЕОМ*. Так, більшість мікрокалькуляторів автоматично обчислюють значення функції $f(x, y) = x^y$.

Неперервність функцій двох змінних. Частинні похідні функції двох змінних

Частинні і повні прирости функцій. Якщо в функції від двох змінних $z = f(x,y)$ фіксувати значення одної з незалежних змінних, наприклад, $y = y_0$, то отримаємо функцію $z = f(x, y_0)$, яка залежить від одної змінної x. Оскільки геометрична функція $z = f(x,y)$ являє собою деяку поверхню, то рівняння $z = f(x, y_0)$ являє собою лінію перетину цієї поверхні з площиною $y = y_0$. Аналогічно, якщо фіксувати змінну $x = x_0$, отримаємо функцію від одної змінної *y:* $z = f(x_0, y)$.

Означення 4. Величина $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ називається ***частинним приростом*** функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) *по аргументу x.* Величина $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називається ***частинним приростом*** функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) *по* *аргументу* y. Величина $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називається ***повним приростом*** функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) .

Означення 5. Число А називається границею функції $z = f(x,y)$ при $P(x, y) \to P_o(x_o, y_o)$ і пишуть $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$,

якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з $0 < PP_o < \delta$ слідує:

$$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon.$$

З означення слідує, що якщо границя існує, то вона не залежить від шляху, за яким P прямує до P_o.

Границя функції двох змінних має властивості, аналогічні властивостям границі функції однієї змінної.

Означення 6. Функція $z= f(x,y)$, визначена в деякому околі точки $P_o(x_o, y_o)$, називається неперервною в цій точці, якщо границя функції при $P \to P_o$ дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Частинні похідні функцій двох змінних. Нехай дана функція від двох змінних $z = f(x, y)$. Фіксуючи одну із змінних, наприклад, $y = const$, ми приходимо до функції від однієї змінної x. Тоді можемо говорити про похідну отриманої функції, яку позначаємо через z'_x. Згідно з означенням похідної функції від одної змінної маємо:

$$Z'_x = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Означення 7. z'_x називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x і позначається ще символами $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $f'_x(x, y)$. Аналогічно визначається і позначається частинна похідна за змінною y:

$$Z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Виходячи з геометричної інтерпретації похідної функції від одної змінної, можемо сказати, що частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ при $x = x_0$, $y = y_0$ чисельно рівна тангенсу кута α, утвореного дотичною в точці $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ до лінії, що є перерізом поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$ з додатним напрямком осі Ox.

Аналогічно частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x = x_0$, $y = y_0$ чисельно дорівнює тангенсу кута β, утвореного дотичною в точці $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ до лінії, що є перерізом поверхні $z = f(x, y)$ площиною $x = x_0$, з додатним напрямком осі Oy.

Оскільки частинні похідні від функції кількох змінних також є функціями від кількох змінних, то для них можна також обчислювати частинні похідні. По відношенню до вихідної функції ці похідні від похідних називаються частинними похідними вищого порядку.

Наприклад, для функції від двох змінних маємо наступні типи похідних другого порядку:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ – частинна похідна від функції f, взята двічі за аргументом x ;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ і $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{dy}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ – мішані частинні похідні;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ – частинна похідна від функції f, взята двічі за аргументом y.

Для цих похідних та інших, більш складних, застосовуються також позначення:

$$f_{xx}''(x, y), f_{xy}''(x, y), f_{yx}''(x, y), f_{yy}''(x, y).$$

2.2.3. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення 8. Точка P називається точкою мінімуму (максимуму) функції $f(x, y)$, якщо існує окіл цієї точки такий, що з усіх значень, прийнятих функцією $f(x, y)$ у цьому околі, найменшим (найбільшим) є значення в точці P. Така точка P називається точкою екстремуму.

Якщо у функції $f(x,y)$ фіксувати всі незалежні змінні, крім одної, то $f(x,y)$, як функція цієї одної змінної, буде мати в точці P мінімум (максимум). Звідси виходить, що в цій точці значення частинної похідної за будь-якою змінною або дорівнює нулю, або не існує. Таким чином, необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних у даній точці є рівність нулю чи неіснування частинних похідних у цій точці.

Для знаходження екстремуму треба спочатку знайти критичні точки, тобто точки, у яких частинні похідні першого порядку рівні нулю (якщо всі частинні похідні рівні нулю, то це стаціонарна точка) чи не існують, а потім додатковими дослідженнями визначити характер екстремуму (якщо він взагалі існує).

Повний диференціал функції двох змінних. Для приросту функції $z = f(x,y)$, що має неперервні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x,y)$, має місце наступна теорема.

Теорема. Якщо частинні похідні $f_x'(x,y)$ і $f_y'(x,y)$ функції $f(x,y)$ неперервні в даній області, то її повний приріст $\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ можна зобразити в кожній точці (x,y) цієї області у вигляді:

$$f(x,y) = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y + \gamma, \text{ де } \gamma \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0 \text{ і } \Delta y \to 0.$$

Означення 9. Права частина формули називається повним диференціалом функції $f(x,y)$ і позначається через dz чи $df(x,y)$.

За означенням $df(x,y) = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y$.

Якщо $f(x,y) = x$, то $f_x'(x,y) = 1$, $f_y'(x,y) = 0$. У цьому випадку пишуть $df(x,y) = dx = \Delta x$, аналогічно $dy = \Delta y$.

Тому формулу можна переписати у вигляді:

$$dz = df(x,y) = f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy, \text{ або}$$

$$dz = df(x,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy \cdot$$

Необхідні і достатні умови існування екстремуму

Означення. Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в деякому околі точки (x_0, y_0). Говорять, що функція $z = f(x,y)$ має в точці (x_0, y_0) максимум (мінімум), якщо $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ $(f(x,y) > f(x_0 y_0))$ для всіх точок (x,y), достатньо близьких до точки (x_0, y_0). Точка (x_0, y_0) – точка максимуму (мінімуму), а (x_0, y_0) відповідно максимум (мінімум) функції.

Максимум і мінімум функції будемо, як і у випадку функції однієї змінної, називати екстремумами або екстремальними значеннями.

Відповідь на питання, чи існує спосіб знаходження значення незалежних змінних, при яких функція має екстремум, дають такі дві теореми.

Теорема 1 (необхідні умови екстремуму). Якщо функція $z = f(x,y)$ має екстремум у точці $P_0(x_0, y_0)$, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Точки $P_{0i}(x_{0i}, y_{0i})$, у яких частинні похідні дорівнюють нулю, називають критичними.

Теорема 2 (достатні умови існування екстремуму). Нехай функція $z = f(x,y)$ неперервна на $D(f)$ разом зі своїми частинними похідними першого і другого порядку і точка $P_0(x_0, y_0)$ є критичною.

Знайдемо в точці $P_0(x_0, y_0)$ похідні другого порядку і зробимо такі позначення:

$$A = (z''_{xx})_{x=x_0\, y=y_0}, \quad B = (z''_{xy})_{x=x_0\, y=y_0}, \quad C = (z''_{yy})_{x=x_0\, y=y_0}.$$

Якщо $AC\text{-}B^2 > 0$, то функція має в точці $P_0\ (x_0,y_0)$ екстремум: максимум при $A < 0$ і мінімум при $A > 0$.

Якщо $AC\text{-}B^2 < 0$, то функція $f(x,y)$ у точці $P_0\ (x_0 y_0)$ не має екстремуму.

Якщо $AC\text{-}\ B^2 = 0$, то висновок про екстремум функції зробити неможливо. У цьому випадку необхідні додаткові дослідження.

Приклад 1. Знайти частинні похідні другого порядку від функції $z = x^3y^2 + 2y - 6x + 1$.

Розв'язування $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6, \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx^3 + 2,$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx} = (3x^2y^2 - 6)'_x = 6xy^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy} = (3x^2y^2 - 6)'_y = 6x^2y, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx} = (2x^3y + 2)'_x = 6x^2y;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy} = (2yx^3 + 2)'_y = 2x^3.$$

Отже, $z''_{xy} = z''_{yx} = 6x^2y$; $f''_{xx} = 6xy^2$; $f''_{yy} = 2x^3$.

Приклад 2. Знайти екстремум функції $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8.$

1. Знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2x + 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y + 10.$

2. Прирівнюємо до нуля частинні похідні і складемо систему:

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ x - 4y + 10 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо з першого рівняння *y=2x-1* і підставимо в друге:

$$\begin{cases} x - 4(2x - 1) + 10 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$z''_{xx} = -2, z''_{xy} = 1, z''_{yy} = -4.$ Отже, частинні похідні другого порядку рівні постійним величинам у будь-якій точці, зокрема в точці P_0 *(2, 3)*. Тоді *A*=−*2, B=1, C*= −*4*. Потім знаходимо $AC - B^2 = (-2)\cdot(-4) - 1 = 7 > 0.$ Отже, у точці P_0 *(2,3)* функція має максимум :

$$z(2,3) = 2 \cdot 3 - 2^2 - 2 \cdot 3^2 + 2 + 10 \cdot 3 - 8 = 8.$$

Застосування функцій двох змінних до розв'язування прикладних задач

Задача. Фірма хоче освоїти два ринки, один з них внутрішній, а другий зовнішній. Відомо, що функції попиту дорівнюють відповідно $p_1 = 500 - x_1$, $p_2 = 360 - 1{,}5x_2$, а сумарні витрати $C = 50000 + 20x_1 + 20x_2$, де x_1 − кількість продукції, яка йде на внутрішній ринок, а x_2 – на зовнішній ринок. Яку цінову політику повинна проводити фірма, щоб прибуток був максимальний?

Сумарний дохід у випадку першого ринку дорівнює $P_1 = x_1 \cdot p_1 = x_1(500 - x_1) = 500x_1 - x_1^2$, а у випадку другого – $P_2 = x_2 \cdot p_2 = x_2(360 - 1{,}5x_2) = 360x_2 - 1{,}5x_2^2$.

Тоді прибуток $\pi(x_1, x_2) = P_1 + P_2 - C = 500x_1 - x_1^2 + 360x_2 - 1{,}5x_2^2 - 50000 - 20x_1 - 20x_2$, тобто $\pi(x_1, x_2) = 480x_1 - x_1^2 + 340x_2 - 1{,}5x_2^2 - 50000$. Дану функцію треба досліди-ти на екстремум.

З необхідної умови екстремуму одержуємо, що $\frac{\partial\pi}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial\pi}{\partial x_2} = 0$ або $480 - 2x_1 = 0, \ 340 - 3x_2 = 0,$ тобто $x_1^0 = 240, \ x_2^0 = \frac{340}{3}.$

Скористаємося достатньою умовою екстремуму

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial x_1^2} = -2, \ \frac{\partial^2\pi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \ \frac{\partial^2\pi}{\partial x_2^2} = -3.$$

$\Delta = (-2)\cdot(-3) - 0^2 = 6 > 0,$ а це означає, що в точці $M_0(240; \frac{340}{3})$ функція π має максимум, бо $\frac{\partial^2\pi}{\partial x_1^2} = -2 < 0.$

Таким чином, на внутрішньому ринку треба продати 240 од. продукції за ціною $p_1 = 500 - 240 = 260$ грн, а на зовнішньому – $\frac{340}{3}$ од. за ціною $p_2 = 360 - 1{,}5 \cdot \frac{340}{3} = 180$ грн. Прибуток при цьому складе $\pi(240; \frac{340}{3}) = 26866{,}67$ грн.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається функцією багатьох змінних, двох змінних?
2. Які способи завдання функції багатьох змінних?
3. Що називається областю визначення функції і який її геометричний зміст?
4. Що є графіком функції $z = f(x, y)$?
5. Що називається лінією рівня функції $z = f(x, y)$?

6. Дати означення границі функції двох змінних в точці.

7. Яку функцію двох змінних називають неперервною на множині точок?

8. Дати означення частинної похідної функції двох змінних по одній з них. З'ясувати її геометричний зміст.

9. Як визначають частинні похідні другого порядку від функції двох змінних?

10. Сформулювати теорему про рівність других мішаних похідних.

11. Дати означення повного диференціала функції двох змінних і вказати формулу для його знаходження.

12. Необхідні і достатні умови існування екстремуму функції двох змінних.

2.3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

2.3.1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Часто приходиться розв'язувати наступну задачу: дано функцію $f(x)$, треба знайти функцію $F(x)$ таку, що $F'(x)=f(x)$.

Для розв'язування цієї задачі служить операція інтегрування, обернена до диференціювання.

Означення. Диференційована функція $F(x)$, визначена на деякому проміжку, називається *первісною* для функції $f(x)$, визначеної на цьому ж проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку $F'(x)=f(x)$.

Наприклад. Знайти яку-небудь первісну для функції $f(x)=5x^4$.

Функція $F(x)=x^5$ є первісною для $f(x)=5x^4$, оскільки

$$F'(x) = (x^5)' = 5x^4 = f(x) .$$

Ця первісна не єдина. Первісними для даної функції будуть функції x^5+10, $x^5- 4$, а також x^5+C, де C – довільна постійна, тому що $(x^5+C)'=5x^4$.

Теорема. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, то функція $F(x) + C$, де С – довільна стала, також є первісною для $f(x)$ на цьому ж проміжку, причому будь-яка інша первісна $\Phi(x)$ функції $f(x)$ на цьому ж проміжку може бути записана у вигляді $\Phi(x)= F(x)+C$.

Означення. Сукупність всіх первісних для функції $f(x)$, визначених на деякому проміжку, *називається невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом $\int f(x)dx$.

Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, то за означенням первісної маємо: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Знак $\int$ називають знаком невизначеного інтеграла, $f(x)$ – *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом.* Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають *інтегруванням.*

Наприклад. Знайти $\int x^5 dx$.

Оскільки $x^5 = \left(\dfrac{x^6}{6}\right)'$, то функція $F(x)=x^6/6$ є однією з первісних для функції $f(x)=x^5$. Тому $\int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + C$.

Графік якої-небудь первісної $y=F(x)$ функції $f(x)$ називають *інтегральною кривою.*

Тоді геометрично **невизначений інтеграл** – ***це сімейство інтегральних кривих, кожну з яких можна отримати з якої-небудь іншої паралельним перенесенням вздовж осі Оу*** (рис. 122).

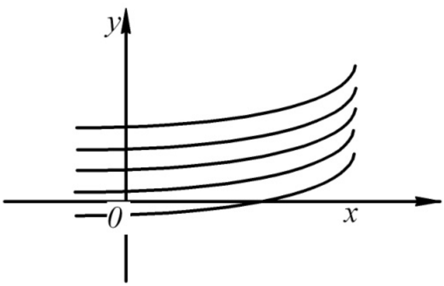


Рис. 122. Геометричне зображення множини розв'язків невизначеного інтеграла

Відмітимо без доведення, що якщо функція $f(x)$ неперервна на деякому проміжку, то на цьому проміжку існує первісна функції $f(x)$, а значить і невизначений інтеграл $\int f(x)dx.$

Основні властивості невизначеного інтеграла

1°. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$$

2°. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

3°. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C .$$

4°. Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx .$$

Обчислимо похідні правої і лівої частини:

$$\left(C\int f(x)dx\right)' = C\left(\int f(x)dx\right)' = Cf(x), \quad \left(\int Cf(x)dx\right)' = Cf(x) .$$

5°. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох неперервних функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Обчислимо похідну правої частини:

$$\left(\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' \pm \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) \pm f(x_2) .$$

Отже, функція $\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$ – первісна підінтегральної функції $f_1(x) \pm f_2(x).$

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \mu \neq -1.$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

10. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.

11. $\int e^x dx = e^x + C$.

12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C,\ \ a \neq 1$.

13. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a \neq 1$.

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$, $a > 0$.

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, $a \neq 0$.

Ці формули легко перевірити диференціюванням.

Наприклад.

Знайти $\int 3x^5 dx$.

Застосуємо властивість 4°, $\int 3x^5 dx = 3\int x^5 dx = 3 \cdot \frac{x^6}{6} + C = \frac{x^6}{2} + C.$

Знайти $\int \left(4x^3 - 6x^2 + 2x + 3\right) dx$.

Маємо $\int \left(4x^3 - 6x^2 + 2x + 3\right) dx = 4\int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 2\int x dx + 3\int dx =$

$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 3x + C = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x + C .$$

Задача. Граничний дохід фірми описується функцією

$$R'(x) = 50000 - x ,$$

де x – кількість виробленої продукції. Якою буде функція сумарного доходу фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий дохід?

За означенням граничного доходу

$$R(x) = \int \left(50000 - x\right) dx = 50000x - \frac{x^2}{2} + c.$$

Враховуючи умову, що $R(0) = 0$, обчислимо константу С:

$$R(0) = 0 = 50000 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 0 .$$

Отже, сумарний дохід фірми $R(x) = 50000x - \frac{x^2}{2}$.

Запитання для самоконтролю

1. Яка функція називається первісною для даної функції?
2. Знайти первісні для функцій: 3; 4 x^3; *cos x;* $\frac{2}{x}$.
3. Первісна визначається неоднозначно. Як це розуміти?
4. Як записати всю сукупність первісних функцій?
5. Що називається невизначеним інтегралом?
6. Чому дорівнює похідна і диференціал невизначеного інтеграла?
7. У чому полягає правило інтегрування виразу, що містить сталий множник?
8. Чому дорівнює інтеграл від диференціала деякої функції?

9. У чому полягає правило інтегрування алгебраїчної суми функцій?

10. Як довести справедливість кожної формули інтегрування?

11. Що таке інтегральна крива?

12. Записати основні формули інтегрування.

Знаходження інтегралів (основні методи інтегрування)

Приклади інтегралів від елементарних функцій, які не виражаються через елементарні функції. Інтеграли від деяких елементарних функцій не є елементарними функціями. Наведемо приклади таких функцій:

1. $\int e^{-x^2}dx.$
2. $\int \cos x^2 dx.$
3. $\int \sin x^2 dx.$
4. $\int \frac{dx}{\ln x},\ \ 0 < x \neq 1.$
5. $\int \frac{\cos x}{x}dx,\ \ x \neq 0.$
6. $\int \frac{\sin x}{x}dx.$

Про такі інтеграли кажуть, що вони "не беруться". Такі інтеграли часто зустрічаються в різних питаннях науки і техніки і для обчислення їх використовують наближені методи.

Розглянемо основні методи інтегрування функцій.

Метод розкладання інтеграла

Метод інтегрування, який ґрунтується на застосуванні рівності $\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$, називають методом розкладання.

Наприклад. Знайти інтеграл $\int \left(2\sin x - 3^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

$$\int \left(2\sin x - 3^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = 2\int \sin x dx - \int 3^x dx + \int x^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$= -2\cos x - \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C.$$

Метод підстановки (заміни змінної)

В основі цього методу лежить формула диференціювання складеної функції. Якщо $F'(x) = f(x), x \in (a;b)$, то для довільної диференційованої на проміжку $(a;b)$ функції $x = \varphi(t)$, $\varphi(t) \in (a;b)$, якщо $t \in (a;b)$ маємо:

$$\left(F(\varphi(t))\right)' = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \quad t \in (a;b).$$

Отже, справджується рівність

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C .$$

Врахувавши означення диференціала, можна записати так:

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C.$$

Наприклад. 1. Знайти інтеграл $\int \sin x \cos x dx$.

Введемо підстановку $t = sin\, x$. Диференціюючи, маємо $dt = \cos x dx$. Підставивши ці значення в даний інтеграл, одержимо $\int \sin x \cos x dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C$. Замінивши t його виразом через x, знаходимо $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$. Коротко це записують так:

$$\int \sin x \cos x dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C .$$

2. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \\ xdx = -\frac{1}{2}dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C .$$

3. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \left| \begin{matrix} 1+\ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{t}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C = \frac{2}{3}(1+\ln x)\sqrt{(1+\ln x)} + C.$$

4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^5\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^5\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} \arcsin x = t \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^5} = \int t^{-5}dt = -\frac{1}{4}t^{-4} + C =$$

$$= -\frac{1}{4(\arcsin x)^4} + C.$$

Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u(x)$ та $v(x)$ диференційовані на деякому проміжку.

Тоді за правилом знаходження похідної добутку маємо:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Звідси $uv' = (uv)' - u'v$. Проінтегруємо обидві частини рівності і отримаємо: $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$.

Цю формулу називають *формулою інтегрування частинами.*

Наприклад. 1. Знайти інтеграл $\int xe^x dx$.

$$\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2. Знайти інтеграл $\int x^3 \ln x dx$.

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx, & v = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

3. Знайти інтеграл $\int arctgxdx$.

$$\int arctqxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + C.$$

Розглянемо деякі типи інтегралів, які знаходяться методом інтегрування частинами:

1. Інтеграли виду $\int P_n(x) \cdot e^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x) \sin x dx$, $\int P_n(x) \cos x dx$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня *n*.

Щоб знайти ці інтеграли, треба застосувати метод інтегрування частинами *n* раз, взявши за функцію u многочлен $P_n(x)$.

2. Інтеграли виду $\int e^{\alpha x} \sin x dx$, $\int e^{\alpha x} \cos x dx$, $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$.

Щоб знайти ці інтеграли, треба метод інтегрування частинами застосувати двічі. Кожен раз за функцію u треба брати або показникову функцію, або тригонометричну.

3. Інтеграли виду $\int P_n(x) \ln x dx,$, $\int P_n(x) \arccos\ x dx$.

Тут за u слід взяти множник $\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos\ x$.

Наприклад. 1. Знайти інтеграл $\int x^2 \sin x dx$.

$$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= -x^2 \cos x - \int \left(-2x \cos x\right) dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

Для знаходження інтеграла $\int x\cos xdx$ використаємо знову метод інтегрування частинами:

$$\int x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \cos xdx, & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin xdx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C\ .$$

У результаті отримаємо остаточну відповідь:

$$\int x^2 \sin xdx = -x^2 \cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C = -x^2 \cos x +$$

$$+2x\sin x + 2\cos x + C\ .$$

2. Знайти інтеграл $\int e^{2x}\cos 3xdx.$

$$\int e^{2x}\cos 3xdx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x} \\ dv = \cos 3xdx, & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix} = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin 3xdx, & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{vmatrix} = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx.$$

Отже, одержали рівняння:

$$\int e^{2x}\cos 3xdx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx\ ,$$

з якого можна визначити заданий інтеграл:

$$\int e^{2x}\cos 3xdx = \frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x\right) + C =$$

$$\frac{1}{13}e^{2x}\left(3\sin 3x + 2\cos 3x\right) + C\ .$$

Розклад многочлена на лінійні множники

Нехай маємо многочлен від змінної z з дійсними коефіцієнтами

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0.$$

Комплексне число z називають коренем многочлена, якщо це число є розв'язком рівняння $P_n(z) = 0.$

Теорема Безу. Многочлен $P_n(z)$ ділиться без остачі на z-z_o тоді і тільки тоді, коли z_o є його коренем.

Теорема Гаусса (основна теорема алгебри). Будь-який многочлен вище нульового степеня має хоча б один корінь.

Згідно з теоремою Безу і основною теоремою алгебри маємо, що будь-який многочлен n-го степеня можна розкласти на n лінійних множників.

$$P_n(z) = A(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) .$$

Розклад правильних раціональних дробів на суму елементарних дробів

Під ***раціональним дробом*** розуміють відношення двох многочленів. Раціональний дріб називають ***правильним***, коли степінь знаменника більший за степінь чисельника.

Будь-який неправильний раціональний дріб за допомогою ділення чисельника на знаменник можна подати у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу. Тому інтегрування раціональних дробів зводиться до інтегрування правильних дробів.

Для інтегрування правильного раціонального дробу його подають як суму найпростіших дробів, тобто дробів вигляду $\dfrac{A}{(x-a)^m}$ і $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, де квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, а m і n – цілі додатні числа.

Наприклад. Представити раціональний дріб $\dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$ у вигляді суми елементарних дробів.

Розкладемо знаменник правильного дробу на множники:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2) .$$

Подамо раціональний дріб у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2} .$$

Визначимо невизначені коефіцієнти A_1, A_2, A_3. Зведемо праву частину до спільного знаменника і прирівняємо чисельники у двох дробів.

$$2x+3 = A_1(x-1)(x+2) + A_2(x(x+2) + A_3x(x-1) =$$
$$= (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (A_1 + 2A_2 - A_3)x - 2A_1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x. Отримаємо:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ A_1 + 2A_2 - A_3 = 2 \\ \quad -2A_1 = 3. \end{cases}$$ Звідси знаходимо: $A_1 = -\dfrac{3}{2}$; $A_2 = \dfrac{5}{3}$; $A_3 = -\dfrac{1}{6}$.

Значить, $\dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x} = -\dfrac{3}{2x} + \dfrac{5}{3(x-1)} - \dfrac{1}{6(x+2)}$.

Інтегрування елементарних дробів

Дроби виду $\dfrac{A}{(x-a)^m}$ і $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$ називаються елементарними. Розглянемо інтегрування деяких з цих дробів.

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\ln|x-a|$.

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$.

3) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = A\int \frac{x}{x^2+px+q}dx + B\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Розглянемо кожен з цих інтегралів окремо:

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \begin{vmatrix} t = x^2+px+q \\ dt = (2x+p)dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = = \ln\left| \; x^2+px+q \; \right| + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \left| \begin{matrix} t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctq \frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctq \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Отже,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctq \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Інтегрування раціональних функцій. Приклади

Приклад. Знайти інтеграл

$$\int \frac{x^2-5}{x^2-1}dx = \int (1 - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1})dx = x - 2\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C =$$

$$= x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + C .$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$.

Розклавши знаменник на множники, одержимо:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2).$$

Подамо даний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

Далі маємо: $6x^2 - 13x + 4 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$ або $6x^2 - 13x + 4 = (A+B+C)x^2 - (3A+2B+C)x + 2A$.

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь, з якої знаходимо А = 2, В=3, С=1.

$$\begin{cases} A+B+C=6; \\ 3A+2B+C=13; \\ 2A=4. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx = 2\int \frac{dx}{x}+3\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{dx}{x-2} =$$
$$= 2\ln|x|+3\ln|x-1|+\ln|x-2|+C = \ln\left|x^2(x-1)^3(x-2)\right|+C.$$

Запитання для самоконтролю

1. Навести приклади інтегралів від елементарних функцій, які не виражаються через елементарні функції.
2. Які методи інтегрування ви знаєте?
3. Сформулювати теорему Безу, теорему Гаусса.
4. Що розуміють під раціональним дробом?
5. Які раціональні дроби називають правильними?
6. Які дроби називаються елементарними?

2.3.2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

Задачі, які приводять до визначеного інтеграла.

Задача 1. Знайти площу криволінійної трапеції.

Під *криволінійною трапецією* розуміють плоску фігуру, обмежену графіком неперервної функції $y=f(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$, $f(x)\ge 0$ при $x\in[a,b]$ (рис. 123).

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних відрізків точками $a=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_{n-1}<x_n=b$ (рис. 124).

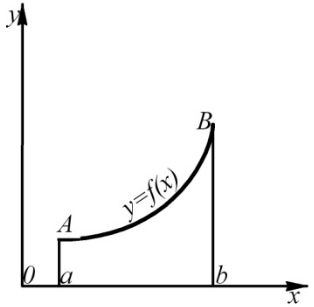


Рис. 123. Плоска фігура, обмежена лініями *x*=*a*, *x*=*b*, *y*=f(*x*)

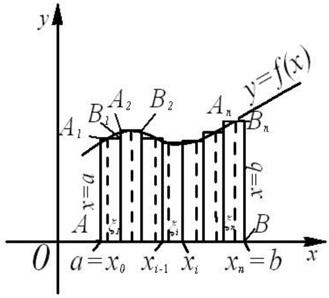


Рис. 124. Розбиття відрізка [*a,b*] на *n* рівних відрізків

Довжини цих відрізків однакові і дорівнюють $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$.

Криволінійна трапеція поділиться на n частин. На кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ довільно візьмемо деяку точку і позначимо її ξ_i. Якщо m_i *і* M_i – найменше і найбільше значення функції на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, то очевидно, $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, де i = 1,…, n. Помножимо кожну з нерівностей на $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і знайдені нерівності почленно додамо. Тоді одержимо таку нерівність:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Звідси випливає, що границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ існує, не залежить від вибору точок ξ_i і завжди дорівнює площі криволінійної трапеції. Отже, $S = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Задача 2 (про обчислення довжини шляху за відомою швидкістю). Нехай точка *M* рухається прямолінійно і її швидкість у кожний момент часу $\vartheta = f(t)$. Треба знайти довжину шляху S, який пройде точка за проміжок часу від $t = \alpha$ до $t = \beta$.

Розіб'ємо відрізок $[\alpha, \beta]$ на n довільних відрізків. Припустимо, що відрізок $[t_k; t_{k+1}]$ настільки малий, що швидкість точки на цьому відрізку можна вважати сталою і рівною $\vartheta = f(\xi_k)$, де $\xi_k \in [t_k; t_{k+1}]$. Тоді довжина шляху ΔS_k, який пройшла точка за час $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, дорівнюватиме $\Delta S_k \approx f(\xi_k)\Delta t_k$.

А весь шлях можна обчислити за формулою: $S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta t_k$.

Якщо $\Delta t_k \to 0$, то $S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta t_k$.

Визначений інтеграл та умови його існування

Розглянемо функцію *f(x)* на відрізку $[a;b]$. Поділимо цей відрізок на *n* рівних частин. У кожному з цих відрізків візьмемо по одній точці і позначимо її ξ_i. Тоді сума $f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ називається інтегральною сумою функції $f(x)$. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Означення. Якщо границя інтегральної суми існує і не залежить від вибору точок ξ_i, то функція *f(x)* називається інтегрованою на відрізку $[a;b]$, а границя *називається визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, його позначають $\int_a^b f(x)dx.$ Отже, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Запишемо без доведення наступну теорему.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Якщо інтегрована на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ невід'ємна, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції $f(x)$*б*, віссю абсцис і прямими $x = a$ і $x = b$, тобто $S = \int_a^b f(x)dx.$

У цьому полягає **геометричний зміст** визначеного інтеграла.

Основні властивості визначеного інтеграла

Наведемо основні властивості визначеного інтеграла.

1) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від функцій, що додаються: $\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$

2) Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)$.

Ці дві властивості випливають з означення інтеграла і властивостей границь.

3) При перестановці меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4) Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

5) Відрізок інтегрування можна розбити на частини:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ і для кожного x справджується нерівність $f(x) \le g(x)$, то справджується також нерівність $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

Теорема про середнє значення визначеного інтеграла

Для неперервної функції справедлива така цікава теорема, яка називається *теоремою про середнє значення* визначеного інтеграла.

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, то існує на $[a;b]$ така точка ξ, що $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$*

Зазначимо, що коли $a = b$, то ця рівність очевидна.

Розглянемо випадок, коли $a < b$. Через m і M позначимо відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Тоді $m \le f(x) \le M$ для будь-якого $x \in [a;b]$. Тому

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Поділивши почленно цю рівність на $b - a > 0$, одержимо:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Оскільки $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то вона набуде будь-якого значення з відрізка $[m;M]$, тому існує така точка $\xi \in [a;b]$, що

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Для невід'ємної функції теорема про середнє має просте геометричне тлумачення. У ній стверджується, що площа криволінійної трапеції, яка відповідає функції $f(x)$, дорівнює площі прямокутника, у якого основа дорівнює основі трапеції, а висота дорівнює одному із значень інтегрованої функції.

Зазначимо, що тут змінну інтегрування позначено буквою t, оскільки буквою x позначено верхню межу інтеграла.

Формула Ньютона-Лейбніца. Для обчислення визначеного інтеграла від функції в тому випадку, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл, є формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

тобто визначений інтеграл дорівнює різниці значень первісної при верхній і нижній межі інтегрування.

Методи обчислення визначених інтегралів

Метод заміни змінної.

При обчисленні визначеного інтеграла методом заміни змінної (способом підстановки) визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ перетворюється за допомогою підстановки $u=\psi(x)$ або $x=\varphi(u)$ у визначений інтеграл відносно нової змінної u. При цьому старі межі інтегрування замінюють відповідно новими межами інтегрування α і β, які знаходять з вихідної підстановки.

Таким чином, маємо $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_\alpha^\beta F(u)du$.

Приклад. Знайти $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$.

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x dx}{(1-\cos x)^2} =$$

$$\left| \begin{matrix} u = 1-\cos x, & u_1 = 1-\cos\frac{\pi}{2} = 1. \\ du = \sin x dx, & u_2 = 1-\cos\pi = 2 \end{matrix} \right| = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^2} = -2u^{-1}\Big|_1^2 = -1+2 = 1.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ та їх похідні $u'(x)$ і $v'(x)$ неперервні в проміжку $[a;b]$, то формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \cdot$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\limits_e^4 x\ln x dx$.

$$\int\limits_e^4 x\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x \,\Big|_e^4 - \frac{1}{2}\int\limits_e^4 x^2\frac{dx}{x} =$$

$$= 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2 \,\Big|_e^4 = 8\ln 4 - \frac{e_2}{2} - 4 + \frac{e^2}{4} = 8\ln 4 - 4 - \frac{e^2}{4}.$$

Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла

Площа криволінійної трапеції *aABb* (рис. 125), обмеженої графіком неперервної функції $y=f(x)$, де x є $[a,b]$, відрізком $[a,b]$ осі Ox, відрізками прямих $x=a$ і $x=b$, обчислюється за формулою:

$$S=|\,I\,|, \text{ де } I=\int\limits_a^b f(x)dx \qquad (146)$$

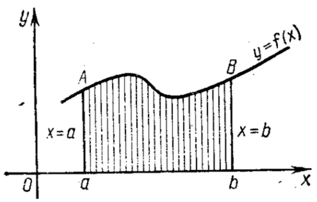


Рис. 125. Криволінійна трапеція, обмежена лініями $y = f(x), x=a, x=b$

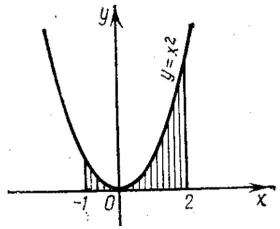


Рис. 126. Плоска фігура, обмежена лініями $y=x^2, x=-1, x=2$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=x^2$, прямими $x=-1$, $x=2$ і віссю абсцис (рис. 126).

Розв'язання. Застосуємо формулу (146), отримаємо:

$$I=\int\limits_1^2 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(8-(-1)) = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3, \text{ тобто } S=3 \text{ кв.од.}$$

Площу фігури ABCD (рис. 127), обмежену графіками неперервних функцій $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, де $x \in [a,b]$, відрізками прямих $x=a$ і $x=b$, знаходимо за формулою:

$$S=|I|, \text{ де } I=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx \qquad (147).$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю Ox і лінією $y=x^2-2x$ (рис. 128).

Розв'язання. Знайдемо границі інтегрування, тобто абсциси точок перетину графіків функцій $y=x^2-2x$ і $y=0$. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y=x^2-2x \\ y=0 \end{cases} x^2-2x=0, x(x-2)=0, x=0, x=2.$$

Тепер знайдемо шукану площу:

$$I=\int_0^2 (x^2-2x-0)dx=\int_0^2 x^2dx-2\int_0^2 xdx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2-2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{3}(8-0)-(4-0)=\frac{8}{3}-4=-1\frac{1}{3};\ S=1\frac{1}{3} \text{ (кв. од.)}$$

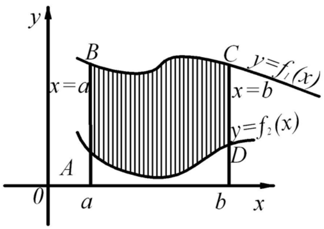


Рис. 127. Фігура, обмежена лініями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$

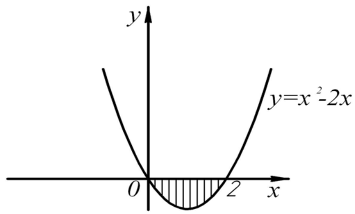


Рис. 128. Фігура, обмежена лінією $y=x^2-2x$ і віссю Ox

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2$ і $y^2=x$ (рис. 129).

Розв'язання. Знайдемо границі інтегрування, тобто абсциси точок перетину графіків функцій $y=x^2$ і $y^2=x$. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y=x^2; \\ y^2=x; \end{cases} x^4=x; x(x^3-1)=0; x=0; x=1.$$

Шукану площу знаходимо за формулою (147) при $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=\sqrt{x}$:

$$I=\int_0^1(x^2-\sqrt{x})dx=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1-\frac{3^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1=\frac{1}{3}x^3\bigg|_0^1-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}(1-0)-\frac{2}{3}(1-0)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3};\;\; S=\frac{1}{3}\;\;(кв.\;од.)$$

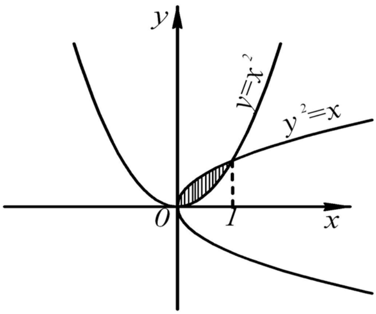


Рис.129. Фігура, обмежена лініями $y=x^2, y^2=x$

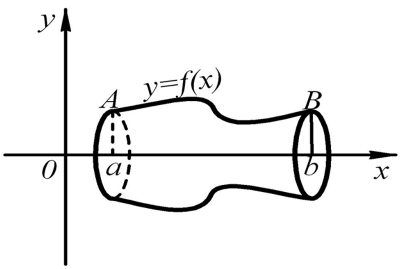


Рис. 130. Тіло, утворене обертанням навколо осі *Ox* криволінійної трапеції *aABb*

Застосування визначеного інтеграла до розв'язування прикладних задач

Об'єм тіла обертання. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* криволінійної трапеції *aABb,* обмеженої неперервною кривою $y=f(x)$, де $x \in [a,b]$, відрізком $[a,b]$ осі Ox, відрізками прямих $x=a$ і $x=b$ (рис. 130) обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{148}$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої параболою $y^2=x$, прямою $x=3$ і віссю Ox.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (148), знаходимо шуканий об'єм:

$$V = \pi \int_0^3 2x dx = 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 = \pi x^2\Bigg|_0^3 = \pi(9-0) = 9\pi \text{ (куб. од.).}$$

Об'єм тіла, утворений обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої неперервною кривою $x=f(y)$, де $y \in [a,b]$, відрізком $[a,b]$ осі Oy, відрізками прямих $y=a$ і $y=b$ вираховується за формулою:

$$V = \pi \int_a^b f^2(y)dx \tag{149}$$

Приклад 5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, яка обмежена параболою $y=x^2$ і прямою $y=4$.

Розв'язок. Використовуючи формулу (149), знаходимо шуканий об'єм: $V = \pi \int_0^4 y dy = \pi \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = \frac{\pi}{2}(16-0) = 8\pi$ (куб. од.).

Шлях, пройдений точкою. Якщо точка рухається прямолінійно і її швидкість $v=f(t)$ є відома функція часу t, то шлях, пройдений точкою за відрізок часу $[t_1, t_2]$, вираховується за формулою:

$$S = \int_{t_2}^{t_1} f(t)dt \tag{150}$$

Приклад 6. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю $v = 0{,}1t^3 \frac{м}{с}$. Обчислити шлях, пройдений тілом за перші 10 с.

Розв'язок. Застосовуючи формулу (150), знаходимо шуканий шлях:

$$S=\int_0^{10}0,1t^3dt=\frac{1}{10}\cdot\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^{10}=\frac{1}{40}\cdot10^4=250\text{ (мм)}$$

Робота сили. Якщо змінна сила *F=F(x)* діє в напрямку осі Ох, то робота сили на відрізку [*a,b*] обчислюється за формулою:

$$A=\int_a^b F(x)dx \qquad (151)$$

Приклад 7. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на 0,06 м, якщо сила 1 *Н* розтягує її на 0,01 м?

Розв'язок. Згідно із законом Гука сила *F*, розтягуючи чи стискаючи пружину на *x* м, дорівнює *F=kx, де k* – коефіцієнт пропорційності.

З умови випливає, що $1=k\cdot0{,}01$, тобто $k=100$, і, відповідно, $F=100x$.

Шукану роботу знаходимо за формулою (151):

$$A=\int_0^{0.06}100xdx=100\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,06}=50\cdot0{,}0036=0{,}18\text{ (Дж).}$$

Приклад 8. Сила 196,2 Н розтягує пружину на 18 см. Яку роботу вона виконує?

Розв’язок. За законом Гука *F=kx*, звідки $\kappa=\frac{F}{x}=\frac{196{,}2}{0{,}18}=1090$.

Тобто, *F=1090x*. Знаходимо шукану роботу:

$$A=\int_0^{0.18}1090xdx=\frac{1090}{2}x^2\Bigg|_0^{0,18}\approx545\cdot0{,}0324\approx17{,}7\ (\text{Дж}).$$

Обчислення загального доходу.

Приклад 9. Розглянемо випадок, коли граничний прибуток від реалізації продукції є сталим, і для конкретності припустимо, що

MR=f (x)=10 грн, де *x* – кількість проданих одиниць продукції. Обчислити дохід від продажу 1500 одиниць продукції.

$$R=10\cdot1500=15000\text{ грн.}$$

З іншого боку, з огляду на означення граничного прибутку і первісної функції:

$$R=\int_0^{1500}10dx=10x\Big|_0^{1500}=15000\text{ грн.}$$

Зауважимо, що обчислення загального доходу через визначений інтеграл є більш загальним, оскільки граничний ефект є, як правило, функцією *x*.

Графічно ситуацію прикладу 9 можна проілюструвати таким чином (рис. 131).

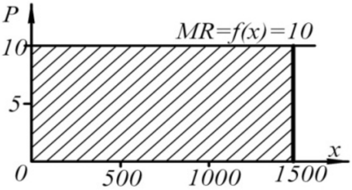


Рис. 131. Графік залежності граничного прибутку від кількості проданих одиниць продукції

Зростання фондів організації.

Приклад 10. Фонди однієї організації зростають завдяки щорічним кампаніям літніх таборів для малозабезпечених.

Витрати на кампанію становлять 10000 грн щодня. Відомо, що внески великі на початку кампанії, надалі вони спадають. Функція, що описує одержання внесків за один день, має вигляд:

$c(t) = -100t^2 + 200000$, де t – дні, с (t) – внески за день.

Організація хоче максимально збільшити отриману суму доходів.

Визначте, скільки часу треба проводити кампанію для отримання максимальної суми доходу.

Чому дорівнюють загальні витрати на кампанію?

Чому дорівнюють загальні внески?

Чому дорівнює дохід, що очікується?

Розв’яжемо задачу за допомогою графіків (рис. 132).

Щоденні витрати споживання: $I(t)$=10000.

На рисунку подано дві функції: витрат споживання $I(t)$ і внесків $c(t)$.

Поки рівень внесків перевищує рівень витрат, дохід є позитивним. Він буде позитивним до того часу, поки графіки двох функцій не перетнуться. Далі витрати перевищують вклади.

Дві функції перетинаються, коли $c\,(t)=I(t)$:

$$20000 - 100t^2 = 10000,\ 10000 = 100t^2,\ t^2 = 100.\ t = 10 \text{ днів.}$$

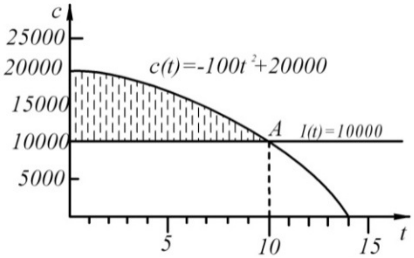


Рис. 132. Графік залежності витрат споживання *I(t)* і внесків *c(t)*

Загальні витрати компанії за t =10 днів:

$$E=10000\cdot 10=100000 \text{ (грн)}.$$

Внески протягом 10 днів – площа під c між $t = 0$ і $t = 10$:

$$C=\int_0^{10}(-100t^2+20000)dt=(20000t-\frac{100t^3}{3})\Big|_0^{10}=166666{,}67 \text{ (грн)}.$$

Сума очікуваних доходів: 166666,67–100000=66666,67 (грн).

Запитання для самоконтролю

1. Які задачі приводять до визначеного інтеграла?
2. Що називається визначеним інтегралом?
3. Знайти визначений інтеграл для функцій: 3; $4x^3$; $\cos x$.
4. У чому полягає правило інтегрування алгебраїчної суми двох функцій?
5. Чому дорівнює інтеграл з однаковими межами?
6. Як зміниться визначений інтеграл, якщо поміняти межі інтегрування?
7. Сформулювати теорему про середнє значення визначеного інтеграла.
8. Яке геометричне тлумачення має теорема про середнє?
9. Записати формулу Ньютона-Лейбніца.
10. Які ви знаєте методи обчислення визначеного інтеграла?
11. Записати формули для обчислення об'єму і площі поверхні тіл обертання.
12. Записати формули для обчислення площі, довжини дуги плоскої фігури.

2.3.3. *ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ*

Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

Нехай треба обчислити об'єм тіла, обмеженого зверху неперервною поверхнею $z = f(x,y)\ \left(f(x,y) \geq 0\right)$, знизу – кінцевою замкнутою областю σ площини *Oxy* та з боків – циліндричною поверхнею, побудованою на межі області σ і що має твірні, паралельні осі *Oz*.

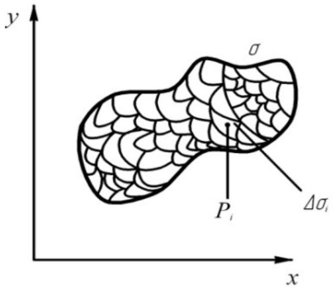


Рис.133. Поділ області σ на елементарні області

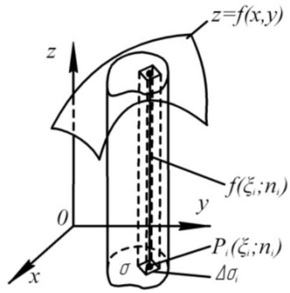


Рис. 134. Циліндричне тіло (циліндроїд)

Ділимо область σ на елементарні області Δ σ_i. У кожній $\Delta\sigma_i$ вибираємо по одній точці *Pi* $(\xi_i;\eta_i)$ (рис. 133). Тоді об'єм прямого елементарного циліндра, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y)$ і знизу областю $\Delta\sigma_i$, приблизно дорівнює $f(\xi_i\ ;\ \eta_i)\cdot\ \Delta\sigma_i$, де $\Delta\sigma_i$ – площа відповідної елементарної області. Для об'єму всього циліндричного тіла отримуємо наближення (рис. 134).

$$v \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \qquad (152).$$

Наближення (6) буде тим точнішим, чим меншим буде найбільший з діаметрів λ елементарних областей Δ σ_i. Можна й у цьому випадку прийняти:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \qquad (153).$$

Означення 1. Вираз (6) називається інтегральною сумою для функції $f(x,y)$ в області σ. Позначимо через λ найбільший з діаметрів елементарних областей $\Delta\,\sigma_i$ при розбитті області σ.

Означення 2. Якщо існує границя (153), яка не залежить від способу поділу області σ на частини $\Delta\sigma_i$ і вибору точок $P_i(\xi_i;\ \eta_i)$, то ця границя називається подвійним інтегралом від функції $f(x,y)$ по області σ і позначається:

$$\iint f(x,y)d\sigma,\ \ чи \iint f(x,y)dxdy.$$

Тут $f(x,y)$ називається підінтегральною функцією, σ – областю інтегрування, x та y – змінними інтегрування, $d\sigma$ (або $dxdy$) – елементом площі. Таким чином, за означенням

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\ .$$

Властивості подвійних інтегралів

Для подвійних інтегралів виконуються такі властивості:

1) Якщо $f(x,y) = C$, $C = const$, $(x;y)\in D$ – область інтегрування то

$$\iint\limits_{D} Cdxdy = CS,$$

де S – площа області D.

2) Якщо функції $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ інтегровні в області D, то в цій області інтегровані також і функції $f(x,y)\pm\varphi(x,y)$ і справджується рівність

$$\iint\limits_{D}\big(f(x,y)\pm\varphi(x,y)\big)dxdy. = \iint\limits_{D}\big(f(x,y)\big)dxdy \pm \iint\limits_{D}\big(\varphi(x,y)\big)dxdy$$

3) Якщо функція $f(x,y)$ інтегровна в області D, то в цій області інтегровна й функція $Cf(x,y)$, де $C = const$, причому

$$\iint\limits_{D} Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

4) Якщо функція $f(x,y)$ інтегровна в кожній з областей D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то вона інтегровна також в області $D = D_1 \cup D_2$, причому й функція $Cf(x,y)$, де $C = const$, причому

$$\iint_D \big(f(x,y)\big)dxdy. = \iint_{D_1} \big(f(x,y)\big)dxdy + \iint_{D_2} \big(f(x,y)\big)dxdy$$

5) Якщо $f(x,y) \ge 0$, $(x;y) \in D$ і функція $f(x,y)$ інтегровна в області D, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy \ge 0$$

6) Якщо $f(x,y) \ge \varphi(x,y)$, $(x;y) \in D$ і кожна з функцій $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ інтегровна в області D, то

$$\iint_D \big(f(x,y)\big)dxdy \ge \iint_D \big(\varphi(x,y)\big)dxdy$$

Обчислення подвійних інтегралів

Нехай область σ обмежена знизу кривою $y_1=y_1(x)$, зверху – кривою $y_2=y_2(x)$, з боків – прямими $x=a$ та $x=b$ (рис. 135). Для обчислення подвійного інтеграла від функції $f(x,y)$ по такій області σ приймаємо без доказів наступну формулу, що зводить його обчислення до повторного інтеграла:

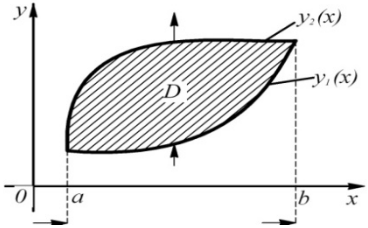


Рис. 135. Фігура, обмежена графіками $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$

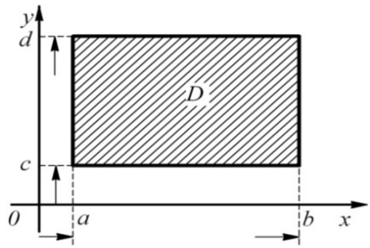


Рис. 136. Прямокутна область, обмежена лініями $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2 x} f\,(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

З геометричної точки зору $\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy$ дорівнює об'єму відповідного циліндроїда; $\iint\limits_{\sigma} dxdy$ дорівнює площі області σ.

Подвійний інтеграл по прямокутній області σ (рис. 136) обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Приклад 11. Знайти інтеграл від функції $z=x^2+y^2$ по області D: $x=1,\ y=0,\ y=x$.

Розв'язування (рис. 137).

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{y=0}^{y=x} (x^2+y^2)dy = \int\limits_0^1 (x^2 y + \frac{y^3}{3})\Big|_0^x dx = \int\limits_0^1 (x^3 + \frac{x^3}{3})dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

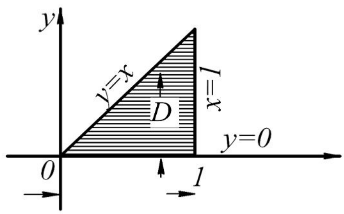


Рис. 137. Область *D*, обмежена лініями *x*=1, *y=0, y=x*

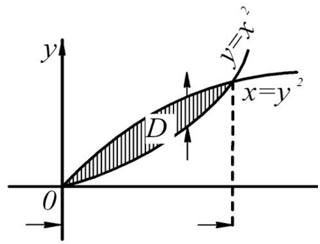


Рис. 138. Область *D*, обмежена лініями $y=x^2$, $x=y^2$

Приклад 12. Знайти подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{x}{y}dxdy$ по області D: $y=x^2$, $x=y^2$ (рис. 138).

Розв'язування. $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}, \quad x^2 = \sqrt{x}, \qquad \sqrt{x}\left(\sqrt{x^3} - 1\right) = 0$,

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1.$$

Отже, $\iint\limits_D \frac{x}{y} dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x}{y} dy = \int\limits_0^1 x(\ln y)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 x(\ln\sqrt{x} - \ln x^2) dx =$

$$= \int\limits_0^1 x\left(\frac{1}{2}\ln x - 2\ln x\right)dx = -\frac{3}{2}\int\limits_0^1 x\ln x dx = -\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x dx\right) = \frac{3}{8}.$$

Застосування подвійних інтегралів у геометрії і механіці

Площа S фігури, яка займає плоску область D, обчислюється за формулою:

$$S = \iint\limits_D dxdy\ .$$

Об'єм V вертикального циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y)$, а знизу областю D площини xOy, знаходиться за формулою:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy\ .$$

Нехай D – деяка частина площини xOy, яка зайнята матеріальною фігурою з густиною $\rho = \rho(x,y)$. Тоді:

✓ маса фігури D обчислюється за формулою:

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy\ ;$$

✓статичні моменти M_x і M_y фігури відповідно координатних осей Ox і Oy – за формулами:

$$M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy\ ;$$

✓ координати центра мас – за формулами:

$$\vec{x} = \frac{M_x}{m}, \quad \vec{y} = \frac{M_y}{m};$$

✓моменти інерції I_x і I_y відносно координатних осей Ox і Oy і момент інерції I_0 відносно початку координат – за формулами:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy,$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy .$$

Приклад 13. Знайти координати центра мас фігур, обмежених параболою $y= 4 - x^2$ і віссю Ox.

Розв'язування. Фігура симетрична відносно осі Oy, то очевидно, що $\bar{x}=0$. Ординату $\bar{y}$ центра мас знайдемо за формулою:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}.$$

Отже, $M_x = \iint_D ydxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} ydy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)dx = \frac{256}{15}$,

$$\iint_D dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} dy = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \frac{32}{3}.$$

Отже, $\bar{y} = (\frac{256}{15}):(\frac{32}{3}) = \frac{8}{5}$.

Приклад 14. Знайти момент інерції відносно початку координат фігури, обмеженої параболою $y^2 = 4ax$, прямою $y=2a$ і віссю Oy.

Розв'язування. Знаходимо:

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2a} dy \int_0^{y^2/4a} (x^2+y^2)dx = \int_0^{2a} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\Big|_0^{y^2/4a} dy =$$

$$= \int_0^{2a}\left(\frac{y^6}{192a^3} + \frac{y^4}{4a}\right)dy = \frac{178}{105}a^4.$$

Запитання для самоконтролю

1. Які задачі приводять до поняття подвійного інтеграла?
2. Що називається подвійним інтегралом і які його властивості?
3. Знайти визначений інтеграл для функцій: 3; $4x^3$; $\cos x$.
4. Наведіть формули для обчислення подвійного інтеграла.
5. Застосування подвійних інтегралів у геометрії і механіці.

2.4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

2.4.1. ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗКИ

Багато фізичних законів мають вигляд диференціальних рівнянь. Інтегрування цих рівнянь – складна справа. Одні диференціальні рівняння вдається розв'язати в явному вигляді, тобто записати шукану функцію у вигляді формули. Для інших ще й досі не знайдено зручних формул. У цих випадках знаходять наближені розв'язки за допомогою ЕОМ. Диференціальні рівняння досить просто і повно описують виробничі процеси. Тому важливо не лише вміти їх розв'язувати, а й складати.

Розглянемо деякі задачі, які приводять до диференціальних рівнянь.

Задача 1. Тіло, маса якого m, вільно падає з деякої висоти. Треба встановити закон, за яким змінюється швидкість падіння $v=v(t)$, якщо на тіло, крім сили тяжіння P, діє сила опору повітря F_o, пропорційна швидкості.

Нехай F – сила, під дією якої тіло рухається із швидкістю $v=v(t)$. Ця сила складається з сили тяжіння $P = mg$ і сили опору повітря $F_o = -kv$, де $k>0$, тобто $F = P + F_o = mg - kv$.

За другим законом Ньютона $F = ma$. Оскільки $a = v'(t) = \dfrac{dv}{dt}$, то

$$F = m\frac{dv}{dt}.$$

Підставивши це значення F у попереднє рівняння, маємо диференціальне рівняння:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv .$$

Розв'язком цього рівняння буде функція виду $v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$, де C – довільна стала.

Задача 2. Дослідним шляхом встановлено, що швидкість розмноження бактерій у будь-який момент часу додатна і пропорційна їх масі. Знайти залежність маси бактерій від часу.

Позначимо через *m(t)* масу бактерій у момент часу *t*; тоді $\frac{dm}{dt}$ буде швидкість розмноження цих бактерій. За умовою задачі швидкість розмноження $\frac{dm}{dt}$ пропорційна масі *m(t)* бактерій, тому

$$\frac{dm}{dt} = km(t) \text{, де } k>0.$$

Це рівняння містить шукану функцію *m(t)* і її похідну $\frac{dm}{dt}$, значить є диференціальним. Підстановкою можна перевірити, що розв'язком цього рівняння буде функція виду $m(t) = Ce^{kt}$, де C – довільна стала.

Задача 3. Нехай матеріальна точка маси *m* під дією сили *F* рухається вздовж осі *x*. Скласти рівняння руху точки.

Другий закон Ньютона $a = \frac{F}{m}$ матиме вигляд диференціального рівняння, якщо прискорення записати як другу похідну: $a = x''(t)$.

Рівняння $mx''(t) = F$ називають рівнянням механічного руху, де *x(t)* – невідома функція, *m і F* – відомі величини.

Залежно від умов задач по-різному записуються різні диференціальні рівняння. Наприклад:

а) сила *F* стала *(F=const),* тоді рівняння руху має вигляд $x''(t) = \frac{F}{m} = a$, де *a= const;*

б) сила періодично змінюється з часом, наприклад, за законом $F = F_o \sin \omega t$. Тоді рівняння руху є $x''(t) = \frac{F_o}{m} \sin \omega t$;

в) сила пропорційна зміщенню (рух ідеально пружної пружини): $F = -kx$, $k>0$ (знак мінус вказує на те, що напрям сили протилежний напряму зміщення). Маємо таке рівняння руху: $x''(t) = -\frac{k}{m} x$;

г) сила, обернено пропорційна квадрату відстані (вільний політ). Тоді рівняння руху має вигляд: $x''(t) = -\frac{k}{x^2}$.

Диференціальним рівнянням називається рівняння, у яке входять: незалежна зміна *x*, шукана функція *y* та її похідні або диференціали.

Символічно диференціальні рівняння записуються так:

$$F(x, y, y') = 0, \quad F(x, y, y'') = 0.$$

Диференціальне рівняння називається звичайним, якщо шукана функція залежить від одного незалежного змінного.

Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної або диференціала, що входить у дане рівняння.

Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називається така функція, яка перетворює це рівняння в тотожність.

Загальним розв'язком або загальним інтегралом диференціального рівняння називається такий розв'язок, до якого входить стільки незалежних довільних сталих, який порядок рівняння. Так, загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку має одну довільну сталу. Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, знайдений із загального при різних числових значеннях довільних сталих.

Значення довільних сталих знаходять при певних початкових значеннях аргументу і функції.

Графік частинного розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою.

Загальному розв'язку диференціального рівняння відповідає сукупність (сім'я) всіх інтегральних кривих.

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, до якого входять похідні або диференціали не вище ніж першого порядку.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,\varphi(y).$$

Щоб розв’язати це рівняння, треба спочатку відокремити змінні:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx,$$

а потім проінтегрувати обидві частини знайденої рівності:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння $x\left(1+y^2\right)dx = ydy.$

Розв’язання. Відокремивши змінні, маємо:

$$xdx = \frac{ydy}{(1+y^2)}.$$

Інтегруємо обидві частини цього рівняння:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{(1+y^2)};\quad \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Оскільки довільна стала С може набувати будь-яких числових значень, то для зручності дальших перетворень замість С пишемо $\frac{1}{2}\ln C$.

Потенціюючи останню рівність, одержимо $x^2 = \ln\left(C\left(1+y^2\right)\right)$.

Це і є загальний розв’язок даного рівняння.

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Однорідною функцією змінних x і y називається функція, всі члени якої мають однаковий степінь.

Наприклад. $f(x,y)=2x^2-5xy$, $f(x,y)=x^2y+xy^2$, $f(x,y)=2x+3y$ – однорідні функції відповідно другого, третього і першого степенів.

Рівняння вигляду $f(x,y)dx=\varphi(x,y)dy$, де $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ – однорідні функції одного й того самого степеня, називається однорідним.

Однорідне рівняння за допомогою підстановки $y = vx$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x+y)dx-xdy=0$.

Розв'язання. Дане рівняння є однорідним рівнянням першого степеня відносно змінних x і y. Припустимо, що $y=vx$, де v – нова функція від x.

Знайдемо диференціал добутку: $dy=xdv+vdx$. Підставивши вирази y і dy в дане рівняння, одержимо:

$$(x+vx)dx-x(xdv+vdx)=0,$$

звідки, зробивши спрощення, маємо:

$$xdx+vxdx-x^2dv-xvdx=0;\ xdx-x^2dv=0;\ dx-xdv=0.$$

Отже, одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні та проінтегрувавши, знаходимо:

$$dv=\frac{dx}{x},\int dv=\int\frac{dx}{x};\ v=\ln x+\ln C;\ v=\ln(Cx).$$

Замінивши в цьому виразі v на $\frac{y}{x}$, одержимо $y=x\ln(Cx)$. Це і є загальний розв'язок даного рівняння.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння вигляду $\frac{dy}{dx}+f(x)y+\varphi(x)=0$, де $f(x)$ і $\varphi(x)$ – функції від x, називається ***лінійним диференціальним рівнянням першого***

порядку. В окремому випадку *f(x)* і *φ(x)* можуть бути сталими величинами.

Це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $y=uz$, де u і z – нові функції від x.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{(x+1)}=(x+1)^3.$$

Розв'язання. Це лінійне рівняння: тут $f(x)=\frac{-2}{(x+1)}$, $\varphi(x)=-(x+1)^3$.

Припустимо, що $y=uz$, і продиференціюємо цю рівність за x:

$$\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dz}{dx}+z\cdot\frac{du}{dx}.$$

Підставивши тепер вирази для y та $\frac{dy}{dx}$ у дане рівняння, одержимо:

$$u\cdot\frac{dz}{dx}+z\cdot\frac{du}{dx}-\frac{2uz}{(x+1)}=(x+1)^3 \text{ або}$$

$$u\cdot\frac{dz}{dx}+z\cdot\left(\frac{du}{dx}-\frac{2u}{(x+1)}\right)=(x+1)^3. \quad (*)$$

Оскільки одну з допоміжних функцій u або z можна взяти довільно, то за u візьмемо один з частинних розв'язків рівняння $\frac{du}{dx}-\frac{2u}{(x+1)}=0$. Відокремивши в цьому рівнянні змінні та інтегруючи, маємо:

$$\frac{du}{u}-\frac{2dx}{(x+1)}=0,\ \int\frac{du}{u}=2\int\frac{dx}{(x+1)},\ \ln u=2\ln(x+1),\ u=(x+1)^2$$

(вважаємо, що довільна стала C дорівнює нулю, бо знаходимо один з частинних розв'язків).

Підставимо тепер вираз для u в рівняння (∗); тоді одержимо рівняння:

$$(x+1)^2\cdot\frac{dz}{dx}=(x+1)^3 \text{ або } \frac{dz}{dx}=x+1.$$

Звідси знаходимо:

$$\int dz = \int (x+1)dx; \quad z = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Знаючи u і z, одержимо тепер загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = uz = (x+1)^2\left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right) = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2 .$$

2.4.2. ПОНЯТТЯ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Неповні диференціальні рівняння другого порядку

Рівняння, яке має похідні (або диференціали) не вище другого порядку, називається диференціальним рівнянням другого порядку. У загальному вигляді рівняння другого порядку записують так:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку має дві довільні сталі.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x.$

Розв'язання. Це неповне диференціальне рівняння другого порядку вигляду $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x).$ Припустимо, що $\frac{dy}{dx} = z$; тоді дане рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \sin x \text{ , тобто } \frac{dz}{dx} = \sin x \text{ ,}$$

звідки $dz = \sin xdx.$ Інтегруючи останню рівність, одержимо

$$\int dz = \int \sin xdx, \text{ тобто } z = -\cos x + C_1.$$

Отже, $\frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1,$ тобто $dy = (-\cos x + C_1)dx.$

Знову інтегруючи, знаходимо:

$$\int dy = \int (-\cos x + C_1)dx \text{ або } y = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Це і є загальний розв’язок даного рівняння.

Приклад 5. Знайти частинний розв’язок рівняння $\frac{d^2 s}{dt^2} = 12t$, якщо $s = 2$ і $\frac{ds}{dt} = 20$ при $t=0$.

Розв’язання. Припустивши, що $\frac{ds}{dt} = z$, перепишемо дане рівняння у вигляді $\frac{dz}{dt} = 12t$, звідки одержимо: $dz = 12tdt$, $\int dz = 12\int tdt$, $z = 6t^2 + C_1$.

Таким чином, $\frac{ds}{dt} = 6t^2 + C_1$, тобто $ds = (6t^2 + C_1)dt$. Інтегруючи, знаходимо загальний розв’язок даного рівняння: $s = 2t^3 + C_1 t + C_2$.

Знайдемо тепер частинний розв’язок рівняння. Підставляючи в рівності початкові дані, одержимо систему рівнянь:

$$20 = 6 \cdot 0 + C_1,$$
$$2 = 2 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2,$$

тобто $C_1 = 20$, $C_2 = 2$. Отже, шуканий частинний розв’язок має вигляд:

$$s = 2t^3 + 20t + 2.$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \cdot \frac{dy}{dx} + qy = 0, \qquad (154)$$

де p і q – сталі величини.

Щоб визначити загальний розв'язок рівняння, складемо характеристичне рівняння $r^2 + pr + q = 0$, (155), яке одержимо з рівняння (154) заміною $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ і y на відповідні степені r, причому сама функція y замінюється одиницею.

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння будується залежно від коренів r_1 та r_2 характеристичного рівняння (155). Тут можливі три випадки.

Випадок I. Корені r_1 і r_2 – дійсні і різні. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \qquad (156).$$

Випадок II. Корені r_1 і r_2 – дійсні і рівні: $r_1=r_2=r$. Тоді загальний розв'язок рівняння записується так:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx} \qquad (157).$$

Випадок III. Корені r_1 і r_2 – комплексно-спряжені: $r_1 = a + \beta i$, $r_2 = a - \beta i$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння записується так:

$$y = e^{ax}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \qquad (158).$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = 0.$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені: $r^2 - 7r + 10 = 0;\ r_1 = 2,\ r_2 = 5.$

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні і різні, то загальний розв'язок даного диференціального рівняння, згідно з формулою 156, запишеться так:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} = 0$, якщо $y=1$ і $\frac{dy}{dx} = -1$ при $x=0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$r^2 - 5r = 0; \quad r_1 = 0, \qquad r_2 = 5$$

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні і різні, то загальний розв’язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{5x}, \text{ тобто } y = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

Щоб знайти частинний розв’язок, треба визначити значення сталих C_1 і C_2. Підставивши в загальний розв’язок значення x=0, y=1, одержимо

$$1 = C_1 + C_2.$$

Продиференціювавши загальний розв’язок і підставивши в знайдений вираз значення x =0, $\frac{dy}{dx} = -1$. Маємо

$$\frac{dy}{dx} = 5C_2 e^{5x}; \quad -1 = 5C_2.$$

Звідси знаходимо $C_2 = -\frac{1}{5}$, $C_1 = 1 - C_2 = \frac{6}{5}$.

Отже, шуканий частинний розв’язок має вигляд

$$y = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} e^{5x}.$$

Приклад 8. Розв’язати рівняння $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0.$

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$r^2 - 8r + 16 = 0; \quad r_1 = r_2 = 4.$$

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні і рівні, то загальний розв’язок даного диференціального рівняння згідно з формулою 4 записується так:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{4x}.$$

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$r^2 - 6r + 25 = 0;\ \ r_1 = 3 + 4i,\ \ r_2 = 3 - 4i.$$

Тут $\alpha=3,\ \beta=4$. Оскільки характеристичне рівняння має два комплексно спряжені корені, то загальний розв'язок даного диференціального рівняння згідно з формулою 5 запишеться у вигляді:

$$y = e^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right).$$

2.4.3. ЗАДАЧІ НА СКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Задача 1. Знайти закон руху тіла по осі *Ox,* якщо воно почало рухатися з точки *M* (4;0) із швидкістю $v=2t+3t$.

Розв'язання. При прямолінійному русі швидкість є похідна від шляху за часом. Позначивши шлях через *x*, маємо: $v=dx/dt$, тоді

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 3t^2,\ \text{або}\ dx = \left(2t + 3t^2\right)dt.$$

Проінтегрувавши, одержимо $x=t^2+t^3+C$. Використовуючи початкові умови, знайдемо *C*. Оскільки $x=3$ при $t=0$, то, підставивши ці значення в загальний розв'язок, знайдемо $C= 4$.

Отже, закон руху тіла має вигляд $x=t^2+t^3+4$.

Задача 2. Дослідом встановлено, що швидкість розпаду радію в кожний момент часу пропорційна початковій кількості його. У початковий момент часу ($t=0$) було R_o *г* радію. Скласти формулу для обчислення кількості радію в будь-який момент часу *t*.

Розв'язання. Нехай коефіцієнт пропорційності *k* відомий ($k>0$). Позначимо через *R* кількість радію, яка не розпалась у момент часу *t*.

Швидкість розпаду радію є швидкістю зміни функції, яка пов'язує *t* і *R*, тобто похідна $\frac{dR}{dt}$. Згідно з умовою $\frac{dR}{dt} = -kR.$

Знак мінус показує, що R – спадна функція, отже, $\frac{dR}{dt} < 0$, а $kR>0$, бо $k>0$ і $R>0$.

Відокремивши змінні та проінтегрувавши, одержимо $\frac{dR}{R} = -kdt.$

$$\int \frac{dR}{R} = -\int kdt;$$

$$\ln R = -kt + \ln C,\ \ \ln R - \ln C = -kt,\ \ \ln\left(\frac{R}{C}\right) = -kt.$$

Потенціюючи останню рівність, знаходимо $R / C = e^{kt}$ або $R = Ce^{kt}$ (∗).

Це співвідношення виражає закон розпаду радію.

Знайдемо сталу величину C при початкових умовах $R=R_0$ при $t=0$. Підставивши ці значення в рівність (∗), одежимо $R_o=Ce^{-k0}$, тобто $C=R_o$. Отже, шукана функція має вигляд $R=R_oe^{-kt}$.

Задача 3 (ріст при постійному темпі приросту). Нехай $y(t)$, p – кількість і ціна продукції, випущеної в певній галузі за час t. Галузь на момент часу t отримала дохід $py(t)$. Нехай I (t) – величина інвестицій, тобто засобів, направлених на розширення виробництва. Нехай m – норма інвестицій (m=const, $0<m<1$), тоді $I(t)=mpy(t)$, (159).

Припускаємо, що ринок ненасичений, тобто весь товар буде проданий. У результаті розширення виробництва галузь отримає додатковий дохід, частина якого буде використана для подальшого розширення виробництва. Цей процес приведе до збільшення швидкості випуску (акселерації) пропорційно до збільшення інвестицій, тобто $y' = \eta I$ (2), де $1/\eta$ – норма акселерації. Підставляючи в (1) значення I із (160), отримуємо: $y' = ky$, де $k = \eta mp$ (161).

З (161): $\frac{dy}{y} = kdt, \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdt \Rightarrow \ln|y| = kt + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{kt}$ (162). Якщо $y(t_0)=y_0$, то: $y_0 = Ce^{kt_0} \Rightarrow C = y_0e^{-kt_0}$. Отже, $y(t)=y_0e^{k(t-t_0)}$.

Зауваження. Диференціальне рівняння типу (161) часто трапляється в інших прикладних задачах, зокрема ним описується також динаміка росту цін при постійному темпі інфляції, процеси радіоактивного розпаду, розмноження бактерій тощо.

Задача 4 (модель росту в умовах конкуренції). Розглянемо більш загальний випадок. Нехай *p=p(y)* – спадна функція (*dp/dy<0*), тобто зі збільшенням випуску буде відбуватися насичення ринку і ціна буде падати.

Провівши аналогічні дослідження, як у задачі 3, ми отримаємо рівняння: $y' = kp(y)y$, де $k = \eta m$ (162).

Рівняння (162) є диференціальним рівнянням зі змінними, що розділяються. Оскільки *k>0, p>0, y>0*, то з (162) випливає, що *y* – зростаюча функція (*y>0*). Дослідимо *y*(*t*) на випуклість. Диференціюючи рівняння (162) по змінній *t*, отримаємо:

$$y'' = ky'\left(\frac{dp}{dy}y + p\right) \text{ або } y'' = ky'p\left(\frac{dp}{dy}\frac{y}{p} + 1\right),$$

$$\text{тобто } y'' = kyp\left(1 - \frac{1}{|\eta y|}\right) \qquad (163).$$

де $\eta y(p) = \dfrac{dy}{dp}\dfrac{p}{y}$ – еластичність попиту. Із (163) випливає, що у випадку $|\eta y| > 1$ $y'' > 0$ і графік функції *y* (*p*) опуклий вниз, а якщо $|\eta y| < 1$, то $y'' < 0$ і графік функції *y* (*p*) опуклий уверх.

Розглянемо лінійну функцію $p(y) = b - ay.$ Рівняння (6) тоді набере вигляду:

$$y' = \kappa(b - ay)y \qquad (164).$$

Розв'яжемо рівняння (8). Для цього розділимо змінні:

$$\frac{dy}{y(b-ay)} = kdx; \int \frac{dy}{y(b-ay)} = kx + C'.$$

$$\frac{1}{b}\int\left[\frac{1}{y} + \frac{a}{b-ay}\right]dy = kx + C \Rightarrow \frac{1}{b}\ln\frac{y}{b-ay} = kx + C \Rightarrow \frac{y}{b-ay} = Ce^{bkx} \Rightarrow y = \frac{Cbe^{bkx}}{1+Cae^{bkx}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{Cb}{e^{-bkx} + Ca}.$$

Побудуємо схематичний графік одержаного розв'язку (рис. 139):

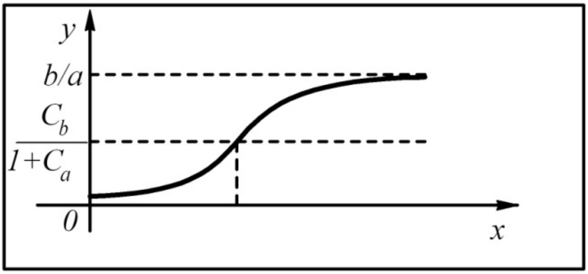


Рис. 139. Логістична крива

Дану криву називають ***логістичною кривою***. Вона описує процес поширення епідемій, процеси розмноження бактерій в обмеженому середовищі тощо.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення диференціального рівняння.
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
3. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
4. Що таке загальний розв'язок диференціального рівняння?
5. Що таке частинний розв'язок диференціального рівняння?
6. Дайте визначення рівняння з відокремлюваними змінними.
7. Привести приклади диференціальних рівнянь у фізиці, економіці, сільському господарстві.

2.5. РЯДИ

2.5.1. ЗНАКОДОДАТНІ РЯДИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ

1. Означення. Числовою послідовністю або просто послідовністю називається занумерована множина чисел, що розташовані в порядку зростання їх номерів.

Наприклад, сукупність чисел

$$2,4,8,16,32,64,...,2^n,\ldots$$

є послідовністю.

Послідовність записують в загальному вигляді таким чином:

$$a_1, a_2, a_3,..., a_n,...$$

Знаки 1,2,3,... при букві a вказують на порядковий номер місця, який займають відповідні члени послідовності. Величина члена послідовності є функцією його порядкового номеру.

Приклад 1. Знайти закон утворення послідовності, перші п'ять членів якої дано:

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 6}.$$

Ці п'ять членів можуть бути визначені за формулою

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Відповідно ця формула є законом утворення послідовності, перші п'ять членів якої співпадають з даними.

2. Означення. Числовим рядом називається вираз виду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (165)$$

в якому $a_1, a_2, a_3,..., a_n,...$ (члени ряду), при цьому вони є членами деякої нескінченної послідовності.

Приклад 2. Нехай дано ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Тут $a_n = \frac{1}{n}$. Щоб визначити, наприклад, двадцять третій член ряду, допускаємо $n = 23$ і знаходимо: $a_{23} = \frac{1}{23}$; аналогічно отримаємо: $a_{100} = \frac{1}{100}$, $a_{375} = \frac{1}{375}$ і т.д.

Вираз, який визначає *n-й* член ряду (1) при будь-якому значенні $n = 1,\ 2,\ 3,\ldots$ називається загальним членом ряду і позначається символом a_n. Так, загальним членом ряду, який розглянули в першому прикладі, є $a_n = \frac{1}{n}$.

Позначимо суму n перших членів ряду (165) через S_n, тобто

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Суму S_n називають n-ю частиною сумою ряду. При зміні n змінюється і S_n; при цьому можливі два випадки:

1) величина S_n при $n \to \infty$ має границю S, тобто $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$;

2) величина S_n при $n \to \infty$ границі не має або границя її дорівнює ∞, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

В першому випадку ряд називається *збіжним*, а число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – його *сумою*. В другому випадку ряд називається *розбіжним;* такий ряд суми не має. Наприклад, ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

є нескінченно спадною геометричною прогресією, рядом збіжним, так як за відомою формулою для такої прогресії

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \cdot$$

Ряд же

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n + ...,$$

є нескінченно зростаючою геометричною прогресією і розбіжним, тому що:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n - a}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n - 2}{2-1} = \lim_{n\to\infty} \left(2^{n+1} - 2\right) = \infty$$

Для розв’язання питання про збіжність ряду користуються необхідною та достатніми умовами збіжності ряду.

Необхідна умова збіжності ряду

Нехай даний ряд збіжний

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (166)$$

Знайдемо суму $n-1$ і n його членів:

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1},$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Віднімемо з другого рівняння перше, отримаємо:

$$S_n - S_{n-1} = a_n \qquad (167)$$

Знайдемо границю від обох частин рівняння (167) при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad \text{або} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (168).$$

Так як ряд (166), за умовою, збіжний, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Рівність (168 можна переписати так:

$$S - S = \lim_{n\to\infty} a_n, \text{ або } \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (169)$$

Це дає *необхідну умову збіжності ряду*, тобто таку умову, без наявності якої ряд не може збігатися. Але вона не є достатньою. Покажемо це на прикладі.

Візьмемо так званий **гармонічний ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Для нього умова (5) виконується, так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 0,$ але цей ряд розбіжний. Щоб переконатися в цьому, перепишемо суму n його членів в іншому вигляді

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots \qquad (170)$$

Зробимо заміну суми в кожній дужці меншими сумами, а саме:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right), \ldots,$$

Ми зменшили праву частину рівності (6). Тому можливо записати:

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

Тепер величина кожної дужки дорівнює $\frac{1}{2}$. Відповідно,

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \tag{171}$$

Позначивши число доданків, рівних $\frac{1}{2}$, через m, нерівність (171) перепишемо:

$$S_n > 1 + \frac{1}{2}m\ .$$

Нехай $m \to \infty$; тоді і $n \to \infty$, а також $1 + \frac{1}{2}m \to \infty$; тому і

$$S_n \to \infty\ .$$

Відповідно, гармонічний ряд *розбіжний*.

Найпростіші властивості рядів

1 *(необхідна умова збіжності ряду).* Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Приклад 1. Дано загальний член ряду:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3}\ .$$

Написати ряд в розгорнутому вигляді і перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності ряду.

Розв'язання. Знаходимо $a_1 = \frac{1^2 + 1}{1^3} = 2,\quad a_2 = \frac{2^2 + 1}{2^3} = \frac{5}{8},$ $a_3 = \frac{3^2 + 1}{3^3} = \frac{10}{27},\quad a_4 = \frac{4^2 + 1}{4^3} = \frac{17}{64}.$

Записуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}=2+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\frac{17}{64}+\ldots$.

Необхідна ознака збіжності виконується, так як $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3}=0.$ Ряд може збігатись, якщо будуть виконані достатні ознаки збіжності ряду.

2. *(достатня умова розбіжності ряду)*. Якщо $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ розбіжний.

Приклад 2. Дано загальний член ряду:

$$b_n=\frac{n^3+1}{n^2}.$$

Написати ряд в розгорнутому вигляді і перевірити чи виконується необхідна ознака збіжності ряду.

Розв'язання.

Знайдемо $b_1=\frac{1^3+1}{1^2}=2,\quad b_3=\frac{3^3+1}{3^2}=\frac{28}{9},\quad b_4=\frac{4^3+1}{4^2}=\frac{65}{16}$,

тобто $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^2}=2+\frac{9}{4}+\frac{28}{9}+\frac{65}{16}+\ldots$. Так як $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2}=\infty\neq 0,$ то необхідна ознака збіжності не виконується і значить ряд розбіжний.

3. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний тоді і тільки тоді, коли збіжний довільний його залишок $\sum_{n=N}^{\infty}a_n$, де $N\geq 1$.

5. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ збіжні, причому $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$, а $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B$, то

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ збігається і $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=cA$;

b) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ збігається і $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=A+B$;

c) якщо $a_n \le b_n$ для всіх n=1, 2, 3,…, тоді $A \le B$.

Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Ряди, всі члени яких додатні, називаються ***знакододатними рядами.***

Перша ознака порівняння. Нехай дано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з невід'ємними членами, причому $a_n \ge b_n$. Тоді: а) із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (з більшими членами) випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (з меншими членами); б) із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

В якості табличних рядів, з якими проводять порівняння, використовують:

гармонічний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \quad - \text{ розбіжний;}$$

узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ (збіжний при $\alpha>1$ і розбіжний при $\alpha<1$);

геометричну прогресію:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1}=a+a\cdot q+a\cdot q^2+a\cdot q^3+\ldots a\cdot q^{n-1}+\ldots$$

Якщо $a=0$, то ряд збігається до нуля; якщо $|q|<1$, то він збігається до $\frac{a}{1-q}$; якщо $q\ge 1$ і $a>0$, то він розбігається до ∞;

якщо $q \geq 1$ і $a < 1$, то він розбігається до $-\infty$; якщо $q \leq -1$, то він розбіжний.

Приклад 3. Використовуючи першу ознаку порівняння, дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} \dots$.

Розв'язання. Використаємо табличний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – геометричну прогресію, що збігається (так як $q = \frac{1}{2} < 1$). Справедлива нерівність $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ збігається.

Друга ознака порівняння. Нехай дано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (172), $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (173). Якщо $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq 0$, де λ – скінченне число, то обидва ряди ведуть себе однаково, тобто збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$.

Розв'язання. Тут $a_n = \frac{1}{2^n - n}$. Використаємо табличний ряд із загальним членом $b_n = \frac{1}{2^n}$ (геометричну прогресію, що збігається). Маємо $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1$. Так як $\lambda = 1 \neq 0$, то обидва ряди ведуть себе однаково і значить даний ряд збігається.

Ознака Даламбера. Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами. Тоді, якщо існує $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд збіжний; при

$\rho > 1$ ряд розбіжний; при $\rho = 1$ необхідно застосувати іншу ознаку збіжності.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + ... = \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{2^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^3} + ...$$

Розв'язання. Тут $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, отже

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!n^n}{(n+1)^n (n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Тому даний ряд збігається.

Радикальна ознака Коші. Нехай дано ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами. Тоді, якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho,$ то при $\rho < 1$ ряд збігається; при $\rho > 1$ряд розбіжний; при $\rho = 1$ потрібно застосувати іншу ознаку збіжності.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n+3}\right)^{2n}$.

Розв'язання. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n+3}\right)^2 = 2^2 = 4 > 1$.

Отже, даний ряд розбіжний.

Інтегральна ознака Коші. Якщо $a_n = f(n)$, $n = 1,2,3,...$, де $f(n)$ – значення $x = n$ деякої функції $f(x)$, неперервної додатної і не зростаючої при $x \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b f(x)dx,$ і розбігається, якщо границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b f(x)dx$ прямує до нескінченності.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3+n^2}$.

Розв'язання. Для дослідження ряду на збіжність можна застосувати інтегральну ознаку Коші. Члени ряду є значеннями неперервної, додатної і не зростаючої функції при $x \geq 1$ функції $f(x)=\frac{5}{3+x^2}$.

Розглянемо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{5}{3+x^2}dx$.

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{5}{3+x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{5}{3+x^2}dx=5\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2+x^2}dx=$$

$$=5\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_1^b=\frac{5}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left(arctg\frac{b}{\sqrt{3}}-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\pi}{6}=\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}\pi}{9}.$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3+n^2}$ збіжний.

2.5.2. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ

Числовий ряд, члени якого можуть бути як додатними, так і від'ємними, називають *знакозмінним*.

До знакозмінних рядів належать і ряди, в яких знаки членів строго чергуються, тобто ряди, в яких за кожним додатним членом слідує від'ємний, а за кожним від'ємним – додатний. Такі ряди називаються *знакочерговими.*

Запишемо цей ряд у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots,$$

де $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ – числа додатні.

Німецький математик Г. Лейбніц (1646–1716) у 1714 р. в листі до швейцарського математика І. Бернуллі (1667–1748) виклав досить просту ознаку збіжності знакочергових рядів.

Ознака Лейбніца. Якщо члени знакочергового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$ монотонно спадають за абсолютною величиною: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ і загальний член прямує до нуля: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ тоді цей ряд збігається, причому його сума додатна і не перевищує першого члену ряду.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cos(\pi n)}$$

Перепишемо ряд у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cos(\pi n)} = -\frac{\ln 2}{1} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)}{1} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)}{1} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)}{1} - \ldots \ .$$

Маємо знакочерговий ряд, який задовольняє умовам ознаки Лейбніца: абсолютні величини членів цього ряду спадають: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ і загальний член прямує до нуля $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Отже, ряд збіжний.

Абсолютна та умовна збіжність рядів

Розглянемо ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \ ,$$

в яких числа $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$ можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Для таких рядів має місце достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.

Якщо для знакозмінного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ...,$$

утворений з абсолютних величин членів даного ряду, то даний знакозмінний ряд також збігається.

Знакозмінний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається він і ряд, утворений з абсолютних величин членів даного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ...$$

Знакозмінний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

називається *не абсолютно (умовно) збіжним*, якщо він збігається, а ряд, утворений з

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ...$$

розбігається.

Абсолютно збіжний ряд завжди збіжний.

Сума абсолютно збіжного ряду не зміниться за будь-якої перестановки його членів.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...$;

б) $1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{8^3}-...$.

Розв'язок.

а) Так як $|1|>\left|\frac{1}{2}\right|>\left|\frac{1}{3}\right|>\left|\frac{1}{4}\right|>...$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ збігається за ознакою Лейбніца. Але ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який складається із модулів, розбігається як гармонічний, відповідно, даний знако-черговий ряд збігається умовно.

б) Даний знакозмінний ряд збігається, так як ряд, який складається з модулів $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+...+\frac{1}{n^3}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ є узагальненим гармонічним і при $\alpha>1$ збігається.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{arctg 2n}$$

Перепишемо ряд у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{arctg 2n}=-\frac{1}{arctg 2}+\frac{1}{arctg 4}-\frac{1}{arctg 6}+\frac{1}{arctg 8}-... .$$

Маємо знакозмінний (знакочерговий) ряд, який задовольняє умовам ознаки Лейбніца: абсолютні величини членів цього ряду спадають : $a_1>a_2>a_3>...>a_n>...$ і загальний член прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Отже, ряд збіжний.

Але ряд утворений із абсолютних величин членів даного ряду:

$$\frac{1}{arctg 2}+\frac{1}{arctg 4}+\frac{1}{arctg 6}+\frac{1}{arctg 8}+... \qquad (*)$$

Члени ряду (*) більші за відповідні члени гармонічного ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+... \qquad (**)$$

Ряд (**) розбіжний, тому ряд (*) також розбіжний (ознака порівняння знакододатних рядів). Отже, даний ряд умовно збіжний (не абсолютно збіжний).

2.5.3. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Ряди, членами яких не є числа, а функції, визначені на деякій множині *M*, називаються *функціональними* рядами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + \ldots \ .$$

При різних значеннях *x* із функціональних рядів одержуються різні числові ряди, які можуть бути збіжними або розбіжними.

Сукупність значень *x*, при яких функціональний ряд збігається, називається його *областю збіжності*.

Функціональний ряд виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad (174)$$

членами якого є степеневі функції, називається степеневим рядом. Ряд завжди збігається хоча б в одній точці $x = 0$. Його сума $S(0) = a_0$.

*Ознака збіжності степеневого ряду (**теорема Абеля**).* Якщо степеневий ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

збіжний при $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$.

Якщо степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний при $x = x_1$, то він розбіжний при всіх x , які задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$.

Таким чином, із збіжності степеневого ряду в одній точці x_0 випливає його збіжність на інтервалі $-|x_0| < x < |x_0|$.

Означення. *Інтервалом збіжності степеневого ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ називають такий інтервал $(-R;R)$, що для кожної точки *x,* яка лежить всередині цього інтервалу, ряд збіжний і причому абсолютно, а для точок *x,* які знаходяться поза цим інтервалом, ряд розбіжний. Число *R* називається *радіусом збіжності* степеневого ряду.

Питання про збіжність ряду при $x = \pm R$ (на кінцях інтервалу) розв'язується для кожного ряду окремо. Таким чином, область збіжності степеневого ряду може відрізнятися від його інтервалу збіжності не більше ніж двома точками, які є кінцями інтервалу збіжності.

Вважають: R=0 для всюди розбіжного ряду і $R = +\infty$ для всюди збіжного ряду.

Радіус збіжності степеневого ряду можна обчислити за формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ або } R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Існують ряди, які збігаються в одній точці (наприклад, $\sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n$), при всіх значеннях x (наприклад, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$), які збігаються при одних значеннях x і розбігаються при інших значеннях x.

Приклад 11. Дослідити на збіжність степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 x^n}{2^n}$.

Розв'язок. Тут $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$, тоді радіус збіжності $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{2^n (n+1)^2} = 2$. Область збіжності $-2 < x < 2$. Дослідимо збіжність ряду в граничних точках. При $x = \pm 2$ степеневий ряд набуває вигляду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(\pm 2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n \cdot n^2$. Обидва ці ряди розбігаються, так як для них не задовольняється необхідна ознака збіжності.

Приклад 12. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}}=1 .$$

Отже, інтервал збіжності ряду є $(-1;1)$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу .

При $x=1$ маємо числовий ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}+\ldots (*)$$

Оскільки

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}}\geq\frac{1}{2n} ,\ n=1,2,\ldots$$

і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right)$ розбіжний, то за ознакою порівняння (*) розбіжний.

При $x=-1$ маємо

1) $\frac{1}{2}>\frac{1}{2+\sqrt{2}}>\frac{1}{3+\sqrt{3}}>\ldots$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}=0$.

Отже, ряд збіжний. Областю збіжності заданого ряду є піввідрізок [–1; 1].

Розглянемо більш загальний вид степеневого ряду

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n , \quad (174)$$

де $a, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – дійсні числа, називається *узагальненим степеневим* рядом з центром в точці a .

Областю збіжності будь-якого степеневого ряду є один інтервал числової осі, симетричний відносно точки $x = a$, який може бути закритим, відкритим або напіввідкритим.

Можливі лише такі три випадки.

1. Степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ збігається тільки при $x = a$ (всюди розбіжний ряд);

2. Степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ збігається (причому абсолютно) при будь-якому значенні x (всюди збіжний ряд);

3. Існує таке число R, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ збігається абсолютно при $|x-a| < R$ і розбігається при $|x-a| > R$ (R називається радіусом збіжності ряду).

Інтервал $(a-R; a+R)$, де $R > 0$, називається *інтервалом збіжності* степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$. При цьому на кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = a - R$ і $x = a + R$, ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.

За допомогою підстановки $x - a = X$ степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ можна звести до вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Для визначення області збіжності степеневих рядів звичайно використовують ознаку Даламбера, а потім ті значення x, для яких ця ознака не дає відповіді про збіжність ряду , досліджують окремо, за допомогою інших ознак збіжності.

Приклад 13. Дослідити на збіжність степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{(n^2+1)\cdot 2^n}}$.

Розв'язок.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)\cdot 2^n}}, \; a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\left[(n+1)^2+1\right]\cdot 2^{n+1}}}.$$

Радіус збіжності

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left[(n+1)^2+1\right]\cdot 2^{n+1}}}{\sqrt{(n^2+1)\cdot 2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{2}\sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}}\right]=\sqrt{2}\ ,$$

$$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\ .$$

Інтервал збіжності $3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}$. В граничних точках при $x=3+\sqrt{2}$ отримуємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{(n^2+1)\cdot 2^n}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, який розбігається; при $x=3-\sqrt{2}$ отримуємо знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^n}{\sqrt{(n^2+1)\cdot 2^n}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$, який збігається за ознакою Лейбніца.

Область збіжності ряду $3-\sqrt{2}\le x<3+\sqrt{2}$.

Приклад 14. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3}$.

Розв'язок. Знаходимо радіус збіжності

$$a_n=\frac{1}{n^2}\ ,\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^3}\ .$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)^3}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=1$$

Інтервал збіжності $-2-1<x<-2+1$. Інтервал збіжності заданого ряду $\left(-3;-1\right)$ з центром у точці -2 і радіусом $R=1$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x=-1$ одержуємо збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ (це узагальнений гармонічний ряд, в якому $\alpha=3>1$). При $x=-3$ одержуємо абсолютно збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$. Отже, областю збіжності заданого ряду є відрізок $\left[-3;-1\right]$.

Розклад функції в ряд Тейлора та Маклорена

Якщо функція $f(x)$ визначена разом із своїми похідними в деякому околі точки $x = x_0$, то її можна розкласти в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots + R_n(x),$$

де залишок ряду $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Якщо $x_0 = 0$, то ряд Тейлора має вигляд

$f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots$ і називається рядом Маклорена.

Табличні розкладання:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ (-\infty < x < \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} \ (-\infty < x < \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} \ (-\infty < x < \infty);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ (-1 < x < 1);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} \cdot x^n \ (-1 < x < 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} \ (-1 < x \le 1).$$

Приклад 15. Розкласти функцію $f(x) = 2^x$ в ряд Маклорена.

Розв'язок. Знайдемо похідні і обчислимо їх значення при $x = 0$.

$f(x) = 2^x$;		$f(0) = 1$;
$f'(x) = 2^x \ln 2$;		$f'(0) = \ln 2$;
$f''(x) = 2^x \ln^2 2$;		$f''(0) = \ln^2 2$;
…………………		………………
…………………		………………
$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2$;		$f^{(n)}(0) = \ln^n 2$.

Тоді $2^x = 1 + \dfrac{\ln 2}{1!}x + \dfrac{\ln^2 2}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\ln^n 2}{n!}x^n + \ldots$.

Приклад 16. Розкласти в ряд функцію $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Розв'язок. Припустимо, що $-x^2 = y$, тоді

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \ldots + y^n + \ldots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

Приклад 17. Розкласти в ряд Тейлора функцію $y = \sin\dfrac{\pi x}{4}$ в околі точки $x_0 = 2$ (по степенях $x - 2$).

Розв'язок. Маємо

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{4}((x-2)+2) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right);$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right) = 1 - \frac{\frac{\pi^2}{16}(x-2)^2}{2!} + \frac{\frac{\pi^4}{256}(x-2)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot \pi^{2n}}{4^{2n} \cdot (2n)!} \cdot (x-2)^{2n} + \ldots;$$

$$-\infty < x < \infty .$$

Застосування теорії рядів до розв'язування прикладних задач

Застосуємо ряд, який називається *геометричною прогресією*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots a \cdot q^{n-1} + \ldots$$

Задача. *Щорічно вкладник вкладає в банк суму* 5000 *гривень під* 7% *річних. Яка сума буде на його рахунку зразу ж після десятого вкладу?*

Якщо банк нараховує 7%, то по завершенні одного року вкладник матиме на рахунку $5000 \cdot 1{,}07$ гривень. Зразу ж після другого вкладу на рахунку буде сума $5000 + 5000 \cdot 1{,}07$. Перед третім вкладом на рахунку буде сума

$$(5000 \cdot 5000 \cdot 1{,}07) \cdot 1{,}07 = 5000 \cdot 1{,}07 + 5000 \cdot 1{,}07^2 .$$

Очевидно, що після десятого вкладу на рахунку буде така сума:

$$S = 5000 \cdot 1{,}07 + 5000 \cdot 1{,}07^2 + \ldots + 5000 \cdot 1{,}07^9 .$$

Остання сума є скінченним геометричним рядом з $a = 5000$ і $q = 1{,}07$.

Застосуємо формулу для суми n перших членів геометричної прогресії при $n = 10$, $a = 5000$ і $q = 1{,}07$:

$$S = \frac{a\left(1 - q^{10}\right)}{1 - q} = \frac{5000\left(1 - 1{,}07^{10}\right)}{1 - 1{,}07} = 69082{,}24 .$$

Отже, після десятого вкладу на рахунку вкладника буде 69082 гривні 24 копійки.

Степеневі ряди мають широке застосування при наближених обчисленнях.

Приклад 1. Обчислити e^2 з точністю до $0{,}001$.

Розв'язок. Використовуючи розклад $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$, отримаємо $e^2 = 1 + 2 + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^3}{3!} + \ldots + \dfrac{2^{10}}{10!} \approx 7{,}389$.

Приклад 2. Обчислити $\sin 1^{\circ}$ з точністю до $0{,}0001$.

Розв'язок. Використовуючи розклад $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$, знайдемо $\sin 1^o = \sin\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{\pi}{180} - \dfrac{\pi^3}{180^3 \cdot 3!} = \dfrac{3{,}1415}{180} - \dfrac{3{,}1415^3}{180^3 \cdot 3!} \approx 0{,}0175$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{\sin x}{x} dx$.

Розв'язок. $\int \frac{\sin x}{x} dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \right) dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \ldots$

$+ \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \ldots$; $-\infty < x < \infty$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається числовим рядом?
2. Який ряд називається збіжним, розбіжним?
3. В чому суть необхідної ознаки збіжності ряду?
4. Сформулюйте достатні ознаки порівняння рядів.
5. Які табличні ряди використовуються для порівняння рядів?
6. В чому суть достатньої ознаки збіжності Даламбера?
7. Дайте означення радикальної та інтегральної ознак Коші.
8. Чи можна розв'язати питання про збіжність ряду, не користуючись необхідною ознакою збіжності?
9. Який ряд називається абсолютно збіжним і який умовно збіжним?
10. Який ряд називається функціональним і як знаходиться його область збіжності?
11. Який ряд називається степеневим?
12. За якими формулами обчислюються коефіцієнти ряду Маклорена і ряду Тейлора?

2.6. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

2.6.1. ВСТУП. ТЕОРІЯ МНОЖИН. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КОМБІНАТОРИКИ

Коротка історична довідка

Виникнення теорії ймовірностей, спричинене комбінаторними задачами азартних ігор і обумовлене спробою їх теоретичного обгрунтування, відноситься до XVI–XVII ст. і пов'язане з іменами Дж. Кардано, Б.Паскаля, Х.Гюйгенса, П.Ферма. Найістотнішим досягненням цього періоду є відкриття Я. Бернуллі закону великих чисел. Другий період розвитку теорії ймовірностей відноситься до XVIII–XIX ст. і пов'язаний з іменами Лапласа, Гаусса, Муавра, Пуассона, Буняковського та інших. Проте, як математична наука, теорія ймовірностей сформувалася на межі XIX–XX ст. завдяки працям П.Л. Чебишова, О. М. Ляпунова, Р. Мізеса, А.А. Маркова.

Подальшим розвитком теорія ймовірностей зобов'язана фундаментальним дослідженням російських та українських вчених: О.М. Колмогорова, С.Н. Бернштейна, Б.В. Гнєденка, О.Я. Хінчина, А.В. Скорохода, В. С. Королюка та інших.

В основі розповсюдженого теоретико-множинного методу викладання теорії ймовірностей лежить припущення, що кожному досліду поставлено у відповідність деяку множину Ω, елементи якої дають повну інформацію про його можливі результати. Тому нагадаємо деякі відомості про такі множини та операції над ними.

Скінченні множини та операції над ними

Всяка сукупність довільних елементів утворює множину. Множина визначена, якщо відомі всі її елементи. Множина, що має скінченну кількість елементів, називається скінченною.

Введемо основні позначення. Множини позначатимемо великими латинськими літерами: *A, B, C,...*, а їх елементи – малими: *a, b, c,...* Кількість елементів множини *A* позначатимемо через *N(A).*

Означення 1. *Дві множини рівні між собою, якщо всі елементи першої є елементами другої, і навпаки – всі елементи другої є елементами першої.*

Означення 2. *Сумою або об'єднанням множин A і B називається множина* $C = A + B (C = A \cup B)$*, яка складається лише з тих елементів, що належать принаймні одній із множин A і B.*

Приклад 1. Нехай $A = \{1;2;3\}$, $B = \{2;3;4\}$. Тоді $A + B = \{1;2;3;4\}$.

Означення 3. *Множина C, якій належать ті і тільки ті елементи, що є спільними для множин A і B, називається добутком або перетином множин A і B і позначається* $C = AB\left(C = A \cap B\right)$.

Приклад 2. Розглянемо *A і B з* попереднього прикладу. Тоді $AB = \{2;3\}$.

Означення 4. *Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається* $\varnothing$.

Очевидно, якщо множини A і B не мають спільних елементів, то $AB = A \cap B = \varnothing$. Кількість елементів множини, що є сумою двох множин A і B, обчислюють за формулою:

$$N(A+B) = N(A) + N(B) - N(AB) \qquad (175).$$

Приклад 3. Кожний студент групи – або дівчина, або блондин, або любить математику. В групі 20 дівчат, з них 12 блондинок, одна блондинка любить математику. Всього у групі 24 блондина, математику з них любить 12, а всього люблять математику 17 студентів, з них 6 дівчат. Скільки студентів у групі?

Розв'язання. Нехай A – множина дівчат, B – блондинів, C – люблять математику. Тоді $N(A+B+C)$ шукане число. Очевидно, AB – множина блондинок, AC – множина дівчат, що люблять математику, BC – множина студентів, що люблять математику, ABC – множина блондинок, що люблять математику. Отже,

$$N(A+B+C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(AB) - N(AC) - N(BC) +$$
$$+ N(ABC) = 20 + 24 + 17 - (12 + 6 + 12) + 1 = 32$$

Предмет комбінаторики. Основні принципи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчають розташування та вибір об'єктів за певними правилами і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна здійснити.

Перші теоретичні дослідження проблем комбінаторики були зроблені у XVII ст. Б. Паскалем, П. Ферма, Г. Лейбніцем, а у XVIII ст. Я. Бернуллі, Л. Ейлером. Але лише у наш час у зв'язку з розвитком теорії обчислювальних машин, теорії інформації та дискретної математики комбінаторика по-справжньому стала математичною наукою. Зокрема її методи відіграють важливу роль при розв'язуванні задач теорії ймовірностей.

Значне число формул і теорем комбінаторики ґрунтується на двох основних принципах.

Принцип суми. *Якщо множина A містить N(A) – n елементів, множина B – N(B) – m елементів, а AB =* 0, *тоді множина A+ B містить N(A+ B) – n + m елементів.*

Зауваження 1. Принцип суми має місце для будь-якого скінченного числа множин.

Принцип добутку. *Нехай потрібно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами,третю – n_3 способами і так до k-ої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій послідовно можуть бути виконані $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ способами.*

Приклад 4. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3,4,5, якщо:

а) жодна з цифр не повторюється;

б) цифри можуть повторюватися;

в) числа повинні бути непарними (цифри можуть повторюватись).

Розв'язання.

а) Першою цифрою можуть бути цифри 1,2, 3,4,5, тобто існує 5 способів її вибору. Якщо перша вибрана, то друга цифра може бути вибрана 5 способами, третя – 4 способами, четверта – 3 способами. Отже, згідно з принципом добутку, загальне число способів дорівнює: $5\times5\times4\times3 = 300$.

б) Першою цифрою може бути одна з цифр 1,2,3,4,5 (5 способів), для кожної з наступних цифр існує 6 способів (0,1,2,3,4,5). Отже, кількість шуканих чисел дорівнює $5\times6\times6\times6 = 1080$.

в) Першою може бути одна з цифр 1,2,3,4,5, а останньою – одна з цифр 1,3,5. Отже, загальна кількість непарних чисел дорівнює $5\times6\times6\times3 = 540$.

Упорядковані множини. Сполуки без повторень

Означення 5. *Множина називається упорядкованою, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке натуральне число (номер елемента) так, що різним елементам відповідають різні числа.*

Упорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

Означення 6. *Підмножини, складені з будь-яких елементів даної множини, які відрізняються елементами або порядком цих елементів, називаються сполуками.*

Приклад 5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 можна скласти багато різних сполук по 2,3,4,5 цифр. Наприклад, 12, 21, 123, 1234,.... Серед цих сполук є такі, що відрізняються кількістю цифр (12, 123, 1234,...) або їх порядком (12,21).

Сполуки бувають трьох видів: розміщення, перестановки, сполучення (комбінації).

Означення 7. *Розміщеннями з n елементів по k (k<n) називають такі упорядковані сполуки, які складаються з* ***k*** *елементів, взятих із даних* ***n*** *елементів і відрізняються одна від другої елементами або їх порядком.*

Число розміщень з n елементів по k позначається A_n^k і обчислюється за формулою

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (176)$$

Зауваження 2. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$

Приклад 6. Скількома способами можна розсадити 4 студентів на 25 стільцях?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює A_{25}^4 :

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600 \,.$$

Означення 8. *Розміщення з n елементів по n називаються перестановками.*

Число перестановок із n елементів позначається через P_n і обчислюється за формулою

$$P_n = A_n^n = n(n-1) \cdot ...2 \cdot 1 = n! \qquad (177)$$

Зауваження 3. Різні перестановки з n елементів відрізняються лише порядком елементів.

Приклад 7. Скількома способами можна розмістити на книжковій полиці чотири томи математичної енциклопедії?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу способів упорядкування множини, що містить чотири елементи, тобто $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Означення 9. *Сполученнями (комбінаціями) із n елементів по k називаються сполуки, що містять k елементів, взятих із даних n елементів, і які відрізняються хоча б одним елементом. Число сполучень із n елементів по k позначається через* С *і обчислюється за формулою*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (178)$$

Зауваження 4. Із означення сполучень випливає, що сполучення отримують із розміщень, вилучивши сполуки, які відрізняються лише порядком елементів, тобто перестановки.

Зауваження 5. Мають місце рівності:

$$\text{а) } C_n^k = C_n^{n-k}\text{; б) } \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n\text{; в) } C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Приклад 8. Скількома способами можна вибрати 3 книги з 7?

Розв'язання. Шукане число дорівнює C_7^3 :

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$$

Сполуки з повтореннями

Означення 10. *Розміщенням з повтореннями із n елементів по k називається будь-яка упорядкована сполука, що містить k елементів, взятих із даних n елементів, серед яких є однакові.*

Число всіх розміщень із повтореннями з n елементів по k позначається через $\bar{A}_n^k$ і обчислюється за формулою

$$\bar{A}_n^k = n^k \tag{179}$$

Приклад 9. Автомобільний номер складається з трьох букв та чотирьох цифр. Знайти кількість усіх можливих номерів, якщо використовуються 32 літери української абетки?

Розв'язання. Оскільки літери і цифри в номері можуть повторюватися, то за правилом добутку шукане число дорівнює:

$$\bar{A}_{32}^3 \cdot \bar{A}_{10}^4 = 32^3 \cdot 10^4 = 327680000$$

Означення 11. *Перестановкою з повтореннями із n елементів називається будь-яке упорядкування множини з n елементів, серед яких є однакові.*

Якщо серед n елементів множини є n_1 елементів 1-го типу, n_2 елементів 2-го типу,..., n_k елементів k-го типу $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$, то число всіх перестановок такої множини позначається через $P_n(n_1 n_2 ..., n_k)$ і обчислюється за формулою

$$P_n(n_1, n_2, ..n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! .. n_k!} \tag{180}$$

Приклад 10. Скільки різних "слів" (у тому числі беззмістовних) можна утворити з слова "математика"?

Розв'язання. Очевидно, це число є

$$P_{10}(2;3;2;1;1;1) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200$$

Означення 12. *Сполученням з повтореннями із n елементів по k називається сполука, що містить k елементів, взятих із даних n елементів, серед яких є однакові.*

Число всіх комбінацій із повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{C}_n^k$ і обчислюється за формулою

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)} \tag{181}$$

Приклад 11. Скількома способами можна купити 8 тістечок в кондитерській, де є 6 їх різних видів?

Розв'язання. Шукане число дорівнює $\overline{C}_6^8 = C_{13}^8 = C_{13}^5 = 1287$.

Запитання для самоконтролю

1.Сформулюйте основні принципи комбінаторики (суми і добутку).

2. Які сполуки називаються розміщеннями із n елементів по k *(k<n)?* Наведіть формулу для обчислення їх числа і дайте приклади розміщень.

3. Які сполуки називаються перестановками? Наведіть формулу їх числа із n елементів і дайте приклади перестановок.

4. Які сполуки називаються сполученнями (комбінаціями) із n елементів по k *(k <n)?* Наведіть формулу їх числа і дайте приклади сполучень.

5. Який зв'язок існує між розміщеннями, перестановками і сполученнями? Наведіть відповідну формулу.

6. Назвіть основні властивості сполучень.

7. Що таке сполуки з повтореннями? Дайте означення і наведіть відповідні формули для обчислення їх числа із n елементів по k.

2.6.2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1. Предмет теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей – це розділ математики, що вивчає математичні моделі випадкових явищ реального світу.

Вихідними поняттями теорії ймовірностей є поняття стохастичного випробування (або експерименту), випадкової події та ймовірності випадкової події.

Означення 1. *Стохастичними називають випробування, результати яких не можна наперед точно передбачити.*

Усі події, які відбуваються у навколишньому світі, можна поділити на достовірні, неможливі та випадкові.

Означення 2. *Достовірною подією називається подія* Ω, *яка при виконанні певного комплексу умов S обов'язково відбудеться.*

Наприклад, якщо при підкиданні монети вважати подією появу герба або цифри, то це достовірна подія. Умовою *S* тут вважають неможливість падіння монети на ребро.

Означення 3. *Неможливою подією називається подія* $\varnothing$, *яка при виконанні даного комплексу умов S не може відбутися.*

Наприклад, трьома пострілами не можна влучити у п'ять мішеней, які не розміщені одна за однією.

Означення 4. *Випадковою називається подія, яка при виконанні певного комплексу умов S може як відбутися, так і не відбутися.*

Наприклад, поява при підкиданні шестигранного грального кубика на верхній грані 6-и очок – це випадкова подія.

Зауваження 1. Віднесення певної події до тієї чи іншої групи істотно залежить від умов випробування.

Події позначають великими літерами латинської абетки *A,B,*C,...

Зрозуміло, що при одному випробуванні чи спостереженні ми ніяких закономірностей відносно появи певної події не помітимо. Отже, ми не зможемо передбачити, чи відбудеться ця подія наступного разу. Проте, якщо розглядати певну випадкову подію багато разів при виконанні даних умов *S*, то можна виявити певну закономірність її появи. Таку закономірність називають ймовірнісною закономірністю масових однорідних випадкових подій.

Встановленням таких закономірностей і займається теорія ймовірностей.

Отже, ***предметом теорії ймовірностей*** є вивчення ймовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій. Знання закономірностей, яким підпорядковуються масові випадкові події, дозволяють передбачити, як ці події будуть відбуватися.

Наприклад, якщо багато разів підкидати монету, то частота появи герба буде мало відрізнятися від 1/2. Так, Р. Пірсон підкидав монету 24000 разів і при цьому герб випав 12012 разів; відношення 12012/24000 відрізняється від 1/2 лише на 0,0005.

Основні поняття, теореми, формули та методи теорії ймовірностей широко використовуються в науці, техніці, економіці; у теорії надійності та теорії масового обслуговування; у плануванні та організації виробництва.

2. Основні види випадкових подій

Означення 5. *Події A і B називаються несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в одному і тому ж випробуванні.*

Приклад 1. Випадання герба (подія A) при підкиданні монети виключає випадання цифри (подія B). Отже, події A і B несумісні.

Означення 6. *Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються попарно несумісними, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися разом.*

Приклад 2. Події A_i, $i = 1,...,6$, що означають появу i очок на грані при підкиданні грального шестигранного кубика, є несумісними.

Означення 7. *Події A і B називаються сумісними, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи іншої.*

Приклад 3. Події A_2 у попередньому прикладі і B – випадання парної кількості очок на грані – сумісні випадкові події.

Означення 8. Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються рівноможливими, якщо при виконанні певного комплексу умов S у кожної з них існує однакова можливість відбутися або не відбутися.

Приклад 4. Події A_i, $i = 1,2,...,6$ при підкиданні шестигранного грального кубика рівноможливі.

Означення 9. *Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють повну групу подій, якщо вони попарно несумісні і їх сума збігається з усім простором елементарних подій Ω.*

Приклад 5. Події $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ при підкиданні грального кубика складають повну групу.

Поява герба і цифри при підкиданні монети складають теж повну групу.

Означення 10. *Подія $\overline{A}$ називається протилежною до події A, якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли подія A не відбувається.*

Приклад 6. При одному пострілі єдино можливими подіями є дві події:

A – влучення в ціль, $\overline{A}$ – промах.

3. Алгебра подій

Означення 11. *Подія A є наслідком події B, якщо множина B є підмножиною A ($A \supset B$ або $B \subset A$). Символ $B \subset A$ означає, що при настанні події B настає також подія A.*

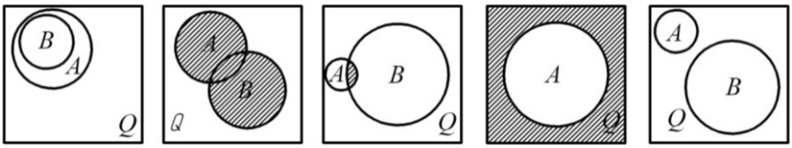
Зауваження 2. Якщо $A \subset B$ *та* $B \subset A$, *то* $A=B$.

Означення 12. *Сумою (або об'єднанням) подій A і B називається подія $C = A+B$ ($C = A \cup B$), яка складається з елементарних подій, що входять до складу хоча б однієї з подій A або B.*

Якщо події A і B несумісні, то подія $A+B$ означає появу події A або події B.

Означення 13. *Добутком (або перетином) подій A і B називається подія $C = AB$ ($C = A \cap B$), яка складається з елементарних подій, що входять в обидві події A* і *B.*

Означення 11–13 дуже зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера-Венна (рис. 140). На цих діаграмах простір елементарних подій Q зображено у вигляді квадрата, а події – у вигляді кругів.



$B \subset A$ $\quad A+B = A \cup B$ $\quad A \cdot B = A \cap B$ $\quad \overline{A}$ $\quad A \cap B = \varnothing$

Рис.140

Властивості операцій

1°. $A + B = B + A;\ AB = BA$ (комутативний закон).

2°. $\{A+B)+C= A+(B+C); (AB)C=A(BC)$ (асоціативний закон).

3°. $(A+B)C= AC+BC$ (дистрибутивний закон множення).

4°. $AB+C = (A + C)(B+C)$ (дистрибутивний закон додавання).

5°. $\overline{A+B} = AB$; $\overline{AB}= A+ B$ (закони де Моргана).

6°. $A+\overline{A} = \Omega; A+A = A; A\cdot \overline{A} =\varnothing; A\cdot A= A; A\cdot \Omega= A.$

7°. $\overline{\overline{A}}\cdot A= A.$

<u>Зауваження</u> 3. З наведенних властивостей, очевидно, випливають співвідношення:

I. $A=A\overline{B} +AB$; *2.* $B=B\overline{A}+ AB$;

3. $A+ B\overline{A} = B+ A\overline{B}$.

Означення 14. *Сумою подій* $A_1, A_2,..., A_n$ *називають таку подію* $\sum_{i=1}^{n} A_k$ *яка полягає у появі хоча б однієї з них.*

Якщо події попарно несумісні, то їх сума означає, що повинна з'явитись лише одна з подій A_i, $i = 1,\ldots,n$

Нескінченну суму випадкових подій позначають $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$

Означення 15. *Добутком подій* $A_1. A_2...., A_n$ *називають таку подію, яка полягає в одночасній появі усіх подій* A_i, $i = 1,\ldots,n$.

4. Означення ймовірності

Деякі події настають досить часто, інші – рідко. Для порівняння подій введемо числову характеристику ступеня об'єктивної можливості появи події. Такою числовою характеристикою є ймовірність події.

Означення 16. *Ймовірністю P(A) даної події A називається відношення числа результатів m, які сприяють появі даної події, до загального числа n рівноможливих і єдино можливих результатів випробувань, що утворюють повну групу, тобто* $P(A) = \frac{m}{n}$ (182)

Наведене означення називається класичним.

Приклад 7. В урні знаходиться 3 червоних, 8 чорних та 9 синіх куль. Яка ймовірність дістати з урни червону, чорну, синю кулю?

Розв'язання. Маємо три події: A – дістали червону кулю, B – чорну, C – синю. Отже, $P(A)=\dfrac{3}{20}$; $P(B)=\dfrac{8}{20}$; $P(C)=\dfrac{9}{20}$.

Приклад 8. На курсі 100 студентів, з них 20 дівчат. Знайти ймовірність того, що на лекцію з математики зайде першою дівчина.

Розв'язання. Нехай A – подія, що означає прихід першою на лекцію дівчини. Тоді $P(A)=\dfrac{20}{100}=0{,}2$.

Зауваження 4. Класичне означення ймовірності застосовують, коли простір елементарних подій m і n скінченний, а результати випробувань рівноможливі. Якщо ж множина елементарних подій (результатів випробувань) нескінченна або не виконується умова рівноможливості подій, то користуються геометричним означенням ймовірності.

Означення 17. *Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню міри g до міри G, тобто* $P(A)=\dfrac{mesg}{mesG}$ (183), де $mesg$ і $mesG$ *– міри (довжини, площі, об'єму) областей g та G.*

Наведене означення називають геометричним.

Приклад 9. Два студенти домовилися зустрітися біля університету з 13 до 14 години. За домовленістю той, хто прийде першим, чекає на іншого не більше 20 хв. Яка ймовірність того, що вони зустрінуться?

Розв'язання. Нехай x – час приходу першого, а y – другого студента. Тоді mes G – 1 (площа квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці) (рис. 141). За умовою

$$|x-y|\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow x-\frac{1}{3}\le y\le x+\frac{1}{3}$$

Знайдемо $mesg=1-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$.

Отже, $P(A)=\dfrac{5}{9}$.

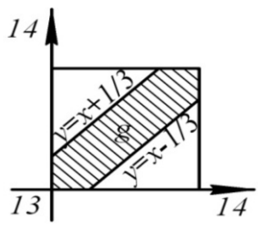


Рис.141

Крім наведених означень, існує ще статистичне означення ймовірності.

Означення 18. *Відносною частотою події А називається відношення числа* ***m*** *випродувань, в яких дана подія відбулася, до числа* ***n*** *усіх проведених випробувань, тобто*

$$W(A) = \frac{n}{m} \tag{184}$$

Зауваження 5, Ймовірність *P(A)* є теоретичною величиною, яка обчислюється до проведення випробування, а відносна частота *W(A)* – величина емпірична, яка обчислюється за результатами випробувань. У дослідах відносна частота коливається навколо деякого сталого числа. Ця властивість відносної частоти називається властивістю стійкості.

Означення 19. *Статистичною ймовірністю події А називається число, навколо якого групуються відносні частоти цієї події або сама відносна частота*

$$P(A) = \lim_{x \to \infty} W_n(A) \tag{185}$$

Наведена формула встановлена Р. Мізесом для випадкових подій.

Приклад 10. Французький вчений Ж. Бюффон підкидав монету 4040 разів. Герб випав 2048 разів. Отже, відносна частота випадання герба (подія *A)* буде

$$W(A) = \frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069 .$$

Приклад 11. Англійський математик Карл Пірсон підкидав монету 24000 разів. При цьому герб випав 12012 разів. Отже,

$$W(A) = \frac{12012}{24000} \approx 0{,}5005$$

Приклад 12. Знайти ймовірність появи герба при одному підкиданні монети.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

У наведених прикладах 10 і 11 відносна частота появи герба близька до ймовірності $P(A)=\frac{1}{2}$ (приклад 12).

Запитання для самоконтролю

1. Що таке випадкова подія? Достовірна? Неможлива? Простір елементарних подій? Дайте означення і наведіть приклади.

2. Які події називаються несумісними? Сумісними? Протилежними? Наведіть приклади.

3. Які події утворюють повну групу? Наведіть приклади.

4. Що називається сумою подій? Добутком? Назвіть властивості і дайте геометричну інтерпретацію операцій над подіями.

5. Дайте означення ймовірності події: а) класичне; б) геометричне; в) статистичне. Назвіть властивості ймовірності та наведіть приклади обчислення ймовірностей.

Повторні незалежні випробування

1. Схема Бернуллі. Розглянемо спочатку декілька прикладів.

Приклад 1. В урні є білі та чорні кульки. Під подією A будемо розуміти подію появи білої кульки при послідовному діставанні кульок із урни. Ймовірність цієї події позначимо $P(A) = p$. Будемо вважати, що вона не залежить від того, в котрий раз ми дістаємо білу кульку. Щоб забезпечити таку незалежність, кожного разу будемо повертати кульку в урну і ретельно перемішувати кульки. Очевидно, протилежна подія A – поява чорної кульки – буде мати ймовірність $q =1 - p$. Визначити ймовірність $P_n (k)$ того, що у n випробуваннях біла кулька з'явиться k разів.

Приклад 2. Яка ймовірність $P (k)$ появи k разів герба при n послідовних підкиданнях симетричної монети за умови, що ймовірність появи герба в одному випробуванні дорівнює p**?**

Приклад 3. Яка ймовірність того, що з n новонароджених народилося k хлопчиків, якщо ймовірність народження хлопчика дорівнює p**?**

Наведені приклади належать до ***схеми незалежних випробувань Бернуллі.***

Означення 1. *Нехай n разів проводиться певне випробування, в якому можна спостерігати появу подій $A_1, A_2, ..., A_n$. Випробування називаються незалежними, якщо результати кожного з них не залежать від результатів інших.*

З означення випливає, що події $A_i, i = 1,...,n$ є незалежними у сукупності, тому $P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$,

$$P(A_i) \geq 0, \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Означення 2. *Незалежні випробування, що повторюються багато разів, називаються випробуваннями Бернуллі, якщо у кожному з них є лише два можливі наслідки і ймовірності цих наслідків є сталими для всіх випробувань.*

Простір елементарних подій кожного окремого випробування Бернуллі складається з двох подій A і $\overline{A}$. (A – "успіх", $\overline{A}$ – "невдача"), а простір елементарних подій n незалежних випробувань Бернуллі містить 2^n подій.

2. Формула Бернуллі. Наведені у 1 пункті приклади можна узагальнити так: здійснено n незалежних випробувань Бернуллі, в яких спостерігається поява події A. Яка ймовірність появи k разів події A у n випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює p, а непояви – $q = 1 - p$? Шукану ймовірність позначимо через $P_n(k)$. а через B_k – складену подію, яка означає, що в n випробуваннях подія A настане k разів, а отже, не настане $n - к$ разів.

Зауважимо, що подія A може з'являтися у будь-якій послідовності. Тоді

$$B_k = \underbrace{AA...A}_{k}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k} + ... + \underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}\underbrace{AA...A}_{k} \qquad (186)$$

Тут кожний доданок складається з k множників типу A і $n - k$ множників типу $\overline{A}$ і має ймовірність $p^k q^{n-k}$ (згідно з теоремою множення ймовірностей для незалежних подій). Дійсно,

$$P = \left(\underbrace{AA...A}_{k}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k} \right) = P\left(\underbrace{AA...A}_{k} \right) P\left(\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k} \right) = P^k(A)P^{n-k}(\overline{A}) = p^k q^{n-k}$$

Усіх доданків в (186) стільки, скільки можна скласти з n елементів комбінацій по k елементів, тобто $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Враховуючи несумісність доданків в (186), згідно з теоремою додавання ймовірностей для несумісних подій, маємо $P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Але $P(B_k) = P_n(k)$, тому останню формулу можна записати у вигляді

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (187)$$

Цю формулу називають формулою Бернуллі. Отриманий результат можна сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. Ймовірність того, що у n випробуваннях Бернуллі, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0<p<1$), подія настане k разів і не настане $(n - k)$ разів, дорівнює $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Наслідок 1. Сума ймовірностей $P_n(k)$, $k = 0,...,n$, у n незалежних випробуваннях дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$$

Дійсно, складемо суму ймовірностей $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) C_n^k p^k q^{n-k}$

Згідно з біномом Ньютона, маємо $1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) C_n^k p^k q^{n-k}$

Отже, $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$

Приклад 4. Система складена з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що: 1) відмовлять два блоки; 2) відмовить хоча б один блок; 3) відмовлять не менше двох блоків.

Розв'язання. Позначимо подію "відмова блока" через A. Тоді ймовірність $P(A) = p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, а $q = 1 - p - 0{,}8$. За умовою задачі n=10. Згідно з формулою Бернуллі маємо:

1) $P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = C_{10}^2 (0,2)^2 (0,8)^8 \approx 0,202$

2) $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^0 (0,2)^0 (0,8)^{10} \approx 0,8926$

3) $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1 - \left(P_{10}(0) + P_{10}(1)\right) = 1 - \left(C_{10}^0 (0,2)^0 (0,8)^{10} + C_{10}^1 (0,2)(0,8)^9\right) \approx 0,6244$

Запитання для самоконтролю

1. Які випробування називаються незалежними випробуваннями Бернуллі?
2. Скільки подій містить простір елементарних подій *n* незалежних випробувань Бернуллі?
3. Назвіть і доведіть формулу Бернуллі для ймовірності появи *k* разів деякої події у *n* випробуваннях Бернуллі.

Числові характеристики дискретних випадкових величин.

Закон розподілу повністю характеризує дискретну випадкову величину, але нерідко він невідомий, тому обмежуються так званими числовими характеристиками.

До таких, перш за все, належать такі числові характеристики:

1) математичне сподівання; 2) дисперсія; 3) середнє квадратичне відхилення.

1. Математичне сподівання ДВВ

Означення 1. Математичним сподіванням ДВВ *X* називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності і позначається *M(X):*

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \qquad (188)$$

Тут *X* – ДВВ, що набуває значення x_k з ймовірностями p_k, *k=1,n.*

Зауваження 1. Якщо ДВВ X набуває зліченної множини можливих значень, то

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \tag{189}$$

за умови, що даний ряд абсолютно збіжний.

Зауваження 2. З означення випливає, що $M(X)$ не випадкова, а стала величина (на відміну від випадкової величини X).

Зауваження 3. Математичне сподівання числа появи події A в одному випробуванні дорівнює ймовірності цієї події. Дійсно, $M(X) = 0q + 1p = p$.

Зауваження 4. Математичне сподівання наближено дорівнює (тим точніше, чим більше число випробувань n) середньому арифметичному значенню випадкової величини, що спостерігається. У цьому полягає ймовірнісний зміст $M(X)$.

Зауваження 5. Очевидно, $M(X)$ більше найменшого і менше найбільшого з можливих значень ДВВ X:

$$\min(x_1, x_2, ..., x_n) < M(X) < \max(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Отже, $M(X)$ характеризує розміщення значень випадкової величини X.

Зауваження 6 (механічний зміст формули (1)). Запишемо формулу (1) у вигляді

$$M(X) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k} = x_c\,, \ \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \right) \tag{190}$$

2. Властивості математичного сподівання ДВВ

М1°. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій

$$M(C) = C \tag{191}$$

М2°. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання

$$M(CX) = CM(X) \tag{192}$$

Наведені властивості випливають із означення математичного сподівання.

М3°. Математичне сподівання добутку двох незалежних дискретних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$M(XY)=M(X)M(Y). \qquad (193)$$

<u>Доведення</u>. Нехай незалежні випадкові величини X та Y мають закони розподілу:

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	g_1	g_2

Для спрощення розглянемо випадкові величини, які набувають лише двох значень. За аналогією з випадковими подіями дамо означення незалежних випадкових величин.

Означення 2. *Дві випадкові величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набуває інша випадкова величина. У протилежному випадку випадкові величини залежні.*

Означення 3. *Добутком незалежних випадкових величин X і Y називається випадкова величина XY, можливі значення якої дорівнюють добуткам кожного можливого значення X на кожне можливе значення Y. Ймовірності добутків цих значень дорівнюють добуткам ймовірностей співмножників.*

Таким чином, закон розподілу добутку XY буде

XY	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
P	p_1g_1	p_1g_2	p_2g_1	p_2g_2

Нехай усі добутки різні. Тоді за формулою (1) знаходимо:

$$M(XY)=p_1g_1x_1y_1+p_1g_2x_1y_2+p_2g_1x_2y_1+p_2g_2x_2y_2=y_2g_2(x_1p_1+x_2p_2)=$$
$$=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1g_1+y_2g_2)=M(X)M(Y)$$

Наслідок. *Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних ДВВ дорівнює добутку їх математичних сподівань.*

Наприклад, у випадку трьох ДВВ запишемо:

$$M(XYZ) = M(X)M(Y)M(Z) \qquad (194)$$

Формула доводиться методом математичної індукції.

Приклад 2. Випадкові величини *X* та *Y* задані законами розподілу. Знайти *M(XY)*.

X	*2*	*4*	*5*
P	*0,1*	*0,3*	*0,6*

Y	*7*	*9*
P	*0,8*	*0,2*

Розв'язання. Знайдемо $M(X) = 0{,}2 + 1{,}2 + 3 = 4{,}4$; $M(Y) = 5{,}6 + 1{,}8 = 7{,}4$. Отже, з рівності (193) знаходимо $M(XY) = 4{,}4 + 7{,}4 = 32{,}56$.

М4°. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y) \qquad (195)$$

Означення 4. *Сумою випадкових величин X і Y називається випадкова величина X+Y, можливі значення якої дорівнюють сумі кожного можливого значення випадкової величини X і кожного можливого значенням Y. При цьому ймовірності можливих значень випадкової величини X + Y для незалежних випадкових величин X і Y дорівнюють добуткам ймовірностей доданків; для залежних – добуткам ймовірностей одного доданка на умовну ймовірність іншого.*

Нехай дискретні випадкові величини *X* і *Y* задані законами розподілу:

X	x_1	x_2
p	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
p	g_1	g_2

p_1+p_2	$=1$
g_1+g_2	$=1$

Тоді закон розподілу випадкової величини *X*+*Y* буде мати вигляд

X+ Y	$x_1 + y_1$	x_1+y_1	x_2+y_1	$x_2 + y_2$
p	p_1g_1	p_1g_2	p_2g_1	p_2g_2

За означенням

$$M(X+Y)=(x_1+y_2)p_1g_1+(x_1+y_2)p_1g_1+(x_2+y_1)p_2g_1+(x_2+y_2)p_2g_2=$$
$$=x_1p_1(g_1+g_2)+x_2p_2(g_1+g_2)+y_1g_1(p_1+p_2)+y_2g_2(p_1+p_2)=(x_1p_1+x_2p_2)+$$

$$+(y_1g_1+y_2g_2)=M(X)+M(Y).$$

Наслідок. *Математичне сподівання суми декількох незалежних випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків.*

Наприклад, для трьох ДВВ справедлива рівність

$$M(X+Y+Z)=M(X+Y)+M(Z)=M(X)+M(Y)+M(Z). \quad (196)$$

Приклад 3. Проведено три постріли з ймовірностями влучення в ціль $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}6$. Знайти математичне сподівання загальної кількості влучень.

Розв'язання. Кількість влучень при першому пострілі є випадковою величиною, яка може набувати двох значень: 1 (влучення) з ймовірністю p=0,4 і 0 (промах) з ймовірністю $q=1-0{,}4=0{,}6$.

Тоді $M(X)=1\cdot 0{,}4+0\cdot 0{,}6=0{,}4$. Аналогічно для другого і третього пострілів $M(Y)=1\cdot 0{,}3+0\cdot 0{,}7=0{,}3$ і $M(Z)=0{,}6$.

Загальна кількість влучень є випадковою величиною $X+Y+Z$, тому згідно з (196).

$$M(X+Y+Z)=M(X)+M(Y)+M(Z)=0{,}4+0{,}3+0{,}6=1{,}3 .$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке математичне сподівання ДВВ? Який ймовірнісний та механічний зміст математичного сподівання?
2. Назвіть та доведіть основні властивості математичного сподівання ДВВ.
3. Обчисліть математичне сподівання ДВВ, розподіленої за біномним законом.
4. Обчисліть математичне сподівання ДВВ, розподіленої геометрично.
5. Обчисліть математичне сподівання ДВВ, розподіленої за законом Пуассона.

3. Дисперсія ДВВ та її властивості

Дисперсія – міра розсіювання можливих значень випадкової величини відносно центру розподілу.

Означення 1. *Дисперсією дискретної випадкової величини X називається число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрату відхилення X від її математичного сподівання і позначається D(X):*

$$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] \qquad (197)$$

Приклад 1. Знайти дисперсію випадкової величини *X,* яка означає кількість появи гербів при підкиданні трьох монет.

Розв'язання. *M(X)=1,5.* Запишемо розподіли випадкових величин *X-M(X) і* $(X\text{-}M(X))^2$:

X-M(X)	-1,5	-0,5	0,5	1,5
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$(X\text{-}M(X))^2$	2,25	0,25	0,25	2,25
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Отже, згідно з рівністю (197), знаходимо

$$D(X) = 2{,}25 \cdot \frac{1}{8} + 0{,}25 \cdot \frac{3}{8} + 0{,}25 \cdot \frac{3}{8} + 2{,}25 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot 6 = 0{,}75$$

Теорема 1. *(Формула обчислення дисперсії).* Дисперсія дискретної випадкової величини *X* дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини *X* та квадратом її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - (V(X))^2 \qquad (198)$$

Дійсно, згідно з властивостями *M(X)*, знаходимо

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M\left[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\right] =$$
$$= M\left(X^2\right) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X)$$

Приклад 2. Знайти *D(X)* за формулою (198) у прикладі 1.

Розв'язання. Запишемо розподіл випадкової величини X^2. Зауважимо, що всі значення X^2 знаходимо шляхом піднесення до квадрату відповідних значень *X,* а ймовірності цих значень не змінюються.

X^2	0	1	4	9
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Тоді $M(X^2)+\frac{3}{8}+\frac{12}{8}+\frac{9}{8}=\frac{24}{8}=3$; $M^2(X)=(1,5)^2=2,25$.

Отже, $D(X)=3-2,25=0,75$.

Розглянемо властивості дисперсії ДВВ X.

Властивість 1°. Дисперсія ДВВ X невід'ємна, тобто $D(X)\geq 0$.

Дійсно, величина $(X-M(X))^2$ невід'ємна, тому згідно з рівністю (197), враховуючи, що $p_k\geq 0$ $(k=1,...,n)$, $D(X)\geq 0$.

Властивість 2°. Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю, тобто $D(C)=0$.

Дійсно, $M(C)=C$, тому $C-M(C)=0$. Отже, $D(C)=M(0)=0$.

Властивість 3°. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, піднісши його спочатку до квадрату: $D(CX)=C^2D(X)$.

Дійсно, $D(CX)=M(C^2X^2)-M^2(CX)=C^2M(X^2)-(CM(X))^2=$

$$=C^2\left(M(X^2)-M^2(X)\right)=C^2D(X).$$

Властивість 4°. Дисперсія алгебраїчної суми двох незалежних ДВВ X та Y дорівнює алгебраїчній сумі їх дисперсій, тобто

$$D(X\pm Y)=D(X)\mp D(Y).$$

Наслідок 1. Дисперсія суми декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.

$$D(X+Y+Z)=D(X+Y)+D(Z)=D(X)+D(Y)+D(Z).$$

Наслідок 2. Дисперсія суми сталої величини C і випадкової величини X дорівнює дисперсії випадкової величини X.

Дійсно, $D(X+C)=D(X)+D(C)=D(X)+0=D(X)$.

Зауваження 1. Наслідок 2 означає, що зміщення випадкової величини не змінює її дисперсії.

3. Приклади обчислення дисперсій ДВВ

1) Біномний розподіл.

Дисперсія біномного розподілу ДВВ X з параметрами n і p дорівнює npq, тобто $D(X)=npq$.

$$M\left(X^2\right)\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k p^k q^{n-k}=np\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n}C_n^k p^k q^{n-k}=np\sum_{k=0}^{n}k^2C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}=$$
$$=np\left(\sum_{k=0}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}\right)=np\left((n-1)p+1\right)=$$
$$=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2$$

Таким чином, згідно з рівністю (198), знаходимо:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p)=npg.$$

2) Розподіл Пуассона.

Теорема 2. Дисперсія розподілу Пуассона з параметром λ ДВВ X дорівнює λ, тобто $D(X)=\lambda$.

Доведення. За умовою ДВВ X має розподіл Пуассона, тому $M(X)=\lambda$. Знайдемо $M(X^2)$. Для цього спочатку знаходимо

$$M\left(X\left(X-1\right)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}k\left(k-1\right)\frac{\lambda^2}{k!}e^{-\lambda}=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{\left(k-2\right)!}e^{-\lambda}=$$
$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{\left(k-2\right)!}e^{-\lambda}=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^2$$

Враховуючи властивості математичного сподівання, маємо

$$M(X(X-1))=M\left(X^2-X\right)=M\left(X^2\right)-M(X).$$

Підставимо одержані значення в останню рівність і знайдемо $M(X^2)$

$\lambda^2=M\left(X^2\right)-\lambda$, звідки $M(X^2)=\lambda^2+\lambda$.

Отже, $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda^2$.

3) Геометричний розподіл.

Теорема 3. Дисперсія геометричного розподілу ДВВ X дорівнює $\frac{q}{p^2}$, де $p(0<p<1)$ і $q(0<q<1)$ – ймовірності появи і непояви події A у кожному випробуванні.

Доведення. За умовою розподіл геометричний, тому $M(X) = \frac{1}{p}$

Знайдемо $M(X^2)$. $M(X^2) = 1^2 \cdot p + 2^2 - qp + 3^2 \cdot q^2 p + ... + n^2 q^{n-1} p + ... =$
$= p(1^2 + 2^2 \cdot q + 3^2 \cdot q^2 + ... + n^2 q^{n-1} + ...) = p \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{p(1+q)}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}$

Далі, згідно з рівністю (198) знаходимо

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{1-q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Пояснення. Покажемо, що сума степеневого ряду

$$1^2 + 2^2 \cdot q + 3^2 \cdot q^2 + ... + n^2 q^{n-1} = \frac{1+q}{(1-q)^2}$$

Дійсно, при $0 < q < 1$ проінтегруємо ряд

$$\int_0^q \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1} \right) dq = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^q q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1} \Big|_0^q = \sum_{n=1}^{\infty} n q^n =$$
$$= q \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n1} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

(див. властивість 7° математичного сподівання). Продиференціювавши останню рівність по q, знаходимо шукану суму ряду.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке дисперсія ДВВ? Доведіть формулу обчислення дисперсії ДВВ.
2. Назвіть та доведіть основні властивості дисперсії ДВВ.
3. Обчисліть дисперсію ДВВ, розподіленої за біномним законом.
4. Обчисліть дисперсію ДВВ, розподіленої геометрично.
5. Обчисліть дисперсію ДВВ, розподіленої за законом Пуассона.
6. Що таке середнє квадратичне відхилення ДВВ?

7. Як обчислити числові характеристики однаково розподілених незалежних випадкових величин?

8. Що таке моменти розподілу ДВВ і як їх обчислити?

Закон великих чисел

1. Нерівність Чебишова. Випадкова величина у результаті випробування може набути будь-якого із своїх можливих значень, якого саме, наперед передбачити неможливо. Здається, що оскільки ми знаємо дуже мало про кожну з випадкових величин, неможливо встановити властивості їх суми. Насправді це не так. Виявляється, що за деяких порівняно загальних умов сумарна поведінка досить великої кількості випадкових величин майже втрачає випадковість і набуває закономірності.

Умови, за яких здійснюється тенденція народження закономірностей з великої кількості випадковостей, розглядаються у так званих граничних теоремах, які об'єднуються загальною назвою "закону великих чисел". Цей закон відіграє важливу роль у дослідженнях різних процесів, пов'язаних з масовим виробництвом.

Граничні теореми, що встановлюють граничні закони розподілу випадкових величин, об'єднують загальною назвою – ***центральна гранична теорема***.

При доведенні граничних теорем, а також при розв'язуванні багатьох практичних задач, використовується нерівність Чебишова, до розгляду якої ми і перейдемо.

Теорема 1 (*нерівність Чебишова*). Якщо випадкова величина X має скінченну дисперсію $D(X)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{199}$$

Доведення. Нерівність справедлива як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин X. Доведемо цю нерівність для дискретних величин.

Розглянемо дискретну випадкову величину X, задану таблицею розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	P_1	P_2	...	P_n

Події $|X\text{-}M(X)|<\varepsilon$ і $|X\text{-}M(X)|\geq\varepsilon$ протилежні, тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці, тобто

$$P\left|\left(X-M(X)\right)\right|<\varepsilon+P\left|\left(X-M(X)\right)\right|\geq\varepsilon=1 \qquad (200)$$

Зауважимо, що випадкова величина $(X-M(X))^2\geq 0$ для всіх значень X. Враховуючи сказане і означення дисперсії $D(X)$, знаходимо:

$$D(X)=M(X-M(X))^2=\sum_{k=1}^{n}p_k(x_k-M(X))^2=$$

$$=\sum_{k:|x_k M(X)|<\varepsilon}p_k(x_k-M(X))^2+\sum_{k:|x_k M(X)|\geq\varepsilon}p_k(x_k-M(X))^2\geq$$

$$\geq\sum_{k:|x_k M(X)|\geq\varepsilon}p_k(x_k-M(X))^2\geq\sum_{k:|x_k M(X)|\geq\varepsilon}p_k\varepsilon^2=\varepsilon^2\sum_{k:|x_k M(X)|\geq\varepsilon}p_k=$$

$$=\varepsilon^2 P\left|(X-M(X))\right|\geq\varepsilon)$$

Звідси випливає нерівність (199), а з урахуванням рівності (200), запишемо нерівність Чебишова в іншій формі:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (201)$$

Нерівність Чебишова дозволяє оцінити ймовірності відхилень значень випадкової величини від свого математичного сподівання. Застосування нерівності Чебишова розглянемо на прикладі оцінки похибки наближення вимірюваної фізичної величини.

Приклад 1. Нехай проводиться n незалежних вимірів деякої невідомої величини a. Похибки вимірювань $\delta_1, \delta_2,\dots \delta_n$ будемо вважати випадковими величинами. Припустимо, що $M(\delta_k)=0,$ ($k=1,2,..,n.$) тобто вважаємо, що відсутня систематична (одного знаку) похибка приладу.

Нехай $D(\delta_k)=b^2,$ $(k=1,2,..,n)$ тобто прилад забезпечує певну точність вимірів.

За значення невідомої величини a приймають, як правило, середнє арифметичне результатів вимірів. Тоді похибка при визначенні числа буде дорівнювати

$$\Delta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k \quad \text{тоді} \quad D(\Delta_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(\delta_k)=\frac{nb^2}{n^2}=\frac{b^2}{n},$$

а $M(\Delta_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(\delta_k) = 0$.

Будемо вимагати, щоб похибка Δ_n не перевищувала деякого $e > 0$ з досить великою ймовірністю, наприклад,

$$P\left(\left|\Delta_n\right| < \varepsilon\right) \geq 0{,}99 \qquad (202)$$

Тоді згідно з нерівністю Чебишова (201) запишемо:

$$P(\left|\Delta_n\right| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\Delta_n)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{b^2}{n\varepsilon^2}$$

Отже, нерівність (202) буде виконуватися за умови

$$1 - \frac{b^2}{n\varepsilon^2} \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \frac{b^2}{n\varepsilon^2},\ n \geq \frac{100b^2}{\varepsilon^2}$$

Таким чином, ми отримали оцінку числа вимірювань, необхідних для досягнення заданої точності.

Нерівність Чебишова дає досить грубу оцінку. Її можна покращити або застосувавши для виміру прилад підвищеної точності, або збільшивши кількість вимірів n, урахувавши, що величина Δ_n має майже нормальний розподіл. Якщо ж про випадкову величину X нічого невідомо, крім $M(X)$ і $D(X)$, то оцінку, яку дає нерівність Чебишова, покращити неможливо. Теоретичне ж значення нерівності Чебишова досить значне.

Приклад 2. Дальномір з максимальною похибкою 0,1% вимірює відстань до цілі X=2000 м. Яка ймовірність того, що відхилення відстані від її математичного сподівання не перевищує 10 м?

Розв'язок. Знаючи клас дальноміра, знайдемо $\delta = 0{,}001 \cdot 2000 = 2$, тобто $D=2^2=4$. Використовуючи нерівність (201), одержуємо

$$D\left(\left|X - 2000\right| < 10\right) \geq 1 - \frac{4}{10^2} = 0{,}96$$

Якщо б ми вибрали відстань 1 м, то дістали б неінформативну оцінку

$$D(\left|X - 2000\right| < 10) \geq 1 - \frac{4}{1^2} = -3 \qquad (P \geq 0)$$

Це не пов'язано з нерівністю Чебишова, оскільки, виставляючи жорсткі вимоги до відхилення, треба застосовувати прилад вищого класу.

2. Закон великих чисел і його наслідки

Теорема 1 (***закон великих чисел***). Якщо випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ попарно незалежні, мають скінченні математичні сподівання і дисперсії і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\left(X_k\right)=0, \tag{203}$$

то для довільного ε > 0 виконується рівність:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}M\left(X_k\right)\right|<\varepsilon\right)=1 \tag{204}$$

Доведення. Покладемо

$$\overline{X_n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}X_k.$$

Тоді твердження теореми рівносильні тому, що при будь-якому $e > 0$ справедлива рівність:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X_n}-M\overline{X_n}\right|\geq\varepsilon\right)=0. \tag{205}$$

Випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ попарно незалежні, тому

$$D\left(\overline{X_n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\left(X_k\right) \tag{206}$$

Використовуючи нерівність Чебишова і рівність (206), знаходимо

$$P\left(\left|\overline{X_n}-M\overline{X_n}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D\left(\overline{X_n}\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\left(X_k\right)}{\varepsilon^2} \tag{207}$$

Звідси, згідно з рівностями (206) і (203), одержимо (205).

Дійсно, $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X_n}-M\overline{X_n}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\left(X_k\right)}{\varepsilon^2}=0$

Теорема доведена.

Зауваження 1. Якщо для випадкових величин $X_x, X_2,..., X_n,...$ виконані умови теореми 1, то говорять, що до них застосовний закон великих чисел.

Теорема 2 (***теорема Чебишова***). Якщо випадкові величини $X_1, X_2,...,X_n,...$ попарно незалежні, мають скінченні математичні сподівання і дисперсії, обмежені в сукупності

$$D(X_k) \leq C,\ k=1,...,\infty, \tag{208}$$

де C – стала величина, то для довільного $e > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\left(X_k\right) \right| < \varepsilon \right) = 1 \tag{209}$$

Рівність (209) означає, що середнє арифметичне значень випадкових величин, коли кількість доданків нескінченно зростає, збіжне за ймовірністю до середнього арифметичного їх математичних сподівань.

Зауваження 2. Для використання у практичній діяльності теореми Чебишова її можна сформулювати таким чином: якщо дисперсії незалежних випадкових величин обмежені, то з будь-якою точністю для досить великих n ймовірність наближеної рівності

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\left(X_k\right) \text{ близька до одиниці.} \tag{210}$$

Приклад 3. Скільки доданків треба взяти, щоб з надійністю 95% і точністю до 0,01 виконувалася наближена рівність (210)?

Розв'язання. За умовою $e = 0{,}01$. Щоб гарантувати надійність 95%, оцінимо ймовірність події, протилежної до тієї, що розглядали в:

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\left(X_k\right) \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} D\left(X_k\right)}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = \frac{C}{n\ \varepsilon^2}\ , \tag{211}$$

де $D(X_k) \leq C$.

Отже, $\frac{C}{\varepsilon^2 n} \leq 0{,}05 \Rightarrow n \geq \frac{C}{0{,}0001\cdot 0{,}05} = 200000C\ \cdot$

Цей приклад показує, що для досягнення заданої точності треба взяти значну кількість доданків.

Зауваження 3. Співвідношення (211) встановлює зв'язок між точністю ε наближеної рівності (210) та кількістю доданків *n*.

Наслідок. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ однаково розподілені, попарно незалежні і мають скінченні дисперсії, то для довільного $\varepsilon > 0$ справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right) = 1, \text{ де } a=M(X_k),\ k=1,\ldots,\infty \qquad (212)$$

Доведення випливає з теореми 2. Дійсно, якщо дисперсії $D(X_k)$ ($k = 1,\ldots,\infty$) скінченні і рівні між собою, то тим самим виконується нерівність (208).

Зауваження 4. Наслідок з теореми Чебишова служить обгрунтуванням середнього арифметичного в теорії обробки результатів вимірів.

Теорема 3 (*теорема Бернуллі*). Нехай *k* – кількість успіхів у *n* випробуваннях Бернуллі, а *p* ($0<p<1$) – ймовірність успіху у кожному випробуванні. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (213)$$

Теорема Бернуллі є класичним варіантом закону великих чисел, її доведення проведено раніше для дискретних випадкових величин.

Зауваження 5. Схема Бернуллі є математичною моделлю серії випробувань, що повторюються за однакових умов. У кожному випробуванні може настати подія *A,* яку ми назвали успіхом. Згідно з теоремою Бернуллі частота $\frac{k}{n}$ настання події *A* наближається до її ймовірності *P*.

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте і доведіть нерівність Чебишова. В яких формах ця нерівність використовуються на практиці? Наведіть приклади.

2. Сформулюйте і доведіть теорему про закон великих чисел.

3. Сформулюйте і доведіть теорему Чебишова.

4. Покажіть, як використовується теорема Чебишова у практичній діяльності. Наведіть співвідношення, яке встановлює зв'язок між точністю ε та кількістю доданків n у серії випробувань.

5. Сформулюйте і доведіть наслідок з теореми Чебишова для однаково розподілених попарно незалежних випадкових величин.

2.6.3. ПОНЯТТЯ ПРО МАТЕМАТИЧНУ СТАТИСТИКУ ТА ЇЇ МЕТОДИ

Предмет і методи математичної статистики. Термін "статистика" походить від латинського слова *status* – стан, становище. Статистика – наука, що збирає, обробляє і вивчає різні дані, пов'язані з масовими явищами, процесами і подіями. Предметом вивчення статистики є, зокрема, кількісна сторона масових суспільних явищ і процесів у зв'язку з їхньою якісною стороною.

Іноді неточно визначають статистику як "науку збирання даних". Це галузь прикладної математики.

Математична статистика – розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки й використання статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Статистика виникла з практичних потреб людей, їх господарської діяльності, необхідності обліку земельних угідь, майна, кількості населення, вивчення його занять, вікового складу тощо. Цікаво, що в Англії в XVII ст., коли статистичне вивчення поширилося на явища суспільного життя, людей, що займалися цими питаннями, називали "політичними арифметиками". Одним з головних представників "політичних арифметиків" Англії був В. Петті (1625–1687).

Статистику розділяють на описову і пояснювальну.

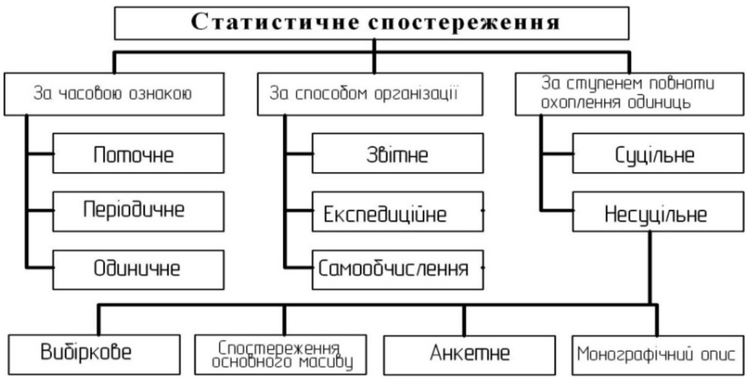
Описова статистика займається добором кількісної інформації, необхідної (або цікавої) для різних людей. Такою є спортивна інформація, відомості про середній рівень заробітної плати в державі, середньорічну температуру в певному регіоні тощо.

Великі масиви даних, перш ніж вони будуть тлумачитися людиною, мають узагальнюватися або згортатися. Саме це робить описова статистика, яка описує, узагальнює або зводить до бажаного виду властивості масивів даних.

За допомогою пояснювальної статистики з отриманих статистичних результатів роблять певні висновки, будують прогнози. Предметом вивчення статистики є такі об'єкти, як кількість і склад населення, трудові ресурси суспільства (їх розподіл і використання), національне багатство, виробництво і розподіл суспільного продукту і національного прибутку, матеріальний достаток населення, освіта, культура, охорона здоров'я, показники статистики органів державного управління і громадських організацій. У процесі статистичного дослідження застосовують особливі прийоми вивчення, які в сукупності утворюють статистичний метод. Складовими елементами статистичного методу є масове спостереження, статистичне зведення, групування, обчислення середніх величин та індексів, побудова графіків.

Статистичне спостереження – перший етап статистичного дослідження.

На схемі систематизовано види статистичних спостережень.



Охарактеризуємо основні три блоки таблиці.

Спостереження за часовою ознакою

Поточне спостереження передбачає систематичне вивчення змін, що відбуваються в певній сукупності, в міру їх надходження. Наприклад, щоденний облік відвідування в певному класі.

Періодичне спостереження проводиться через строго визначені інтервали часу – місяць, квартал, рік. Наприклад, облік успішності в школі за чверть, навчальний рік. У сільському господарстві – щорічний перепис худоби тощо.

Одиничне спостереження, як правило, проводиться в разі потреби в якийсь певний момент за особливим завданням. Наприклад, перепис житлового фонду в певному районі міста.

Спостереження за способом організації

Звітне спостереження – вивчення певних явищ і процесів на основі статистичних відомостей, які містяться у різноманітній звітності. Під час **експедиційного** спостереження спеціальні люди – обліковці – обходять закріплені за ними ділянки території і здійснюють там реєстрацію. Прикладом є перепис населення.

Спостереження самообчислення полягає в тому, що представники статистичних органів роздають населенню або установам статистичні формуляри, які періодично через певні інтервали часу збирають і потім обробляють для отримання узагальнених даних.

Спостереження за ступенем повноти охоплення одиниць

Цей вид статистичного спостереження безпосередньо пов'язаний з математикою, а тому після загального огляду методів, якими користується статистика, ми повернемося до нього.

Суцільним є спостереження, в якому реєструється ознака всіх без винятку одиниць, що входять у сукупність, яка вивчається. Суцільне спостереження застосовується, наприклад, під час перепису населення.

Несуцільним називають такий вид спостереження, під час якого реєструють ознаки лише частини одиниць досліджуваної сукупності, і за частиною роблять висновок про всю сукупність.

Видами несуцільного спостереження є: вибіркове спостереження, спостереження основного масиву, анкетне спостереження і монографічний опис.

Найпоширенішим з видів несуцільного спостереження є **вибіркове** спостереження. Всю сукупність, з якої роблять відбір одиниць спостереження, називають генеральною. Сукупність одиниць, відібраних для вибіркового спостереження, називається **вибіркою**.

Під час вибіркового спостереження обстеженню підлягає відібрана певним чином частина одиниць усієї її сукупності, а результати обчислення цієї частини сукупності поширюються на всю сукупність у цілому.

У практиці статистично розрізняють три способи відбору одиниць сукупності, яка вивчається.

1. Випадковий відбір – усі одиниці сукупності мають однакову можливість попасти у вибірку. Відбір здійснюється з усієї сукупності жеребкуванням.

2. Механічний відбір – одиниці спостереження відбирають у певному порядку. Наприклад, під час механічного відбору при вивченні якості продукції береться на вибір кожна десята або двадцята деталь.

3. Типовий відбір – всю масу одиниць, що вивчаються, розчленовують на дрібніші однорідні групи і здійснюють наступний відбір одиниць – “представників” кожної групи у випадковому або механічному порядку. Наприклад, під час вивчення бюджету сімей їх попередньо розподіляють на групи за соціальним станом і рівнем прибутків.

Поширюючи дані вибіркового спостереження на всю генеральну сукупність, застосовують два способи поширених даних: спосіб прямого перерахунку і спосіб поправочних коефіцієнтів. *Перший спосіб* полягає в тому, що результати вибіркового спостереження приймають і для генеральної сукупності.

Другий спосіб застосовують під час уточнення результатів суцільного спостереження. Суть його полягає в тому, що дані вибіркового обстеження співставляють з даними суцільного спостереження і визначають коефіцієнт розходження.

Спостереження основного масиву передбачає облік лише частини одиниць певної сукупності, яка має переважну питому вагу в обсязі досліджуваного об'єкта. Наприклад, вивчення цін на ринках, які мають найбільшу питому вагу в оборотах торгівлі.

Анкетне спостереження не надійне (частина анкет не повертається). Воно використовується переважно транспортними організаціями і органами зв'язку для вивчення ефективності обслуговування населення.

Монографічний опис полягає в тому, що для обстеження береться один об'єкт, який докладно вивчають (здебільшого це має місце під час вивчення і поширення передового досвіду).

Важливу частину статистичних методів складають планування і аналіз експериментів, що спрямовані на виявлення і перевірку причинних зв'язків між змінними. Планування експериментів спирається в основному на поєднання теорії ймовірностей з елементарною логікою.

Статистичні дослідження проводяться за таким планом:

1) формулюється завдання дослідження і визначаються обсяг, місце і час потрібної вибірки;

2) здійснюються збирання необхідних даних та їх наочне подання;

3) проводиться обробка зібраного статистичного матеріалу.

На першому етапі важливо чітко визначити мету дослідження, встановити, які об'єкти вивчатимуться і в якій кількості (обсяг вибірки). Необхідно встановити, які ознаки при цьому братимуть до уваги, які кількісні і якісні характеристики об'єктів слід оцінити.

На другому етапі використовують різні методи збирання даних: спостереження, порівняння, усне і письмове анкетування, систематизація даних.

На третьому етапі (частково на другому) результати статистичних досліджень піддають обробці і оформляють у вигляді таблиць, діаграм, графіків. За результатами виконаної роботи роблять певні висновки.

Статистичні висновки роблять від окремих властивостей вибірок до часткових властивостей сукупності; описання властивостей, як вибірок, так і сукупностей, здійснюється за допомогою методів описової статистики.

Описова статистика включає в себе табулювання (складання таблиць), подання і описання сукупності даних. Ці дані можуть бути або кількісними, як наприклад, вимірювання зросту і ваги людини, або якісними, наприклад, вивчення певних явищ, в яких принципове значення має стать.

Статистичні таблиці

Статистичні таблиці мають **підмет** і **присудок**.

Статистичний підмет – це та сукупність, про яку йдеться в таблиці. Як правило, розміщується в лівій частині таблиці.

Статистичний присудок – це ті ознаки або показники, які характеризують статистичний підмет. Розміщується в заголовках граф-стовпців.

За структурою підмета статистичні таблиці поділяються на прості, групові і комбінаційні.

Прості – підмет як перелік окремих об'єктів (назви підприємств, міст, республік, країн і т. п.).

Групові – в підметі одиниці сукупності групуються за однією якоюсь ознакою.

Комбінаційні – в підметі одиниці групуються зі двома і більше ознаками, пов'язаними між собою.

Наведемо приклади таблиць.

Оптимальна вологість грунтів

Грунт	Вологість, %
Піщаний	8–12
Супіщаний	9–15
Пилуватий	16–22
Суглинковий	12–15
Важкий суглинковий	16–20
Глинистий	19–23

Зміни в пам'яті, увазі, швидкості реакції за день*

	Випробування, %		Різниця, %
	вранішні	вечірні	
Пам'ять	100	79,3	-20,7
Обсяг уваги	100	72,7	-27,3
Швидкість реакції	100	83,4	-16,6
Помилки	100	111,1	-11,1

* Дослідження проводилися зі студентами коледжу від 7.30 до 8 год ранку до того, як студенти починали свою роботу, а потім увечері від 23.30 до 24 год.

Залежність рівня автоматизації та освітньої структури персоналу, що обслуговує автоматизоване обладнання, % загальної кількості

Кількість років освіти персоналу	Контроль, здійснювальний персоналом	Напівавтоматичний контроль	Автоматичний контроль зворотного зв'язку	Логічний контроль за допомогою системи зворотного зв'язку
Менше за 8	10	16	5	1
8–11	40	40	25	6
12	35	32	37	24
Більше за 12	15	12	33	69
	100	100	100	100

Якщо групування здійснено за інтервалами зміни ознаки, то таке групування називають інтервальним.

Наприклад, вибіркове вимірювання врожайності жита на площі 1200 га дало результати, які ми подаємо за допомогою інтервального групування:

Врожайність, ц/га	21–23	23–25	25–27	27–29	31–33	33–35	Всього
Площа, га	100	150	250	300	250	150	1200

Подавши результат групування рядом варіант або інтервалів варіації, розміщених у зростаючому порядку, і рядом відповідних частот, дістанемо варіаційний ряд (відповідно дискретний або інтервальний).

Частотою значення ознаки або інтервала називають кількість членів сукупності з деякою варіантою або відповідно кількість членів сукупності, варіанти яких лежать у даному інтервалі. У випадку статистичного розподілу абітурієнтів частота результату 10 балів дорівнює 6, а 14 балів – 3.

У випадку визначення врожайності жита частота врожайності 23–25 ц/га дорівнює 150, а 31–33 ц/га – 250.

Для наочного представлення статистичного розподілу користуються графічним зображенням варіаційних рядів – діаграмами, графіками, полігоном, гістограмою та ін. Діаграми і графіки вам відомі. Розглянемо інші види графічного зображення.

Гістограма – це послідовність стовпців, кожний з яких спирається на один розрядний інтервал, а висота його відображає кількість випадків або частот в цьому розряді. Прийнято поширювати шкалу на один розрядний інтервал вправо і вліво від розглядуваного діапазону, що розглядається.

Ряди розподілу. Наочне представлення статистичного розподілу

Рядом розподілу називають ряд чисел, які характеризують розподіл одиниць досліджуваної сукупності. Ряд чисел, які характеризують розподіл одиниць досліджуваної сукупності залежно від величини ознаки, називається **варіаційним рядом**.

Нехай у даній статистичній сукупності вивчається деяка ознака, яка, взагалі кажучи, змінюється при переході від одного члена статистичної сукупності до іншого. Зміну цієї ознаки називають варіацією, а значення ознаки у даного члена статистичної сукупності – його варіантою.

Якщо здійснити групування варіант за окремими значеннями ознаки, матимемо дискретне групування (дискретний від латинського discretus — роздільний, перервний).

Наприклад, можна скласти дискретний варіаційний ряд за кількістю балів, отриманих абітурієнтами на приймальних іспитах.

Нехай 35 абітурієнтів дістали на трьох екзаменах таку кількість балів: 10, 10, 11, 9, 15, 12/9, 12, 13, 9, 8, 11, 14, 13, 12, 9, 10, 14, 10, 7, 8, 7, 9, 11, 15, 12, 7, 10, 7, 7, 8, 13, 13, 14, 10.

Побудуємо статистичний розподіл цих даних:

Кількість балів	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кількість абітурієнтів	5	3	5	6	3	4	4	3	2

Побудову гістограми для графічного зображення інтервального варіаційного ряду здійснюють так. На осі абсцис відкладають інтервали значень ознаки і на кожному з них, як на основі, будують прямокутник з висотою, пропорційною частоті інтервалу.

Розраховано, що кількість інтервалів має бути не менша від 8–10 і не більша від 20–25 при об'ємі статистичної сукупності $n \geq 50$. У випадку дискретного розподілу на осі абсцис відкладають окремі значення ознаки.

Звичайно вибирають шкали так, щоб ширина гістограми складала близько одної і двох третин її висоти, тобто щоб відношення висоти до ширини було приблизно 3:5. Середина стовпчика суміщається з серединою інтервалу розряду.

На практиці прийнято зображувати гістограму у формі контуру, а не окремими стовпцями.

Побудова полігона розподілу нагадує побудову гістограми. В гістограмі кожний стовпчик закінчується горизонтальною лінією, причому на висоті, що відповідає частоті в цьому розряді. А в полігоні він закінчується точкою над серединою свого розрядного інтервалу на такій самій висоті.

Для побудови полігона варіаційного ряду на осі абсцис прямокутної системи координат відкладають інтервали значень ознаки і в серединах інтервалів ставлять перпендикуляри, довжини яких пропорційні відповідним частотам. Потім кінці сусідніх перпендикулярів сполучають відрізками прямих, а кінці крайніх перпендикулярів сполучають з серединами сусідніх інтервалів, частоти яких дорівнюють нулю. У результаті дістають замкнуту фігуру у вигляді многокутника, яку називають полігоном.

Приклад. За даними результатів випробувань міцності ниток побудуйте гістограму і полігон:

Міцність нитки, x	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220	220–240	240-260	260-280
Кількість ниток, m	1	4	10	14	12	6	2	1

Відкладаємо значення ознаки на осі абсцис, а частоти – на осі ординат (масштаб на обох осях вибираємо довільно). На відрізках осі абсцис, які відповідають побудованим інтервалам, будуємо прямокутники і дістаємо гістограму (рис. 142).

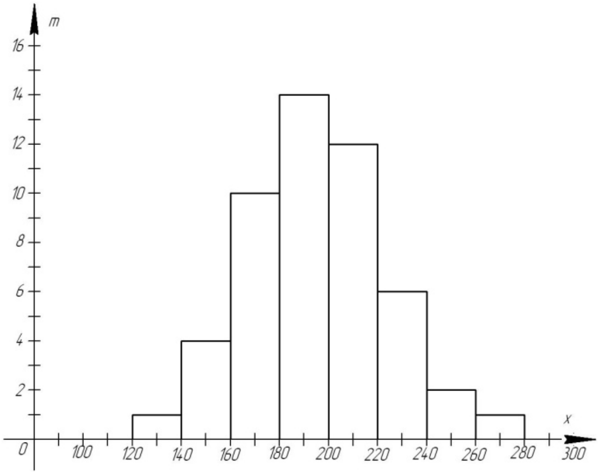


Рис. 142

Щоб побудувати полігон, даний інтервальний ряд перетворимо в дискретний, обчисливши значення ознаки, що припадає на середину:

Міцність нитки, *x*	130	150	170	190	210	230	250	270
Кількість ниток, *m*	1	4	10	14	12	6	2	1

Будуємо точки, координатами яких є пари чисел з дискретного варіаційного ряду (130; 1) (150; 4) і т.п. Сполучивши утворені точки відрізками прямої, а крайні точки (130; 1) і (270; 1) – з серединами найближчих інтервалів (110; 0) і (290; 0), дістанемо полігон (рис. 143).

Часом замість гістограми чи полігона будують зглажену криву, яка проводиться за точками настільки близько, наскільки це можливо.

Гістограма – найлегша для сприймання форма, тому їй надають перевагу, коли зображують не більше одного розподілу. Але якщо треба порівняти два або більше розподілів, то для цього краще підходять полігони частот, бо їх можна накласти один на одного при меншому перетині ліній.

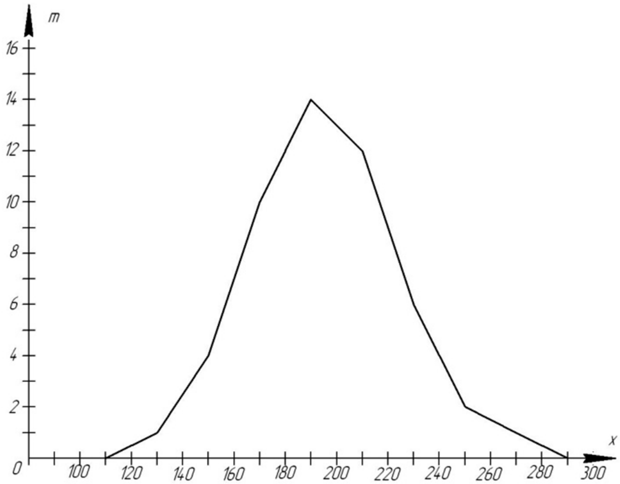


Рис. 143

Мода і медіана. Середні значення. Завдання математичної статистики

1. Мода і медіана. Ми вже бачили, що властивості сукупності даних можна подати у формі таблиць і графіків. Розглянемо деякі інші способи оцінки даних за розподілом частот. Їх метою є, як прийнято говорити в статистиці, виявлення міри центральної тенденції (центрального положення).

Найпростіше знайти міру центральної тенденції за допомогою моди (від латинського *modus* – міра, правило).

Мода – це значення ознаки, яке зустрічається найчастіше в даному ряді розподілу.

Для дискретних варіаційних рядів мода визначається як значення ознаки з найбільшою частотою. Наприклад, якщо в універмазі протягом дня продано 200 дитячих костюмчиків – 38 штук 22 розміру, 42 штуки 24 розміру, 56 штук 26 розміру, 18 штук 28 розміру, 33 штуки 30 розміру і 13 штук 32 розміру, то модальним номером є 26-й, бо він має найбільшу чисельність.

Проте не кожна сукупність значень має єдину моду в строгому розумінні цього означення. В сукупності значень (3,5,5,7,8,8,8,9) модою є число 8, бо воно зустрічається частіше за будь-яке інше значення.

У випадку, коли всі значення в групі зустрічаються однаково часто, вважають, що група оцінок не має моди. Наприклад, у групі (1,2; 1,2; 1,7; 1,7; 4,8; 4,8) моди немає.

Якщо два сусідніх значення мають однакову частоту і вона більша від частоти будь-якого іншого значення, мода є середнє цих двох значень. Наприклад, мода групи значень (1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5) дорівнює 3,5 ((3 + 4) : 2). Якщо два несуміжних значення в групі мають рівні частоти і вони більші від частот будь-якого значення, то існує дві моди. Наприклад, у групі значень (7, 10, 10, 10, 11, 13, 14, 14, 14, 15) модами є 10 і 14.

Мода використовується, зокрема, у практиці торговельної статистики під час визначення купівельного попиту на товари, рівня цін на ринках тощо.

Приклад. Білила цинкові найчастіше використовують художники в масляному живопису, тому білу фарбу можна вважати модою сукупності фарб, що зустрічаються на палітрі. Цей факт враховують виробники фарб: білил цинкових випускають більше, ніж фарб інших кольорів.

Медіана – середня величина змінюваної ознаки, яка міститься в середині ряду, розміщеного в порядку зростання або спадання значень ознаки. Отже, медіана – це значення змінюваної ознаки, яке ділить множину даних навпіл, так що одна половина значень більша від медіани, а друга – менша.

Якщо дані містять непарне число різних значень, наприклад 9, 11, 15, 18, 20, то медіана є середнім значенням для випадку, коли вони впорядковані, тобто медіана дорівнює 15. Якщо дані містять парне число різних випадків, наприклад 7, 11, 13, 15, то медіана дорівнює середньому між двома центральними значеннями, якщо вони впорядковані, тобто (11 + 13) : 2 = 12.

Приклад 1.

1. Знайти медіану сукупності даних:

а) 12, 2, 9, 11, 15, 24, 10; б)18, 43, 24, 17, 21, 26.

Розв'язання.

а) Розмістимо дані сукупності в порядку зростання: 2, 9, 10, 11, 12, 15, 24;

$n = 7$ – непарне число, $Me = 11$.

б) Розмістимо дані в порядку зростання:

17, 18, 21, 24, 26, 43; $\quad Me = \dfrac{21+24}{2} = \dfrac{45}{2} = 22{,}5$

$n = 6$ – парне число.

Приклад 2. Результати контрольної роботи за матеріалом розподілу дано в таблиці:

Оцінка, бал	5	4	3	2	Всього
Частота	11	9	2	20	42

Як можна оцінити якість знань учнів з цього розділу?

Розв'язання. Медіана ділить усі оцінки навпіл. Двадцять перший член дорівнює 3, двадцять другий член дорівнює 3. Медіана дорівнює $\dfrac{3+3}{2} = 3$. Бачимо, що з 42 оцінок 21 не перевищує 3, отже, половина оцінок складається з 2 і 3, що свідчить про незадовільну якість знань.

Середні значення

Статистика оперує такими середніми значеннями: середнє арифметичне, середнє квадратичне, середнє геометричне.

Середне арифметичне. Нехай ми маємо n об'єктів, у $\bar{x}$ яких виміряно деяку характеристику, що має значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Середнім значенням (або середнім арифметичним) називається таке число $\bar{x}$, яке одержують діленням суми всіх даних вибірки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ на число цих даних n.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \text{ або } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Приклад 1. Протягом перших п'яти днів березня температура повітря, вимірювана о 8 год ранку, становила 3°, 5°, 4°, 1°, 2°. Знайти середню температуру за ці дні.

Маємо: $\dfrac{3^\circ + 5^\circ + 4^\circ + 1^\circ + 2^\circ}{5} = \dfrac{15^\circ}{5} = 3^\circ$

Приклад 2. З двох учнів треба вибрати одного в баскетбольну команду. Відомі кількості їхніх влучень м'яча в корзину на кожні десять кидків під час тренувань:

Номер тренувань	1	2	3	4	5
Кількість влучень	*Перший учень*				
	4	3	5	3	6
	Другий учень				
	5	4	3	6	5

Розв'язання. Знаходимо середню кількість влучень.

Для першого учня: $\frac{4+3+5+3+6}{5}=\frac{24}{5}=4,2$

Для другого учня: $\frac{5+4+3+6+5}{5}=\frac{23}{5}=4,6$

Отже, в команду слід узяти другого учня.

Розглянемо деякі *властивості середнього арифметичного.*

1) Знайдемо відхилення l кожного значення x_i від середнього $\bar{x}$. Різниця x-$\bar{x}$ може бути від'ємною або додатною. Сума всіх n відхилень дорівнює нулю. Проілюструємо цю властивість на прикладі.

Вихідні дані: (0; 0; 1; 1; 3; 3; 3; 5); n=8; $\bar{x}=2$.

Значення	Середнє арифметичне	Відхилення
0	2	-2
0	2	-2
1	2	-1
1	2	-1
3	2	1
3	2	1
3	2	1
5	2	3
Сума відхилень		0

2) Якщо до кожного результату спостережень додати деяке число c (константу), то середнє арифметичне $\bar{x}$ перетвориться в $\bar{x}$+c. Візьмемо, наприклад, попередні 8 значень і додамо до кожного з них по 5. Одержимо числа 5;5;6;6;8;8;8;10, середнє арифметичне яких (5+5+6+6+8+8+8+10):8=7. Середнє на 5 одиниць більше.

3) Якщо кожне значення сукупності з середнім $\bar{x}$ помножити на константу *c,* то середнє арифметичне стане c$\bar{x}$. Перевірте властивість, використовуючи попередні дані.

Якщо величини деяких даних повторюються, то середнє арифметичне визначають за формулою

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\text{, де } f_i \text{ – частота повторення результату } x_i .$$

Приклад 3. Протягом двадцяти днів серпня температура повітря вранці була такою: 17^o, 18^o, 19^o, 20^o, 18^o, 18^o, 18^o, 19^o, 19^o, 20^o, 20^o, 19^o, 19^o, 19^o, 20^o, 19^o, 18^o, 17^o, 16^o, 19^o. Знайти середню температуру за цими даними.

Тут окремі значення (17^o, 18^o, 19^o, 20^o) повторюються.

Середня температура дорівнює:

$$\bar{x}=\frac{16^\circ\cdot 1+17^\circ\cdot 2+18^\circ\cdot 5+19^\circ\cdot 8+20^\circ\cdot 4}{1+2+5+8+4}=\frac{372^\circ}{20}=18{,}6^\circ$$

Подаємо запис обчислення середнього арифметичного при повторенні деяких даних у вигляді таблиці

Таблиця 34

Вихідні дані	x_i	Частота f_i	$x_i f_i$	Остаточне обчислення
2, 6, 10,	2	2	4	$\bar{x}=\frac{\sum_{i=n}^{11} x_1 f_1}{n}=\frac{188}{24}\approx 7{,}83$ де i=1, 2, 3,…11
2, 6, 10,	3	1	3	
3, 6, 11,	4	3	12	
4, 6, 12,	5	2	10	
4, 8, 12,	6	4	24	
4, 9, 15,	8	1	8	
5, 9, 15,	9	3	27	
5, 9, 15.	10	2	20	
	11	1	11	
	12	2	24	
	15	3	45	
	$n=\sum_{i=1}^{11} f_1 = 24$		188	

Приклад 4. За контрольну роботу учні одержали такі оцінки:

Оцінки (бали)	5	4	3	2
Кількість учнів	6	7	4	17

Визначити, чи достатньо засвоєний матеріал?

Знайдемо середнє значення оцінок.

$$\bar{x} = \frac{5 \quad 6 + 4 \quad 7 + 3 \quad 4 + 2 \quad 17}{6 + 7 + 4 + 17} = \frac{104}{34} = 3{,}0$$

Ця оцінка є задовільною. Але частота оцінки “2” (мода) дуже висока, вона дорівнює 17. Отже, матеріал засвоєний учнями недостатньо.

Середнє квадратичне відхилення. Ми вже встановили, що сума відхилень даних від середнього значення дорівнює нулю. Тому, якби ми вирішили шукати середній показник відхилень, то він також дорівнював би нулю. В статистиці користуються іншим показником – середнім квадратичним відхиленням, який знаходять так: усі відхилення підносять до квадрата; знаходять середнє арифметичне цих квадратів; із знайденого середнього арифметичного добувають квадратний корінь. Середнє квадратичне відхилення позначають грецькою буквою y (сигма мала);

$$y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_1 \quad \bar{x})^2}{n}}$$

Знаходження середнього квадратичного відхилення подано в таблиці:

Значення x_1	Середнє арифметичне $\bar{x}$	Відхилення $x_i - \bar{x}$	Квадрат відхилення $(x_i - \bar{x})^2$	Середнє квадратичне відхилення
5		-7	49	
8		-4	16	
10		-2	4	$y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} (x_i \quad \bar{x})^2}{n}} =$
12	$\bar{x} = \frac{72}{6} = 12$	0	0	
17		5	25	
20		8	64	$= \sqrt{\frac{158}{6}} \approx \sqrt{26{,}3} \approx 5{,}13$
$\sum_{i=1}^{6} x_i = 72$		$\sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x}) = 0$	$\sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})^2 = 158$	

У статистиці користуються також величиною y^2 (квадрат середнього квадратичного відхилення), яку називають ***дисперсією.***

Середнє геометричне n додатних чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ визначається виразом $m_c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, тобто середнє геометричне $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ є корінь n-го степеня з добутку всіх x_i (i=1, 2, …n).

У випадку двох чисел a і b середнє геометричне називають середнім пропорційним цих чисел. З рівності $m_c^2=ab$ випливає, що $a:m_c=m_c:b$.

На практиці окремим особам, організаціям, керівникам підприємств доводиться розв'язувати різноманітні задачі, пов'язані з використанням поняття моди, медіани, середнього. Наприклад, яких розмірів дитячого взуття слід випускати більше, ніж інших; на якому з міських маршрутів треба пустити автобусів більше, ніж на решті; якого розміру спортивних костюмів слід виготовити найбільше для учнів 10–11 класів тощо.

Розглянуті моду, медіану і середні значення називають ***мірами центральної тенденції.***

Завдання математичної статистики

Завдання математичної статистики полягає в тому, щоб на основі деяких властивостей сукупності елементів, узятих з генеральної сукупності, зробити певні висновки про властивості всієї генеральної сукупності.

Теорія статистичного виведення – це формалізована система методів розв'язування задач, що характеризуються намаганням вивести властивості великого масиву даних обстеженням вибірки. Завдання статистичного виведення полягає в тому, щоб передбачити властивості всієї сукупності, знаючи властивості вибірки з цієї сукупності. Ця теорія безпосередньо базується на теорії ймовірностей.

У генеральній сукупності нас здебільшого цікавить деяка ознака, обумовлена випадковістю, яка може мати якісний або кількісний характер.

Приклад 1. Нехай автомат виготовляє вали. Їх сукупність, виготовлена за певних незмінних умов, утворює генеральну сукупність. Якщо ознакою, яка нас цікавить, є діаметр, то ця ознака має кількісний характер.

Приклад 2. Завод випускає електричні лампи. Їх сукупність, виготовлена за певних незмінних умов, є генеральною сукупністю. Якщо нас цікавить здатність лампи функціонувати чи ні, то це якісна ознака.

Параметр певної генеральної сукупності може виражатися деякою випадковою величиною *X*. У першому (кількісному) випадку *X* є самою ознакою; для якісної ознаки, наприклад, типу "хороший – поганий", можна означити так:

$$X = \begin{cases} 0\,, \textit{якщо "хороший"} \\ 1\,, \textit{якщо "поганий"} \end{cases}$$

Випадковою вибіркою об'єму *n* називають вибір об'єктів з генеральної сукупності, причому вибір окремих об'єктів здійснюється незалежно один від одного. Результатом випадкової вибірки об'єму *n* є сукупність $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ значень ознаки. Наприклад, сукупність (0, 0, 1, 0, 0, 0,1, 0, 0, 0) є вибіркою об'єму 10 з партії електричних ламп. Тут вісім якісних і 2 бракованих лампи.

Вибіркове спостереження застосовується для контролю за якістю продукції, використанням основних фондів, використанням робочого дня, вивчення добробуту населення, його купівельної спроможності тощо. В окремих випадках можливе виключно вибіркове спостереження. Наприклад, здійснюючи контроль за якістю фотопаперу, не вдаються до засвічування всієї виготовленої продукції, а застосовують вибірковий метод. Аналогічно діють, перевіряючи якість випущених радіоламп, під час перевірки міцності тканини на розрив й інше.

Статистичні методи широко застосовуються в теорії надійності – прикладній дисципліні, що розробляє питання інженерного, економічного і виробничо-організаційного характеру. Теорія надійності, використовуючи апарат теорії ймовірностей і математичної статистики, дає змогу визначити імовірність передчасного виходу з ладу певних технічних виробів, наприклад, телевізорів. Для тривалості безвідмовної роботи дається не єдине число, а розподіл імовірностей, тобто можливих значень та їхніх імовірностей. Наприклад, сучасна японська радіопромисловість дає гарантію на роботу телевізора на 20 років. Це зовсім не означає, що кожний телевізор ці 20 років працюватиме абсолютно безвідмовно, теоретично обгрунтовано заходи, за допомогою яких можна зробити як завгодно малою імовірність передчасного виходу їх з ладу.

Результати вибіркового спостереження досить правильно характеризують усю генеральну сукупність. Але зведені результати у вибірці ніколи не збігаються із зведеними показниками генеральної сукупності.

Різниці між зведеними показниками вибіркової і генеральної сукупності називаються похибками вибірки, або похибками репрезентативності. Повністю уникнути цих похибок не можна, але наблизити їх до нуля можна. Границі похибок визначають на основі теорії імовірностей.

Запитання для самоконтролю

1. Чим займається наука “статистика”?
2. Яка відмінність між описовою і пояснювальною статистикою?
3. Які ви знаєте елементи статистичного методу дослідження?
4. Перелічіть види статистичних спостережень. Охарактеризуйте кожний з них.
5. Поясніть, що таке вибіркове спостереження.
6. Що таке генеральна сукупність? Що таке вибірка?
7. Які ви знаєте способи відбору одиниці сукупності, що вивчається?
8. За яким планом здійснюються статистичні дослідження?
9. Які засоби наочного зображення інформації в статистиці ви знаєте? Як побудувати гістограму і полігон?
10. Що таке мода, медіана? Як їх визначають?
11. Які види середніх значень величини застосовують у статистиці?
12. На власному прикладі поясніть, що таке середнє арифметичне даних чисел.
13. Запишіть формулу середнього геометричного даних чисел.
14. Запишіть формулу середнього квадратичного даних чисел.
15. Що таке варіаційний ряд?
16. Які види статистичних таблиць ви знаєте?

17. Наведіть приклади застосування вибіркових спостережень.

18. Яка умова є обов'язковою для організації вибіркового спостереження?

19. У чому полягає основне завдання математичної статистики?

20. Якого характеру ознаки, обумовлені випадковістю, досліджуються в генеральній сукупності?

21. Поясніть, як можна дістати перше уявлення про розподіл спостережуваних значень певної величини з генеральної сукупності (за кількісною ознакою).

Література

1. Бугір М.К. Математика для економістів. – Тернопіль, 1998.

2. Богомолов М.В. Практичні заняття з математики. – К.: Вища школа, 1985.

3. Бачишин Б.Д. Автоматизація землевпорядного виробництва. Методичні вказівки. – Рівне: РДТУ, 2000.

4. Валуце І.І. Математика для технікумів. – М: Наука, 1990.

5. Гурман В.Є. Теорія ймовірності й математична статистика. – М: Вища школа, 2003.

6. Гошицький В.М. Збірник задач з техніки землевпорядного проектування: посібник для студентів вищих навчальних закладів по підготовці молодших спеціалістів із спеціальності "Землевпорядкування". – Боярка, 1995.

7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2004. – 230 с.

8. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2004. – 648 с.

9. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Академія, 2003. – 624 с.

10. Зайцев І.Л. Елементи вищої математики. – К.: Вища школа, 1999. – 220 с.

11. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003. – 540 с.

12. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Короткий курс вищої математики. – М.: Наука. 1975.

13. Литвин І.І., Конончук О.М., Железняк Г.О. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. – 366 с.

14. Літнарович В.М. Основи вищої геодезії. – Л., 1996.

15. Мінорський В.П. Збірник задач по вищій математиці. – М.: Наука, 1997.

16. Піскунов Н.С. Диференціальне числення. – Т.1,2. – М.: Наука.

17. Соколенко О.І. Вища математика: підручник. – К.: Видавничий центр "Академія", 2002. – 380 с.

18. Гадєєв О.А. Теорія математичної обробки геодезичних вимірювань: методичні вказівки. – Рівне: РДТУ, 1990.

19. Шипачев В.С. Вища математика. – М.: Вища школа, 1990.

20. Алгебра і початки аналізу. – В 2-х ч. /Під ред. Яковлева Г.М. – К.: Вища школа, 1984,

21. Казановський В.І., Мельник Н.М., Африканова А.Г. Вища математика: конспект лекцій, 2003.

Навчальне видання

Казановський Віталій Іванович
Африканова Алла Григорівна
Виштакалюк Наталія Анатоліївна
Дрозденко Олександр Левкович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Українською мовою

Редактор *Н. Цибенко*
Комп'ютерна верстка *О. Давиденко*
Дизайнер *М. Цендревич*

Підписано до друку 16.01.2014 р.
Умов. друк. арк. 16,7
Наклад 1000 прим. Зам. № 2

Видавництво "Аграрна освіта"
Технікумівська, 1, смт Немішаєве
Бородянського Київської
т/ф (04577) 41-2-69

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єкта видавничої справи ДК № 1310